

Funkcje wykładnicze i logarytmiczne

5

Umiejętności

Po klasie pierwszej szkoły
ponadpodstawowej uczeń:

- zapisuje iloczyn jednakowych czynników w postaci potęgi o wykładniku całkowitym dodatnim,
- mnoży i dzieli potęgi o wykładnikach całkowitych dodatnich,
- mnoży potęgi o różnych podstawach i jednakowych wykładnikach,
- podnosi potęgę do potęgi,
- odczytuje i zapisuje liczby w notacji wykładniczej $a \cdot 10^k$, gdy $1 \leq a < 10$, k jest liczbą całkowitą.

Po tym dziale uczeń:

- sporządza wykresy i podaje własności funkcji wykładniczych i logarytmicznych,
- przekształca wykresy funkcji wykładniczych i logarytmicznych,
- rozwiązuje graficznie układ dwóch równań, z których co najmniej jedno jest równaniem wykładniczym lub logarytmicznym,
- rozwiązuje graficznie układ dwóch nierówności, z których co najmniej jedna jest nierównością wykładniczą lub logarytmiczną,
- stosuje w zadaniach wzory na logarytm iloczynu i ilorazu oraz na logarytm potęgi,
- rozwiązuje zadania osadzone w kontekście praktycznym z zastosowaniem funkcji wykładniczej i logarytmów,
- wykorzystuje własności logarytmów w zadaniach na dowodzenie,
- wyznacza dziedzinę funkcji typu $f(x) = \log_a(g(x))$.

1. Warto powtórzyć – potęgi

Przypomnijmy najważniejsze definicje oraz twierdzenia dotyczące potęg.

Definicje

- Jeżeli $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$ i $n > 0$, to $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$.

Jeżeli

- $a \neq 0$, to $a^0 = 1$.
- $a \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$ i $n > 1$, to $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.
- $a \neq 0$ i $n \in \mathbf{N}$, to $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
- $a > 0$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$ i $n > 1$, to $a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$.

Twierdzenie

Jeżeli $a > 0$, $b > 0$, $p \in \mathbf{Q}$ i $r \in \mathbf{Q}$, to:

- $a^p \cdot a^r = a^{p+r}$ iloczyn potęg o tych samych podstawach
- $\frac{a^p}{a^r} = a^{p-r}$ iloraz potęg o tych samych podstawach
- $(a^p)^r = a^{p \cdot r}$ potęga potęgi
- $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$ potęga iloczynu
- $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$ potęga ilorazu

Odpowiedzi i rozwiązania

1.1. a) $\frac{40}{3}$ b) 3 c) $\frac{10}{9}$

1.2. a) $\frac{1}{6}$ b) 6
c) 2^{80} d) 0

1.3. a) 24 b) $\frac{7}{2}$
c) 12 d) $\frac{6}{5}$

Zadania

1.1. Oblicz.

a) $\frac{2^8 - 6^3}{2^7 - 5^3}$ b) $\left(2^{-3} + \left(\frac{1}{2}\right)^4\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ c) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{-3}$

1.2. Oblicz.

a) $\frac{2^{99}}{2^{100} + 2^{101}}$ b) $\frac{3^{40} + 3^{41}}{3^{40} - 3^{39}}$ c) $\frac{2^{80} + 2^{81} + 2^{82}}{7}$ d) $\frac{2^{61} - 2^{60} - 2^{60}}{3^{50} - 5^{50}}$

1.3. Oblicz.

a) $2^{14} \cdot 3^{12} \cdot 6^{-11}$ b) $\frac{4^{10} \cdot 49^{12}}{8^6 \cdot 7^{20} \cdot 14^3}$ c) $\frac{12^{16} \cdot 15^{30}}{100^{15} \cdot 27^{15}}$ d) $\frac{6^{10}}{2^{10} \cdot 3^9 + 2^9 \cdot 3^{10}}$

1.4. Oblicz.

$$\text{a) } \frac{3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + 4^{-1}}{0,2^{-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}} \quad \text{b) } \frac{\left(\frac{3}{8}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}}{0,1^{-1} - 0,3^0 \cdot 0,5^{-2}} \quad \text{c) } \frac{\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \frac{10}{2^4}\right] : (-2)^{-5}}{\left[\left(\frac{3}{3}\right)^{-1} \cdot 7^0 - 1,25^{-1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^{-1}}$$

1.5. Oblicz.

$$\text{a) } \frac{2^{-5} \cdot 3^{-5}}{18^{-5}} \cdot \frac{5^{-3} \cdot 6^{-3}}{10^{-3}} \quad \text{c) } \frac{32^{-2} \cdot 15^3}{16^{-2} \cdot 3^3} : \frac{0,2^2 \cdot 0,4^{-3}}{0,4^2 \cdot 2^{-3}} \\ \text{b) } \frac{9^{-1} \cdot 27^{-2} \cdot 81}{9^{-2}} : \frac{25^{-1} \cdot 0,25 \cdot 10^2}{(5^{-1})^3 \cdot 125 \cdot 2^{-3}} \quad \text{d) } \left[\frac{2 \cdot [3,(3)]^{-2} \cdot 11^2}{33^2 \cdot 10^{-1}} - \frac{7^{-1} \cdot 3^{-2} \cdot 49}{0,9^{-1}} \right]^{-2}$$

1.6. Przedstaw podaną liczbę w postaci potęgi liczby 2.

$$\text{a) } \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[5]{8}} \quad \text{b) } \left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}} : \sqrt[6]{32} \right) \cdot \left(\sqrt[9]{\frac{1}{64}} \right)^{-2} \quad \text{c) } \sqrt{2\sqrt{2}} \quad \text{d) } \frac{\sqrt{8}}{2 \cdot \sqrt[3]{4\sqrt{2}}}$$

1.7. Przedstaw podane wyrażenie w postaci potęgi liczby a . Zakładamy, że $a > 0$.

$$\text{a) } \left(\left(a^2 \cdot \left(\frac{1}{a} \right)^3 \right)^2 \cdot a^{-3} \right)^{-2} \quad \text{c) } \left(\frac{1}{a} \right)^{\frac{1}{3}} : \left(\frac{1}{a^2} \right)^{\frac{1}{9}} \cdot \left(\frac{1}{a^{-4}} \right)^{\frac{1}{6}} \\ \text{b) } \left(\left(\frac{1}{a^2} \right)^4 : \left(a^6 \right)^{-\frac{1}{3}} \right)^2 \quad \text{d) } \frac{(a^{0,3} \cdot a^{0,2} : a^{0,4})^5}{\left(\frac{1}{a} \right)^{0,1} \cdot a^{0,5}}$$

1.8. Oblicz.

$$\text{a) } (3^{-1} - 3^{-2})^{-1} \quad \text{b) } (5 + 5^{-1})(5 - 5^{-1}) \quad \text{c) } \left(2^{\frac{1}{2}} + 2^{-\frac{1}{2}} \right)^2 \quad \text{d) } \left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{1}{3}} \right)^3$$

1.9. Porównaj liczby a i b .

$$\text{a) } a = 8^{20} \quad b = 4^{30} \quad \text{c) } a = \left(\left(\frac{1}{6} \right)^6 \right)^{-6} \quad b = 6^{2^5} \\ \text{b) } a = 3^{500} \quad b = 5^{300} \quad \text{d) } a = 9^{23} \cdot 6^{14} \quad b = 362^{15}$$

1.10. Ustaw w kolejności rosnącej podane liczby.

$$a = 9^{29}, \quad b = 27^2 \cdot 3^2, \quad c = (81^2)^7, \quad d = 243^{11}$$

1.11. Oblicz.

$$\text{a) } 4^{-2} \cdot 16^{\frac{1}{2}} \cdot 32^{0,4} \quad \text{c) } \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \cdot (3\sqrt{2})^{-2}}{9^{-\frac{1}{2}} \cdot (2\sqrt{3})^{-4}} \quad \text{e) } \frac{\left[\left(\frac{1}{3}\right)^5 : \left(\frac{1}{3}\right)^4\right]^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}}{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^{0,2} : \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}} \\ \text{b) } \frac{64^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2}{(2\sqrt{2})^2} \quad \text{d) } \frac{0,16^{-\frac{1}{2}} \cdot (5\sqrt{5})^{-2} \cdot 0,04}{(27\sqrt{8})^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{-4}} \quad \text{f) } \frac{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}}{\sqrt{6\sqrt{6}}}$$

1.4. a) 7 b) 2 c) -3**1.5. a) 9 b) $\frac{1}{8}$ c) 1 d) 4****1.6. a) $2^{\frac{17}{30}}$ b) $2^{-\frac{1}{6}}$ c) $2^{\frac{3}{4}}$ d) $2^{-\frac{1}{3}}$** **1.7. a) a^{10} b) a^8 c) $a^{\frac{5}{9}}$ d) $a^{0,1}$** **1.8. a) $\frac{9}{2}$ b) $24\frac{24}{25}$ c) 4,5 d) $21\frac{1}{3}$** **1.9. a) $a = b$ b) $a > b$ c) $a > b$ d) $a < b$** **1.10. $b < d < c < a$** **1.11. a) 1 b) 4****c) 81 d) $\frac{1}{36}$ e) $\frac{4}{3}$ f) $\sqrt[12]{3}$**

Uwagi metodyczne

Po przeciwczeniu działań na potęgach wprowadzamy funkcję wykładniczą; badamy jej wykres i własności, podajemy przykłady prostych równań (nierówności) wykładniczych, które uczeń może rozwiązać metodą graficzną, ćwicząc w tym celu przesunięcia oraz symetrie wykresów funkcji.

2. Funkcja wykładnicza

Umiejętności:

- szkicowanie wykresów funkcji wykładniczych

W poprzednim roku szkolnym zdefiniowaliśmy potęgę o wykładniku wymiernym oraz omówiliśmy sposób, w jaki można oszacować wartość potęgi o dowolnym wykładniku rzeczywistym. Skoro dla każdej liczby rzeczywistej x i dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej a jednoznacznie określona jest liczba a^x , to można rozważyć funkcję, która wykładnikowi x przyporządkowuje liczbę a^x . W definicji takiej funkcji pomijamy szczególnie przypadek $a = 1$, gdyż dla każdej wartości x mamy $1^x = 1$ (otrzymujemy zatem funkcję liniową stałą).

Definicja

Funkcję określoną wzorem $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, nazywamy **funkcją wykładniczą o podstawie a** . Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych ($x \in \mathbb{R}$), a jej wykres nazywamy **krzywą wykładniczą**.

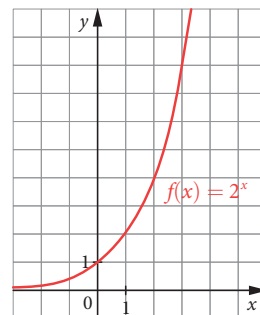
Przykład 1

Naszukujemy wykres funkcji $f(x) = 2^x$ i podamy niektóre jej własności.

Rozwiązanie

Na początku sporządzimy częściową tabelę funkcji dla tych argumentów, dla których łatwo obliczyć wartości funkcji.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
2^x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16



Zauważmy, że funkcja $f(x) = 2^x$ przyjmuje tylko wartości dodatnie, czyli jej wykres leży powyżej osi x .

Funkcja $f(x) = 2^x$ jest rosnąca.

Jeżeli $a > 1$, ω_1 , ω_2 są liczbami rzeczywistymi oraz $\omega_1 < \omega_2$, to $a^{\omega_1} < a^{\omega_2}$.

Każda prosta równoległa do osi x , leżąca powyżej tej osi, ma z wykresem funkcji $f(x) = 2^x$ dokładnie jeden punkt wspólny. Zatem równanie $2^x = m$ ma dla każdej dodatniej wartości m jedno rozwiązanie.

ZZ i MKP

tematy 6.2–6.4

Multiteka

- Wykres funkcji wykładniczej
- Przekształcanie wykresów funkcji wykładniczej (1)
- Przekształcanie wykresów funkcji wykładniczej (2)
- Datowanie radiowęglowe
- Wzrost wykładniczy w przyrodzie

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.2

Generator
testów i sprawdzianów

Zauważmy, że jeżeli $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, to zgodnie z definicją potęgi funkcję g można zapisać w postaci $g(x) = a^{-x}$. Zatem jeśli przyjmiemy, że $f(x) = a^x$, to $g(x) = f(-x)$.

Wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = f(-x)$ są symetryczne względem osi y .

Wniosek

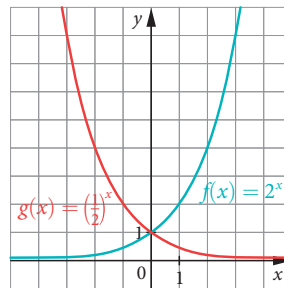
Wykresy funkcji $f(x) = a^x$ i $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, dla $a > 0$ i $a \neq 1$, są symetryczne względem osi y .

Przykład 2

Narysujemy w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x) = 2^x$ i $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ i podamy niektóre własności funkcji g .

Rozwiązanie

Wykres funkcji g leży powyżej osi x (funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie). Funkcja jest malejąca. Każda prosta równoległa do osi x , leżąca powyżej tej osi, ma z wykresem dokładnie jeden punkt wspólny.



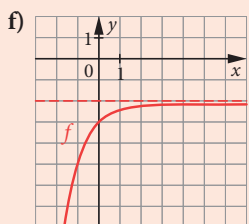
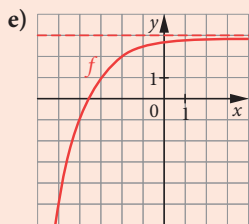
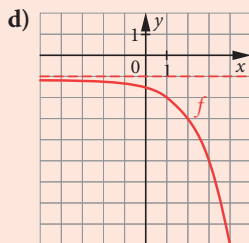
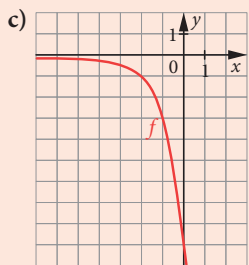
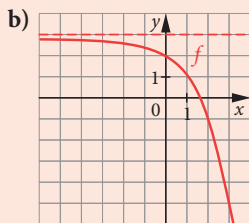
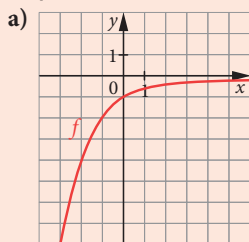
Podstawowe własności funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, wynikają ze sposobu, w jaki została określona potęga o wykładniku rzeczywistym.

- Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbf{R}$.
- Zbiorem wartości funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich (krzywe wykładnicze leżą w I oraz II ćwiartce układu współrzędnych, oś x jest asymptotą wykresu).
- Każda krzywa wykładnicza przecina oś y w punkcie $(0, 1)$, ponieważ dla dowolnej podstawy $a > 0$ mamy $f(0) = a^0 = 1$.
- Funkcja f nie ma miejsc zerowych.
- Funkcja f nie przyjmuje ani wartości największej, ani wartości najmniejszej.
- Funkcja $f(x) = a^x$ jest monotoniczna, przy czym:
 - dla $a > 1$ jest rosnąca,
 - dla $0 < a < 1$ jest malejąca.
- Równanie $f(x) = m$ ma jedno rozwiązanie dla każdego $m > 0$ i nie ma rozwiązań dla $m \leq 0$.

