

Funkcja kwadratowa

5

Umiejętności

Po szkole podstawowej uczeń:

- znajduje współrzędne danych (na rysunku) punktów kratowych w układzie współrzędnych na płaszczyźnie,
- rysuje w układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty kratowe o danych współrzędnych całkowitych (dowolnego znaku),
- interpretuje dane przedstawione za pomocą wykresów w układzie współrzędnych,
- tworzy wykresy liniowe na podstawie danych zebranych samodzielnie lub pochodzących z różnych źródeł.

Po tym dziale uczeń:

- rysuje wykres funkcji $f(x) = ax^2$ i podaje jej własności,
- interpretuje współczynnik a funkcji $y = ax^2$,
- interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej i ogólnej,
- rysuje wykres funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej,
- określa własności (zbiór wartości, przedziały monotoniczności, wartość ekstremalną) funkcji kwadratowej na podstawie jej postaci kanonicznej,
- podaje wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej lub ogólnej na podstawie informacji o jej wykresie,
- przekształca wzór funkcji kwadratowej z postaci kanonicznej do postaci ogólnej i odwrotnie,
- oblicza współrzędne wierzchołka paraboli.

Uwagi metodyczne

Omawiając własności funkcji $y = ax^2$, konieczne zwróćmy uwagę na to, że jej dziedziną jest zbiór $\mathbf{R}$, zatem **każda** pionowa prosta przecina parabolę w jednym punkcie. Powinno to zapobiec takiemu rysowaniu paraboli, jak gdyby miała ona asymptoty pionowe (częsty błąd w zeszytach uczniów).

W podręczniku ograniczamy się do odczytania przedziałów monotoniczności na podstawie wykresu. W zdolniejszych klasach warto tę monotoniczność wykazać (np. w formie zamieszczonego niżej twierdzenia).

Twierdzenie

Funkcja $f(x) = ax^2$ dla $a > 0$ jest rosnąca w przedziale $(0; \infty)$ i malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$.

Dowód

Zakładamy, że $x_1 > x_2 \geq 0$ i sprawdzamy znak różnicy $f(x_1) - f(x_2)$: $f(x_1) - f(x_2) = ax_1^2 - ax_2^2 = a(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$. Jeżeli $a > 0$, to mamy iloczyn trzech dodatnich czynników, zatem $f(x_1) - f(x_2) > 0$, więc dla $x \geq 0$ funkcja jest rosnąca.

W podobny sposób pokazujemy, że dla $x \leq 0$ funkcja (przy $a > 0$) jest malejąca.

Bez względu na to, czy formalny dowód monotoniczności tej funkcji zostanie, czy nie zostanie w klasie przeprowadzony, warto poprosić uczniów o uzasadnienie, dlaczego omawiana funkcja nie jest monotoniczna w zbiorze $\mathbf{R}$. Jest to dobry moment na:

1. pokazanie (intuicyjnie) różnicy między kwantyfikatorami ogólnym i szczegółowym,
2. zastosowanie kontrprzykładów.

1. Funkcja kwadratowa

$f(x) = ax^2$

Umiejętności:

- interpretowanie współczynnika a występującego we wzorze funkcji
- szkicowanie wykresów i określanie własności funkcji $f(x) = ax^2$

W poprzednim rozdziale omawialiśmy własności funkcji $f(x) = ax + b$, $x \in \mathbf{R}$. Jej wykresem jest prosta. Teraz zajmiemy się badaniem funkcji o wzorze $f(x) = ax^2$, gdzie $x \in \mathbf{R}$. Współczynnik a jest ustaloną, różną od zera liczbą rzeczywistą.

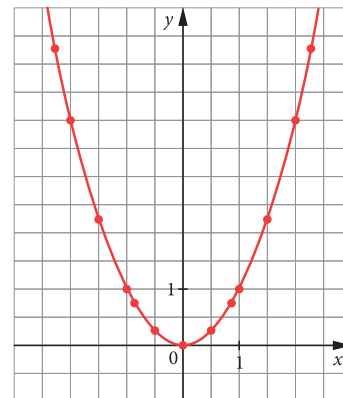
Zacznijmy od rozważenia sytuacji, gdy $a > 0$. Ułożymy częściową tabelę i naszkicujemy wykres takiej funkcji dla $a = 1$. Wówczas $f(x) = x^2$.

x	$-2\frac{1}{3}$	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{3}$
$f(x) = x^2$	$5\frac{4}{9}$	4	$2\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{16}$	1	$2\frac{1}{4}$	4	$5\frac{4}{9}$

Punkty o współrzędnych zapisanych w tabeli należą do krzywej przedstawionej na poniższym rysunku. Można wykazać, że ta krzywa – nazywana **parabolą** – jest wykresem funkcji $f(x) = x^2$.

Z wykresu odczytujemy własności funkcji f :

- zbiorem wartości jest przedział $\langle 0; \infty \rangle$,
- funkcja przyjmuje wartość najmniejszą równą 0 dla $x = 0$ i nie przyjmuje wartości największej,
- miejscem zerowym jest $x = 0$,
- $f(x) > 0$ dla $x \neq 0$, więc wykres znajduje się w I oraz II ćwiartce układu współrzędnych,
- w przedziale $(-\infty; 0)$ funkcja jest malejąca, w przedziale $(0; \infty)$ funkcja jest rosnąca, zatem funkcja nie jest monotoniczna,
- oś symetrii wykresu jest oś y ,
- równanie $f(x) = m$:
dla $m < 0$ nie ma rozwiązań,
dla $m = 0$ ma jedno rozwiązanie,
dla $m > 0$ ma dwa rozwiązania.



ZZ i MKP

temat 7.1

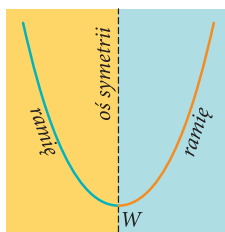
Multiteka

- Postać ogólna funkcji kwadratowej
- Wykres funkcji kwadratowej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.1

Parabola o równaniu $y = x^2$ jest wykresem funkcji $f(x) = x^2$. W dalszych rozważaniach nie będziemy na ogół tych zapisów rozróżniać.

W paraboli wyróżniamy dwa **ramiona** oraz **wierzchołek**, czyli punkt przecięcia paraboli z jej osią symetrii (na rysunku oznaczony literą W).

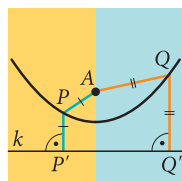


Parabola jest w geometrii definiowana jako zbiór punktów równo oddalonych od pewnego punktu A – nazywanego **ogniskiem**, i od pewnej prostej k – nazywanej **kierownicą** paraboli (zakładamy, że punkt A nie należy do prostej k).

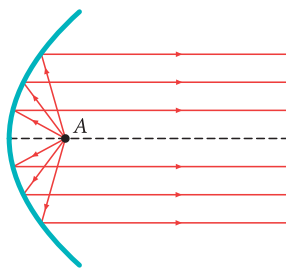
$|PA| = |PP'|$ dla każdego punktu P leżącego na paraboli.

Dla wykresu funkcji $f(x) = x^2$ ogniskiem jest punkt $\left(0, \frac{1}{4}\right)$,

a kierownicą – prosta $y = -\frac{1}{4}$.



Każdy promień świetlny wychodzący z ogniska paraboli po odbiciu się od niej jest równoległy do osi symetrii paraboli.



Zjawisko odbicia wykorzystywane jest np. w parabolicznym reflektorze lustrzanym – żarówka umieszczona jest w jego ognisku.



Anteny satelitarne wykorzystują natomiast zjawisko odwrotne – w jednym punkcie skupiają biegnące równoległe fale radiowe.



Uwagi metodyczne

Własności ogniskowe paraboli można zademonstrować za pomocą samochodowego reflektora i żarówki umieszczonej w różnych punktach albo latarki z różnymi ustawieniami świecenia. Pamiętajmy jednak, że parabolą jest przekrój osiowy takiego modelu – paraboloidy.

Łatwo można sprawdzić (jest to zadanie wykraczające poza program), że każdy punkt paraboli $y = x^2$ jest tak samo oddalony od ogniska, $A = \left(0, \frac{1}{4}\right)$, i od kierownicy, $k: y = -\frac{1}{4}$.

Zaczynamy od starannego wykonania rysunku paraboli (patrz rys. 1 poniżej) i zaznaczenia na nim kilku punktów, np. dla $P_1 = (1, 1)$ mamy:

$$|P_1 A| = \sqrt{(1-0)^2 + \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2} = \frac{5}{4},$$

a odległość punktu P_1 od prostej k jest równa $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$;

dla $P_2 = (-2, 4)$: $|P_2 A| =$

$$= \sqrt{(-2)^2 + \left(4 - \frac{1}{4}\right)^2} = \frac{17}{4} = 4\frac{1}{4},$$

a odległość punktu P_2 od prostej k jest równa $4 + \frac{1}{4} = 4\frac{1}{4}$ itd.

Mniej zaawansowanych uczniów można poprosić o sprawdzenie (w kilku grupach) jeszcze innych punktów paraboli, a pozostałym zaproponować próbę udowodnienia podanej własności.

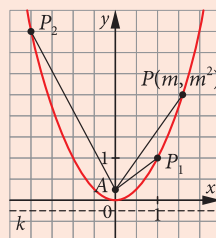
Zaczynamy od określenia współrzędnych punktu leżącego na paraboli, np. $P = (m, m^2)$.

$$\text{Odległość } |PA| = \sqrt{m^2 + \left(m^2 - \frac{1}{4}\right)^2} =$$

$= m^2 + \frac{1}{4}$, odległość punktu P od prostej k jest równa $m^2 + \frac{1}{4}$ (w tym

przypadku nie jest potrzebny wzór na odległość punktu od prostej, bo można skorzystać z rysunku), zatem każdy punkt paraboli ma żadaną własność.

Trzeba uczniom wyjaśnić, że żaden inny punkt płaszczyzny takiej własności nie ma, a dowód na to radzimy pominąć, bo pojęciowo jest już na tym etapie nauki za trudny.

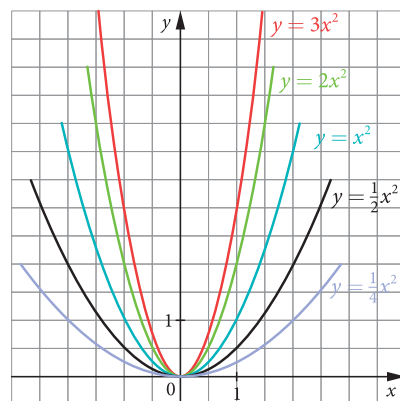


Rys. 1

Narysujmy w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji:

$$y = x^2, \quad y = 2x^2, \quad y = \frac{1}{2}x^2, \quad y = 3x^2, \quad y = \frac{1}{4}x^2$$

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8
$y = \frac{1}{2}x^2$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2
$y = 3x^2$	12	3	0	3	12
$y = \frac{1}{4}x^2$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1



Każda z tych funkcji ma takie same własności (opisane wcześniej) jak funkcja $y = x^2$.

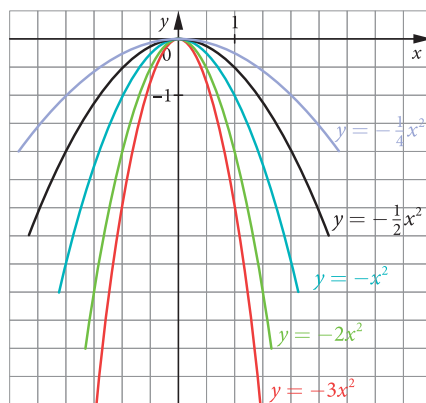
Wniosek ten możemy uogólnić (dowód tego twierdzenia pominiemy) na każdą funkcję postaci $f(x) = ax^2$, o ile $a > 0$.

Wykres funkcji $y = -ax^2$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = ax^2$ względem osi x .

Możemy zatem łatwo narysować wykresy funkcji:

$$y = -x^2, \quad y = -2x^2, \quad y = -\frac{1}{2}x^2, \\ y = -3x^2, \quad y = -\frac{1}{4}x^2$$

Opis własności funkcji $f(x) = ax^2$ dla $a < 0$ pozostawiamy do samodzielnego wykonania.



Wierzchołkiem każdej paraboli o równaniu $y = ax^2$, $a \neq 0$ jest początek układu współrzędnych.

Zamiast precyzyjnego określenia: „parabola o równaniu $y = ax^2$, w którym współczynnik przy x^2 jest dodatni”, powszechnie używany jest zwrot **parabola o ramionach skierowanych do góry** (dla ujemnego współczynnika przy x^2 – w dół).

Przykład 1 ◀ zad. 1.11

Wyznamy taką wartość współczynnika a , aby parabola o równaniu $y = ax^2$ przechodziła przez punkt $P = (-4, 100)$.

Rozwiązanie

Punkt P leży na paraboli, więc jego współrzędne spełniają jej równanie:

$$100 = a(-4)^2$$

$$\text{Zatem } a = \frac{100}{16}.$$

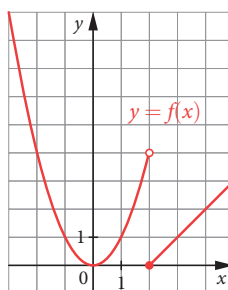
$$\text{Odp.: } a = \frac{25}{4}$$

Przykład 2 ◀ zad. 1.12

Narysujemy wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < 2 \\ x - 2 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$ i na jego podstawie określimy monotoniczność funkcji f .

Rozwiązanie

Funkcja nie jest monotoniczna. W przedziale $(-\infty; 0)$ jest malejąca, w przedziale $(0; 2)$ jest rosnąca oraz w przedziale $(2; \infty)$ jest rosnąca. Zwróćmy uwagę, że funkcja nie jest rosnąca w przedziale $(0; \infty)$.

**Przykład 3** ◀ zad. 1.16

Wykres jest sumą fragmentów paraboli i prostej. Podamy wzór funkcji f przedstawionej na tym wykresie.

Rozwiązanie

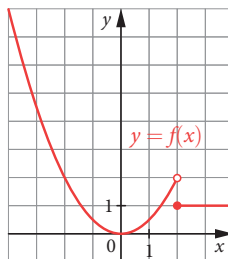
Parabola o równaniu $y = ax^2$, $a \neq 0$ przechodzi przez punkty $(-2, 2)$, $(0, 0)$ i dochodzi do punktu $(2, 2)$. Zatem współczynnik a spełnia równanie:

$$2 = a \cdot 4, \text{ czyli } a = \frac{1}{2}$$

Dla $x \geq 2$ wykresem jest część prostej $y = 1$. Wzór funkcji ma zatem postać:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{dla } x < 2 \\ 1 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{Odp.: } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{dla } x < 2 \\ 1 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$$



◀1.11. Dla jakich wartości współczynnika a do wykresu funkcji $f(x) = ax^2$ należy punkt P ?

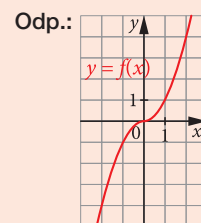
- a) $P = (1, 2)$
b) $P = (2, -4)$
c) $P = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$
d) $P = \left(\frac{2}{3}, 0,36\right)$

Odp.: a) $a = 2$ b) $a = -1$
c) $a = 6$ d) $a = 0,81$

◀1.12. Sporządź wykres funkcji

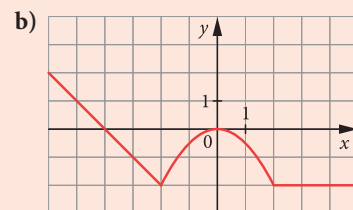
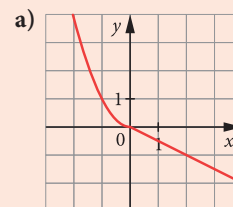
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{dla } x < 0 \\ x^2 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$$

Podaj zbiór wartości funkcji i określ jej monotoniczność.