◀2.7. Narysuj wykres funkcji.

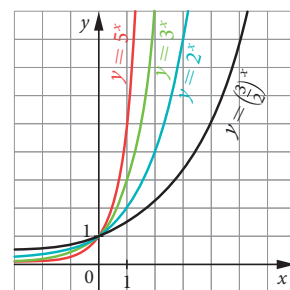
- a) $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$
 b) $f(x) = -2^x + 3$
 c) $f(x) = -3^{x+2}$
 d) $f(x) = -2^{x-1} - 1$
 e) $f(x) = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$
 f) $f(x) = -2 - \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Odp.:



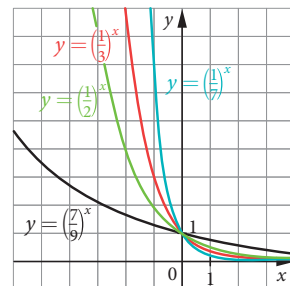
Jeżeli umieścimy w jednym układzie współrzędnych kilka wykresów funkcji wykładniczych o podstawach **większych od 1**, to zauważymy, że:

- dla $x > 0$ wykres funkcji o większej podstawie, np. funkcji $y = 3^x$, leży **powyżej** wykresu funkcji o mniejszej podstawie, np. funkcji $y = 2^x$,
- dla $x < 0$ wykres funkcji o większej podstawie, np. funkcji $y = 3^x$, leży **poniżej** wykresu funkcji o mniejszej podstawie, np. funkcji $y = 2^x$.



Ta sama zasada sprawdza się również dla wykresów funkcji wykładniczych o podstawach **mniejszych od 1**:

- dla $x > 0$ wykres funkcji o większej podstawie, np. funkcji $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, leży **powyżej** wykresu funkcji o mniejszej podstawie, np. funkcji $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$,
- dla $x < 0$ wykres funkcji o większej podstawie, np. funkcji $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, leży **poniżej** wykresu funkcji o mniejszej podstawie, np. funkcji $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.



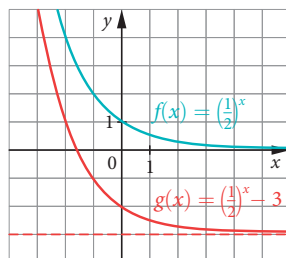
Przykład 3 ◀ zad. 2.7, 2.8

Dzięki prostym przekształceniom wykresów funkcji wykładniczych można otrzymywać wykresy innych funkcji. Sporządzimy kilka takich wykresów.

Rozwiązanie

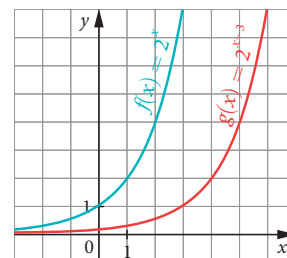
a) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3$

Wykres powstaje po przesunięciu wykresu funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ o wektor $\vec{u} = [0, -3]$.



b) $g(x) = 2^{x-3}$

Wykres powstaje po przesunięciu wykresu funkcji $f(x) = 2^x$ o wektor $\vec{u} = [3, 0]$.

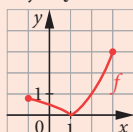
◀2.8. Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$ dla argumentów z podanego zbioru. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji przyjmowane w tym zbiorze.

a) $f(x) = |2^{x-1} - 1|$, $\langle -1; 3 \rangle$ c) $f(x) = \left|1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{x+4}\right|$, $\langle -5; -3 \rangle$

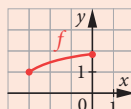
b) $f(x) = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} - 2\right|$, $\langle -3; 0 \rangle$ d) $f(x) = \left|-2 - \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}\right|$, $\langle -4; 0 \rangle$

Odp.:

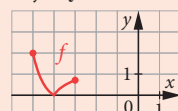
a) najmniejsza: 0,
największa: 3



b) najmniejsza: 1,
największa: $1\frac{7}{8}$



c) najmniejsza: 0,
największa: 2



d)

najmniejsza: $2\frac{1}{9}$,
największa: 11



c) $h(x) = -9 \cdot 3^x$

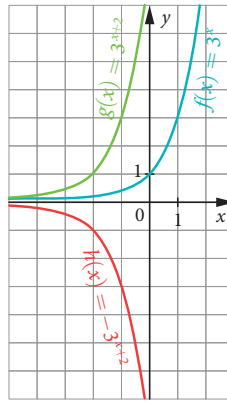
Wzór funkcji przekształcamy do postaci $h(x) = -3^{x+2}$.
Rysujemy kolejne wykresy.

Krok 1: wykres funkcji $f(x) = 3^x$

Krok 2: wykres $g(x) = 3^{x+2}$ ← przesunięcie o wektor $\vec{u} = [-2, 0]$

Krok 3: wykres $h(x) = -3^{x+2}$ ← symetria względem osi x

Podane przekształcenia można wykonać w odwrotnej kolejności.



d) $h(x) = 3^{x-1} + 4$

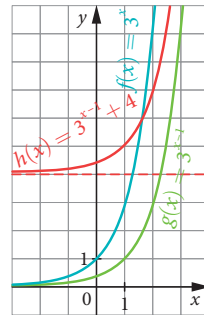
Rysujemy kolejne wykresy.

Krok 1: $f(x) = 3^x$

Krok 2: $g(x) = 3^{x-1}$ ← przesunięcie o wektor $\vec{u} = [1, 0]$

Krok 3: $h(x) = 3^{x-1} + 4$ ← przesunięcie o wektor $\vec{v} = [0, 4]$

Podane przekształcenia można wykonać w odwrotnej kolejności.



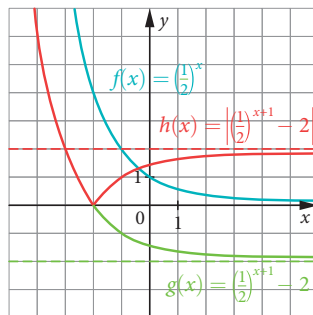
e) $h(x) = \left| \left(\frac{1}{2} \right)^{x+1} - 2 \right|$

Rysujemy kolejne wykresy.

Krok 1: $f(x) = \left(\frac{1}{2} \right)^x$

Krok 2: $g(x) = \left(\frac{1}{2} \right)^{x+1} - 2$ ← przesunięcie o wektor $\vec{u} = [-1, -2]$

Krok 3: $h(x) = \left| \left(\frac{1}{2} \right)^{x+1} - 2 \right|$ ← symetria fragmentu wykresu funkcji g leżącego poniżej osi x względem tej osi i zachowanie pozostałej części wykresu bez zmian



◀2.15. Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$. Odczytaj z wykresu zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leq a$.

a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $a = 4$

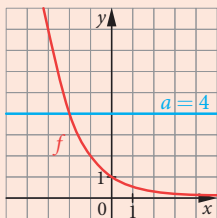
b) $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$, $a = -1$

c) $f(x) = 5^{x-2} - 3$, $a = -2$

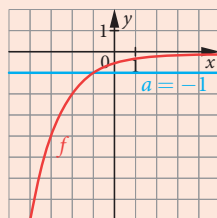
d) $f(x) = -3^x + 3$, $a = 0$

Odp.:

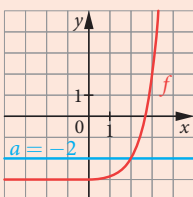
a) $x \in (-2; \infty)$



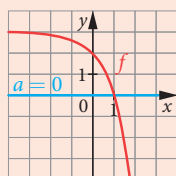
b) $x \in (-\infty; -1)$



c) $x \in (-\infty; 2)$



d) $x \in (1; \infty)$



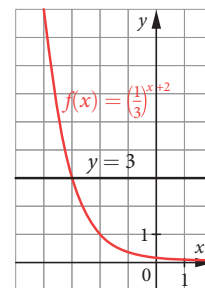
Przykład 4 ◀ zad. 2.15

Naszkicujemy wykres funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$ i odczytamy z niego zbiór rozwiązań nierówności $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} \geq 3$.

Rozwiązanie

Prosta $y = 3$ przecina wykres funkcji w punkcie o odciętej -3 . Z wykresu odczytujemy, że funkcja przyjmuje wartości większe od 3 dla $x < -3$.

Odp.: $x \in (-\infty; -3)$



Przykład 5 ◀ zad. 2.16

Rozwiążemy graficznie podane równanie i nierówność:

$$3^{x-1} + 4 = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}, \quad 3^{x-1} + 4 \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}$$

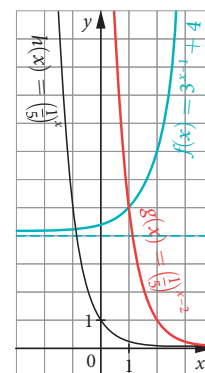
Rozwiązanie

Przyjmijmy, że $f(x) = 3^{x-1} + 4$ oraz $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}$.

Znajdziemy punkty przecięcia wykresów tych funkcji i sprawdzimy, czy współrzędne x tych punktów spełniają równanie $f(x) = g(x)$.

Wykres funkcji $f(x) = 3^{x-1} + 4$ był rysowany w przykładzie 3 d.

Narysowanie wykresu funkcji $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}$ polega na przesunięciu wykresu funkcji $h(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ o wektor $\vec{u} = [2, 0]$.



Z rysunku odczytujemy, że wykresy funkcji f i g mają jeden punkt wspólny, o współrzędnych $(1, 5)$.

Sprawdzamy, czy $f(1) = g(1)$.

$$f(1) = 3^0 + 4 = 5, \quad g(1) = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5$$

$f(1) = g(1)$, więc liczba 1 jest rozwiązaniem równania $f(x) = g(x)$.

Po odczytaniu współrzędnych (x_0, y_0) punktu wspólnego wykresów funkcji f i g sprawdzamy rachunkowo, czy $f(x_0) = g(x_0) = y_0$.

Punkty wykresu funkcji f leżą poniżej punktów wykresu funkcji g dla $x < 1$. Zatem zbiorem rozwiązań nierówności $3^{x-1} + 4 \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}$ jest przedział $(-\infty; 1)$.

Odp.: $3^{x-1} + 4 = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}$ dla $x = 1$; $3^{x-1} + 4 \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}$ dla $x \in (-\infty; 1)$

◀2.16. W jednym układzie współrzędnych narysuj wykresy funkcji $y = f(x)$ oraz $y = g(x)$, a następnie odczytaj rozwiązanie: I. równania $f(x) = g(x)$, II. nierówności $f(x) < g(x)$.

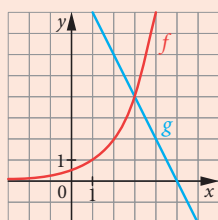
a) $f(x) = 2^{x-1}$ $g(x) = -2x + 10$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$ $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$

b) $f(x) = 3^x$ $g(x) = -x + 4$

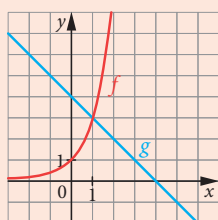
d) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - 3$ $g(x) = 5$

Odp.: a)



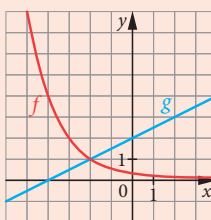
I. $x = 3$
II. $x \in (-\infty; 3)$

b)



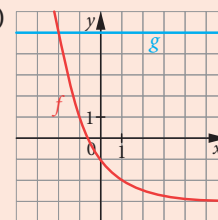
I. $x = 1$
II. $x \in (-\infty; 1)$

c)



I. $x = -2$
II. $x \in (-2; \infty)$

d)

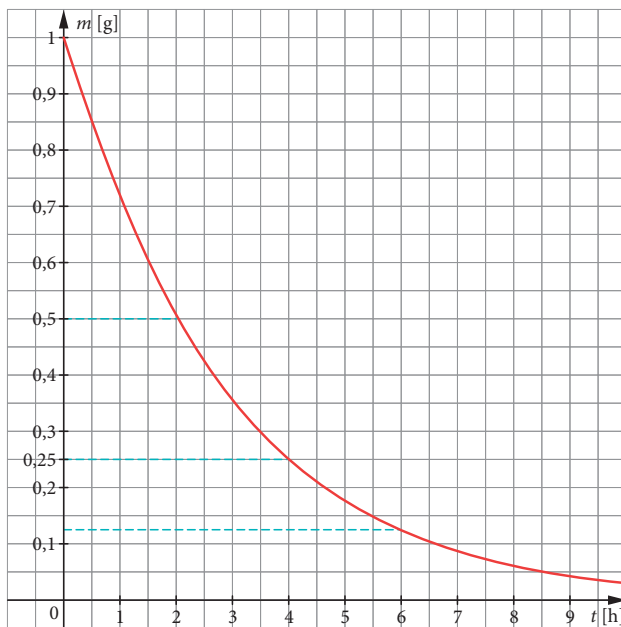


I. $x = -2$
II. $x \in (-2; \infty)$

Za pomocą funkcji wykładniczej można opisać przebieg wielu procesów fizycznych.

Przykład 6 ◀ zad. 2.20

Zależność masy m izotopu pierwiastka promieniotwórczego (którego cząstki ulegają rozpadowi) od czasu t można opisać za pomocą malejącej funkcji wykładniczej. Przyjmijmy, że w chwili początkowej masa substancji wynosiła 1 gram. Wykres przedstawia, ile gramów substancji **nie uległo** rozpadowi po określonym czasie (jednostką na osi poziomej jest godzina, jednostką na osi pionowej jest gram).



Można zauważyć, że po 2 godzinach połowa substancji uległa rozpadowi, po kolejnych 2 godzinach znowu połowa pozostałej części uległa rozpadowi itd. Okres (oznaczany T), w którym połowa masy uległa rozpadowi, nazywamy **okresem połowicznego rozpadu**.

W podanym przykładzie wynosi on 2 godziny ($T = 2$), a wzór funkcji opisującej ten proces to:

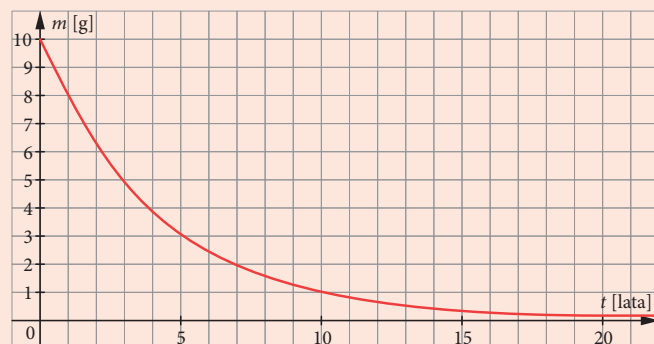
$$m(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^t$$

Podobne zależności opisują wiele innych procesów fizycznych, np. rozładowywanie kondensatora lub stygnięcie ciała w otoczeniu o stałej temperaturze.

◀ 2.20. Wykres ilustruje rozpad 10 g masy pewnego pierwiastka promieniotwórczego. Odczytaj z wykresu

a) ile wynosi okres T połowicznego rozpadu tego pierwiastka.

b) po jakim czasie masa pierwiastka, który nie uległ jeszcze rozkładowi, osiągnęła ok. 1 g.



Odp.: a) 3 lata b) po 10 latach

Odpowiedzi i rozwiązania

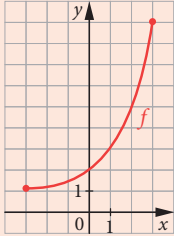
2.1. B

2.2. C

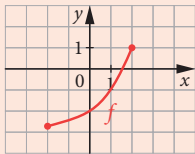
2.3. A

2.4.

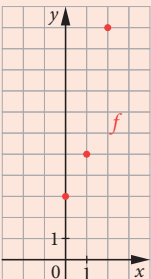
a) (0, 2)



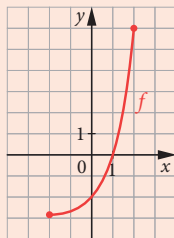
b) (0, -2)



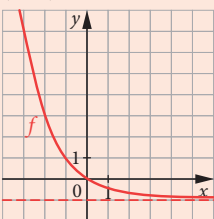
c) (0, 3)



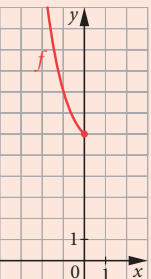
d) (0, -2)



e) (0, 0)



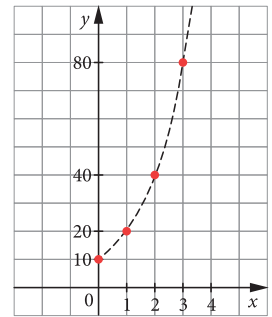
f) (0, 6)



Przykład 7

Jeżeli założymy, że liczebność populacji pewnego gatunku owadów zwiększa się dwukrotnie w ciągu każdej doby i że na początku badanego okresu liczebność populacji wynosiła N , to liczebność po upływie x dni opisuje funkcja o wzorze $y(x) = N \cdot 2^x$.

Na wykresie przedstawiamy liczebność populacji w ciągu 3 dni dla $N = 10$.



Zadania

W każdym z zadań 2.1–2.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

2.1. Wskaż wzór funkcji malejącej.

A. $f(x) = \left(\frac{5}{3}\right)^x$ B. $f(x) = -10^x$ C. $f(x) = \left(\frac{3}{7}\right)^{-x}$ D. $f(x) = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$

2.2. Wskaż wzór funkcji, której wykres powstanie w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ przez symetrię względem osi y .

A. $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ B. $g(x) = -\left(\frac{2}{3}\right)^x$ C. $g(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ D. $g(x) = -\left(\frac{3}{2}\right)^x$

2.3. Wskaż wzór funkcji, której wykres powstanie w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $f(x) = 4^x - 1$ przez symetrię względem osi y .

A. $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 1$ B. $g(x) = -4^x - 1$ C. $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x + 1$ D. $g(x) = -4^x + 1$

2.4. Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$ dla argumentów z podanego zbioru i podaj współrzędne punktu przecięcia tego wykresu z osią y .

a) $f(x) = 2^x + 1$ $x \in \langle -3; 3 \rangle$ d) $f(x) = 3^x - 3$ $x \in \langle -2; 2 \rangle$

b) $f(x) = 2^x - 3$ $x \in \langle -2; 2 \rangle$ e) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$ $x \in \mathbb{R}$

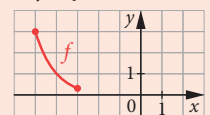
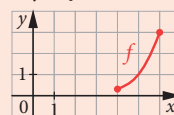
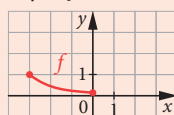
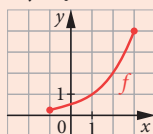
c) $f(x) = 3^x + 2$ $x \in \{0, 1, 2\}$ f) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 5$ $x \in (-\infty; 0)$

2.5. Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$ dla argumentów z podanego zbioru. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji przyjmowane w tym zbiorze.

a) $f(x) = 2^{x-1}$ $\langle -1; 3 \rangle$ c) $f(x) = 3^{x-5}$ $\langle 4; 6 \rangle$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$ $\langle -3; 0 \rangle$ d) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+4}$ $\langle -5; -3 \rangle$

2.5. a) najmniejsza: $\frac{1}{4}$, największa: 4 b) najmniejsza: $\frac{1}{8}$, największa: 1 c) najmniejsza: $\frac{1}{3}$, największa: 3 d) najmniejsza: $\frac{1}{3}$, największa: 3



2.6. Narysuj wykres funkcji. Podaj jej miejsce zerowe, jeśli istnieje.

- a) $f(x) = 2^{x-1} + 2$ c) $f(x) = 3^{x+5} - 3$ e) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} - 2$
 b) $f(x) = 2^{x+3} - 1$ d) $f(x) = 3^{x-4} + \frac{3}{2}$ f) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-5} + 5$

2.7. Narysuj wykres funkcji.

- a) $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$ c) $f(x) = -3^{x+2}$ e) $f(x) = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$
 b) $f(x) = -2^x + 3$ d) $f(x) = -2^{x-1} - 1$ f) $f(x) = -2 - \left(\frac{1}{3}\right)^x$

2.8. Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$ dla argumentów z podanego zbioru. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji przyjmowane w tym zbiorze.

- a) $f(x) = \left|2^{x-1} - 1\right|$ $\langle -1; 3 \rangle$ c) $f(x) = \left|1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{x+4}\right|$ $\langle -5; -3 \rangle$
 b) $f(x) = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} - 2\right|$ $\langle -3; 0 \rangle$ d) $f(x) = \left|-2 - \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}\right|$ $\langle -4; 0 \rangle$

2.9. Punkt $P = (-3, 64)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = a^x$, $a > 0$. Wyznacz a .

2.10. Punkt $P = (-3, 55)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x + k$. Wyznacz k .

2.11. Punkt $P = \left(2, \frac{1}{9}\right)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = 3^{x-m}$. Wyznacz m .

D

2.12. Wykaż, że punkt $\left(\frac{2}{3}, \frac{9 + \sqrt[3]{9}}{9}\right)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} + 1$.

2.13. Podaj przykład funkcji określonej wzorem $f(x) = a^x + b$, której wykres przechodzi przez punkt $P = (-2, 3)$ i która jest

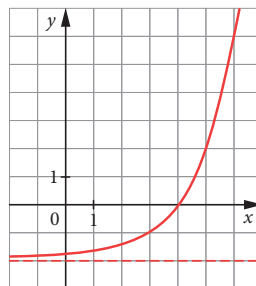
- a) rosnąca. b) malejąca.

2.14. Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji $f(x) = 2^{x-a} + b$.

- a) Wyznacz wartości a i b .
 b) Sporządź wykres funkcji $g(x) = f(-x)$.

2.15. Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$. Odczytaj z wykresu zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leq a$.

- a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $a = 4$ c) $f(x) = 5^{x-2} - 3$, $a = -2$
 b) $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$, $a = -1$ d) $f(x) = -3^x + 3$, $a = 0$



2.12. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} + 1$ Należy wykazać, że $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{9 + \sqrt[3]{9}}{9}$.

Dowód: $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} + 1 = 3^{x-2} + 1$

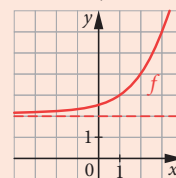
Wówczas teza zachodzi, bo: $\frac{9 + \sqrt[3]{9}}{9} = 1 + \frac{\sqrt[3]{9}}{9} = 1 + \frac{1}{9^{\frac{1}{3}}} = 1 + 9^{\frac{1}{3}-1} = 1 + 3^{\frac{2}{3}-2}$

2.13. a) np. $f(x) = 2^x + \frac{11}{4}$ **b)** np. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$

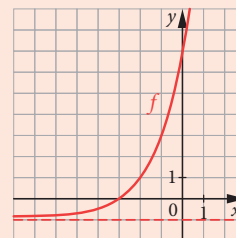
2.14. a) $a = 3$, $b = -2$

2.15. Patrz s. 372.

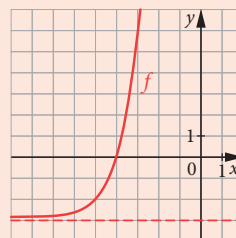
2.6. a) brak miejsc zerowych



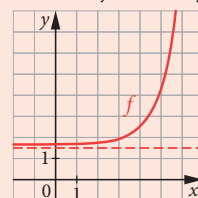
b) $x = -3$



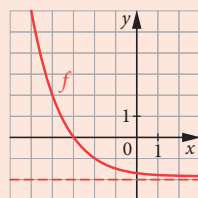
c) $x = -4$



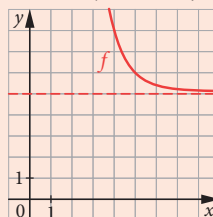
d) brak miejsc zerowych



e) $x = -3$



f) brak miejsc zerowych



2.7. Patrz s. 370.

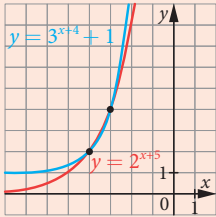
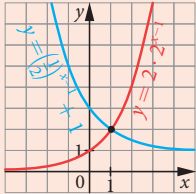
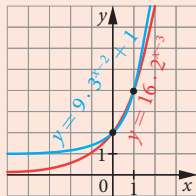
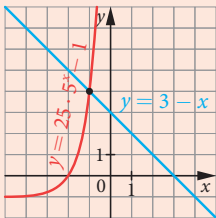
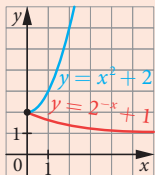
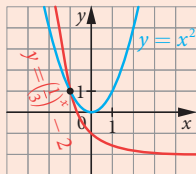
2.8. Patrz s. 370.

2.9. $a = \frac{1}{4}$

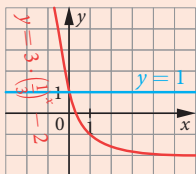
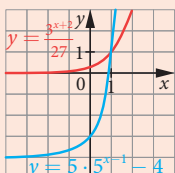
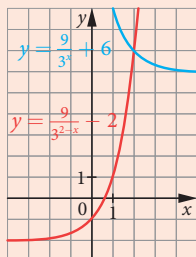
2.10. $k = -70$

2.11. $m = 4$

2.16. Patrz s. 372.

2.17. a) $x = -4$ lub $x = -3$ b) $x = 1$ c) $x = 0$ lub $x = 1$ d) $x = -1$ e) $x = 0$ f) $x = -1$ 

2.18.

a) $x \in (-\infty; 0)$ b) $x \in (-\infty; 1)$ c) $x \in (-\infty; 2)$ d) $x \in (-\infty; 1)$ 2.16. W jednym układzie współrzędnych narysuj wykresy funkcji $y = f(x)$ oraz $y = g(x)$, a następnie odczytaj rozwiązanie:I. równania $f(x) = g(x)$,II. nierówności $f(x) < g(x)$.

a) $f(x) = 2^{x-1}$ $g(x) = -2x + 10$ c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$ $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$

b) $f(x) = 3^x$ $g(x) = -x + 4$ d) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - 3$ $g(x) = 5$

2.17. Rozwiąż graficznie równanie.

a) $2^{x+5} = 3^{x+4} + 1$

d) $25 \cdot 5^x - 1 = 3 - x$

b) $2 \cdot 2^{x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 1$

e) $2^{-x} + 1 = x^2 + 2$ dla $x \geq 0$

c) $16 \cdot 2^{x-3} = 9 \cdot 3^{x-2} + 1$

f) $\left(\frac{1}{3}\right)^x - 2 = x^2$

2.18. Rozwiąż graficznie nierówność.

a) $3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2 > 1$

c) $\frac{9}{3^{2-x}} - 2 \leq \frac{9}{3^x} + 6$

b) $\frac{3^{x+2}}{27} > 5 \cdot 5^{x-1} - 4$

d) $25 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x - 3 \geq \frac{1}{16} \cdot 2^{x+5} - 2$

2.19. Rozwiąż graficznie układ równań.

a) $\begin{cases} y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4} \\ y = x^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = 3^{-(x+2)} - 1 \\ y = \frac{3}{2}x + 3 \end{cases}$

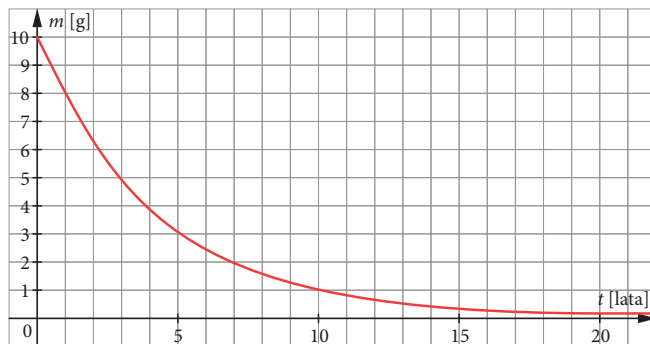
c) $\begin{cases} 2^{x-3} - y + 2 = 0 \\ 3x + 4y - 28 = 0 \end{cases}$

2.20. Wykres ilustruje rozpad 10 g masy pewnego pierwiastka promieniotwórczego.

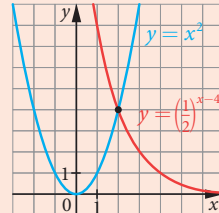
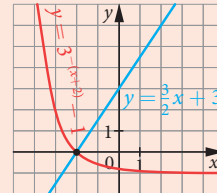
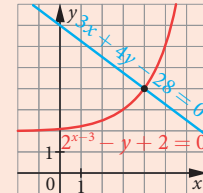
Odczytaj z wykresu

a) ile wynosi okres T połowicznego rozpadu tego pierwiastka.

b) po jakim czasie masa pierwiastka, który nie uległ jeszcze rozkładowi, osiągnęła ok. 1 g.



2.19.

a) $x = 2, y = 4$ b) $x = -2, y = 0$ c) $x = 4, y = 4$ 

2.20. a) 3 lata b) po 10 latach

2.21. Rozwiąż graficznie układ równań $\begin{cases} y = -3^x \\ y = -|x - 2| + 1 \end{cases}$.

2.22. W jednym układzie współrzędnych naszkicuj wykresy funkcji $f(x) = 3^x - 1$ oraz $h(x) = \left| \frac{2x-4}{x} \right|$. Odczytaj z rysunku rozwiązanie równania $f(x) = h(x)$.

* **2.23.** Narysuj wykres funkcji $y = f(x)$.

a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ b) $f(x) = 3^{|x-2|}$ c) $f(x) = \sqrt{2^{|2x|+1}}$ d) $f(x) = 2^{|x-1|-|x+1|}$

* **2.24.** Dla jakich wartości parametru m równanie $\left| 2^{x+3} - 1 \right| - 2 = m$ ma dwa rozwiązania?

Prosto do matury

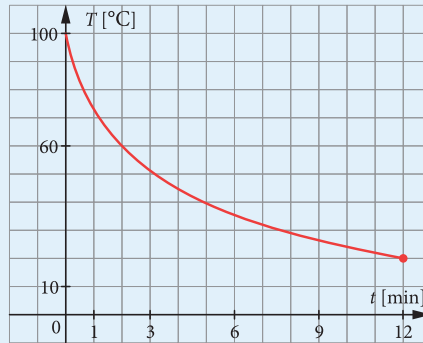


- Dana jest funkcja $f(x) = 0,7^x - 1$. Oceń prawdziwość podanych zdań.
A. Funkcja f jest rosnąca.
B. Zbiorem wartości funkcji f jest $\langle -1; \infty \rangle$.
C. Miejscem zerowym funkcji f jest liczba 1.
- Sporządź w jednym układzie współrzędnych wykresy odpowiednich funkcji i odczytaj rozwiązanie równania $4^{x-2} - 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-4}$.