ZW = $\mathbb{R}$, funkcja rosnąca

◀1.16. Wykres jest sumą fragmentów paraboli i prostych. Podaj wzór funkcji przedstawionej na wykresie.



Odp.:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < 0 \\ -\frac{1}{2}x & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x - 4 & \text{dla } x < -2 \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{dla } -2 \leq x < 2 \\ -2 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$

◀ 1.18. Korzystając z definicji, udowodnij, że funkcja $f(x) = -x^2$ jest malejąca w przedziale $(0; \infty)$.

Odp.: Niech $x_1, x_2 \in (0; \infty)$ i $x_1 < x_2$. Wtedy
 $f(x_1) - f(x_2) = -x_1^2 - (-x_2^2) =$
 $= x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0$,
 bo $x_2 - x_1 > 0$ i $x_2 + x_1 > 0$.
 Zatem $f(x_1) > f(x_2)$, co oznacza, że funkcja f jest malejąca w przedziale $(0; \infty)$.

D

Przykład 4 ◀ zad. 1.18

Korzystając z definicji, udowodnimy, że funkcja $f(x) = -2x^2$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0)$.

Rozwiązanie

Zgodnie z definicją funkcji rosnącej (zob. s. 249) mamy wykazać, że jeśli weźmiemy dwa dowolne argumenty z przedziału $(-\infty; 0)$, to większemu z nich odpowiada większa wartość funkcji.

Założenie

$$f(x) = -2x^2$$

$$x_1, x_2 \in (-\infty; 0)$$

$$x_1 < x_2$$

← tak oznaczamy dwa dowolne argumenty z przedziału $(-\infty; 0)$

← zakładamy, że większy z nich nazywa się x_2

Teza

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Dowód

Aby wykazać, że $f(x_1) < f(x_2)$, wystarczy udowodnić, że $f(x_1) - f(x_2) < 0$.

$$f(x_1) = -2x_1^2, \quad f(x_2) = -2x_2^2$$

$$f(x_1) - f(x_2) = -2x_1^2 - (-2x_2^2) = \quad \leftarrow \text{wylączamy } -2 \text{ przed nawias}$$

$$= -2(x_1^2 - x_2^2) = -2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \quad \leftarrow \text{rozkładamy na czynniki, stosując wzór na różnicę kwadratów}$$

Zapisaliśmy różnicę $f(x_1) - f(x_2)$ w postaci iloczynu trzech czynników, z których:

$$-2 < 0$$

$$x_1 - x_2 < 0, \text{ bo założyliśmy, że } x_1 < x_2$$

$$x_1 + x_2 < 0, \text{ bo obydwie liczby są ujemne } (x_1, x_2 \in (-\infty; 0))$$

Iloczyn trzech ujemnych czynników jest ujemny, zatem $f(x_1) - f(x_2) < 0$, czyli funkcja f jest rosnąca w danym przedziale.

Koniec dowodu

Zadania

W każdym z zadań 1.1–1.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1.1. Wskaż wartość a , dla której punkt $P = (-1, 4 - a)$ należy do wykresu funkcji $y = -2x^2$.

A. $a = -3$

B. $a = -1$

C. $a = 3$

D. $a = 6$

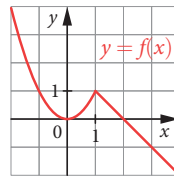
Odpowiedzi i rozwiązania

1.1. D

1.2. Wskaż wzór, który ma funkcja przedstawiona na wykresie.

A. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < 1 \\ x & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$ C. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leq 1 \\ -x + 1 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$

B. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leq 1 \\ -x & \text{dla } x > 1 \end{cases}$ D. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leq 1 \\ 2 - x & \text{dla } x > 1 \end{cases}$



1.2. D

1.3. Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{dla } x \leq 1 \\ x - 2 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$. Wskaż liczbę rozwiązań równania $f(x) = -1$.

1.3. C

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

1.4. Podaj wzór funkcji $y = f(x)$, jeżeli

- a) x jest długością boku kwadratu, a y polem tego kwadratu.
 b) x jest długością boku kwadratu, a y połową pola tego kwadratu.
 c) x jest długością krawędzi sześcianu, a y polem powierzchni tego sześcianu.
 d) x jest długością krawędzi sześcianu, a y potrojonym polem powierzchni tego sześcianu.
 e) x jest promieniem koła, a y polem tego koła.
 f) x jest promieniem koła, a y polem koła o promieniu dwa razy większym.

1.4. a) $y = x^2$

b) $y = \frac{1}{2}x^2$

c) $y = 6x^2$

d) $y = 18x^2$

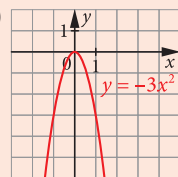
e) $y = \pi x^2$

f) $y = 4\pi x^2$

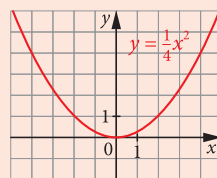
1.5. Narysuj wykres funkcji o podanym wzorze.

a) $f(x) = -3x^2$ c) $f(x) = \frac{3}{2}x^2$ e) $f(x) = -\frac{1}{5}x^2$
 b) $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ d) $f(x) = -\frac{2}{3}x^2$ f) $f(x) = 5x^2$

1.5. a)



b)



1.6. Narysuj wykres funkcji f i odczytaj z wykresu, dla jakich wartości m równanie $f(x) = m$:

I. ma dwa rozwiązania, II. nie ma rozwiązań, III. ma jedno rozwiązanie.

a) $f(x) = 2x^2$ b) $f(x) = \frac{2}{3}x^2$ c) $f(x) = -4x^2$ d) $f(x) = -\frac{4}{3}x^2$

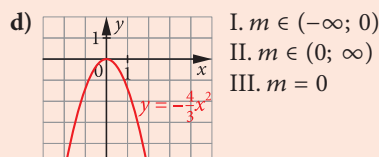
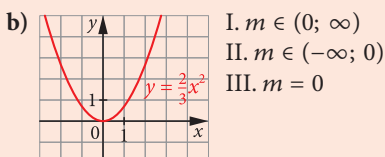
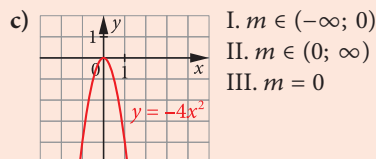
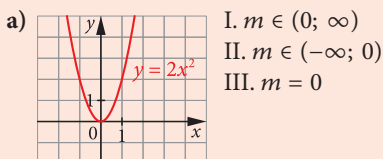
1.7. Wykresy funkcji $y = ax^2$ dla $a \neq 0$ tworzą pewną rodzinę parabol. Wyznacz a tak, aby

- a) wykres przechodził przez punkt $(2, 2)$.
 b) wykres przechodził przez punkt $(3, -9)$.
 c) wykres przechodził przez punkt $(\frac{2}{5}, 0,16)$.
 d) ramiona parabol były skierowane w dół.

1.7. a) $a = \frac{1}{2}$ b) $a = -1$

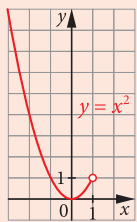
c) $a = 1$ d) $a < 0$

1.6.

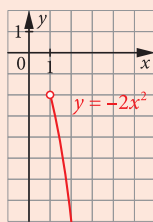


1.8.

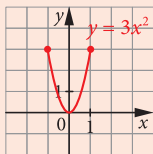
a)



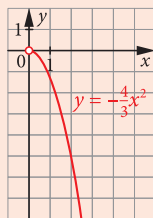
d)



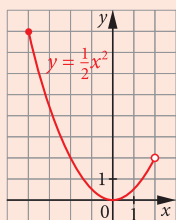
b)



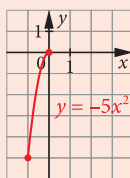
e)



c)



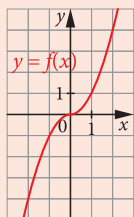
f)



1.9. B, C, D

1.10. a) $m = 5$ b) $m = 1$ c) $m = 1$ d) $m = -1$ 1.11. a) $a = 2$ b) $a = -1$ c) $a = 6$ d) $a = 0,81$

1.12.

ZW = $\mathbb{R}$, funkcja rosnąca1.8. Sporządź wykres funkcji f , której dziedziną jest zbiór D .

a) $f(x) = x^2$

$D = (-\infty; 1)$

d) $f(x) = -2x^2$

$D = (1; \infty)$

b) $f(x) = 3x^2$

$D = \langle -1; 1 \rangle$

e) $f(x) = -\frac{4}{3}x^2$

$D = (0; \infty)$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

$D = \langle -4; 2 \rangle$

f) $f(x) = -5x^2$

$D = \langle -1; 0 \rangle$

1.9. Sprawdź, które z punktów $A = (-1, 3)$, $B = (\sqrt{2}, -4)$, $C = (-\sqrt{3}, -6)$, $D = (2, -8)$ należą do paraboli o równaniu $y = -2x^2$.1.10. Dla jakich wartości m do wykresu funkcji $y = f(x)$ należy punkt P ?

a) $f(x) = 3x^2$

$P = (1, m - 2)$

c) $f(x) = -\frac{2}{3}x^2$

$P = \left(3m - 1, 3\frac{1}{3} - 6m^2\right)$

b) $f(x) = x^2$

$P = (m - 2, m^2)$

d) $y = -\frac{1}{2}x^2$

$P = (-2, 3m + 1)$

1.11. Dla jakich wartości współczynnika a do wykresu funkcji $f(x) = ax^2$ należy punkt P ?

a) $P = (1, 2)$

b) $P = (2, -4)$

c) $P = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

d) $P = \left(\frac{2}{3}, 0,36\right)$

1.12. Sporządź wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{dla } x < 0 \\ x^2 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$.

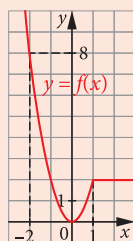
Podaj zbiór wartości funkcji i określ jej monotoniczność.

1.13. Sporządź wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{dla } x < 1 \\ 2 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$.Podaj jej wartość najmniejszą oraz jej wartość największą w przedziale $\langle -2; 1 \rangle$.1.14. Sporządź wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ -2x - 2 & \text{dla } x \in \langle -2; 1 \rangle \\ -4x^2 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$.

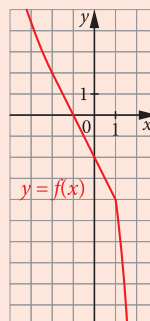
Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości ujemne?

1.15. Sporządź wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{dla } x \in (-\infty; -3) \\ \frac{1}{3}x^2 & \text{dla } x \in \langle -3; 0 \rangle \\ x & \text{dla } x \in (0; \infty) \end{cases}$.Dla jakich wartości m równanie $f(x) = m$ ma dwa rozwiązania?

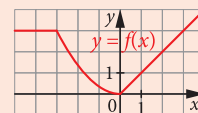
1.13.

wartość największa: 8 dla $x = -2$,
wartość najmniejsza: 0 dla $x = 0$

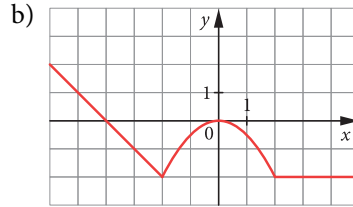
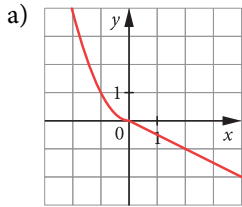
1.14.

 $x > -1$

1.15.

 $m \in (0; 3)$

1.16. Wykres jest sumą fragmentów paraboli i prostych. Podaj wzór funkcji przedstawionej na wykresie.



1.17. Przez które punkty płaszczyzny kartezjańskiej nie przechodzi żadna z parabol $y = ax^2$ ($a \neq 0$)?

D **1.18.** Korzystając z definicji, udowodnij, że funkcja $f(x) = -x^2$ jest malejąca w przedziale $(0; \infty)$.

D **1.19.** Korzystając z definicji, udowodnij, że funkcja $f(x) = 3x^2$ jest malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$.

Prosto do matury



1. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < 0 \\ -x^2 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$.

Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Funkcja f ma jedno miejsce zerowe.
- B. Funkcja f jest malejąca.
- C. Funkcja f jest monotoniczna.

2. Sporządź wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{5}x^2$, której dziedziną jest przedział $(-5; 3)$. Podaj wartość największą i wartość najmniejszą (o ile funkcja je przyjmuje) oraz argumenty, dla których funkcja je przyjmuje.

3. Dla jakich wartości parametru m do wykresu funkcji $f(x) = \frac{5}{2}x^2$ należy punkt $P = \left(m, 2\frac{1}{2}m^2 + m - 2\right)$?

4. Sporządź wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} -2x - 8 & \text{dla } x \leq -2 \\ -x^2 & \text{dla } -2 < x < 1 \\ x - 2 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$

i na jego podstawie odpowiedz, dla jakich wartości m równanie $f(x) = m$ ma trzy rozwiązania.

D **5.** Korzystając z definicji, udowodnij, że funkcja $f(x) = -x^2$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0)$.

5. Niech $x_1, x_2 \in (-\infty; 0)$ i $x_1 < x_2$.

Wtedy $f(x_1) - f(x_2) = -x_1^2 - (-x_2^2) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) < 0$, bo $x_2 - x_1 > 0$ i $x_2 + x_1 < 0$.

Zatem $f(x_1) < f(x_2)$, co oznacza, że funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0)$.

1.16.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < 0 \\ -\frac{1}{2}x & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x - 4 & \text{dla } x < -2 \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{dla } -2 \leq x < 2 \\ -2 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$

1.17. Parabole nie przechodzą przez punkty leżące na osiach układu współrzędnych różne od punktu $(0, 0)$.

1.18. Patrz s. 406.

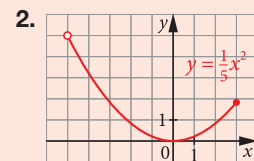
1.19. Niech $x_1, x_2 \in (-\infty; 0)$ i $x_1 < x_2$. Wtedy

$$f(x_1) - f(x_2) = 3x_1^2 - 3x_2^2 = 3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) > 0, \text{ bo } x_1 - x_2 < 0 \text{ i } x_1 + x_2 < 0.$$

Zatem $f(x_1) > f(x_2)$, co oznacza, że funkcja f jest malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$.

Prosto do matury

1. P, P, P



wartość najmniejsza: 0 dla $x = 0$,
brak wartości największej

3. $m = 2$

4. $m = -1$ lub $m = 0$

Uwagi metodyczne

Wcześniej dokładnie omówiliśmy przesuwanie wykresów funkcji (dział 3.), więc bez specjalnego wstępu wykorzystujemy umiejętności uczniów nabyte podczas wprowadzania funkcji kwadratowej $y = x^2$. Jak zwykle zaczynamy od wykresów. Następnie zapisujemy wzór funkcji $f(x) = a(x - p)^2 + q$. Zwracamy uwagę uczniów (nie musimy im tego mówić wprost) na to, że z postaci kanonicznej funkcji kwadratowej można odczytać wszystkie podstawowe własności funkcji kwadratowej, dlatego warto tej postaci poświęcić więcej czasu.