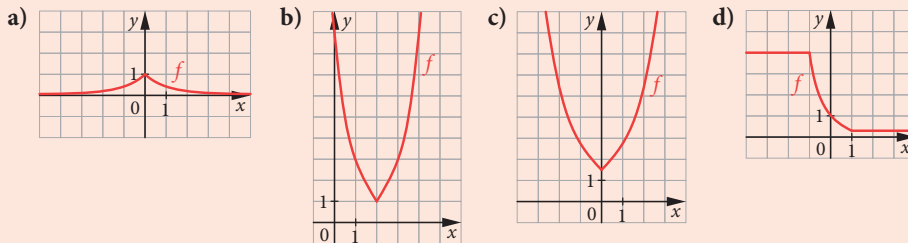
D **3.** Wykaż, że punkt $P = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{4}\right)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^x$.

- Narysuj wykres funkcji $f(x) = |1 - 2^{x-1}|$.
- Dla jakich wartości m równanie $|1 - 2^{x-1}| = m$ ma dwa rozwiązania?

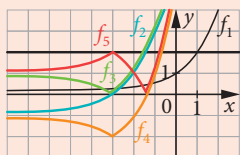
- Funkcja $f(x) = 80 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x + 20$ opisuje stygnięcie ciała w otoczeniu o stałej temperaturze (rysunek obok).
a) Jaka była początkowa temperatura ciała?
b) Po ilu minutach ciało ostygło do temperatury 60°C ?
c) Ile wynosiła temperatura otoczenia?



2.23.



2.24.

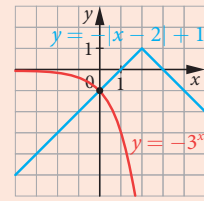


Rysujemy kolejno wykresy funkcji:

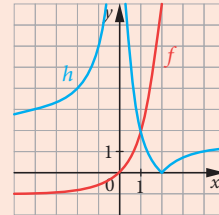
$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2^x, & f_2(x) &= f_1(x+3) - 1 = 2^{x+3} - 1, \\ f_3(x) &= |f_2(x)| = |2^{x+3} - 1|, & f_4(x) &= f_3(x) - 2 = \\ &= |2^{x+3} - 1| - 2, & f(x) &= |f_4(x)| = \left| |2^{x+3} - 1| - 2 \right| \end{aligned}$$

Równanie $f(x) = m$ ma 2 rozwiązania dla $m \in (0; 1) \cup \{2\}$.

2.21. $x = 0, y = -1$



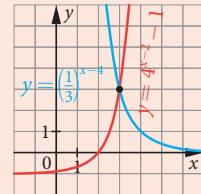
2.22. $x = 1$



Prosto do matury

1. F, F, F

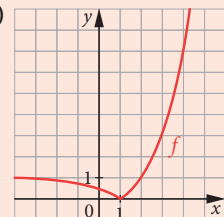
2. $x = 3$



$$\begin{aligned} \mathbf{3.} \quad f(x) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^x \\ f\left(\frac{4}{3}\right) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}, \text{ bo:} \\ \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{\frac{4}{3}} &= \left(\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^2}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(2^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{3}} = \\ &= 2^{-2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Zatem punkt $P = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{4}\right)$ należy do wykresu funkcji f .

4. a)



b) $m \in (0; 1)$

- 100°C
- po 2 minutach
- 20°C

3. Warto powtórzyć – logarytmy

Twierdzenie

Gdy liczby a i b są dodatnie i $a \neq 1$, to istnieje dokładnie jedna taka liczba c , że $a^c = b$.

Definicja

Logarytmem przy podstawie a ($a > 0$ i $a \neq 1$) liczby b ($b > 0$) nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść liczbę a , aby otrzymać liczbę b .

$$\log_a b = c, \text{ gdy } a^c = b \text{ i } a > 0, a \neq 1, b > 0$$

Liczbę b nazywamy **liczbą logarytmowaną**.

Zapisane poniżej własności wynikają bezpośrednio z definicji logarytmu.

Wniosek

Dla każdego $a > 0$ i $a \neq 1$ oraz $b > 0$:

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$a^{\log_a b} = b$$

W zapisie **logarytmu dziesiętnego** pomijamy liczbę 10 i np. logarytm przy podstawie 10 liczby 5 zapisujemy: $\log 5$.

Przykład 1

a) Jeżeli $3^x = 5$, to $x = \log_3 5$.

b) Jeżeli $(\sqrt{17})^x = 8$, to $x = \log_{\sqrt{17}} 8$.

Przykład 2

a) $\log_3 9 = 2$, bo $3^2 = 9$

e) $\log 100 = 2$, bo $10^2 = 100$

b) $\log_6 \frac{1}{36} = -2$, bo $6^{-2} = \frac{1}{36}$

f) $\log 1 = 0$, bo $10^0 = 1$

c) $\log_{81} 9 = \frac{1}{2}$, bo $81^{\frac{1}{2}} = 9$

g) $\log 0,01 = -2$, bo $10^{-2} = 0,01$

d) $\log_5 5 = 1$, bo $5^1 = 5$

h) $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2}$, bo $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$

Przykład 3

Obliczymy podany logarytm.

a) $\log_{\sqrt{7}}(7\sqrt[3]{7})$

b) $\log_{\sqrt[3]{9}}(3\sqrt[4]{3})$

Rozwiązanie

a) $\log_{\sqrt{7}}(7\sqrt[3]{7}) = x$

← wprowadzamy zmienną pomocniczą x

$$(\sqrt{7})^x = 7\sqrt[3]{7}$$

← korzystamy z definicji logarytmu

$$7^{\frac{1}{2}x} = 7^{1+\frac{1}{3}}$$

← sprowadzamy potęgi do tej samej podstawy

$$\frac{1}{2}x = \frac{4}{3}$$

← porównujemy wykładniki

$$x = \frac{8}{3}$$

Odp.: $\log_{\sqrt{7}}(7\sqrt[3]{7}) = \frac{8}{3}$

b) $\log_{\sqrt[3]{9}}(3\sqrt[4]{3}) = x$

← wprowadzamy zmienną pomocniczą x

$$(\sqrt[3]{9})^x = 3\sqrt[4]{3}$$

← korzystamy z definicji logarytmu

$$\left(9^{\frac{1}{3}}\right)^x = 3 \cdot 3^{\frac{1}{4}}$$

$$\left(3^{\frac{2}{3}}\right)^x = 3^{1+\frac{1}{4}}$$

$$3^{\frac{2}{3}x} = 3^{\frac{5}{4}}$$

← sprowadzamy potęgi do tej samej podstawy

$$\frac{2}{3}x = \frac{5}{4}$$

← porównujemy wykładniki

$$x = \frac{15}{8}$$

Odp.: $\log_{\sqrt[3]{9}}(3\sqrt[4]{3}) = \frac{15}{8}$

Przykład 4

Wiemy, że $\log_5 x = 3$. Wyznamy liczbę x .

Rozwiązanie

Zgodnie z definicją logarytmu liczba 3 jest wykładnikiem potęgi, do której należy podnieść liczbę 5, żeby otrzymać x . Zatem $x = 5^3 = 125$.

Odp.: $x = 125$

Przykład 5

a) $4^{\log_4 9} = 9$

b) $(\sqrt{13})^{2 \log_{13} 10} = ((\sqrt{13})^2)^{\log_{13} 10} = 13^{\log_{13} 10} = 10$

c) $9^{\log_3 12} = (3^2)^{\log_3 12} = 3^{2 \cdot \log_3 12} = (3^{\log_3 12})^2 = 12^2 = 144$

Zadania

3.1. a) 3 **b)** 2 **c)** -3

d) -3 **e)** 1 **f)** $\frac{2}{3}$

g) 0 **h)** -2

3.2. a) $\frac{4}{3}$ **b)** $\frac{3}{4}$ **c)** $\frac{3}{2}$

d) $\frac{1}{6}$ **e)** $-\frac{3}{4}$ **f)** $-\frac{3}{2}$

3.3. a) $x = 8$

b) $x = 33$

c) $x = 1$

d) $x = \frac{\sqrt{10}}{10}$

e) $x = 81$

f) $x = 16$

3.4. a) $x = 2$

b) $x = 10$

c) $x = 9$

d) $x = 64$

e) $x = \frac{1}{36}$

f) $x = \frac{1}{2}$

3.5. a) 7 **b)** 2 **c)** $\frac{4}{5}$

d) 12 **e)** 16 **f)** 3

3.1. Oblicz.

a) $\log_2 8$

c) $\log_3 \frac{1}{27}$

e) $\log_{2,7} 2,7$

g) $\log_{17} 1$

b) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{16}$

d) $\log 0,001$

f) $\log_5 \sqrt[3]{25}$

h) $\log_{\sqrt{6}} \frac{1}{6}$

3.2. Oblicz.

a) $\log_{2\sqrt{2}} 4$

c) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{\sqrt{6}}{36}$

e) $\log_{\sqrt[3]{9}} \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\log_{25} 5\sqrt{5}$

d) $\log_{0,01} \frac{\sqrt[3]{100}}{10}$

f) $\log_{4\sqrt[3]{\frac{1}{2}}} \frac{\sqrt{2}}{8}$

3.3. Oblicz x .

a) $\log_2 x = 3$

c) $\log_{\frac{2}{3}} x = 0$

e) $\log_{\frac{1}{3}} x = -4$

b) $\log_{33} x = 1$

d) $\log x = -0,5$

f) $\log_{\sqrt{2}} x = 8$

3.4. Oblicz x .

a) $\log_x 4 = 2$

c) $\log_x 3 = 0,5$

e) $\log_x 6 = -\frac{1}{2}$

b) $\log_x 1000 = 3$

d) $\log_x 4 = \frac{1}{3}$

f) $\log_x \sqrt[3]{4} = -\frac{2}{3}$

3.5. Oblicz.

a) $10^{\log 7}$

c) $2^{2 - \log_2 5}$

e) $9^{\log_3 4}$

b) $5^{\log_5 2}$

d) $3^{1 + 2 \log_3 2}$

f) $6^{\log_{36} 9}$

4. Własności logarytmów

Umiejętności:

- stosowanie wzorów na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi
- stosowanie wzoru na zamianę podstawy logarytmu

Omówimy teraz podstawowe własności logarytmów. Dzięki nim logarytmy niezwykle ułatwiły wykonywanie skomplikowanych rachunków i odegrały olbrzymią rolę w zastosowaniach matematyki. Bez przesady można stwierdzić, że sposób rachowania za pomocą logarytmów umożliwił skok cywilizacyjny porównywalny z efektem zastosowania komputerów.

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ prawdziwy jest wzór:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Dowód

W dowodzie wykorzystamy własności działań na potęgach.

Przyjmijmy oznaczenia:

$$\log_a x = u$$

$$\log_a y = t$$

Zgodnie z definicją logarytmu otrzymujemy:

$$x = a^u$$

$$y = a^t$$

$$x \cdot y = a^u \cdot a^t$$

← mnożymy obie równości stronami

$$x \cdot y = a^{u+t}$$

← wzór na iloczyn potęg o tych samych podstawach

$$u + t = \log_a(x \cdot y)$$

← korzystamy z definicji logarytmu

$$\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$$

← podstawiamy w miejsce u i t odpowiednie logarytmy

Koniec dowodu

Mówimy: „**logarytm iloczynu** jest równy sumie logarytmów”.

Przykład 1 ◀ zad. 4.4

$$\text{a) } \log_6 18 + \log_6 12 = \log_6(18 \cdot 12) = \log_6(6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6) = \log_6 6^3 = 3$$

$$\text{b) } \log_{13} 7 + \log_{13} \frac{1}{7} = \log_{13} \left(7 \cdot \frac{1}{7} \right) = \log_{13} 1 = 0$$

$$\text{c) } \log_3 (3 \sqrt[5]{3}) = \log_3 3 + \log_3 \sqrt[5]{3} = 1 + \frac{1}{5} = 1\frac{1}{5}$$

◀ 4.4. Oblicz.

$$\text{a) } \log_2 27 + \log_2 \frac{2}{9} + \log_2 \frac{2}{3}$$

$$\text{d) } \log_5 7 + \log_5 \frac{6}{14} + \log_5 8\frac{1}{3}$$

$$\text{b) } \log_3 4 + \log_3 \frac{3}{2} + \log_3 \frac{81}{2}$$

$$\text{e) } \log_6 34 + \log_6 \frac{2}{17} + \log_6 9$$

$$\text{c) } \log \sqrt{5} + \log \sqrt{2} + \log \sqrt{10}$$

$$\text{f) } \log_{0,5} 3 + \log_{0,5} \frac{2}{9} + \log_{0,5} \frac{3}{8}$$

Odp.: a) 2 b) 5 c) 1 d) 2 e) 2 f) 2

ZZ i MKP

tematy 6.7, 6.10

Multiteka

- Skala logarytmiczna

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 5.4

 **Generator**
testów i sprawdzianów

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ prawdziwy jest wzór:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Dowód

W dowodzie ponownie wykorzystamy własności działań na potęgach.

Przyjmujemy oznaczenia:

$$\log_a x = u$$

$$\log_a y = t$$

Zgodnie z definicją logarytmu otrzymujemy:

$$x = a^u$$

$$y = a^t$$

$$\frac{x}{y} = \frac{a^u}{a^t}$$

← dzielimy obie równości stronami

$$\frac{x}{y} = a^{u-t}$$

← wzór na iloraz potęg o tych samych podstawach

$$u - t = \log_a \frac{x}{y}$$

← korzystamy z definicji logarytmu

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$$

← podstawiamy w miejsce u i t odpowiednie logarytmy

Koniec dowodu

Mówimy: „**logarytm ilorazu** jest równy różnicy logarytmów”.

Przykład 2 ◀ zad. 4.5

$$\text{a) } \log_7 21 - \log_7 3 = \log_7 \frac{21}{3} = \log_7 7 = 1$$

$$\text{b) } \log 0,05 - \log 50 = \log \frac{0,05}{50} = \log 0,001 = -3$$

$$\text{c) } \log_3 \frac{2}{3} = \log_3 2 - \log_3 3 = \log_3 2 - 1$$

$$\text{d) } \log_5 \frac{\sqrt[7]{125}}{25} = \log_5 \sqrt[7]{125} - \log_5 25 = \log_5 5^{\frac{3}{7}} - 2 = \frac{3}{7} - 2 = -1\frac{4}{7}$$

Zauważmy, że wzór na logarytm iloczynu można uogólnić na większą liczbę czynników. W szczególności, jeżeli założymy, że $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, to zgodnie z tym wzorem prawdziwe są równości:

$$\log_a x^2 = \log_a (x \cdot x) = \log_a x + \log_a x = 2 \log_a x$$

$$\log_a x^3 = \log_a (x^2 \cdot x) = \log_a x^2 + \log_a x = 2 \log_a x + \log_a x = 3 \log_a x \text{ itd.}$$

◀ 4.5. Oblicz.

$$\text{a) } \log_5 150 - \log_5 3 - \log_5 2$$

$$\text{b) } \log_4 3 - \log_4 2 - \log_4 \frac{3}{2}$$

$$\text{c) } \log_6 2 - \log_6 \frac{7}{3} - \log_6 \frac{1}{42}$$

$$\text{d) } \log_4 1\frac{3}{13} - \log_4 3\frac{1}{2} - \log_4 \frac{1}{91}$$

$$\text{e) } \log 250 + \log 120 - \log 0,3$$

$$\text{f) } \log_7 \frac{3}{11} + \log_7 \frac{5}{14} - \log_7 \frac{15}{22}$$

$$\text{Odp.: a) } 2 \quad \text{b) } 0 \quad \text{c) } 2 \quad \text{d) } \frac{5}{2}$$

$$\text{e) } 5 \quad \text{f) } -1$$

Uogólnieniem tej obserwacji jest twierdzenie o **logarytmie potęgi**, którego dowód pominiemy.

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $k \in \mathbf{R}$ prawdziwy jest wzór:

$$\log_a x^k = k \cdot \log_a x$$

Przykład 3

- a) $\log_{13} 13^{-2} = -2 \log_{13} 13 = -2$
 b) $\log_7 (\sqrt{7})^{21} = 21 \log_7 \sqrt{7} = 21 \cdot \frac{1}{2} = 10\frac{1}{2}$
 c) $\log_3 \left(\frac{1}{3}\right)^7 = 7 \log_3 \frac{1}{3} = 7 \cdot (-1) = -7$
 d) $\log_5 \sqrt{5} = \log_5 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log_5 5 = \frac{1}{2}$

Przykład 4

◀ zad. 4.6, 4.7

Obliczmy wartość podanego wyrażenia.

Rozwiązanie

- a) $\log_2 3 - \log_2 30 + \log_2 5 = \log_2 \frac{3 \cdot 5}{30} = \log_2 \frac{1}{2} = -1$
 b) $1 + 2 \log_4 2 = 1 + \log_4 2^2 = 1 + \log_4 4 = 1 + 1 = 2$
 c) $\log_3 4 - 4 \log_3 2 + \log_3 \frac{4}{9} = \log_3 4 - \log_3 2^4 + \log_3 \frac{4}{9} = \log_3 \frac{4}{16} + \log_3 \frac{4}{9} =$
 $= \log_3 \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{9}\right) = \log_3 \frac{1}{9} = -2$

Do tej pory wszędzie tam, gdzie było to możliwe, zapisywaliśmy wartości logarytmów w postaci liczby wymiernej. Czasem jednak potrzebne jest wykonanie czynności odwrotnej, czyli zapisanie liczby w postaci logarytmu przy ustalonej podstawie. Korzystamy wówczas z definicji logarytmu, np.:

- $3 = \log_5 5^3$, czyli $3 = \log_5 125$
- $\frac{1}{2} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \log_3 \sqrt{3}$
- $-4 = \log_{\sqrt{7}} (\sqrt{7})^{-4} = \log_{\sqrt{7}} \frac{1}{(\sqrt{7})^4} = \log_{\sqrt{7}} \frac{1}{49}$
- $\pi = \log 10^\pi$
- $-\frac{2}{3} = \log_{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}} = \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{(\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}} = \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} = \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

◀ 4.6. Oblicz.

- a) $2 \log 2 + \log 15 - \log 6$
 b) $\log 20 - 3 \log 2 + \log 40$
 c) $2 \log_2 5 + \log_2 6 - \log_2 75$
 d) $\log_3 15 + \log_3 45 - 2 \log_3 5$
 e) $\log_6 18 + 3 \log_6 2 - \log_6 4$
 f) $2 \log_5 2 + 3 \log_5 3 - \log_5 21,6$
 Odp.: a) 1 b) 2 c) 1 d) 3
 e) 2 f) 1

◀ 4.7. Oblicz.

- a) $\frac{3 \log 2}{\log 56 - \log 7}$
 b) $\frac{\log_7 2 + \log_7 3}{\log_7 24 - \log_7 4}$
 c) $\frac{\log_5 6 - 3 (\log_5 2 + \log_5 3)}{\log_5 6}$
 d) $\frac{\log_2 15 - 3,5 (\log_2 3 + \log_2 5)}{\log_2 45 - \log_2 3}$
 e) $\frac{2 \log_3 4 - 3 \log_3 12}{3 + \log_3 4}$
 f) $\frac{5 \log_5 18 - 4 \log_5 2 - 9 \log_5 3}{\log_5 18 - \log_5 3}$
 Odp.: a) 1 b) 1 c) -2 d) -2,5
 e) -1 f) 1

◀ 4.8. Zapisz wyrażenie w prostszej postaci i oblicz jego wartość dla podanych wartości zmiennych.

a) $2 \log_8 a + 4 \log_8 b - \log_8 50$,
 $a = 5$, $b = 2$

b) $5 \log_3 a - 2 \log_3 5 +$
 $-(\log_3 a - 2 \log_3 b)$, $a = 3$, $b = 5$

c) $3 \log_2 x + 5 \log_2 y +$
 $-2(2 \log_2 x + \log_2 y) - \log_2 7$,
 $x = 98$, $y = 7$

d) $\log(x + y) + 3 \log x + 4 \log y +$
 $-3 \log(xy)$, $x = 3$, $y = 2$

Odp.: a) $\log_8 \frac{a^2 b^4}{50}$, 1

b) $\log_3 \frac{a^4 b^2}{25}$, 4

c) $\log_2 \frac{y^3}{7x}$, -1

d) $\log(xy + y^2)$, 1

◀ 4.9. Przedstaw podaną liczbę za pomocą jednego logarytmu.

a) $\log 0,2 + 1$

b) $3 - \log_2 5$

c) $2 + \log_5 2$

d) $-1 - \log_3 2$

e) $\frac{1}{2} + \log 7$

f) $-\frac{2}{3} + \log_2 3$

Odp.: a) $\log 2$

b) $\log_2 \frac{8}{5}$

c) $\log_5 50$

d) $\log_3 \frac{1}{6}$

e) $\log(7\sqrt{10})$

f) $\log_2 \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$



Przykład 5 ◀ zad. 4.8

Zapiszemy wyrażenie w prostszej postaci i obliczymy jego wartość dla podanych wartości zmiennych.

a) $3 \log a + 2 \log b - \log 5$, $a = 2$, $b = 25$

b) $\log_3 x - 2 \log_3 5 - (2 - \log_3 y)$, $x = 15$, $y = 405$

Rozwiązanie

a) $3 \log a + 2 \log b - \log 5 = \log a^3 + \log b^2 - \log 5 = \log \frac{a^3 b^2}{5}$

Jeżeli $a = 2$, $b = 25$, to $\log \frac{a^3 b^2}{5} = \log \frac{2^3 \cdot 25^2}{5} = \log(2^3 \cdot 5^3) = \log 10^3 = 3$.

b) $\log_3 x - 2 \log_3 5 - (2 - \log_3 y) =$ $\leftarrow 2 = \log_3 9$

$= \log_3 x - \log_3 25 - \log_3 9 + \log_3 y = \log_3 \frac{xy}{25 \cdot 9}$

Jeżeli $x = 15$, $y = 405$, to $\log_3 \frac{xy}{25 \cdot 9} = \log_3 \frac{15 \cdot 405}{25 \cdot 9} = \log_3 3^3 = 3$.

Przykład 6 ◀ zad. 4.9

Przedstawimy podaną liczbę za pomocą jednego logarytmu.

Rozwiązanie

a) $1 + \log_2 5 = \log_2 2 + \log_2 5 = \log_2 10$

b) $2 - \log 2 = \log 100 - \log 2 = \log 50$

c) $-1 - \log_5 11 = \log_5 5^{-1} - \log_5 11 = \log_5 \frac{1}{55}$

d) $\frac{1}{2} + \log_3 8 = \log_3 3^{\frac{1}{2}} + \log_3 8 = \log_3 8\sqrt{3}$

e) $\log 5 - \log 7 + 2 \log 3 + 4 \log 2 = \log \frac{5 \cdot 3^2 \cdot 2^4}{7} = \log \frac{720}{7}$

f) $\frac{\log^2 5 + 2 \log 5 \cdot \log 7 + \log^2 7}{\log 35} = \frac{(\log 5 + \log 7)^2}{\log 35} =$
 $= \frac{\log^2 35}{\log 35} = \log 35$

$(\log_a b)^2 = \log_a^2 b$

g) $\log^2 80 - \log^2 8 = (\log 80 - \log 8)(\log 80 + \log 8) = \log 10 \cdot \log 640 = \log 640$

Przykład 7 ◀ zad. 4.12

Przyjmijmy, że $\log_3 2 = p$. Wyrazimy wartość podanego logarytmu za pomocą p .

Rozwiązanie

a) $\log_3 8 = \log_3 2^3 = 3 \log_3 2 = 3p$

b) $\log_3 18 = \log_3 (2 \cdot 9) = \log_3 2 + \log_3 9 = p + 2$

c) $\log_3 3^{\frac{5}{9}} = \log_3 \frac{32}{9} = \log_3 32 - \log_3 9 = \log_3 2^5 - 2 = 5p - 2$

◀ 4.12. Przyjmujemy, że $\log_2 3 = a$. Wyraż wartość podanego logarytmu za pomocą a .

a) $\log_2 9$

c) $\log_2 48$

e) $\log_2 \frac{3}{2}$

b) $\log_2 6$

d) $\log_2 \frac{1}{9}$

f) $\log_2 \frac{4}{3}$

Odp.: a) $2a$ b) $a + 1$ c) $a + 4$ d) $-2a$ e) $a - 1$ f) $2 - a$

Podamy teraz wzór pozwalający zmieniać podstawę logarytmu.

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$ zachodzi równość:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Dowód

Udowodnimy równoważną, często używaną postać wzoru: $\log_c b = \log_a b \cdot \log_c a$. Przekształcamy prawą stronę wzoru.

$$\begin{aligned} \log_a b \cdot \log_c a &= \log_c a^{\log_a b} && \leftarrow k \cdot \log_a x = \log_a x^k \\ \log_a b \cdot \log_c a &= \log_c b && \leftarrow a^{\log_a b} = b \end{aligned}$$

Koniec dowodu

Przykład 8

$$\begin{aligned} \text{a) } \log_2 5 &= \frac{\log_3 5}{\log_3 2} & \text{c) } \log_3 2 \cdot \log_2 6 &= \log_3 6 \\ \text{b) } \frac{\log_7 5}{\log_7 10} &= \log_5 5 & \text{d) } \log_3 7 &= \frac{\log_7 7}{\log_7 3} = \frac{1}{\log_7 3} \end{aligned}$$

W szczególności, jeżeli we wzorze $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ przyjmiemy $c = 10$, możemy wyrazić logarytm dowolnej liczby przy dowolnej podstawie jako iloraz logarytmów

dziesiętnych. Zatem: $\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2}$, $\log_5 \frac{2}{7} = \frac{\log \frac{2}{7}}{\log 5}$ itd.

Przybliżone wartości logarytmów dziesiętnych można odczytać z tablic matematycznych lub kalkulatorów. Na stronie 455 podajemy tablicę wartości logarytmów dziesiętnych liczb od 1 do 9,9 przybliżonych do trzeciego miejsca po przecinku.

Zauważmy, że jeżeli na przykład $\log 6,2 \approx 0,792$, to $10^{0,792} \approx 6,2$. Z tablicy tej można więc także odczytywać przybliżone wartości funkcji $y = 10^x$ dla $0 < x < 1$.

Przykład 9

◀ zad. 4.17, 4.18

Wyznamy przybliżoną wartość podanej liczby.

$$\text{a) } \log_5 3 \quad \text{b) } \sqrt{10} \quad \text{c) } \log 58 \quad \text{d) } \log 0,46$$

Rozwiązanie

$$\text{a) Zgodnie ze wzorem na zamianę podstawy logarytmu mamy } \log_5 3 = \frac{\log 3}{\log 5}.$$

Podstawiamy przybliżone wartości z tablicy i otrzymujemy

$$\log_5 3 \approx \frac{0,477}{0,699} \approx 0,682.$$

◀ 4.17. Oblicz przybliżoną wartość podanego logarytmu. Skorzystaj ze wzoru na zamianę podstawy logarytmu oraz z tablicy logarytmów dziesiętnych.

- a) $\log_3 2$
b) $\log_5 7$
c) $\log_2 17$
d) $\log_{23} 61$

Odp.: a) 0,631 b) 1,209
c) 4,086 d) 1,311

◀ 4.18. Oszacuj wartość wyrażenia. Skorzystaj z tablicy logarytmów.

$$\text{a) } \sqrt[4]{10} \quad \text{b) } \sqrt[3]{100} \quad \text{c) } \frac{100}{\sqrt[3]{10}} \quad \text{d) } \frac{40}{\sqrt[3]{100}}$$

$$\text{Odp.: a) } 1,7 < \sqrt[4]{10} < 1,8$$

$$\text{b) } 4,6 < \sqrt[3]{100} < 4,7$$

$$\text{c) } 63 < \frac{100}{\sqrt[3]{10}} < 64$$

$$\text{d) } 8,6 < \frac{40}{\sqrt[3]{100}} < 8,7$$

- b) Wiemy, że $\sqrt{10} = 10^{0,5}$. Z tablicy możemy odczytać, że $10^{0,491} \approx 3,1$,
a $10^{0,505} \approx 3,2$. Zatem $3,1 < \sqrt{10} < 3,2$.
- c) Tablica zawiera logarytmy liczb mniejszych od 10. Musimy więc przekształcić
log 58 tak, aby skorzystać z tablicy.
 $\log 58 = \log (10 \cdot 5,8) = \log 10 + \log 5,8 = 1 + \log 5,8 \approx 1 + 0,763 = 1,763$
d) $\log 0,46 = \log (0,1 \cdot 4,6) = \log 0,1 + \log 4,6 \approx -1 + 0,663 = -0,337$

Korzystając z podanych wzorów, można zastąpić mnożenie, dzielenie i potęgowanie liczb dużo prostszymi działaniami. Obecnie nie ma to specjalnego znaczenia, ponieważ komputery wykonują błyskawicznie nawet bardzo skomplikowane rachunki, a do prostszych działań wystarczają kalkulatory. Okazuje się jednak, że wiele procesów fizycznych, biologicznych, a nawet społecznych ma charakter logarytmiczny. Z niektórymi praktycznymi zastosowaniami logarytmów zapoznać się w następnym temacie.