2. Postać kanoniczna funkcji kwadratowej

Umiejętności:

- interpretowanie współczynników występujących we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej
- szkicowanie wykresu funkcji kwadratowej na podstawie jej postaci kanonicznej

Będziemy teraz badać, w jaki sposób zmieniają się:

- położenie wierzchołka paraboli,
- zbiór wartości, liczba miejsc zerowych oraz przedziały monotoniczności funkcji kwadratowej w zależności od przesunięcia jej wykresu.

Przykład 1

Dana jest funkcja $f(x) = 2x^2$. Narysujemy wykres funkcji $g(x) = f(x - 2) - 3$ i opiszemy jej własności.

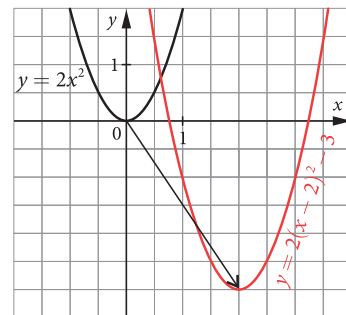
Rozwiązanie

Wykres funkcji g powstaje przez przesunięcie wykresu funkcji f o wektor $[2, -3]$.

Funkcja g jest wyrażona wzorem $g(x) = 2(x - 2)^2 - 3$.

Własności funkcji g :

- $ZW = \langle -3; \infty \rangle$,
- wierzchołkiem paraboli jest punkt $W = (2, -3)$,
- funkcja osiąga wartość najmniejszą równą -3 dla $x = 2$,
- funkcja ma dwa miejsca zerowe,
- oś symetrii wykresu jest prosta $x = 2$,
- w przedziale $(-\infty; 2)$ funkcja jest malejąca, w przedziale $(2; \infty)$ jest rosnąca,
- równanie $g(x) = m$:
dla $m < -3$ nie ma rozwiązań,
dla $m = -3$ ma jedno rozwiązanie,
dla $m > -3$ ma dwa rozwiązania.



ZZ i MKP

tematy 7.2, 7.3

Multiteka

- Postać kanoniczna funkcji kwadratowej
- Wykres funkcji kwadratowej

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.2



Jeżeli przesuniemy parabolę o równaniu $y = ax^2$, $a \neq 0$ o wektor $[p, q]$, otrzymamy parabolę o równaniu $y = a(x - p)^2 + q$.

◀2.13. Wykonaj odpowiedni wykres i na jego podstawie podaj liczbę rozwiązań równania w zależności od wartości parametru m .

- a) $-(x + 2)^2 + 5 = m$ c) $|x^2 - 2| = m$ e) $|x^2 - 5| - 1 = m$
b) $\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 2 = m - 2$ d) $|(x + 3)^2 - 1| = m$ f) $|(x - 3)^2 - 4| - 2 = m$

Odp.: a) 0 rozwiązań dla $m \in (5; \infty)$, 1 rozwiązanie dla $m = 5$, 2 rozwiązania dla $m \in (-\infty; 5)$

b) 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0)$, 1 rozwiązanie dla $m = 0$, 2 rozwiązania dla $m \in (0; \infty)$

c) 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0)$, 2 rozwiązania dla $m \in \{0\} \cup (2; \infty)$, 3 rozwiązania dla $m = 2$, 4 rozwiązania dla $m \in (0; 2)$

d) 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0)$, 2 rozwiązania dla $m \in \{0\} \cup (1; \infty)$, 3 rozwiązania dla $m = 1$, 4 rozwiązania dla $m \in (0; 1)$

e) 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -1)$, 2 rozwiązania dla $m \in \{-1\} \cup (4; \infty)$, 3 rozwiązania dla $m = 4$, 4 rozwiązania dla $m \in (-1; 4)$

f) 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -2)$, 2 rozwiązania dla $m \in \{-2\} \cup (2; \infty)$, 3 rozwiązania dla $m = 2$, 4 rozwiązania dla $m \in (-2; 2)$

Wniosek

Wierzchołkiem paraboli o równaniu $y = a(x - p)^2 + q$, $a \neq 0$ jest punkt $W = (p, q)$.

Przykład 2 ◀ zad. 2.12

Jaką wartość największą (lub najmniejszą) i dla jakiego argumentu przyjmuje funkcja f ?

a) $f(x) = -3(x + 1)^2 + 5$

b) $f(x) = \sqrt{2}(x - 6)^2 - 3$

Rozwiązanie

a) Parabola $y = -3x^2$ ma ramiona skierowane do dołu. Wykres funkcji f otrzymamy po przesunięciu tej paraboli o wektor $[-1, 5]$. Zatem wierzchołek otrzymanej paraboli ma współrzędne $(-1, 5)$. Funkcja $f(x) = -3(x + 1)^2 + 5$ przyjmuje więc wartość największą równą 5 dla $x = -1$.

b) Parabola $y = \sqrt{2}x^2$ ma ramiona skierowane do góry. Wykres funkcji f otrzymamy po przesunięciu tej paraboli o wektor $[6, -3]$. Zatem wierzchołek otrzymanej paraboli ma współrzędne $(6, -3)$. Funkcja $f(x) = \sqrt{2}(x - 6)^2 - 3$ przyjmuje więc wartość najmniejszą równą -3 dla $x = 6$.

Definicja

Funkcję $f(x) = a(x - p)^2 + q$, gdzie $a \neq 0$ i $x \in \mathbf{R}$, nazywamy funkcją kwadratową zmiennej x w postaci kanonicznej.

Znając postać kanoniczną funkcji kwadratowej, można określić jej podstawowe własności, gdyż dane są wówczas trzy liczby:

- a – współczynnik, który określa, czy ramiona paraboli skierowane są do góry czy w dół,
- p, q – współrzędne wierzchołka paraboli.

Przykład 3 ◀ zad. 2.13

Wyznamy liczbę rozwiązań równania $-\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 4 = m$ w zależności od m .

Rozwiązanie

Rozważmy funkcję $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 4$. Jest to funkcja kwadratowa w postaci kanonicznej $f(x) = a(x - p)^2 + q$, przy czym $a = -\frac{1}{2}$, $p = -3$ oraz $q = 4$.

◀2.12. Podaj zbiór wartości funkcji f . Dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje wartość największą lub wartość najmniejszą?

a) $f(x) = -2(x + 1)^2 + 5$

b) $f(x) = 3(x - 1)^2 - 7$

c) $f(x) = \frac{1}{2}(x - \pi)^2 + 2$

d) $f(x) = -2\sqrt{7}(x + 3)^2 - 1$

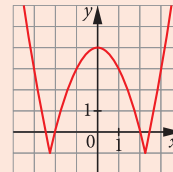
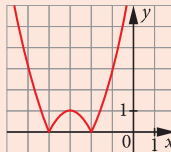
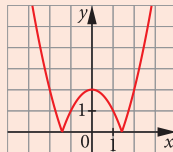
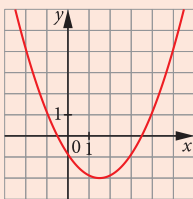
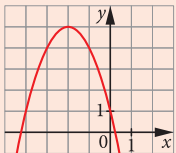
e) $f(x) = -4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 3$

f) $f(x) = 0,2(x - 2)^2$

Odp.: a) $ZW = (-\infty; 5]$,
wartość największa: 5 dla $x = -1$
b) $ZW = [-7; \infty)$,
wartość najmniejsza: -7 dla $x = 1$
c) $ZW = [2; \infty)$,
wartość najmniejsza: 2 dla $x = \pi$
d) $ZW = (-\infty; -1]$,
wartość największa: -1 dla $x = -3$
e) $ZW = (-\infty; -3]$,
wartość największa: -3 dla $x = -\frac{1}{2}$
f) $ZW = [0; \infty)$,
wartość najmniejsza: 0 dla $x = 2$

2.13. Odp.:

a) $y = -(x + 2)^2 + 5$ b) $y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 2$ c) $y = |x^2 - 2|$ d) $y = |(x - 3)^2 - 1|$ e) $y = |x^2 - 5| - 1$ f) $y = |(x - 3)^2 - 4| - 2$



◀2.14. Przedstaw wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, wiedząc, że jej wykresem jest parabola o wierzchołku W przechodząca przez punkt P .

- a) $W = (-1, 0)$, $P = (3, 8)$
- b) $W = (0, 5)$, $P = (-3, 2)$
- c) $W = (-1, -2)$, $P = (1, 10)$
- d) $W = (3, -1)$, $P = (5, 7)$
- e) $W = (2, 6)$, $P = (1, 1)$
- f) $W = (-3, -2)$, $P = (-1, 2)$

Odp.: a) $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$

b) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 5$

c) $y = 3(x+1)^2 - 2$

d) $y = 2(x-3)^2 - 1$

e) $y = -5(x-2)^2 + 6$

f) $y = (x+3)^2 - 2$

◀2.18. Sporządź wykres funkcji.

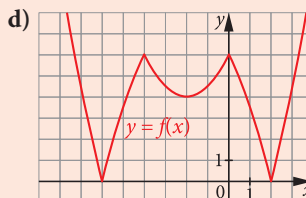
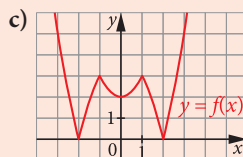
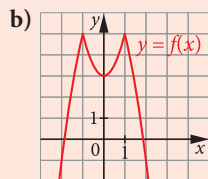
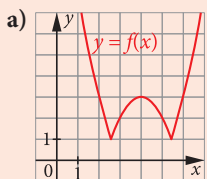
a) $f(x) = |(x-4)^2 - 2| + 1$

b) $f(x) = -|2x^2 - 2| + 5$

c) $f(x) = ||x^2 - 1| - 3|$

d) $f(x) = \left| \frac{1}{2}(x+2)^2 - 2 \right| - 6$

Odp.:



Zatem jej wykresem jest parabola o ramionach skierowanych w dół i wierzchołku w punkcie $W = (-3, 4)$.

Równanie $-\frac{1}{2}(x+3)^2 + 4 = m$:

- dla $m \in (-\infty; 4)$ ma dwa rozwiązania,
- dla $m = 4$ ma jedno rozwiązanie,
- dla $m \in (4; \infty)$ nie ma rozwiązań.

Przykład 4 ◀ zad. 2.14

Parabola $y = a(x-p)^2 + q$ ma wierzchołek w punkcie $W = (1, -2)$ i przechodzi przez punkt $A = (2, -5)$. Napiszemy równanie tej paraboli.

Rozwiązanie

$$y = a(x-1)^2 - 2 \quad \leftarrow p = 1, q = -2$$

$$-5 = a(2-1)^2 - 2 \quad \leftarrow \text{podstawiamy współrzędne punktu A}$$

$$a = -3, \text{ a więc } y = -3(x-1)^2 - 2$$

Odp.: Równanie paraboli to $y = -3(x-1)^2 - 2$.

Przykład 5 ◀ zad. 2.18

Narysujemy wykres funkcji $f(x) = |(x-4)^2 - 2| + 1$.

Rozwiązanie

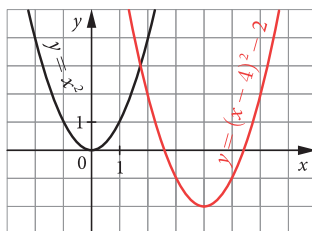
Na kolejnych rysunkach pokazujemy, jak otrzymać szukany wykres.

Krok 1: Przesuwamy parabolę $y = x^2$ o wektor $[4, -2]$ i dostajemy parabolę

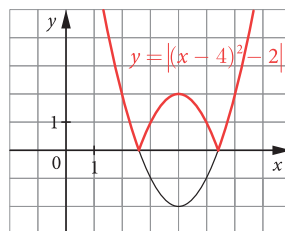
$$y = (x-4)^2 - 2 \quad (\text{zob. rys. 1}).$$

Krok 2: Odbijamy symetrycznie względem osi x punkty poprzedniego wykresu leżące poniżej tej osi oraz bierzemy wszystkie punkty poprzedniego wykresu leżące powyżej osi x – dostajemy krzywą $y = |(x-4)^2 - 2|$ (zob. rys. 2).

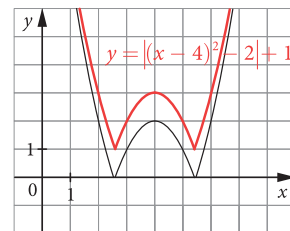
Krok 3: Przesuwamy ostatnio narysowany wykres o wektor $[0, 1]$ i otrzymujemy szukany wykres funkcji $f(x) = |(x-4)^2 - 2| + 1$ (zob. rys. 3).



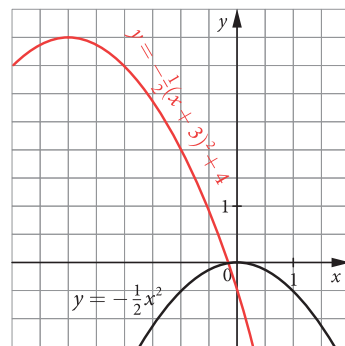
Rys. 1.



Rys. 2.



Rys. 3.



Przykład 6 ◀ zad. 2.19, 2.20

Przekształćmy parabolę o równaniu $y = -(x+1)^2 + 3$ przez symetrię względem prostej l , a następnie napiszemy równanie otrzymanej paraboli.

a) $l: y = 1$

b) $l: x = 2$

Rozwiązanie

Z porównania zapisu danej paraboli $y = -(x+1)^2 + 3$ z ogólnym zapisem funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej $f(x) = a(x-p)^2 + q$ odczytujemy:

- współrzędne wierzchołka paraboli $W = (-1, 3)$,
- współczynnik $a = -1$.

Zatem parabola ma ramiona skierowane w dół i powstała w wyniku przesunięcia paraboli $y = -x^2$ o wektor $[-1, 3]$.

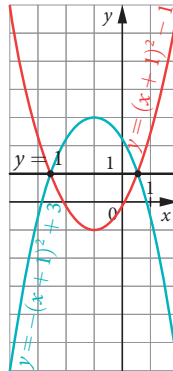
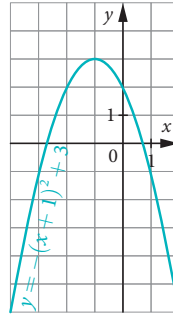
Jej osią symetrii jest prosta $x = -1$.

a) Aby przekształcić parabolę $y = -(x+1)^2 + 3$ przez symetrię względem prostej $l: y = 1$, wykonujemy kolejne kroki.

Krok 1: Odbijamy symetrycznie wierzchołek $W = (-1, 3)$ i otrzymujemy wierzchołek nowej paraboli $W' = (-1, -1)$.

Krok 2: Rysujemy nową parabolę w kształcie danej, o wierzchołku W' , przechodzącą przez punkty stałe symetrii, czyli punkty przecięcia danej paraboli z prostą l .

Krok 3: Odczytujemy z wykresu równanie otrzymanej paraboli: $y = (x+1)^2 - 1$.

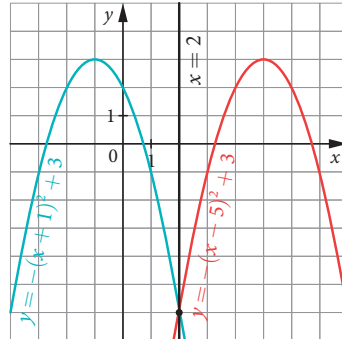


b) Aby przekształcić parabolę $y = -(x+1)^2 + 3$ przez symetrię względem prostej $l: x = 2$, wykonujemy kolejne kroki.

Krok 1: Odbijamy symetrycznie wierzchołek $W = (-1, 3)$ i otrzymujemy wierzchołek nowej paraboli $W' = (5, 3)$.

Krok 2: Rysujemy nową parabolę w kształcie danej, o wierzchołku W' , przechodzącą przez punkt $(2, -6)$ przecięcia danej paraboli z prostą l .

Krok 3: Odczytujemy z wykresu równanie otrzymanej paraboli: $y = -(x-5)^2 + 3$.



Odp.: a) $y = (x+1)^2 - 1$ b) $y = -(x-5)^2 + 3$

◀2.20. Przekształć parabolę o równaniu $y = -2(x+1)^2 + 3$ przez symetrię względem prostej k , a następnie wyznacz równanie otrzymanej paraboli.

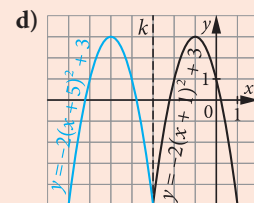
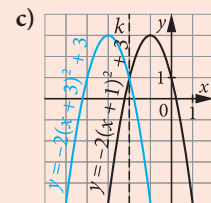
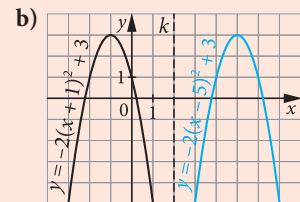
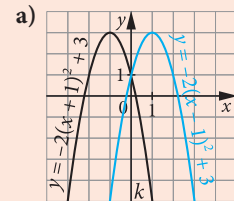
a) $k: x = 0$

b) $k: x = 2$

c) $k: x = -2$

d) $k: x = -3$

Odp.:



◀2.19. Przekształć parabolę o równaniu $y = 2(x-2)^2 - 4$ przez symetrię względem prostej l , a następnie wyznacz równanie otrzymanej paraboli.

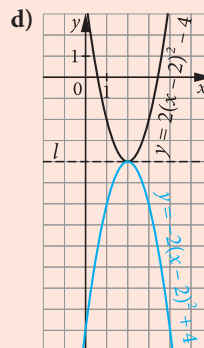
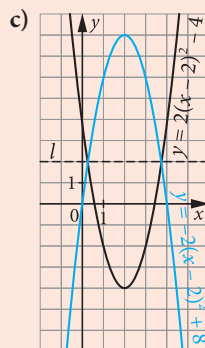
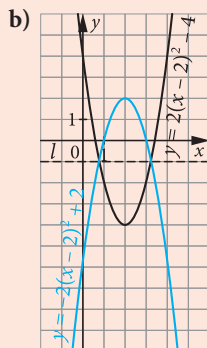
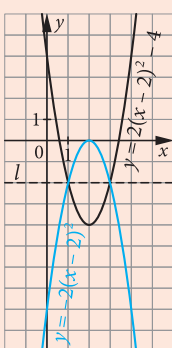
a) $l: y = -2$

b) $l: y = -1$

c) $l: y = 2$

d) $l: y = -4$

Odp.: a)



Zadania

Odpowiedzi i rozwiązania

2.1. B

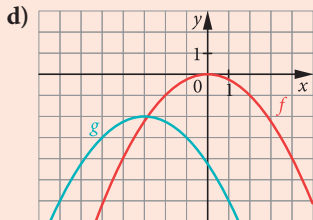
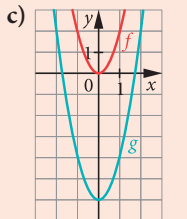
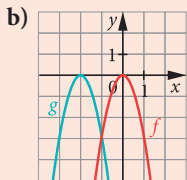
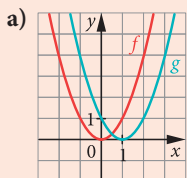
2.2. D

2.3. C

- 2.4. a) $f(x) = 2(x - 14)^2 + 8$, $W = (14, 8)$
 b) $f(x) = 2(x + 5)^2$, $W = (-5, 0)$
 c) $f(x) = 2(x - \sqrt{3})^2 + 6$, $W = (\sqrt{3}, 6)$
 d) $f(x) = 2(x + 5)^2 + 24$, $W = (-5, 24)$

- 2.5. a) $[0, 14]$ b) $[14, -3]$
 c) $[-4, 22]$ d) $[-\sqrt{3}, 13 - \sqrt{3}]$

2.6.



W każdym z zadań 2.1–2.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

2.1. Wskaż równanie osi symetrii paraboli będącej wykresem funkcji

$$f(x) = -\sqrt{3}(x + 8)^2 - 3.$$

- A. $x = -\sqrt{3}$ B. $x = -8$ C. $y = 3$ D. $y = -3$

2.2. Wskaż współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji

$$f(x) = -(x + 2)^2 - 3.$$

- A. $(2, 3)$ B. $(-2, 3)$ C. $(2, -3)$ D. $(-2, -3)$

2.3. Która funkcja jest malejąca w przedziale $\langle -1; \infty \rangle$?

- A. $f(x) = (x + 1)^2$ C. $f(x) = -(x + 1)^2$
 B. $f(x) = (x - 1)^2$ D. $f(x) = -(x - 1)^2$

2.4. Parabola o równaniu $y = f(x)$ powstała przez przesunięcie paraboli o równaniu $y = g(x)$ o wektor $\vec{u} = [p, q]$. Podaj wzór funkcji f i współrzędne wierzchołka jej wykresu.

- a) $g(x) = 2(x - 7)^2 + 4$ $\vec{u} = [7, 4]$
 b) $g(x) = 2(x + 3)^2$ $\vec{u} = [-2, 0]$
 c) $g(x) = 2(x - \sqrt{3})^2 + 9$ $\vec{u} = [0, -3]$
 d) $g(x) = 2(x - 1)^2 + 13$ $\vec{u} = [-6, 11]$

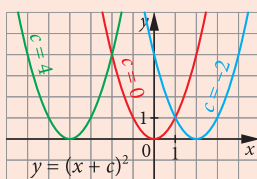
2.5. Parabola o równaniu $y = f(x)$ powstała przez przesunięcie paraboli o równaniu $y = g(x)$ o wektor $\vec{u} = [p, q]$. Podaj współrzędne wektora $\vec{u}$.

- a) $f(x) = (\pi - 3)x^2$ $g(x) = (\pi - 3)x^2 - 14$
 b) $f(x) = (x - 3)^2$ $g(x) = (x + 11)^2 + 3$
 c) $f(x) = (x + 2)^2 + 12$ $g(x) = (x - 2)^2 - 10$
 d) $f(x) = 2(x + 7 + \sqrt{3})^2 - \sqrt{3}$ $g(x) = 2(x + 7)^2 - 13$

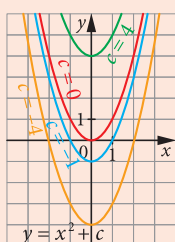
2.6. Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$, a następnie, wykonując odpowiednie przesunięcie, wykres funkcji $y = g(x)$.

- a) $f(x) = x^2$ $g(x) = (x - 1)^2$ c) $f(x) = 2x^2$ $g(x) = 2x^2 - 6$
 b) $f(x) = -3x^2$ $g(x) = -3(x + 2)^2$ d) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$ $g(x) = -\frac{1}{4}(x + 3)^2 - 2$

- 2.7. a) $c = -3$
 b) $c = -2$ lub $c = 2$



- 2.8. a) $c = 4$
 b) $c = -2$
 c) $c = -4$



2.7. Wykresy funkcji $y = (x + c)^2$ przedstawiają pewną rodzinę parabol. Naszkicuj kilka z nich. Wyznacz taki współczynnik c , aby

- wierzchołek paraboli leżał na prostej $x = 3$.
- wykres funkcji przechodził przez punkt $(0, 4)$.

2.8. Wykresy funkcji $y = x^2 + c$ przedstawiają pewną rodzinę parabol. Naszkicuj kilka z nich. Wyznacz taki współczynnik c , aby

- wierzchołek paraboli leżał na prostej $y = 4$.
- wykres funkcji przechodził przez punkt $(2, 2)$.
- miejscami zerowymi funkcji były liczby -2 i 2 .

2.9. Sporządź wykres funkcji f i odczytaj z wykresu jej miejsca zerowe.

- | | |
|----------------------------|---------------------------------------|
| a) $f(x) = (x - 1)^2 - 1$ | c) $f(x) = -\frac{1}{3}(x - 5)^2 + 3$ |
| b) $f(x) = 2(x + 3)^2 - 8$ | d) $f(x) = 4(x - 1)^2 - 4$ |

2.10. Wyznacz równanie osi symetrii paraboli.

- | | |
|--------------------------|---|
| a) $y = 3(x + 4)^2 - 1$ | c) $y = (x - \sqrt{2} + 1)^2 - 3$ |
| b) $y = -2(x + 1)^2 + 5$ | d) $y = -(x + 3 - \sqrt{5})^2 - \sqrt{7}$ |

2.11. Określ przedziały monotoniczności funkcji f .

- | | |
|--|---|
| a) $f(x) = 3(x - 2)^2 + 1$ | d) $f(x) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{3})^2 - 3$ |
| b) $f(x) = -5(x + 7)^2 - 2$ | e) $f(x) = -(x - 3)^2 + 2\sqrt{7}$ |
| c) $f(x) = \sqrt{2}(x - 1)^2 + \sqrt{3}$ | f) $f(x) = 10^3(x + \sqrt{10})^2$ |

2.12. Podaj zbiór wartości funkcji f . Dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje wartość największą lub wartość najmniejszą?

- | | |
|--|--|
| a) $f(x) = -2(x + 1)^2 + 5$ | d) $f(x) = -2\sqrt{7}(x + 3)^2 - 1$ |
| b) $f(x) = 3(x - 1)^2 - 7$ | e) $f(x) = -4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 3$ |
| c) $f(x) = \frac{1}{2}(x - \pi)^2 + 2$ | f) $f(x) = 0,2(x - 2)^2$ |

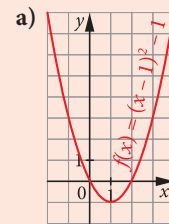
2.13. Wykonaj odpowiedni wykres i na jego podstawie podaj liczbę rozwiązań równania w zależności od wartości parametru m .

- | | | |
|--|--------------------------|------------------------------|
| a) $-(x + 2)^2 + 5 = m$ | c) $ x^2 - 2 = m$ | e) $ x^2 - 5 - 1 = m$ |
| b) $\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 2 = m - 2$ | d) $ (x + 3)^2 - 1 = m$ | f) $ (x - 3)^2 - 4 - 2 = m$ |

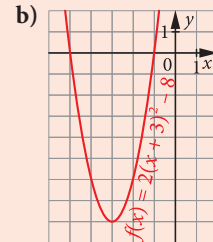
- 2.11. a)** malejąca w przedziale $(-\infty; 2)$, rosnąca w przedziale $\langle 2; \infty)$
b) rosnąca w przedziale $(-\infty; -7)$, malejąca w przedziale $\langle -7; \infty)$
c) malejąca w przedziale $(-\infty; 1)$, rosnąca w przedziale $\langle 1; \infty)$
d) malejąca w przedziale $(-\infty; -\sqrt{3})$, rosnąca w przedziale $\langle -\sqrt{3}; \infty)$
e) rosnąca w przedziale $(-\infty; 3)$, malejąca w przedziale $\langle 3; \infty)$
f) malejąca w przedziale $(-\infty; -\sqrt{10})$, rosnąca w przedziale $\langle -\sqrt{10}; \infty)$

- 2.12. a)** $ZW = (-\infty; 5)$, wartość największa: 5 dla $x = -1$
b) $ZW = \langle -7; \infty)$, wartość najmniejsza: -7 dla $x = 1$
c) $ZW = \langle 2; \infty)$, wartość najmniejsza: 2 dla $x = \pi$
d) $ZW = (-\infty; -1)$, wartość największa: -1 dla $x = -3$
e) $ZW = (-\infty; -3)$, wartość największa: -3 dla $x = -\frac{1}{2}$
f) $ZW = \langle 0; \infty)$, wartość najmniejsza: 0 dla $x = 2$

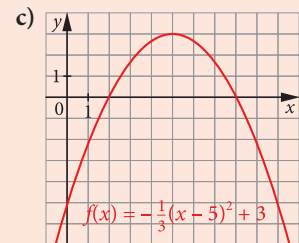
2.9.



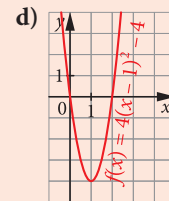
$x = 0$ lub $x = 2$



$x = -5$ lub $x = -1$



$x = 2$ lub $x = 8$



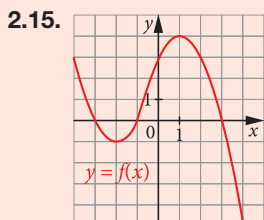
$x = 0$ lub $x = 2$

2.10. a) $x = -4$ **b)** $x = -1$

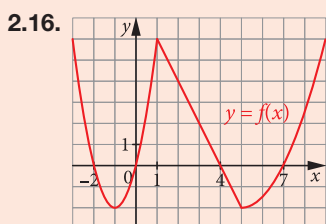
c) $x = \sqrt{2} - 1$ **d)** $x = -3 + \sqrt{5}$

2.13. Patrz s. 410, 411.

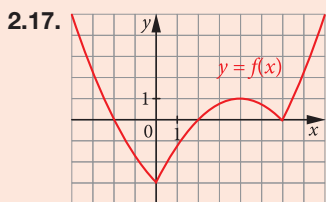
2.14. Patrz s. 412.



malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -2)$ i $(1; \infty)$,
rosnąca w przedziale $(-2; 1)$



$x \in (-\infty; -2) \cup (0; 4) \cup (7; \infty)$



$m \in (0; 1)$

2.18. Patrz s. 412.

2.19. Patrz s. 413.

2.14. Przedstaw wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, wiedząc, że jej wykresem jest parabola o wierzchołku W przechodząca przez punkt P .

- | | | | |
|-------------------|---------------|-------------------|---------------|
| a) $W = (-1, 0)$ | $P = (3, 8)$ | d) $W = (3, -1)$ | $P = (5, 7)$ |
| b) $W = (0, 5)$ | $P = (-3, 2)$ | e) $W = (2, 6)$ | $P = (1, 1)$ |
| c) $W = (-1, -2)$ | $P = (1, 10)$ | f) $W = (-3, -2)$ | $P = (-1, 2)$ |

2.15. Sporządź wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 - 1 & \text{dla } x < 0 \\ -(x-1)^2 + 4 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$.

Podaj przedziały monotoniczności funkcji.

2.16. Sporządź wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} 2(x+1)^2 - 2 & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ -2x + 8 & \text{dla } x \in (1; 5) \\ \frac{1}{2}(x-5)^2 - 2 & \text{dla } x \in (5; \infty) \end{cases}$.

Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości nieujemne?

2.17. Sporządź wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x-2)^2 - 4 & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \cup (6; \infty) \\ -\frac{1}{4}(x-4)^2 + 1 & \text{dla } x \in (0; 6) \end{cases}$.

Dla jakich wartości m równanie $f(x) = m$ ma cztery rozwiązania?

2.18. Sporządź wykres funkcji.

- | | |
|-------------------------------|--|
| a) $f(x) = (x-4)^2 - 2 + 1$ | c) $f(x) = x^2 - 1 - 3 $ |
| b) $f(x) = - 2x^2 - 2 + 5$ | d) $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 2 - 6 $ |

2.19. Przekształć parabolę o równaniu $y = 2(x-2)^2 - 4$ przez symetrię względem prostej l , a następnie wyznacz równanie otrzymanej paraboli.