Zadania

W każdym z zadań 4.1–4.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

Odpowiedzi i rozwiązania

4.1. C

4.1. Która równość jest prawdziwa dla każdej dodatniej liczby a ?

- A. $\log_5 a + \log_5 (2a) = \log_5 (3a)$ C. $\log_5 a + \log_5 (2a) = \log_5 (2a^2)$
B. $\log_5 a \cdot \log_5 (2a) = \log_5 (3a)$ D. $\log_5 a \cdot \log_5 (2a) = \log_5 (2a^2)$

4.2. C

4.2. Wskaż liczbę, która nie jest równa liczbie $\log_3 64$.

- A. $2 \log_3 8$ B. $3 \log_3 4$ C. $4 \log_3 4$ D. $6 \log_3 2$

4.3. C

4.3. Wskaż liczbę, która jest równa liczbie $\log_2 6$.

- A. $2 \log_2 3$ B. $\log_2 2 \cdot \log_2 3$ C. $1 + \log_2 3$ D. 3^{64}

4.4. a) 2 b) 5 c) 1 d) 2
e) 2 f) 2

4.4. Oblicz.

- a) $\log_2 27 + \log_2 \frac{2}{9} + \log_2 \frac{2}{3}$ d) $\log_5 7 + \log_5 \frac{6}{14} + \log_5 8\frac{1}{3}$
b) $\log_3 4 + \log_3 \frac{3}{2} + \log_3 \frac{81}{2}$ e) $\log_6 34 + \log_6 \frac{2}{17} + \log_6 9$
c) $\log \sqrt{5} + \log \sqrt{2} + \log \sqrt{10}$ f) $\log_{0,5} 3 + \log_{0,5} \frac{2}{9} + \log_{0,5} \frac{3}{8}$

4.5. Oblicz.

- a) $\log_5 150 - \log_5 3 - \log_5 2$
 b) $\log_4 3 - \log_4 2 - \log_4 \frac{3}{2}$
 c) $\log_6 2 - \log_6 \frac{7}{3} - \log_6 \frac{1}{42}$

- d) $\log_4 1\frac{3}{13} - \log_4 3\frac{1}{2} - \log_4 \frac{1}{91}$
 e) $\log 250 + \log 120 - \log 0,3$
 f) $\log_7 \frac{3}{11} + \log_7 \frac{5}{14} - \log_7 \frac{15}{22}$

4.6. Oblicz.

- a) $2 \log 2 + \log 15 - \log 6$
 b) $\log 20 - 3 \log 2 + \log 40$
 c) $2 \log_2 5 + \log_2 6 - \log_2 75$

- d) $\log_3 15 + \log_3 45 - 2 \log_3 5$
 e) $\log_6 18 + 3 \log_6 2 - \log_6 4$
 f) $2 \log_5 2 + 3 \log_5 3 - \log_5 21,6$

4.7. Oblicz.

- a) $\frac{3 \log 2}{\log 56 - \log 7}$
 b) $\frac{\log_7 2 + \log_7 3}{\log_7 24 - \log_7 4}$
 c) $\frac{\log_5 6 - 3(\log_5 2 + \log_5 3)}{\log_5 6}$

- d) $\frac{\log_2 15 - 3,5(\log_2 3 + \log_2 5)}{\log_2 45 - \log_2 3}$
 e) $\frac{2 \log_3 4 - 3 \log_3 12}{3 + \log_3 4}$
 f) $\frac{5 \log_5 18 - 4 \log_5 2 - 9 \log_5 3}{\log_5 18 - \log_5 3}$

4.8. Zapisz wyrażenie w prostszej postaci i oblicz jego wartość dla podanych wartości zmiennych.

- a) $2 \log_8 a + 4 \log_8 b - \log_8 50$ $a = 5$ $b = 2$
 b) $5 \log_3 a - 2 \log_3 5 - (\log_3 a - 2 \log_3 b)$ $a = 3$ $b = 5$
 c) $3 \log_2 x + 5 \log_2 y - 2(2 \log_2 x + \log_2 y) - \log_2 7$ $x = 98$ $y = 7$
 d) $\log(x + y) + 3 \log x + 4 \log y - 3 \log(xy)$ $x = 3$ $y = 2$

4.9. Przedstaw podaną liczbę za pomocą jednego logarytmu.

- a) $\log 0,2 + 1$ c) $2 + \log_5 2$ e) $\frac{1}{2} + \log 7$
 b) $3 - \log_2 5$ d) $-1 - \log_3 2$ f) $-\frac{2}{3} + \log_2 3$

4.10. Niech $a > 0$. Zapisz wyrażenie za pomocą jednego logarytmu.

- a) $\log_3 a - \log_3 a^2 + \log_3(3a)$
 b) $\log_5(2a) + \log_5(3a) - \log_5(6a^2)$
 c) $\log_6(2a^2) - \log_6 \sqrt{2} - \log_6 a$
 d) $2 \log_3(3a) + \log_3(9a) - 3 \log_3 a$
 e) $2 \log_2(4a) + \log_2(8a) - 5 \log_2 a$
 f) $3(\log_2(4a) - 2 \log_2 a) - 2(\log_2(2a) - \frac{1}{2} \log_2 a)$

4.20. a) $x^2 - x \cdot \log_2 3 - 2(\log_2 3)^2 = 0$

$$\Delta = \log_2^2 3 + 8 \log_2^2 3 = 9 \log_2^2 3, \quad \sqrt{\Delta} = 3 \log_2 3, \quad x_1 = \frac{\log_2 3 - 3 \log_2 3}{2} = -\log_2 3 = \log_2 \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{\log_2 3 + 3 \log_2 3}{2} = 2 \log_2 3$$

Odp.: $x \in \{-\log_2 3, 2 \log_2 3\}$

b) $x^2 - (2 + \log 5)x + \log 25 = 0$

$$\Delta = (2 + \log 5)^2 - 4 \log 25 = 4 + 4 \log 5 + \log^2 5 - 8 \log 5 = 4 - 4 \log 5 + \log^2 5 = (2 - \log 5)^2, \quad \sqrt{\Delta} = |2 - \log 5| = 2 - \log 5$$

$$x_1 = \frac{2 + \log 5 - 2 + \log 5}{2} = \log 5, \quad x_2 = \frac{2 + \log 5 + 2 - \log 5}{2} = 2$$

Odp.: $x \in \{\log 5, 2\}$

4.5. a) 2 **b)** 0 **c)** 2 **d)** $\frac{5}{2}$

e) 5 **f)** -1

4.6. a) 1 **b)** 2 **c)** 1 **d)** 3

e) 2 **f)** 1

4.7. a) 1 **b)** 1 **c)** -2 **d)** -2,5

e) -1 **f)** 1

4.8. a) $\log_8 \frac{a^2 b^4}{50}, 1$

b) $\log_3 \frac{a^4 b^2}{25}, 4$

c) $\log_2 \frac{y^3}{7x}, -1$

d) $\log(xy + y^2), 1$

4.9. a) $\log 2$

b) $\log_2 \frac{8}{5}$

c) $\log_5 50$

d) $\log_3 \frac{1}{6}$

e) $\log(7\sqrt{10})$

f) $\log_2 \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$

4.10. a) $\log_3 3$

b) $\log_5 1$

c) $\log_6(a\sqrt{2})$

d) $\log_3 81$

e) $\log_2 \frac{128}{a^2}$

f) $\log_2 \frac{16}{a^4}$

4.11. a) $x > 0, y > 0; \log \frac{x^2 y^5}{8}$

b) $x > 0, y > 0; \log_2 \frac{x}{4y}$

c) $x > -1, y > 0; \log_3 \frac{(x+1)^2}{27y}$

d) $x > 0; \log \frac{x\sqrt{10}}{8}$

e) $x > \sqrt{2}; \log_2 \frac{2}{x - \sqrt{2}}$

f) $x + y > 0, x - y > 0; \log(x^2 - y^2)$

4.12. a) $2a$

b) $a + 1$

c) $a + 4$

d) $-2a$

e) $a - 1$

f) $2 - a$

4.13. a) $6m$

b) $2m - 2$

c) $3m + 1$

d) $5m - 1$

4.14. a) 12 b) -4

4.15. 3

4.16. 3

4.17. a) 0,631 b) 1,209

c) 4,086 d) 1,311

4.18. a) $1,7 < \sqrt[4]{10} < 1,8$

b) $4,6 < \sqrt[3]{100} < 4,7$

c) $63 < \frac{100}{\sqrt[5]{10}} < 64$

d) $8,6 < \frac{40}{\sqrt[3]{100}} < 8,7$

4.19. 0

4.20. Patrz s. 387.

4.11. Przedstaw wyrażenie w postaci jednego logarytmu. Podaj potrzebne założenia.

a) $2 \log x + 5 \log y - \log 8$

d) $\frac{1}{2} + \log x - \log 8$

b) $\log_2 x - \log_2 y - \log_5 25$

e) $\frac{2}{5} - \log_2(x - \sqrt{2}) + \log_2 \sqrt[5]{8}$

c) $2 \log_3(x+1) - \log_3 y - \log_2 8$

f) $\log(x+y) + \log(x-y)$

4.12. Przyjmujemy, że $\log_2 3 = a$. Wyraż wartość podanego logarytmu za pomocą a .

a) $\log_2 9$

b) $\log_2 6$

c) $\log_2 48$

d) $\log_2 \frac{1}{9}$

e) $\log_2 \frac{3}{2}$

f) $\log_2 \frac{4}{3}$

4.13. Przyjmujemy, że $\log_5 2 = m$. Wyraż wartość podanej sumy za pomocą m .

a) $\log_5 4 + \log_5 16$

c) $\log_5 10 - \log_5 6 + \log_5 24$

b) $\log_5 8 - \log_5 50$

d) $2 \log_5 \frac{4}{5} - \log_5 \frac{1}{4} + \log_5 \frac{5}{2}$

4.14. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\left(\log_5(25a) - 2 \log_5 \left(\frac{1}{5}a \right) \right) \cdot \left(2 \log_5(5\sqrt{a}) + \log_5 \left(\frac{1}{25}a^2 \right) \right)$ dla $\log_5 a = 2$

b) $\left(\log_2(4a) - \log_3 27 \right)^2 - \left(2 \log_2(2\sqrt{a}) - 3 \log_3 \frac{1}{3} \right)$ dla $\log_2 a = 3$

4.15. Liczby a, b i c spełniają warunek $\log_2(2a) = 3 - \log_3 b = 1 + \log_4 c = 1$.

Oblicz $\sqrt{a \cdot b \cdot c}$.

4.16. Liczby a, b i c spełniają warunek

$\log_2 a + \log_2 4 = 4 \log_3 b - \log_3 9 = \log_4 c + \log_4 16 = 6$. Oblicz $\frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{c}}$.

4.17. Oblicz przybliżoną wartość podanego logarytmu. Skorzystaj ze wzoru na zmianę podstawy logarytmu oraz z tablicy logarytmów dziesiętnych.

a) $\log_3 2$

b) $\log_5 7$

c) $\log_2 17$

d) $\log_{23} 61$

4.18. Oszacuj wartość wyrażenia. Skorzystaj z tablicy logarytmów.

a) $\sqrt[4]{10}$

b) $\sqrt[3]{100}$

c) $\frac{100}{\sqrt[5]{10}}$

d) $\frac{40}{\sqrt[3]{100}}$

4.19. Liczby a i b spełniają warunki $\log(10a) = 2$ i $\log \frac{100}{b} = 3$. Oblicz $\log(ab)$.

* 4.20. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - x \cdot \log_2 3 - 2(\log_2 3)^2 = 0$

c) $x^2 - x \cdot \log_3 10 + \log_3 2 \cdot \log_3 5 = 0$

b) $x^2 - (2 + \log 5)x + \log 25 = 0$

d) $x^2 - x \cdot \log_2 \frac{3}{2} - \log_2 3 = 0$

4.26. I sposób: $\log_a x = 2, \log_b x = 3, \log_c x = 4, \log_d x = 6$. Stąd:

$$\log_x a = \frac{1}{\log_a x} = \frac{1}{2}, \quad \log_x b = \frac{1}{\log_b x} = \frac{1}{3}, \quad \log_x c = \frac{1}{\log_c x} = \frac{1}{4}, \quad \log_x d = \frac{1}{\log_d x} = \frac{1}{6},$$

$$\log_{abcd} x = \frac{1}{\log_x abcd} = \frac{1}{\log_x a + \log_x b + \log_x c + \log_x d} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12}} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

II sposób: Z założenia mamy: $a^2 = x, b^3 = x, c^4 = x, d^6 = x$, więc:

$$a = x^{\frac{1}{2}}, \quad b = x^{\frac{1}{3}}, \quad c = x^{\frac{1}{4}}, \quad d = x^{\frac{1}{6}}, \quad abcd = x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = x^{\frac{5}{4}}$$

$$x = (abcd)^{\frac{4}{5}}, \text{ czyli } \log_{abcd} x = \frac{4}{5}$$

Odp.: $\log_{abcd} x = \frac{4}{5}$

- D 4.21.** Wykaż, że liczby $5^{\log_2 3}$ i $3^{\log_2 5}$ są równe.
- D * 4.22.** Wykaż, że podana równość jest prawdziwa.
- a) $(\log_5 4 + \log_4 5 + 2)(\log_5 4 - \log_{20} 4) \cdot \log_4 5 - \log_5 4 = 1$
 b) $(\log_3 6 + \log_6 81 + 4)(\log_3 6 - \log_{54} 36) \cdot \log_6 3 - \log_3 6 = 2$
 c) $(\log_3 4 + 9 \log_4 3 + 6)(\log_3 4 - 3 \log_{108} 4) \cdot \log_4 3 - \log_3 4 = 3$
- D 4.23.** Wykaż, że dla liczb $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ prawdziwy jest wzór $\log_{\frac{1}{a}} b = \log_a \frac{1}{b}$.
- 4.24.** Przyjmujemy, że $\log_{15} 9 = k$. Wyraż $\log_{15} 5$ za pomocą k .
- 4.25.** Przyjmujemy, że $\log 2 = a$ i $\log 3 = b$. Wyraż $\log_{12} 20$ za pomocą a i b .
- * 4.26.** Wiadomo, że $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$, $\log_c x = 4$ oraz $\log_d x = 6$. Oblicz $\log_{abcd} x$.
- D * 4.27.** Wykaż, że jeżeli $x = 10^{\frac{1}{1-\log z}}$ oraz $y = 10^{\frac{1}{1-\log x}}$, to $z = 10^{\frac{1}{1-\log y}}$.
- D * 4.28.** Wykaż, że $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \dots \cdot \log_9 8 \cdot \log_{10} 9 = \log_{10} 2$.
- D * 4.29.** Wykaż, że jeżeli $a > 1$ i $b > 1$, to $\log_a b + \log_b a \geq 2$.

Prosto do matury



- 1.** Wiadomo, że $\log_3 4 = k$. Oceń prawdziwość podanych zdań.
- A. $\log_3 2 = \sqrt{k}$ B. $\log_3 2 = \frac{1}{2}k$ C. $\log_9 2 = \frac{1}{2}k$
- 2.** Oblicz $\log_3 6 + \log_3 18 - 2 \log_3 2$.
- 3.** Przyjmujemy, że $\log_3 7 \approx 1,77$. Oblicz $\log_3 42 - \log_3 2$.
- 4.** Przyjmujemy, że $\log_5 2 = m$. Przedstaw wartość wyrażenia $\frac{3 \log_5 50 - 4 \log_5 10}{\log_5 0,008}$ za pomocą m .
- D 5.** Wykaż, że dla liczb $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ prawdziwy jest wzór $\log_{a^2} b = \frac{1}{2} \log_a b$.

Prosto do matury

- 1.** F, P, F
- 2.** 3
- 3.** 2,77
- 4.** $\frac{m-2}{3}$
- 5.** $\log_{a^2} b = \frac{\log_a b}{\log_a a^2} = \frac{\log_a b}{2} = \frac{1}{2} \log_a b$

4.21. Wskazówka: Wprowadź oznaczenia $x = 5^{\log_2 3}$ i $y = 3^{\log_2 5}$, a następnie obie strony każdej równości zlogarytmuj przy podstawie 2.