- | | | | |
|----------------|----------------|---------------|----------------|
| a) $l: y = -2$ | b) $l: y = -1$ | c) $l: y = 2$ | d) $l: y = -4$ |
|----------------|----------------|---------------|----------------|

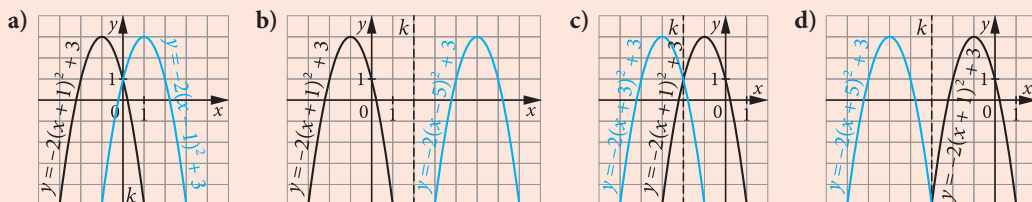
2.20. Przekształć parabolę o równaniu $y = -2(x+1)^2 + 3$ przez symetrię względem prostej k , a następnie wyznacz równanie otrzymanej paraboli.

- | | | | |
|---------------|---------------|----------------|----------------|
| a) $k: x = 0$ | b) $k: x = 2$ | c) $k: x = -2$ | d) $k: x = -3$ |
|---------------|---------------|----------------|----------------|

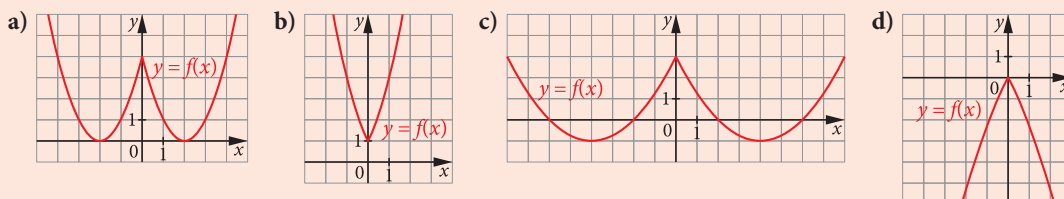
* 2.21. Sporządź wykres funkcji $y = f(x)$.

- | | |
|-------------------------|---|
| a) $f(x) = (x - 2)^2$ | c) $f(x) = \frac{1}{4}(x - 4)^2 - 1$ |
| b) $f(x) = (x + 1)^2$ | d) $f(x) = -\frac{1}{3}(x + 3)^2 + 3$ |

2.20.



2.21.



2.22. Podaj przykład funkcji kwadratowej f , która spełnia podany warunek.

- Zbiorem wartości f jest przedział $(-\infty; 3)$.
- Zbiorem wartości f jest przedział $\langle -1; \infty)$.
- Wykres f ma wierzchołek w punkcie $W = (-\sqrt{2}, 7)$.
- Prosta $x = -\sqrt{3}$ jest osią symetrii wykresu funkcji f , a zbiorem wartości f jest przedział $\langle -2; \infty)$.
- W przedziale $(-\infty; -\sqrt{2})$ funkcja f jest rosnąca, a w przedziale $\langle -\sqrt{2}; \infty)$ jest malejąca.
- Zbiorem wartości f jest przedział $\langle 1; \infty)$, a osią symetrii jej wykresu – prosta o równaniu $x = -3$.

* **2.23.** Naszkicuj kilka parabol należących do podanej rodziny. Określ, jaką figurę tworzą wierzchołki parabol z tej rodziny dla $m \in \mathbf{R}$.

- $y = x^2 + m$
- $y = (x - m)^2$
- $y = (x - 4)^2 + m$
- $y = (x - m)^2 + m$

Prosto do matury



1. Funkcja kwadratowa jest określona wzorem $f(x) = -3(x + 5)^2 + 4$.

Oceń prawdziwość podanych zdań.

- W przedziale $(-\infty; 4)$ funkcja jest rosnąca.
- Oś symetrii wykresu funkcji f jest prosta $x = 5$.
- Równanie $f(x) = -4$ ma jedno rozwiązanie.

2. Podaj zbiór wartości i przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \frac{2}{3}(x - 7)^2 - 11$.

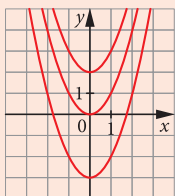
3. Sporządź wykres funkcji $f(x) = -2(x + 1)^2$. Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości ujemne?

4. Sporządź wykres funkcji $f(x) = |-(x + 2)^2 + 3|$. Odczytaj z wykresu liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości parametru m .

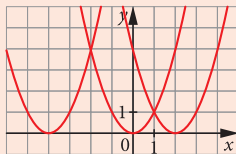
5. Podaj równanie paraboli otrzymanej w wyniku przekształcenia paraboli o równaniu $y = -3(x + 4)^2 + 2$ przez symetrię względem prostej $l: y = -1$.

2.23. Wierzchołki parabol tworzą:

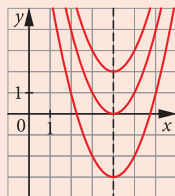
a) oś y .



b) oś x .



c) prostą $x = 4$.



d) prostą $y = x$.



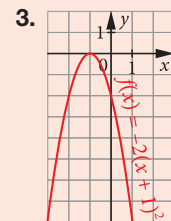
2.22. Przykładowe funkcje

- $f(x) = -\pi(x + \sqrt{3})^2 + 3$
- $f(x) = \sqrt{2}(x - \pi)^2 - 1$
- $f(x) = 2019(x + \sqrt{2})^2 + 7$
- $f(x) = (x + \sqrt{3})^2 - 2$
- $f(x) = -(x + \sqrt{2})^2 + 1$
- $f(x) = \frac{1}{2}(x + 3)^2 + 1$

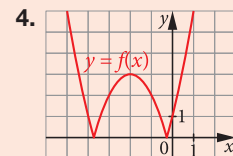
Prosto do matury

1. F, F, F

2. $ZW = \langle -11; \infty)$, malejąca w przedziale $(-\infty; 7)$, rosnąca w przedziale $\langle 7; \infty)$.



$f(x) < 0$ dla $x \neq -1$



0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0)$,
2 rozwiązania dla $m \in \{0\} \cup (3; \infty)$,
3 rozwiązania dla $m = 3$,
4 rozwiązania dla $m \in (0; 3)$

5. $y = 3(x + 4)^2 - 4$

3. Postać ogólna funkcji kwadratowej

Umiejętności:

- interpretowanie współczynników występujących we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej
- przekształcanie wzoru funkcji kwadratowej z postaci kanonicznej do postaci ogólnej i na odwrót

Sumę algebraiczną $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) nazywamy **trójmianem kwadratowym**.

Przekształcimy funkcję f daną w postaci kanonicznej $f(x) = a(x - p)^2 + q$ w taki sposób, aby po prawej stronie otrzymać trójmian kwadratowy. Pokażemy to na przykładzie.

Przykład 1 ◀ zad. 3.8

Wzór funkcji $f(x) = 2(x - 1)^2 - 3$ zapiszemy w postaci trójmianu kwadratowego.

Rozwiązanie

$$f(x) = 2(x - 1)^2 - 3$$

← stosujemy wzór na kwadrat różnicy

$$f(x) = 2(x^2 - 2x + 1) - 3$$

← porządkujemy wyrazy

Odp.: $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$

Definicja

Funkcję $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$ i $x \in \mathbf{R}$, nazywamy funkcją kwadratową zmiennej x w **postaci ogólnej**.

Przykład 2 ◀ zad. 3.9

Zapiszemy funkcję $y = 7x^2 - \sqrt{6} + \sqrt{2}x - 4x - \sqrt{3}x^2 - 9$ w postaci $y = ax^2 + bx + c$ oraz wypiszemy współczynniki a , b i c .

Rozwiązanie

$$y = 7x^2 - \sqrt{6} + \sqrt{2}x - 4x - \sqrt{3}x^2 - 9$$

← grupujemy wyrazy

$$y = 7x^2 - \sqrt{3}x^2 + \sqrt{2}x - 4x - 9 - \sqrt{6}$$

← wyłączamy wspólne czynniki poza nawias

$$y = (7 - \sqrt{3})x^2 + (\sqrt{2} - 4)x - 9 - \sqrt{6}$$

Z otrzymanej postaci ogólnej funkcji odczytujemy współczynniki.

Odp.: $y = (7 - \sqrt{3})x^2 + (\sqrt{2} - 4)x - 9 - \sqrt{6}$, $a = 7 - \sqrt{3}$, $b = \sqrt{2} - 4$, $c = -9 - \sqrt{6}$

◀3.8. Przedstaw wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej.

a) $f(x) = -2(x - 3)^2 + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{2}(x + 2)^2 - 3$

c) $f(x) = -3(x + 5)^2 + 25$

d) $f(x) = \frac{3}{4}(x - 4)^2 - 2$

Odp.: a) $y = -2x^2 + 12x - 17$

b) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$

c) $y = -3x^2 - 30x - 50$

d) $y = \frac{3}{4}x^2 - 6x + 10$

◀3.9. Podaj wzór funkcji

w postaci $y = ax^2 + bx + c$.

Wypisz współczynniki a , b i c .

a) $y = 2x - 5 + \sqrt{2} - 3x^2$

b) $y = 3x^2 - 2x + \sqrt{3}x - \sqrt{5}x^2 + 4$

Odp.: a) $y = -3x^2 + 2x - 5 + \sqrt{2}$,

$a = -3$, $b = 2$, $c = -5 + \sqrt{2}$

b) $y = (3 - \sqrt{5})x^2 + (\sqrt{3} - 2)x + 4$,

$a = 3 - \sqrt{5}$, $b = \sqrt{3} - 2$, $c = 4$

ZZ i MKP

temat 7.3

Multiteka

- Postać ogólna funkcji kwadratowej
- Wykres funkcji kwadratowej

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 5.3

Generator
testów i sprawdzianów

Przekształcenie wzoru funkcji kwadratowej z postaci kanonicznej do postaci ogólnej polega na wykonaniu prostych przekształceń algebraicznych. Teraz zajmijmy się zadaniem odwrotnym.

Przykład 3 ◀ zad. 3.11

Zapiszemy daną funkcję f w postaci kanonicznej $f(x) = a(x - p)^2 + q$.

Rozwiązanie

a) $f(x) = x^2 - 14x + 1$

W postaci kanonicznej występuje kwadrat różnicy $(x - p)^2$, dlatego zaczniemy od dopasowania do tego wzoru przynajmniej części wzoru podanej funkcji.

Składniki $x^2 - 14x$ traktujemy jako pierwsze dwa wyrazy rozwinięcia $x^2 - 2px + p^2$ kwadratu różnicy. Mamy więc: $2p = 14$, czyli $p = 7$.

Do pełnego kwadratu różnicy brakuje wyrazu $p^2 = 49$.

$$f(x) = x^2 - 14x + 49 - 49 + 1 \quad \leftarrow \text{dodajemy i odejmujemy } 49$$

$$f(x) = (x^2 - 14x + 49) - 48$$

Odp.: $f(x) = (x - 7)^2 - 48$

b) $f(x) = 2x^2 - 4x + 9$

$$f(x) = 2(x^2 - 2x) + 9$$

$$f(x) = 2(x^2 - 2x + 1 - 1) + 9$$

$$f(x) = 2(x^2 - 2x + 1) - 2 + 9$$

Odp.: $f(x) = 2(x - 1)^2 + 7$

Metoda zastosowana w przykładzie nosi nazwę **dopełniania do kwadratu**.

Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie

- **Postacią kanoniczną funkcji** $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, jest:

$$f(x) = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$$

Wyrażenie $\Delta = b^2 - 4ac$ nazywamy **wyróżnikiem funkcji kwadratowej**.

- **Wierzchołek paraboli** o równaniu $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, ma współrzędne:

$$x_w = \frac{-b}{2a}, \quad y_w = \frac{-\Delta}{4a}$$

Δ – wielka litera alfabetu greckiego, którą czytamy: *delta*.

◀ **3.11.** Podaj wzór funkcji w postaci kanonicznej i sporządź wykres tej funkcji.

a) $f(x) = x^2 + 6x + 9$

b) $f(x) = 3x^2 - 6x + 3$

c) $f(x) = -x^2 - 4x + 1$

d) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x$

e) $f(x) = -2x^2 - 4x - 9$

f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - 2\frac{1}{2}$

Odp.: a) $y = (x + 3)^2$

b) $y = 3(x - 1)^2$

c) $y = -(x + 2)^2 + 5$

d) $y = \frac{1}{3}(x + 3)^2 - 3$

e) $y = -2(x + 1)^2 - 7$

f) $y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 2$

Uwagi metodyczne

Przejdźcie od postaci ogólnej do postaci kanonicznej funkcji kwadratowej pokazujemy, porównując w dwóch kolumnach tabeli przekształcenia konkretnej funkcji, a obok – takie same przekształcenia na symbolach. Taki sposób prezentacji jest także doskonałym ćwiczeniem przed zastosowaniem identycznej metody podczas wyprowadzania wzorów na pierwiastki funkcji kwadratowej.

Udowodnimy twierdzenie, stosując metodę dopełniania do kwadratu. Dla ułatwienia zrobimy to w tabeli, w dwóch kolumnach. W pierwszej z nich będziemy przekształcać konkretny przykład, w drugiej równoległe te same przekształcenia wykonamy na symbolach.

Przekształcamy wzór $f(x) = 3x^2 + 7x + 5$ do postaci $f(x) = a(x - p)^2 + q$	Przekształcamy wzór $f(x) = ax^2 + bx + c$ do postaci $f(x) = a(x - p)^2 + q$
Łączymy nawiasem pierwsze dwa składniki i wyłączamy przed niego współczynnik przy x^2 .	
$f(x) = 3\left(x^2 + \frac{7}{3}x\right) + 5$	$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$
Wyrażenie $\frac{b}{a}x$ traktujemy jako podwojony iloczyn i dopełniamy do kwadratu.	
$f(x) = 3\left(x^2 + \frac{7}{3}x + \left(\frac{7}{2 \cdot 3}\right)^2 - \left(\frac{7}{2 \cdot 3}\right)^2\right) + 5$	$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c$
Zostawiamy w nawiasie te wyrazy, które są rozwinięciem wzoru na kwadrat sumy.	
$f(x) = 3\left(x^2 + \frac{7}{3}x + \left(\frac{7}{2 \cdot 3}\right)^2\right) - 3 \cdot \left(\frac{7}{2 \cdot 3}\right)^2 + 5$	$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - a \cdot \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c$
$f(x) = 3\left(x + \frac{7}{2 \cdot 3}\right)^2 - \frac{49}{4 \cdot 3} + 5$	$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$
$f(x) = 3\left(x - \frac{-7}{2 \cdot 3}\right)^2 + \frac{-49 + 4 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 3}$	$f(x) = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$
Wprowadzamy oznaczenie: $\Delta = b^2 - 4ac$.	
$\Delta = 49 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = -11$	$\Delta = b^2 - 4ac$
Zapisujemy funkcję w postaci $f(x) = a(x - p)^2 + q$.	
$f(x) = 3\left(x - \frac{-7}{2 \cdot 3}\right)^2 + \frac{11}{12}, \quad p = \frac{-7}{6}, \quad q = \frac{11}{12}$	$f(x) = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}, \quad p = \frac{-b}{2a}, \quad q = \frac{-\Delta}{4a}$

- Druga współrzędna y_w wierzchołka paraboli jest wartością funkcji f dla jego pierwszej współrzędnej: $y_w = f(x_w)$, więc ze wzoru na y_w podanego w twierdzeniu korzysta się rzadko.
- Oś symetrii paraboli o równaniu $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) jest prosta $x = \frac{-b}{2a}$.

Przykład 4 ◀ zad. 3.12

Zastosujemy udowodnione twierdzenie do zapisania w postaci kanonicznej funkcji

$$f(x) = 3x^2 - 11x + 7.$$

Rozwiązanie

Współczynniki trójmianu $ax^2 + bx + c$ są równe: $a = 3$, $b = -11$, $c = 7$. Zatem:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 121 - 4 \cdot 3 \cdot 7 = 37, \quad p = -\frac{b}{2a} = \frac{11}{6}, \quad q = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{37}{12}$$

Odp.: Szukana postać kanoniczna to $f(x) = 3\left(x - \frac{11}{6}\right)^2 - \frac{37}{12}$.

Przykład 5 ◀ zad. 3.13

Wyznamy przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 5$.

Rozwiązanie

Współczynniki trójmianu $ax^2 + bx + c$ są równe: $a = -\frac{1}{2}$, $b = 4$, $c = -5$.

Do rozwiązania zadania potrzebna jest tylko pierwsza współrzędna p wierzchołka paraboli:

$$p = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{1} = 4$$

$a = -\frac{1}{2} < 0$, zatem ramiona paraboli są skierowane w dół, czyli funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 4)$ i malejąca w przedziale $\langle 4; \infty)$.

Odp.: Funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 4)$ i malejąca w przedziale $\langle 4; \infty)$.

Przykład 6 ◀ zad. 3.15

Określmy zbiór wartości funkcji $f(x) = 2x^2 - 12x + 18$.

Rozwiązanie

Współczynniki trójmianu $ax^2 + bx + c$ są równe: $a = 2$, $b = -12$, $c = 18$.

Do rozwiązania zadania potrzebna jest druga współrzędna q wierzchołka paraboli:

$$q = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{144 - 4 \cdot 2 \cdot 18}{4 \cdot 2} = 0$$

$a > 0$, a więc ramiona paraboli są skierowane do góry, zatem zbiorem wartości jest przedział $\langle 0; \infty)$.

Jeśli $a > 0$, to $ZW = \langle q; \infty)$.
Jeśli $a < 0$, to $ZW = (-\infty; q]$.

Odp.: $\langle 0; \infty)$

Przykład 7 ◀ zad. 3.18

Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ przechodzi przez punkt $A = (-2, 12)$, a liczba 2 jest jednym z jej miejsc zerowych. Wyznamy wzór tej funkcji w postaci ogólnej.

◀ 3.15. Podaj zbiór wartości funkcji.

a) $f(x) = -x^2 + 5$

c) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x - 1$

b) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$

d) $f(x) = 2x^2 - 12x + 18$

Odp.: a) $ZW = (-\infty; 5)$ b) $ZW = \langle 0; \infty)$ c) $ZW = (-\infty; 0)$ d) $ZW = \langle 0; \infty)$

◀ 3.18. Osią symetrii paraboli $y = ax^2 + bx - 4$, przechodzącej przez punkt $A = (-2, 4)$, jest prosta $x = -3$. Znajdź współczynniki a i b .

Odp.: $a = -1$, $b = -6$

◀ 3.12. Podaj wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej.

a) $y = x^2 - 2x + 3$

b) $y = -2x^2 - 12x - 20$

c) $y = \frac{1}{2}x^2 + x$

d) $y = 3x^2 - 18x + 15$

e) $y = -\frac{2}{3}x^2 - 2x - \frac{3}{2}$

f) $y = -0,5x^2 - 0,2x - 0,02$

Odp.: a) $y = (x - 1)^2 + 2$

b) $y = -2(x + 3)^2 - 2$

c) $y = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - \frac{1}{2}$

d) $y = 3(x - 3)^2 - 12$

e) $y = -\frac{2}{3}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$

f) $y = -0,5(x + 0,2)^2$

◀ 3.13. Wyznamy przedziały monotoniczności funkcji.

a) $f(x) = x^2 + 4x + 5$

b) $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$

c) $f(x) = -2x^2 - 12x - 20$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$

e) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 2$

f) $f(x) = \sqrt{2}x^2 + 4x + 2\sqrt{2} - 4$

Odp.: a) malejąca w przedziale $(-\infty; -2)$,

rosnąca w przedziale $\langle -2; \infty)$

b) rosnąca w przedziale $(-\infty; 1)$, malejąca w przedziale $\langle 1; \infty)$

c) rosnąca w przedziale $(-\infty; -3)$, malejąca w przedziale $\langle -3; \infty)$

d) malejąca w przedziale $(-\infty; -1)$,

rosnąca w przedziale $\langle -1; \infty)$

e) rosnąca w przedziale $(-\infty; 3)$, malejąca w przedziale $\langle 3; \infty)$

f) malejąca w przedziale $(-\infty; -\sqrt{2})$,

rosnąca w przedziale $\langle -\sqrt{2}; \infty)$

◀ 3.24. Wykonaj odpowiedni wykres i na jego podstawie podaj liczbę rozwiązań równania w zależności od wartości parametru m .

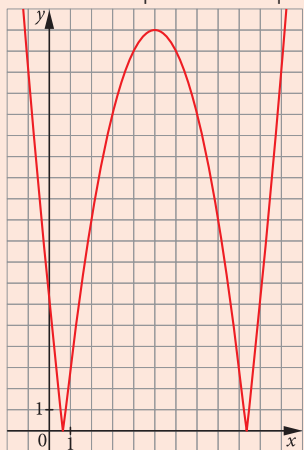
a) $|x^2 - 10x + 6| = m$

b) $|x^2 - 8x - 1| = m + 1$

c) $|3x^2 - 12x - 7| - 1 = m$

d) $|-5x^2 + 30x - 43| - 2 = m$

Odp.: a) $y = |x^2 - 10x + 6|$



0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0)$,

2 rozwiązania dla

$m \in \{0\} \cup (19; \infty)$,

3 rozwiązania dla $m = 19$,

4 rozwiązania dla $m \in (0; 19)$

b) $y = |x^2 - 8x - 1|$



0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -1)$,

2 rozwiązania

dla $m \in \{-1\} \cup (16; \infty)$,

3 rozwiązania dla $m = 16$,

4 rozwiązania dla $m \in (-1; 16)$

Rozwiązanie

$$12 = \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \quad \leftarrow \text{współrzędne punktu A spełniają równanie paraboli}$$

$$0 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \quad \leftarrow \text{liczba 2 jest miejscem zerowym funkcji}$$

Rozwiązujemy zatem układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi.

$$\begin{cases} -2b + c = 10 \\ 2b + c = -2 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} b = -3 \\ c = 4 \end{cases}$$

Odp.: Wzór tej funkcji to $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$.

Przykład 8 ◀ zad. 3.24

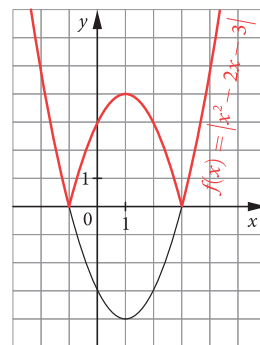
Naszkicujemy wykres funkcji $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$ i na jego podstawie odczytamy liczbę rozwiązań równania $|x^2 - 2x - 3| = m$ w zależności od wartości parametru m .

Rozwiązanie

Wierzchołek paraboli o równaniu $y = x^2 - 2x - 3$ ma współrzędne $(1, -4)$.

Rysujemy wykres funkcji $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$.

Odp.: Równanie $|x^2 - 2x - 3| = m$ nie ma rozwiązań dla $m < 0$, ma dwa rozwiązania dla $m = 0$ lub $m > 4$, trzy rozwiązania dla $m = 4$ oraz cztery rozwiązania dla $m \in (0; 4)$.



Zadania

W każdym z zadań 3.1–3.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszytach.

3.1. Wskaż funkcję, której zbiorem wartości jest przedział $\langle 3; \infty \rangle$.

A. $f(x) = 0,5x^2 - 2x + 5$

C. $f(x) = 0,5x^2 - 2x + 7$

B. $f(x) = 0,5x^2 - 2x + 6$

D. $f(x) = 0,5x^2 + 2x + 7$

3.2. Wskaż współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji $f(x) = 2x^2 - x - 3$.

A. $\left(\frac{1}{4}, -\frac{5}{8}\right)$

B. $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{5}{8}\right)$

C. $\left(\frac{1}{4}, -\frac{25}{8}\right)$

D. $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{25}{8}\right)$

3.3. Wskaż funkcję, której wykres ma tę samą oś symetrii co wykres funkcji $f(x) = -2x^2 + 6x - 5$.

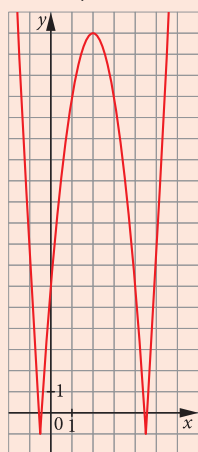
A. $y = -2x^2 - 5$

B. $y = x^2 + 3x - 1$

C. $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$

D. $y = -6x^2 + 2x - 5$

c) $y = |3x^2 - 12x - 7| - 1$



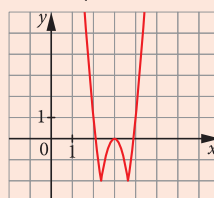
0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -1)$,

2 rozwiązania dla $m \in \{-1\} \cup (18; \infty)$,

3 rozwiązania dla $m = 18$,

4 rozwiązania dla $m \in (-1; 18)$

d) $y = |-5x^2 + 30x - 43| - 2$



0 rozwiązań dla $m \in (-\infty; -2)$,

2 rozwiązania dla $m \in \{-2\} \cup (0; \infty)$,

3 rozwiązania dla $m = 0$,

4 rozwiązania dla $m \in (-2; 0)$

Odpowiedzi i rozwiązania

3.1. A

3.2. C

3.3. C

3.4. Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x$. Oceń prawdziwość zdań.

- A. Wyróżnik tej funkcji jest równy 14.
- B. Wyróżnik tej funkcji jest równy 16.
- C. Najmniejszą wartością tej funkcji jest -4 .

3.5. Oceń prawdziwość zdań. Do zbioru wartości funkcji $f(x) = 2x^2 - x + 1$

- A. należy liczba $\frac{3}{8}$.
- B. należy liczba $\frac{7}{8}$.
- C. należą wszystkie dodatnie liczby naturalne.

3.6. Dana jest parabola o równaniu $y = -x^2 - 4x - 2$. Oceń prawdziwość zdań.

- A. Prosta $y = 2$ przechodzi przez wierzchołek tej paraboli.
- B. Prosta $x = -2$ jest osią symetrii tej paraboli.
- C. Prosta $x = 2$ nie ma z tą parabolą punktów wspólnych.

3.7. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 + x - 3$. Oceń prawdziwość zdań.

- A. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -3, 25; \infty \rangle$.
- B. Funkcja f ma dwa miejsca zerowe.
- C. Wierzchołek paraboli o równaniu $y = f(x)$ leży w trzeciej ćwiartce układu współrzędnych.

3.8. Przedstaw wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej.

- a) $f(x) = -2(x - 3)^2 + 1$
- c) $f(x) = -3(x + 5)^2 + 25$
- b) $f(x) = \frac{1}{2}(x + 2)^2 - 3$
- d) $f(x) = \frac{3}{4}(x - 4)^2 - 2$

3.9. Podaj wzór funkcji w postaci $y = ax^2 + bx + c$. Wypisz współczynniki a , b i c .

- a) $y = 2x - 5 + \sqrt{2} - 3x^2$
- b) $y = 3x^2 - 2x + \sqrt{3}x - \sqrt{5}x^2 + 4$

3.10. Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku W przechodząca przez punkt P . Przedstaw wzór tej funkcji w postaci ogólnej.

- a) $W = (-1, -2)$ $P = (1, 10)$
- c) $W = (2, 6)$ $P = (1, 1)$
- b) $W = (3, -1)$ $P = (5, 7)$
- d) $W = (-3, -2)$ $P = (-1, 2)$

3.11. Podaj wzór funkcji w postaci kanonicznej i sporządź wykres tej funkcji.

- a) $f(x) = x^2 + 6x + 9$
- c) $f(x) = -x^2 - 4x + 1$
- e) $f(x) = -2x^2 - 4x - 9$
- b) $f(x) = 3x^2 - 6x + 3$
- d) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x$
- f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - 2\frac{1}{2}$

3.12. Podaj wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej.

- a) $y = x^2 - 2x + 3$
- c) $y = \frac{1}{2}x^2 + x$
- e) $y = -\frac{2}{3}x^2 - 2x - \frac{3}{2}$
- b) $y = -2x^2 - 12x - 20$
- d) $y = 3x^2 - 18x + 15$
- f) $y = -0,5x^2 - 0,2x - 0,02$

3.4. F, P, F

3.5. F, P, P

3.6. P, P, F

3.7. P, P, P

3.8. a) $y = -2x^2 + 12x - 17$

b) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$

c) $y = -3x^2 - 30x - 50$

d) $y = \frac{3}{4}x^2 - 6x + 10$

3.9. a) $y = -3x^2 + 2x - 5 + \sqrt{2}$,

$a = -3$, $b = 2$, $c = -5 + \sqrt{2}$

b) $y = (3 - \sqrt{5})x^2 + (\sqrt{3} - 2)x + 4$,

$a = 3 - \sqrt{5}$, $b = \sqrt{3} - 2$, $c = 4$

3.10. a) $y = 3x^2 + 6x + 1$

b) $y = 2x^2 - 12x + 17$

c) $y = -5x^2 + 20x - 14$

d) $y = x^2 + 6x + 7$

3.11. a) $y = (x + 3)^2$

b) $y = 3(x - 1)^2$

c) $y = -(x + 2)^2 + 5$

d) $y = \frac{1}{3}(x + 3)^2 - 3$

e) $y = -2(x + 1)^2 - 7$

f) $y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 2$

3.12. a) $y = (x - 1)^2 + 2$

b) $y = -2(x + 3)^2 - 2$

c) $y = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - \frac{1}{2}$

d) $y = 3(x - 3)^2 - 12$

e) $y = -\frac{2}{3}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$

f) $y = -0,5(x + 0,2)^2$

3.13. a) malejąca w przedziale $(-\infty; -2)$,

rosnąca w przedziale $\langle -2; \infty \rangle$

b) rosnąca w przedziale $(-\infty; 1)$,
malejąca w przedziale $\langle 1; \infty \rangle$

c) rosnąca w przedziale $(-\infty; -3)$,
malejąca w przedziale $\langle -3; \infty \rangle$

d) malejąca w przedziale $(-\infty; -1)$,

rosnąca w przedziale $\langle -1; \infty \rangle$

e) rosnąca w przedziale $(-\infty; 3)$,
malejąca w przedziale $\langle 3; \infty \rangle$

f) malejąca w przedziale $(-\infty; -\sqrt{2})$,

rosnąca w przedziale $\langle -\sqrt{2}; \infty \rangle$

3.14. a) $(0, -3)$ **b)** $(-2, 0)$

c) $(-1, -2)$ **d)** $(-5, -1)$

e) $(2, -12)$ **f)** $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

3.15. a) $ZW = (-\infty, 5)$

b) $ZW = \langle 0; \infty \rangle$

c) $ZW = (-\infty, 0)$

d) $ZW = \langle 0; \infty \rangle$

3.16. a) $b = 4, c = 2$

b) $b = 4, c = 4$ lub $b = -4, c = 4$

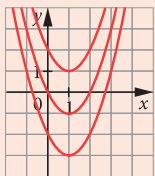
c) $b = -6, c = 6$

3.17. $b = -8, c = 2$

3.18. $a = -1, b = -6$

3.19. $a = 2, b = 1, c = -1$

3.21. oś symetrii: $x = 1$



3.13. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji.

a) $f(x) = x^2 + 4x + 5$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$

b) $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$

e) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 2$

c) $f(x) = -2x^2 - 12x - 20$

f) $f(x) = \sqrt{2}x^2 + 4x + 2\sqrt{2} - 4$

3.14. Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli o podanym równaniu.

a) $y = 2x^2 - 3$

c) $y = -x^2 - 2x - 3$

e) $y = 3x^2 - 12x$

b) $y = x^2 + 4x + 4$

d) $y = 2x^2 + 20x + 49$

f) $y = -4x^2 + 4x + 1$

3.15. Podaj zbiór wartości funkcji.

a) $f(x) = -x^2 + 5$

c) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x - 1$

b) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$

d) $f(x) = 2x^2 - 12x + 18$

3.16. Wyznacz współczynniki funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$, wiedząc, że

a) wierzchołek paraboli $y = x^2 + bx + c$ ma współrzędne $(-2, -2)$.

b) parabola $y = x^2 + bx + c$ ma dokładnie jeden punkt wspólny z osią x i przecina oś y w punkcie $(0, 4)$.

c) zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -3; \infty \rangle$, a osią symetrii paraboli $y = x^2 + bx + c$ jest prosta $x = 3$.