4.22. Wskazówka: Zapisz wyrażenie po lewej stronie znaku równości za pomocą logarytmu przy podstawie: a) 4, b) 6, c) 3.

$$\begin{aligned} \text{4.23. } \log_{\frac{1}{a}} b &= \frac{\log_a b}{\log_a \frac{1}{a}} = \\ &= \frac{\log_a \left(\frac{1}{b}\right)^{-1}}{\log_a a^{-1}} = \frac{-\log_a \frac{1}{b}}{-\log_a a} = \\ &= \frac{-\log_a \frac{1}{b}}{-1} = \log_a \frac{1}{b} \end{aligned}$$

$$\text{4.24. } \frac{2-k}{2}$$

$$\text{4.25. } \frac{a+1}{2a+b}$$

$$\begin{aligned} \text{4.27. } x &= 10^{\frac{1}{1-\log z}}, \\ \text{więc } \log x &= \log \left(10^{\frac{1}{1-\log z}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log x &= \frac{1}{1-\log z} \\ \log x - \log x \cdot \log z &= 1 \\ \log z &= \frac{\log x - 1}{\log x} = 1 - \frac{1}{\log x} \quad (1) \end{aligned}$$

Analogicznie z równości

$$y = 10^{\frac{1}{1-\log x}} \text{ otrzymujemy:}$$

$$\log x = 1 - \frac{1}{\log y} \quad (2)$$

Z (1) i (2) mamy:

$$\begin{aligned} \log z &= 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\log y}} = \\ &= 1 - \frac{\log y}{\log y - 1} = \frac{\log y - 1 - \log y}{\log y - 1} = \\ &= \frac{-1}{\log y - 1} = \frac{1}{1 - \log y}, \end{aligned}$$

$$\text{więc } z = 10^{\log z} = 10^{\frac{1}{1-\log y}}$$

$$\begin{aligned} \text{4.28. Skorzystamy kilkakrotnie} \\ \text{z równości } \log_a b \cdot \log_c a &= \log_c b. \\ \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \\ &\cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 \cdot \log_9 8 \cdot \log_{10} 9 = \\ &= \log_4 2 \cdot \log_6 4 \cdot \log_8 6 \cdot \log_{10} 8 = \\ &= \log_6 2 \cdot \log_{10} 6 = \log_{10} 2 \end{aligned}$$

4.29. Wskazówka: Zauważ, że przy podanych założeniach wartość $\log_a b > 0$, i zastosuj wzór na zamianę podstawy logarytmu.

Logarytmy – rewolucyjny wynalazek

Są wynalazki, które w świecie naukowym okazują się prawdziwą rewolucją. Można do nich zaliczyć logarytmy.

Odkrycie logarytmów

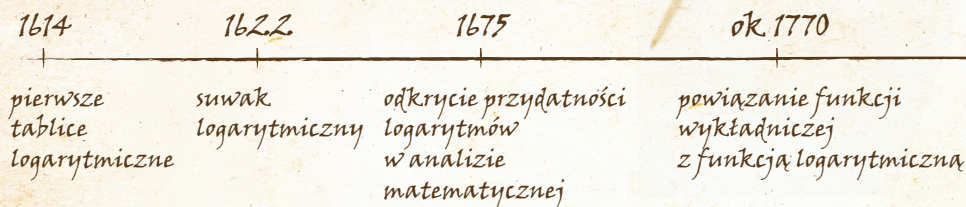
Poważną trudnością dla XVII-wiecznych uczonych była konieczność wykonywania ręcznych rachunków. Wystarczy pomnożyć pisemnie np. $101\,247 \cdot 982\,073$, by zrozumieć, jak łatwo o pomyłkę.

Jedną z osób, które poszukiwały sposobu na uproszczenie rachunków, był szkocki matematyk John Napier. Opisał on metodę pozwalającą np. zastąpić mnożenie dwóch liczb dodawaniem dwóch innych liczb, które nazwał **logarytmami**, od greckich słów *lógos* – rozumienie i *arithmós* – liczba. Przez 20 lat budował **tablice logarytmiczne**, które wydał w 1614 r.



Ogromna przydatność tablic Napiera została bardzo szybko zauważona i logarytmy zrewolucjonizowały świat rachunków, zwłaszcza w astronomii. Pisano o nich, że „podwoiły życie astronomów”.

Przez prawie 350 lat, aż do skonstruowania pierwszego kalkulatora elektronicznego, logarytmy były podstawą wszystkich obliczeń w świecie nauki. Korzystali z nich astronomowie, budowniczowie, inżynierowie, mechanicy...

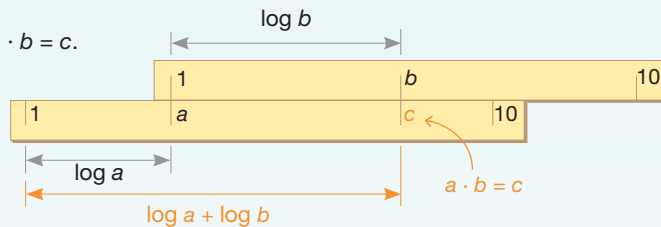


Suwak logarytmiczny

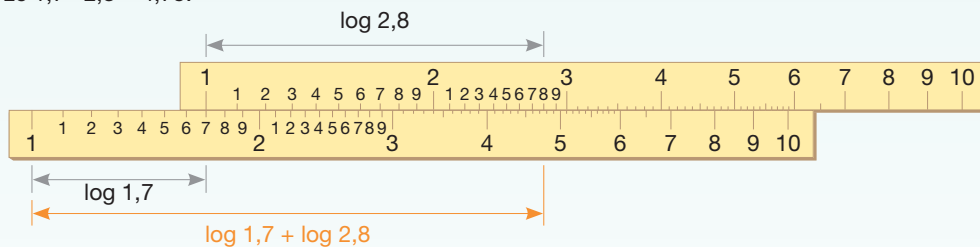
W 1622 r. powstał pierwszy suwak logarytmiczny – przyrząd, na którym można było szybko wykonać dowolne obliczenia algebraiczne.

Aby obliczyć iloczyn $a \cdot b$, wystarczy odpowiednio przesunąć względem siebie dwie podziałki ze skalą logarytmiczną. Na podziałce logarytmicznej odległość od 1 do dowolnej liczby x odpowiada wartości $\log x$. Stąd suma odległości od 1 do a i od 1 do b oznacza $\log a + \log b$.

Jeżeli $\log a + \log b = \log c$, to $a \cdot b = c$.



W ten sposób odczytujemy, że $1,7 \cdot 2,8 \approx 4,75$.



Od praktyki do teorii

Przez wiele lat logarytmy służyły wyłącznie jako narzędzie rachunkowe. Dopiero w drugiej połowie XVIII w., po ponad 130 latach od pierwszego wydania tablic Napiersa, zauważono związek logarytmów z funkcją wykładniczą i sformułowano definicję logarytmu, której używamy do dzisiaj.

Obecnie, gdy urządzenia elektroniczne zastąpiły ręczne rachunki, zarówno logarytmy, jak i funkcja logarytmiczna i jej własności nadal są szeroko wykorzystywane. Pojawiają się np. w prawach opisujących świat nie tylko we wszystkich naukach ścisłych, lecz także w ekonomii, socjologii, psychologii czy filozofii.

1960

pierwszy
kalkulator
elektroniczny

1984

pierwszy komputer
wyposażony w gra-
ficzny interfejs

oś czasu



5. Funkcja logarytmiczna. Zastosowania logarytmów

Umiejętności:

- szkicowanie wykresów funkcji logarytmicznych o różnych podstawach
- stosowanie logarytmów, np. do wyjaśniania zjawisk przyrodniczych

Logarytm o podstawie dodatniej i różnej od 1 można obliczyć dla każdej liczby dodatniej. Można zatem rozważyć funkcję, która każdej liczbie dodatniej przyporządkowuje jej logarytm o podstawie a .

Definicja

Funkcję określoną wzorem $f(x) = \log_a x$, dla $a > 0$ i $a \neq 1$, nazywamy **funkcją logarytmiczną o podstawie a** . Dziedziną tej funkcji jest zbiór dodatnich liczb rzeczywistych ($x > 0$), a jej wykres nazywamy **krzywą logarytmiczną**.

Przykład 1

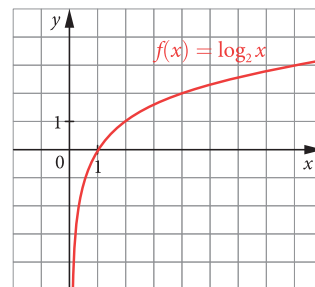
Naszkicujemy wykres funkcji $f(x) = \log_2 x$ i na jego podstawie opiszemy jej własności.

Rozwiązanie

Na początku sporządzamy częściową tabelę tej funkcji dla argumentów, dla których można łatwo obliczyć wartości funkcji.

x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
$\log_2 x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

- Dziedziną funkcji jest zbiór dodatnich liczb rzeczywistych.
- Zbiorem wartości funkcji jest $\mathbf{R}$.
- Miejscem zerowym funkcji jest liczba 1.
- $f(x) > 0$ dla $x > 1$, $f(x) < 0$ dla $x \in (0; 1)$.
- Funkcja jest rosnąca.
- Funkcja f nie przyjmuje ani wartości największej, ani wartości najmniejszej.
- Każda prosta równoległa do osi x ma z wykresem dokładnie jeden punkt wspólny. Zatem równanie $\log_2 x = m$ ma dla każdej wartości m jedno rozwiązanie.



ZZ i MKP

tematy 6.8, 6.9, 6.11

Multiteka

- Wykres funkcji logarytmicznej
- Przekształcanie wykresów funkcji logarytmicznej (1)
- Przekształcanie wykresów funkcji logarytmicznej (2)
- Trzęsienia ziemi i skala Richtera

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 5.5

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ prawdziwy jest wzór:

$$\log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$$

Dowód

Korzystamy ze wzoru na zamianę podstawy logarytmu.

$$\log_a x = \frac{\log_{\frac{1}{a}} x}{\log_{\frac{1}{a}} a} = \frac{\log_{\frac{1}{a}} x}{-1} = -\log_{\frac{1}{a}} x$$

Koniec dowodu

Wniosek

Wykresy funkcji

$$f(x) = \log_a x \quad \text{ i } \quad g(x) = \log_{\frac{1}{a}} x, \quad \text{ dla } a > 0 \text{ i } a \neq 1,$$

są symetryczne względem osi x .

Przykład 2

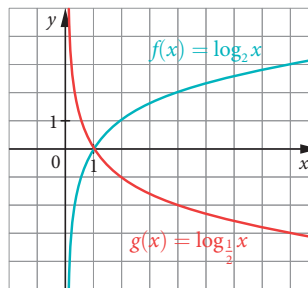
Naszkicujemy wykres i opiszemy własności funkcji $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Rozwiązanie

Jeżeli przyjmiemy, że $f(x) = \log_2 x$, to $g(x) = -f(x)$, czyli wykresy funkcji $f(x) = \log_2 x$ i $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ są symetryczne względem osi x .

Własności funkcji $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ są podobne do odpowiednich własności funkcji $f(x) = \log_2 x$.

- Dziedziną funkcji g jest zbiór dodatnich liczb rzeczywistych.
- Zbiorem wartości funkcji g jest $\mathbf{R}$.
- Miejscem zerowym funkcji g jest liczba 1.
- $g(x) < 0$ dla $x > 1$, $g(x) > 0$ dla $x \in (0; 1)$.
- Funkcja g jest malejąca.
- Funkcja g nie przyjmuje ani wartości największej, ani wartości najmniejszej.
- Każda prosta równoległa do osi x ma z wykresem dokładnie jeden punkt wspólny. Zatem równanie $\log_{\frac{1}{2}} x = m$ ma dla każdej wartości m jedno rozwiązanie.



Na wykresie obok przedstawiamy krzywe logarytmiczne o różnych podstawach większych od 1. Można zaobserwować, że wykres funkcji o większej podstawie leży dla $0 < x < 1$ **powyżej**, a dla $x > 1$ **poniżej** wykresu funkcji o mniejszej podstawie.

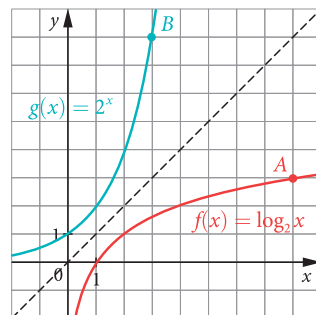


Przykład 3

Przyjrzyjmy się wykresom funkcji $f(x) = \log_2 x$ i $g(x) = 2^x$.

- Do wykresu funkcji $f(x) = \log_2 x$ należy punkt $A = (8, 3)$, bo $3 = \log_2 8$.
- Do wykresu funkcji $g(x) = 2^x$ należy punkt $B = (3, 8)$, bo $8 = 2^3$.

Punkty A i B są symetryczne względem zaznaczonej na rysunku prostej o równaniu $y = x$.



Ogólnie – jeżeli punkt (p, q) należy do wykresu jednej z tych funkcji, to punkt (q, p) należy do wykresu drugiej. Wykresy funkcji $f(x) = \log_2 x$ i $g(x) = 2^x$ są symetryczne względem prostej o równaniu $y = x$. Rozumowanie to można w prosty sposób uogólnić na każdą parę wykresów funkcji logarytmicznej i wykładniczej o tej samej podstawie.

Wniosek

Wykresy funkcji

$$f(x) = \log_a x \quad \text{i} \quad g(x) = a^x, \quad \text{dla } a > 0 \text{ i } a \neq 1,$$

są symetryczne względem prostej o równaniu $y = x$.

Przykład 4

◀ zad. 5.4

Sporządzimy wykres podanej funkcji.

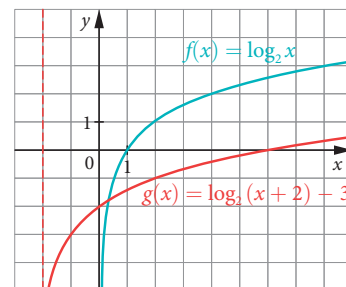
Rozwiązanie

a) $g(x) = \log_2(x+2) - 3$

Zauważmy, że dziedzinę D funkcji tworzą liczby spełniające założenie:

$$x+2 > 0, \quad \text{czyli } D = (-2; \infty)$$

Jeżeli przyjmiemy, że $f(x) = \log_2 x$,
to $g(x) = f(x+2) - 3$.



◀ 5.4. Narysuj wykres funkcji.

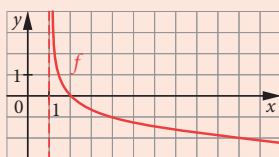
a) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x-1)$

b) $f(x) = -\log_2 x + 2$

c) $f(x) = \log_4(x+3) - 1$

d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-x) + 1$

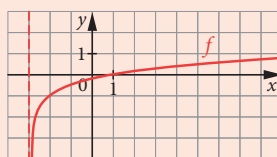
Odp.: a)



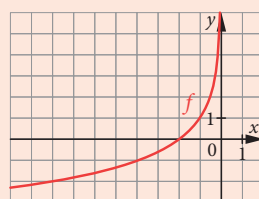
b)



c)



d)



Wykres funkcji $g(x) = \log_2(x+2) - 3$ otrzymamy jako wynik przesunięcia wykresu funkcji $f(x) = \log_2 x$ o wektor $\vec{u} = [-2, -3]$.

b) $h(x) = \left| \log_{\frac{1}{3}}(-x) \right|$

Rysujemy kolejne wykresy.