3.17. Wyznacz brakujące współczynniki funkcji kwadratowej $y = 4x^2 + bx + c$, wiedząc, że jej wykresem jest parabola przechodząca przez punkty $A = (0, 2)$, $B = (-1, 14)$.

3.18. Oś symetrii paraboli $y = ax^2 + bx - 4$, przechodzącej przez punkt $A = (-2, 4)$, jest prosta $x = -3$. Znajdź współczynniki a i b .

3.19. Do wykresu funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$ należą punkty $A = (-1, 0)$, $B = (1, 2)$ i $C = (-2, 5)$. Wyznacz współczynniki a , b i c .

3.20. Dla jakich wartości m prosta o równaniu $y = m$ ma dokładnie jeden punkt wspólny z parabolą o podanym równaniu?

a) $y = -x^2 + 14x - 37$ b) $y = x^2 + 10x + 21$ c) $y = -3x^2 - 4\sqrt{2} + 1$

3.21. Wykresy funkcji $y = x^2 - 2x + c$ przedstawiają pewną rodzinę parabol. Narysuj kilka z nich. Napisz równanie osi symetrii tych parabol.

3.20. Parabola $y = a(x - p)^2 + q$ i prosta $y = m$ mają dokładnie jeden punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy $m = q$.

a) $y = -x^2 + 14x - 37 = -(x^2 - 14x + 49) + 49 - 37 = -(x - 7)^2 + 12$, czyli $q = 12$, więc $m = 12$.

b) $y = x^2 + 10x + 21 = (x^2 + 10x + 25) - 25 + 21 = (x + 5)^2 - 4$, czyli $q = -4$, więc $m = -4$.

c) $y = -3x^2 - 4\sqrt{2} + 1$, czyli $q = 1 - 4\sqrt{2}$, więc $m = 1 - 4\sqrt{2}$.

3.22. Wykresy funkcji $y = x^2 + bx$ przedstawiają pewną rodzinę parabol. Narysuj kilka z nich. Ustal współczynnik b tak, aby prosta $y = -9$ miała dokładnie jeden punkt wspólny z parabolą.

3.23. Wyznacz wzór funkcji, której wykresem jest parabola symetryczna do paraboli $y = x^2 - 4x + 2$ względem podanej prostej.

- a) $x = 4$ b) $y = -2$ c) $x = -1$ d) $y = 1$

3.24. Wykonaj odpowiedni wykres i na jego podstawie podaj liczbę rozwiązań równania w zależności od wartości parametru m .

- a) $|x^2 - 10x + 6| = m$ c) $|3x^2 - 12x - 7| - 1 = m$
b) $|x^2 - 8x - 1| = m + 1$ d) $|-5x^2 + 30x - 43| - 2 = m$

D * 3.25. Korzystając z definicji, udowodnij, że funkcja $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$ jest rosnąca w przedziale $(2; \infty)$.

Prosto do matury



1. Funkcja kwadratowa jest określona wzorem $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$.

Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle 5; \infty \rangle$.
B. Ośią symetrii wykresu funkcji f jest prosta $x = 4$.
C. Równanie $f(x) = -2$ ma dwa rozwiązania.

2. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f .

$$f(x) = (2 - \sqrt{5})x^2 + (2 + \sqrt{5})x - \sqrt{5}$$

3. Sporządź wykres funkcji $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x - 1$, napisz równanie jego osi symetrii i podaj wartość m , dla której równanie $-\frac{1}{4}x^2 + x - 1 = m$ ma jedno rozwiązanie.

4. Wyróżnik funkcji kwadratowej $f(x) = 2x^2 + 4x + k$ jest równy 0. Wyznacz k i narysuj wykres funkcji f w przedziale $\langle -2; 2 \rangle$.

5. Dla jakiej wartości parametru m zbiorem wartości funkcji $f(x) = 3x^2 + 15x + m$ jest przedział $\langle -10; \infty \rangle$?

3.25. Niech $x_1, x_2 \in (2; \infty)$ i $x_1 < x_2$. Wtedy

$$f(x_1) - f(x_2) = 2x_1^2 - 8x_1 + 1 - (2x_2^2 - 8x_2 + 1) = 2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 4) < 0,$$

bo $x_1 - x_2 < 0$ i $x_1 + x_2 - 4 > 0$.

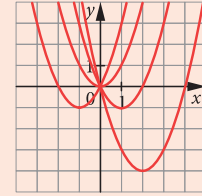
Zatem $f(x_1) < f(x_2)$, co oznacza, że funkcja f jest rosnąca w przedziale $(2; \infty)$.

3.22. Rzędna wierzchołka

paraboli jest równa $-\frac{b^2}{4}$, więc

prosta $y = -9$ ma dokładnie jeden punkt wspólny z parabolą, gdy

$$-\frac{b^2}{4} = -9, \text{ czyli } b = -6 \text{ lub } b = 6.$$



3.23. a) $y = x^2 - 12x + 34$

b) $y = -x^2 + 4x - 6$

c) $y = x^2 + 8x + 14$

d) $y = -x^2 + 4x$

3.24. Patrz s. 422.

Prosto do matury

1. F, F, P

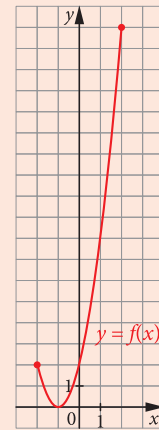
2. rosnąca w przedziale

$$\left(-\infty; 4\frac{1}{2} + 2\sqrt{5}\right), \text{ malejąca}$$

$$\text{w przedziale } \left\langle 4\frac{1}{2} + 2\sqrt{5}; \infty \right\rangle$$

3. $x = 2, m = 0$

4. $k = 2$



$$\mathbf{5.} \ m = 8\frac{3}{4}$$

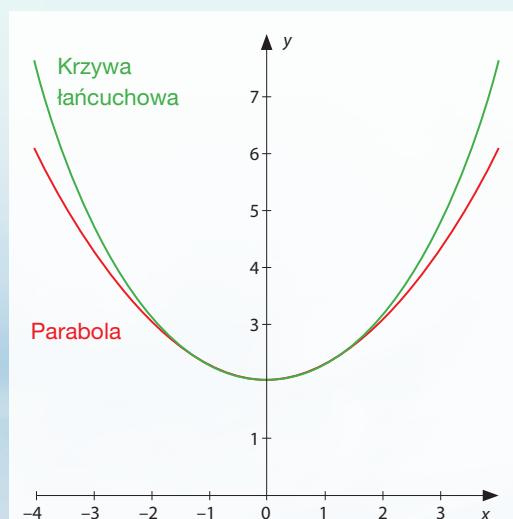
Parabola a krzywa łańcuchowa

Prawie do końca XVII wieku uważano, że łańcuch zawieszony za końce przyjmuje kształt paraboli. Jest to jednak inna krzywa, tzw. krzywa łańcuchowa.

Zawieszony łańcuch

Krzywą łańcuchową łatwo dostrzec na co dzień, jej kształt przyjmują bowiem wszystkie giętkie sznury, łańcuchy, kable itp., zawieszone za końce i poddane wyłącznie sile grawitacji.

Równanie tej krzywej wykorzystuje się m.in. przy projektowaniu napowietrznych linii elektroenergetycznych. Uwzględnia się wówczas obciążenie przewodów, np. przez szadź lub siadające na nich ptaki.

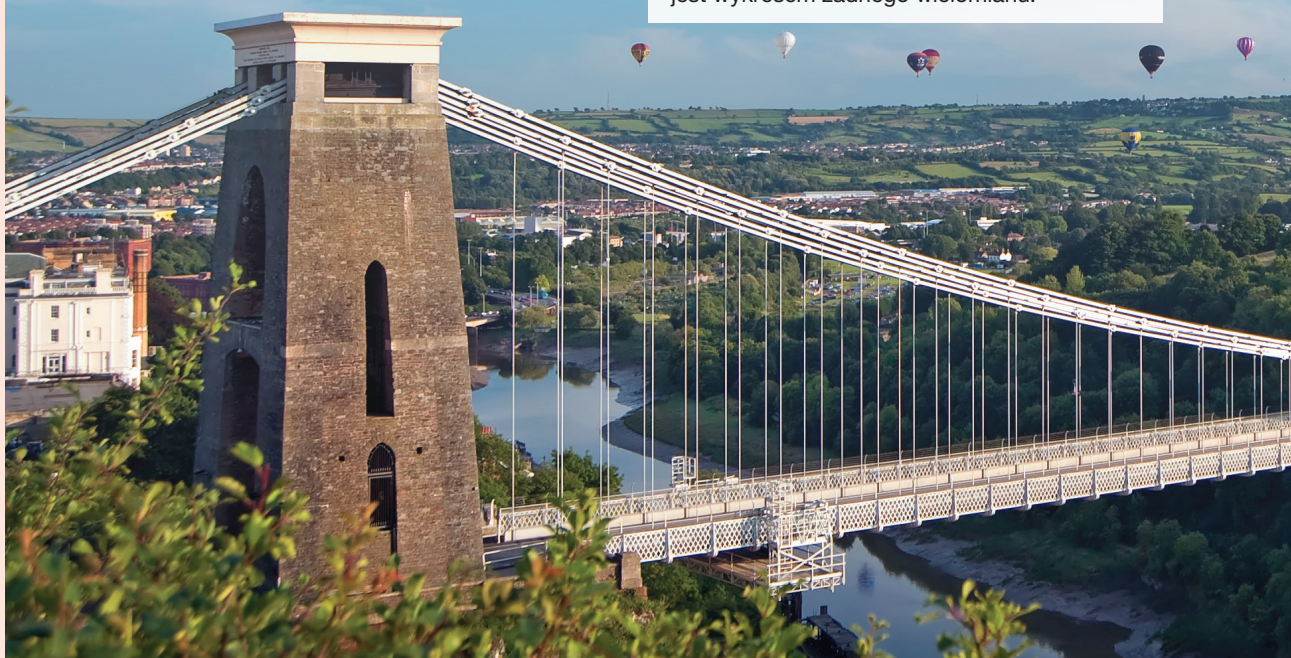


Złudne podobieństwo

Rysunek przedstawia obie krzywe.

Podobieństwo jest pozorne – nie można tak dobrać współczynników funkcji kwadratowej, aby jej wykres miał kształt krzywej łańcuchowej. Tak naprawdę krzywa łańcuchowa nie jest wykresem żadnego wielomianu.

Na zdjęciu pokazano most wiszący na rzece Avon w Bristolu. Projektant i główny inżynier tego mostu I. K. Brunel zajął drugie miejsce w plebiscycie telewizji BBC na 100 najwybitniejszych Brytyjczyków w historii.



Most wiszący

Bywają jednak sytuacje, w których podwieszona lina przyjmuje kształt paraboli.

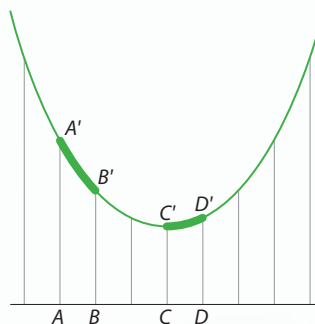
Przyjrzyjmy się mostom wiszącym. Ich przęsła są utrzymywane we właściwym położeniu przez liny (w mostach starszego typu – łańcuchy) podwieszone do pylonów. Główna lina mostu przyjmuje kształt paraboli.

Co różni te krzywe

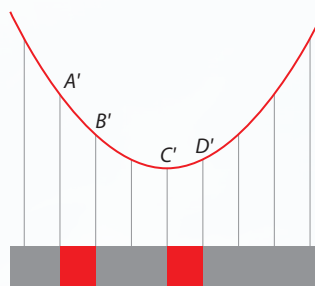
Dlaczego lina wisząca swobodnie i lina dźwigająca przęsło mostu przybierają odmienne kształty?

Lina zawieszona za końce dźwiga tylko własny ciężar, rozłożony wzdłuż niej równomiernie. Jeśli podzielimy linę na odcinki w taki sposób, aby odpowiadające im odcinki poziome były równej długości (zob. rysunek), siła ciężkości działająca na odcinek liny będzie zależała od jego położenia. Otrzymamy kształt krzywej łańcuchowej.

W moście wiszącym najcięższym elementem konstrukcji są poziome przęsła. Ciężar podtrzymujących je lin jest nieporównywalnie mniejszy. Na każdy z odcinków głównej liny działa taka sama siła ciężkości. Otrzymujemy kształt paraboli.



Podwieszona lina dźwigająca tylko własny ciężar. Siły ciężkości działające na odcinki $A'B'$ i $C'D'$ są różne. Lina przybiera kształt krzywej łańcuchowej.



Schemat mostu wiszącego – lina dźwiga ciężkie poziome przęsło. Odcinki $A'B'$ i $C'D'$ podtrzymują jednakowe fragmenty przęsła.

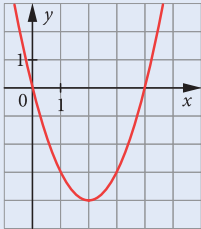
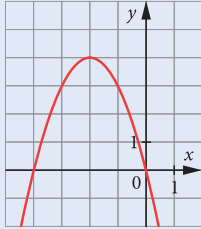
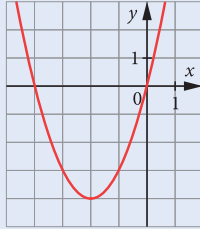
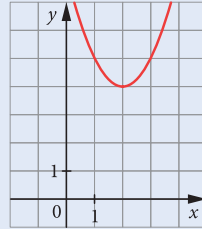


4. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–15 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

Odpowiedzi i rozwiązania

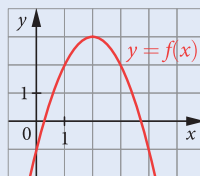
1. B
 2. D
 3. A
 4. C
 5. A
 6. B
 7. A
 8. C
1. Wskaż punkt, który należy do wykresu funkcji $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
A. $(-2, 5)$ B. $(-2, -3)$ C. $(-2, 3)$ D. $(-2, 1)$
 2. Wskaż współrzędne wierzchołka paraboli o równaniu $y = 2x^2 - 12x + 19$.
A. $(6, -1)$ B. $(-6, 1)$ C. $(3, -1)$ D. $(3, 1)$
 3. Wskaż wartość m , dla której punkt $P = (-1, 4 - m)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = -2x^2$.
A. $m = 6$ B. $m = -1$ C. $m = 3$ D. $m = -3$
 4. Na którym rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $f(x) = (x + 2)^2 - 4$?
A.  B.  C.  D. 
 5. Wskaż zbiór wartości funkcji $f(x) = -2x^2 + 12x + 1$.
A. $(-\infty; 19)$ B. $(-\infty; 1)$ C. $\mathbb{R}$ D. $(1; \infty)$
 6. Parabola o równaniu $y = x^2 + bx$ ma tylko jeden punkt wspólny z osią x . Wskaż wartość współczynnika b w tym równaniu.
A. -1 C. 1
B. 0 D. Nie istnieje takie b .
 7. Do wykresu funkcji $f(x) = -2x^2 + mx + n$ należą punkty $A = (0, -2)$ i $B = (-3, 4)$. Ile są równe współczynniki m i n ?
A. $m = -8, n = -2$ C. $m = 8, n = 2$
B. $m = 8, n = -2$ D. $m = -8, n = 2$
 8. Wykresy funkcji $f(x) = x^2 + 4x + k$ przedstawiają pewną rodzinę parabol. Wskaż prostą, która jest osią symetrii każdej z tych parabol.
A. Nie ma takiej prostej. C. $x = -2$
B. $y = 4$ D. $x = -4$

9. Wskaż wzór, którym można określić funkcję o zbiorze wartości $(-\infty; -6)$.

- A. $y = (x + 3)^2 - 6$ C. $y = -(x - 2)^2 - 6$
 B. $y = -(x - 3)^2$ D. $y = -x^2 + 2$

10. Wskaż wzór funkcji, której wykres jest przedstawiony na rysunku.

- A. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ C. $f(x) = -2x^2 + x - 1$
 B. $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ D. $f(x) = -x^2 - 4x - 1$



11. Wskaż równanie paraboli symetrycznej do paraboli $y = 3x^2 - x - 1$ względem osi y .

- A. $y = 3x^2 + x - 1$ C. $y = 3x^2 - x + 1$
 B. $y = -3x^2 + x + 1$ D. $y = -3x^2 - x - 1$

12. Funkcja kwadratowa określona jest wzorem $f(x) = 2x^2 - 3x + c$ oraz $f(2) = 3$. Wskaż prawdziwą zależność.

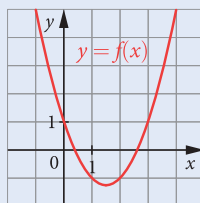
- A. $f(1) = -6$ B. $f(1) = 0$ C. $f(1) = 15$ D. $f(1) = -5$

13. Wskaż równanie osi symetrii paraboli $y = 2(x + 5)^2 - 4$.

- A. $x = -5$ B. $x = 5$ C. $y = -4$ D. $y = x$

14. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$. Co można stwierdzić o znakach współczynników tej funkcji?

- A. $a > 0$, $b > 0$ i $c > 0$ C. $a > 0$, $b > 0$ i $c < 0$
 B. $a > 0$, $b < 0$ i $c > 0$ D. $a > 0$, $b < 0$ i $c < 0$



15. Wskaż wartość współczynnika a w równaniu paraboli $y = ax^2 - 1$, wiedząc, że przechodzi ona przez punkt $P = (-3, 5)$.

- A. $\frac{2}{3}$ C. $-\frac{1}{3}$
 B. 0 D. Nie istnieje takie a .

W zadaniach 16–21 oceń prawdziwość podanych zdań.

16. Na płaszczyźnie dane są punkty $A = (-2, 2)$, $B = (3, 4)$, $C = (2, 6)$ i parabola $y = x^2$.

- A. Odcinek AB ma z parabolą dwa punkty wspólne.
 B. Odcinek AC przecina parabolę.
 C. Odcinek BC przecina parabolę.

9. C

10. B

11. A

12. B

13. A

14. B

15. A

16. P, P, P

17. F, P, P

17. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 + 2x - \sqrt{2}$.

- A. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie niewymiernej liczbę niewymierną.
 B. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie wymiernej liczbę niewymierną.
 C. Liczba -1 należy do zbioru wartości funkcji f .

18. F, F, P

18. Funkcja, której wykresem jest parabola o wierzchołku w punkcie $(-2, 3)$, może być opisana za pomocą wzoru

A. $y = 3(x - 2)^2 + 3$. B. $y = 3[(x + 2)^2 + 3]$. C. $y = 3[(x + 2)^2 + 1]$.

19. P, P, P

19. Funkcja $f(x) = (x - 12)^2 + 6$

- A. w przedziale $(-\infty; -12)$ jest malejąca.
 B. w przedziale $(-\infty; 12)$ jest malejąca.
 C. w przedziale $(-\infty; 12)$ jest malejąca.

20. F, F, P

20. Wykresem funkcji kwadratowej f jest parabola o wierzchołku $W = (3, -5)$. Wówczas

A. $f(-1) = f(4)$. B. $f(-1) = f(5)$. C. $f(-1) = f(7)$.

21. F, P, P

21. Wykresy funkcji $f(x) = x^2 - 1$ i $g(x) = -x^2 + 1$ dzielą płaszczyznę na pięć części. Pole części zawierającej początek układu współrzędnych jest

- A. mniejsze od 1. B. większe od 2. C. mniejsze od 4.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

22. a) $W = (1, 0)$ b) $W = (-3, 5)$ c) $W = \left(\frac{3}{2}, -1\right)$ d) $W = (-6, -9)$

22. Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli o podanym równaniu.

a) $y = -2x^2 + 4x - 2$

c) $y = 4x^2 - 12x + 8$

b) $y = -x^2 - 6x - 4$

d) $y = \frac{1}{3}x^2 + 4x + 3$

23. a) $ZW = (-\infty; -\sqrt{2})$ b) $ZW = \langle 5; \infty \rangle$ c) $ZW = (-\infty; -1)$ d) $ZW = \langle 0; \infty \rangle$

23. Podaj zbiór wartości funkcji.

a) $f(x) = -\sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}$

c) $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{11}{3}$

b) $f(x) = 3x^2 - 18x + 32$

d) $f(x) = 0,2x^2 + 2x + 5$

24. a) np. $y = x^2 - 10x$ b) np. $y = -x^2 + 3x$ c) np. $y = 2x^2 - 4x + 4$ 24. Podaj równanie przykładowej paraboli, która z parabolą o równaniu $y = x^2 - 3x$

- a) ma dokładnie jeden punkt wspólny.
 b) ma dokładnie dwa punkty wspólne.
 c) nie ma punktów wspólnych.

25. $y = \frac{1}{8}(x + 3)^2 - 7$ 25. Napisz równanie paraboli, której wierzchołkiem jest punkt $W = (-3, -7)$ i która przechodzi przez punkt $P = (1, -5)$.

26. Wyróżnik funkcji kwadratowej $f(x) = kx^2 + 6x + 10$ jest równy 16. Wyznacz k .

27. Wyznacz równanie osi symetrii paraboli o równaniu $y = f(x)$ i określ przedziały monotoniczności funkcji f .

a) $f(x) = 3(x + 4)^2 - 1$

c) $f(x) = (x - \sqrt{2} + 1)^2 - 3$

b) $f(x) = -2(x + 1)^2 + 5$

d) $f(x) = (x + 2\sqrt{2} + 1)^2 + 2$

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

28. Dziedziną funkcji kwadratowej $y = f(x)$ jest przedział $\langle -3; 0 \rangle$. Wykresem tej funkcji jest część paraboli o wierzchołku $(-2, -6)$ przechodzącej przez punkt o współrzędnych $(-1, -4)$. Wyznacz wzór funkcji w postaci kanonicznej, naszkicuj jej wykres i podaj zbiór wartości.

29. Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = (1 - x)(x + 1) + 2x$. Wyznacz zbiór wartości tej funkcji.

30. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej x z przedziału $\langle -6; -3 \rangle$ trzecią część kwadratu tej liczby pomniejszoną o 6.

a) Podaj wzór tej funkcji.

b) Wyznacz największą wartość funkcji f w podanym przedziale.

31. Sporządź wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 3$. Dla jakich wartości m równanie $\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 3 = m$ ma dwa rozwiązania?

32. Dana jest funkcja $f(x) = -x^2 + 4x - 2$.

a) Wyznacz wzór funkcji f w postaci kanonicznej.

b) Naszkicuj wykres funkcji f .

c) Podaj przedziały monotoniczności funkcji $f(x - 3) + 7$.

33. Przez punkty $A = (-6, 4)$ i $B = (2, -4)$ przechodzi parabola, której wierzchołek leży na osi y . Wyznacz równanie tej paraboli.

34. Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = -3x^2 + bx + c$ jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt $W = (1, 5)$. Oblicz wartości współczynników b i c .

35. Funkcja kwadratowa $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ przyjmuje jednakowe wartości dla argumentów 1 i 5. Do wykresu tej funkcji należy początek układu współrzędnych.

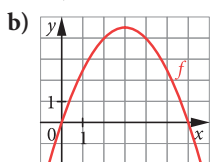
a) Wyznacz wartości współczynników b i c .

b) Dla wyznaczonych wartości współczynników b i c naszkicuj wykres funkcji f .

33. $y = \frac{1}{4}x^2 - 5$

34. $b = 6, c = 2$

35. a) $b = 3, c = 0$



26. $k = \frac{1}{2}$

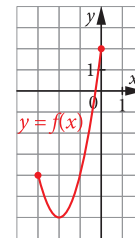
27. a) oś symetrii: $x = -4$;
malejąca w przedziale $(-\infty; -4)$,
rosnąca w przedziale $(-4; \infty)$

b) oś symetrii: $x = -1$;
rosnąca w przedziale $(-\infty; -1)$,
malejąca w przedziale $(-1; \infty)$

c) oś symetrii: $x = \sqrt{2} - 1$;
malejąca w przedziale
 $(-\infty; \sqrt{2} - 1)$,
rosnąca w przedziale $(\sqrt{2} - 1; \infty)$

d) oś symetrii: $x = -2\sqrt{2} - 1$;
malejąca w przedziale
 $(-\infty; -2\sqrt{2} - 1)$,
rosnąca w przedziale
 $(-2\sqrt{2} - 1; \infty)$

28. $f(x) = 2(x + 2)^2 - 6$

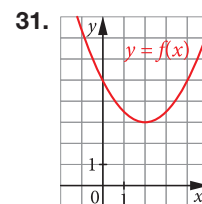


$ZW = \langle -6; 2 \rangle$

29. $ZW = (-\infty; 2)$

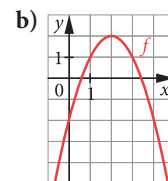
30. a) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 6$

b) 6



$m \in (3; \infty)$

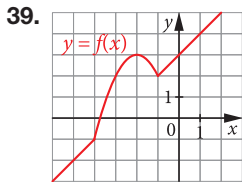
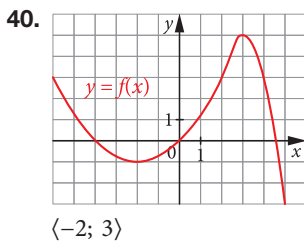
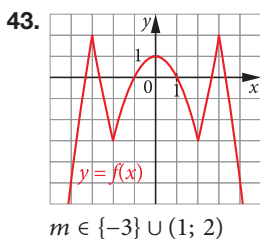
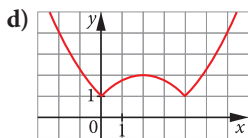
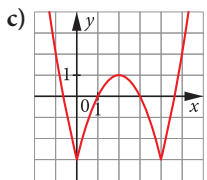
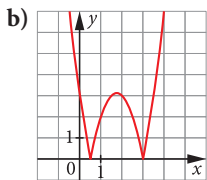
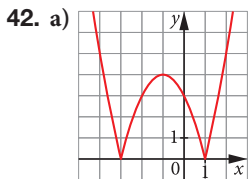
32. a) $f(x) = -(x - 2)^2 + 2$



c) rosnąca w przedziale $(-\infty; 5)$,
malejąca w przedziale $(5; \infty)$

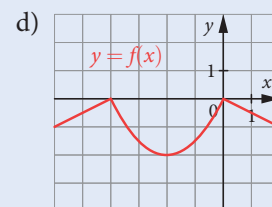
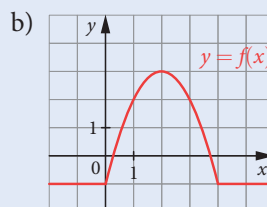
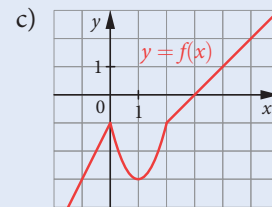
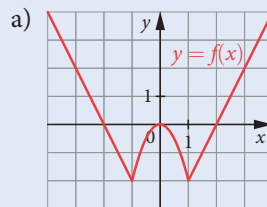
36. $a = 2$

37. $f(x) = -x^2 + 2x + 1$.

Wskazówka: Oś symetrii paraboli jest prosta $x = 1$.38. $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$, rosnąca w przedziale $(-\infty; 2)$, malejąca w przedziale $(2; \infty)$ 1 rozwiązanie dla $m \in (-\infty; 2) \cup (3; \infty)$,
2 rozwiązania dla $m \in \{2, 3\}$,
3 rozwiązania dla $m \in (2; 3)$  $\langle -2; 3 \rangle$  $m \in \{-3\} \cup (1; 2)$ 36. Funkcja kwadratowa f jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych x wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$. Najmniejsza wartość funkcji f jest równa -2 oraz $f(0) = f(4) = 6$. Oblicz wartość współczynnika a .37. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$, wiedząc, że $f(1) = 2$, $f(2) = 1$ i $f(-2019) = f(2021)$.38. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ i podaj przedziały jej monotoniczności, wiedząc, że $f(0) = -6$, $f(1) = 0$ oraz $f(2) = 2$.39. Sporządź wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} -(x+2)^2 + 3 & \text{dla } x \in \langle -4; -1 \rangle \\ x+3 & \text{dla } x \in (-\infty; -4) \cup (-1; \infty) \end{cases}$.Odczytaj z wykresu liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości m .40. Sporządź wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 + x & \text{dla } x < 2 \\ -2x^2 + 12x - 13 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$.

Podaj maksymalny przedział, w którym funkcja jest rosnąca.

41. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji złożony z fragmentu paraboli i półprostych. Podaj wzór, którym można opisać tę funkcję.



42. Sporządź wykres funkcji.

a) $y = |x^2 + 2x - 3|$

c) $y = |x^2 - 4x| - 3$

b) $y = |2x^2 - 7x + 3|$

d) $y = \left| -\frac{1}{4}x^2 + x \right| + 1$

43. Sporządź wykres funkcji $f(x) = 2 - \left| |x^2 - 4| - 5 \right|$. Dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma 4 rozwiązania?

41. a) $f(x) = \begin{cases} -2x - 4 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ -2x^2 & \text{dla } x \in \langle -1; 1 \rangle \\ 2x - 4 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty) \\ -x^2 + 4x - 1 & \text{dla } x \in \langle 0; 4 \rangle \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ 2x^2 - 4x - 1 & \text{dla } x \in \langle 0; 2 \rangle \\ x - 3 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -4) \\ \frac{1}{2}x^2 + 2x & \text{dla } x \in \langle -4; 0 \rangle \\ -\frac{1}{2}x & \text{dla } x \in (0; \infty) \end{cases}$