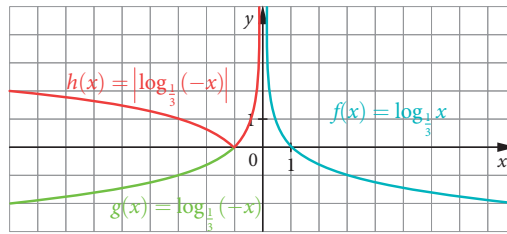
Krok 1: $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

Krok 2: $g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(-x)$

Krok 3: $h(x) = \left| \log_{\frac{1}{3}}(-x) \right|$

← symetria wykresu f względem osi y

← symetria fragmentu wykresu funkcji g leżącego poniżej osi x względem tej osi



Podane przekształcenia można wykonać w odwrotnej kolejności.

Przykład 5 ◀ zad. 5.11

Wyznamy dziedzinę funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-x^2 + 6x - 8)$.

Rozwiązanie

$$-x^2 + 6x - 8 > 0 \quad \leftarrow \text{logarytm jest określony tylko dla liczb dodatnich}$$

$$-(x-2)(x-4) > 0, \text{ stąd } x \in (2; 4)$$

Odp.: Dziedziną funkcji f jest przedział $(2; 4)$.



Przykład 6 ◀ zad. 5.15

Chory przyjął jednorazową dawkę 50 mg leku. Masę tego leku pozostałą w organizmie po czasie t godzin określa zależność $M(t) = a \cdot b^t$. Wiadomo, że po dziesięciu godzinach organizm usuwa 40% masy przyjętego leku.

a) Oblicz, ile leku pozostanie w organizmie chorego po upływie doby.

b) Po jakim czasie od przyjęcia dawki leku jego masa w organizmie zmniejszy się dziesięciokrotnie?

Rozwiązanie

Wyznamy najpierw wartości współczynników a i b .

Wiemy, że $M(0) = 50$.

Skoro po 10 godzinach usuwane jest 40% masy leku, to z dawki 50 mg zostaje wtedy w organizmie $60\% \cdot 50 \text{ mg} = 30 \text{ mg}$ leku. To oznacza, że $M(10) = 30$.

Zatem $a \cdot b^0 = 50$ i $a \cdot b^{10} = 30$. Stąd $a = 50$ i $b^{10} = 0,6$ czyli $b = 0,6^{0,1}$.

Wzór funkcji można więc zapisać w postaci $M(t) = 50 \cdot 0,6^{0,1t}$.

◀ 5.11. Określ dziedzinę funkcji.

a) $f(x) = \log_3 \frac{x-3}{x-2}$

b) $f(x) = \log_{\sqrt{2}}(2x^2 - 7x + 5)$

Odp.: a) $D = (-\infty; 2) \cup (3; \infty)$

b) $D = (-\infty; 1) \cup \left(2\frac{1}{2}; \infty\right)$

◀ 5.15. Pacjentka przyjęła dawkę radioaktywnego jodu, którego okres połowicznego rozpadu jest równy 8 dni. Masę radioaktywnego jodu pozostałego w organizmie po czasie t określa zależność

$$M(t) = a \cdot b^t.$$

a) Ile procent substancji radioaktywnej pozostanie w organizmie pacjentki po upływie 30 dni?

b) Po jakim czasie pozostanie w organizmie 1% dawki?

Przyjmij, że $\log_2 10 \approx 3,322$.

Odp.: a) 7,4%

b) po 53 dniach

- a) Aby obliczyć, ile leku pozostanie w organizmie chorego po upływie doby, podstawiamy do wzoru $t = 24$.

$$M(24) = 50 \cdot 0,6^{2,4} \approx 14,7 \text{ [mg]}$$

- b) Aby obliczyć, po jakim czasie masa leku w organizmie zmniejszy się dziesięciokrotnie, rozwiążemy równanie:

$$M(t) = 5$$

$$50 \cdot 0,6^{0,1t} = 5, \text{ czyli } 0,6^{0,1t} = 0,1, \text{ stąd } 0,1t = \log_{0,6} 0,1$$

$$t = 10 \cdot \log_{0,6} 0,1 = 10 \cdot \frac{\log 0,1}{\log 0,6} = \quad \leftarrow \text{ wzór na zamianę podstawy logarytmu}$$

$$= 10 \cdot \frac{-1}{\log 6 - 1} \approx 45$$

Odp.: a) Po upływie doby w organizmie pozostanie 14,7 mg leku.

b) Masa leku w organizmie zmniejszy się dziesięciokrotnie po 45 godzinach.

Podany w powyższym przykładzie wzór $f(t) = a \cdot b^t$ można stosować, kiedy mamy do czynienia z procesem, w którym pewna wielkość przyrasta lub zmniejsza się przez cały czas w tym samym tempie.

Zadania

W każdym z zadań 5.1–5.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

5.1. Wskaż wzór funkcji malejącej.

A. $f(x) = \log_{1,2} x$

C. $f(x) = \log_3(-x)$

B. $f(x) = -\log_{0,8} x$

D. $f(x) = \log x - 1$

5.2. Wskaż wzór funkcji, której wykres nie jest symetryczny do wykresu funkcji $f(x) = \log_3 x$ względem osi x .

A. $g(x) = -\log_3 x$

B. $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

C. $g(x) = \log_3 \frac{1}{x}$

D. $g(x) = -\log_{\frac{1}{3}} x$

5.3. Wskaż wzór funkcji, której wykres przecina oś y .

A. $f(x) = \log x - 2$

C. $f(x) = \log x + 1$

B. $f(x) = \log(x - 2)$

D. $f(x) = \log(x + 1)$

5.4. Narysuj wykres funkcji.

a) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x - 1)$

c) $f(x) = \log_4(x + 3) - 1$

b) $f(x) = -\log_2 x + 2$

d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-x) + 1$

Odpowiedzi i rozwiązania

5.1. C

5.2. D

5.3. D

5.4. Patrz s. 394.

5.5. Wyznacz miejsce zerowe funkcji.

a) $f(x) = \log_5(x-1)$

b) $f(x) = -\log_2 x + 3$

c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x+2) + 1$

d) $f(x) = \log(x-3) - \frac{1}{2}$

e) $f(x) = -\log_{\frac{1}{4}} x - \frac{1}{2}$

f) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+1) + \frac{1}{3}$

5.6. Narysuj wykres funkcji.

a) $f(x) = |\log_4(x-2)|$

b) $f(x) = 1 - \left| \log_{\frac{1}{3}} x \right|$

c) $f(x) = \left| \log_2 x \right| - 1$

d) $f(x) = \left| -\log_{\frac{1}{2}}(-x) \right|$

5.7. Narysuj wykres funkcji.

a) $f(x) = \log_2(2^x)$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} x}$

5.8. Narysuj wykres funkcji.

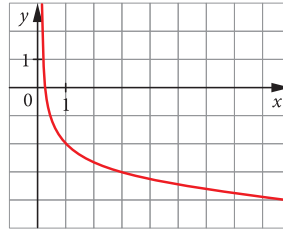
a) $f(x) = \log_4 |x|$

b) $f(x) = \frac{\log_{\frac{1}{2}} x + \left| \log_{\frac{1}{2}} x \right|}{2}$

5.9. Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji $f(x) = \log_a x + b$.

a) Wyznacz wartości a i b .

b) Sporządź wykres funkcji $g(x) = -f(x+1)$.



5.10. W jednym układzie współrzędnych narysuj wykresy funkcji $y = f(x)$ oraz $y = g(x)$, a następnie odczytaj rozwiązanie nierówności $f(x) \leq g(x)$.

a) $f(x) = \log_2(x-1) - 1$

$g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$

b) $f(x) = -\log_{\frac{1}{3}} x$

$g(x) = 1 - \frac{1}{4}(x+1)^2$

c) $f(x) = \log(x+1) + 1$

$g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+3) + 4$

$g(x) = \log_3 x + 2$

5.11. Określ dziedzinę funkcji.

a) $f(x) = \log_3 \frac{x-3}{x-2}$

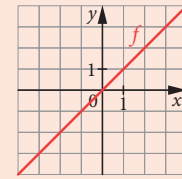
b) $f(x) = \log_{\sqrt{2}}(2x^2 - 7x + 5)$

5.5. a) 2 b) 8 c) 1

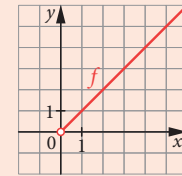
d) $3 + \sqrt{10}$ e) 2 f) $\sqrt[3]{2} - 1$

5.7. Wskazówka: Funkcję $f(x)$ można przedstawić w postaci:

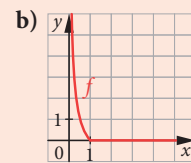
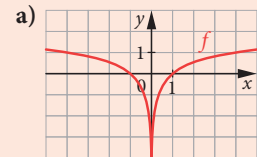
a) $f(x) = x$,



b) $f(x) = x$ i $x > 0$.



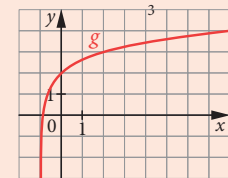
5.8.



5.9. a) $a = \frac{1}{3}$, $b = -2$

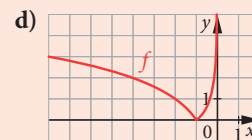
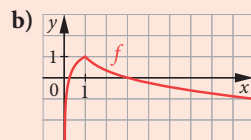
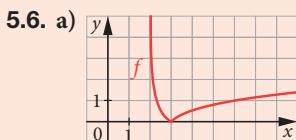
b) Wskazówka:

$g(x) = -\log_{\frac{1}{3}}(x+1) + 2$



5.11. a) $D = (-\infty; 2) \cup (3; \infty)$

b) $D = (-\infty; 1) \cup \left(2\frac{1}{2}; \infty\right)$

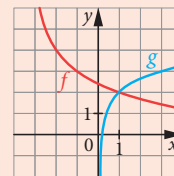
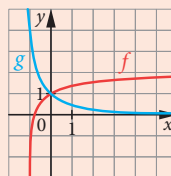
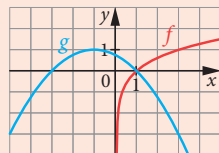
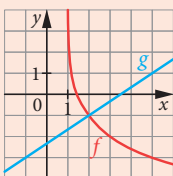


5.10. a) $x \in (1; 2) \cup (5; \infty)$

b) $x \in (0; 1)$

c) $x \in (-1; 0)$

d) $x \in (1; \infty)$



5.12. 3

5.13. 50 dB

5.14. a) 3
b) 20 cm
c) 100 razy

5.15. a) 7,4%
b) po 53 dniach

5.16. a) o 73%
b) po 1 h 16 min

5.12. Skala pH służy do badania kwasowości i zasadowości wodnych roztworów związków chemicznych. Współczynnik pH definiuje się jako: $\text{pH} = -\log \text{H}^+$, przy czym H^+ oznacza stężenie jonów wodorowych w molach na liter roztworu. Wyznacz współczynnik pH octu, dla którego stężenie jonów wodorowych wynosi 0,001 mola/litr.

5.13. Poziom natężenia dźwięku mierzymy w dB (decybelach). Liczbę decybeli N oblicza się według wzoru $N = 10 \log \frac{I}{I_0}$, gdzie I to natężenie danego dźwięku mierzone w W/m^2 (wat na metr kwadratowy), a I_0 to stała równa natężeniu dźwięku na progu słyszalności dla ucha ludzkiego, wynoszącemu 10^{-12} W/m^2 . Wyznacz liczbę decybeli zalecanego przez WHO maksymalnego poziomu hałasu (w środowisku) w porze dziennej. Natężenie dźwięku wynosi w tym wypadku 10^{-7} W/m^2 .

Zwróć uwagę, że **poziom natężenia dźwięku** oraz **natężenie dźwięku** to pojęcia opisujące dwie różne wielkości (mierzone w różnych jednostkach).

5.14. Skala Richtera służy do określenia siły trzęsień ziemi. Liczbę stopni w tej skali opisuje wzór $R = \log \frac{A}{A_0}$, gdzie A oznacza amplitudę trzęsienia wyrażoną w centymetrach, natomiast $A_0 = 10^{-4} \text{ cm}$ jest stałą nazywaną amplitudą wzorcową.

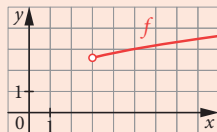
a) Ile stopni w skali Richtera ma trzęsienie ziemi o amplitudzie 0,1 cm?
b) W lipcu 2019 r. w Grecji miało miejsce trzęsienie ziemi o sile 5,3 stopnia w skali Richtera. Oblicz amplitudę tego trzęsienia ziemi.
c) Ile razy większa jest amplituda trzęsienia ziemi o sile 6,7 stopnia w skali Richtera od amplitudy trzęsienia ziemi o sile 4,7 stopnia?

5.15. Pacjentka przyjęła dawkę radioaktywnego jodu, którego okres połowicznego rozpadu jest równy 8 dni. Masę radioaktywnego jodu pozostałego w organizmie po czasie t określa zależność $M(t) = a \cdot b^t$.

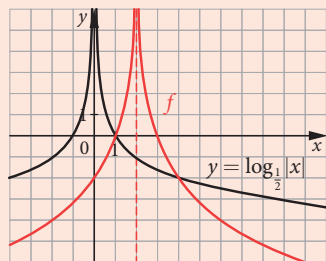
a) Ile procent substancji radioaktywnej pozostanie w organizmie pacjentki po upływie 30 dni?
b) Po jakim czasie pozostanie w organizmie 1% dawki?
Przyjmij, że $\log_2 10 \approx 3,322$.

5.16. Liczba bakterii w badanej próbce w ciągu dwóch godzin od początku obserwacji zwiększyła się trzykrotnie. Zakładamy, że tempo przyrostu liczby bakterii jest stałe.

a) O ile procent zwiększyła się liczba bakterii po godzinie?
b) Po jakim czasie od początku obserwacji liczba bakterii zwiększyła się dwukrotnie?
Przyjmij, że $\log_3 2 \approx 0,63$.

5.21. $D = (3; \infty)$ 

5.22.



$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x + 4)$$

$$x^2 - 4x + 4 > 0, \text{ czyli } (x - 2)^2 > 0, \text{ stąd } x \neq 2$$

$$D = \mathbf{R} - \{2\}$$

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 2)^2 = \log_{\frac{1}{2}}|x - 2|^2 = 2 \log_{\frac{1}{2}}|x - 2|$$

Wykres funkcji $y = \log_{\frac{1}{2}}|x|$ (symetryczny względem osi y) przesuwamy o wektor

$[2, 0]$ i „rozciągamy” dwukrotnie wzdłuż osi y (czyli dla każdego argumentu bierzemy podwojoną wartość).



5.17. Działka leśna zawierała 2400 m^3 masy drzewnej. Po upływie 8 lat nastąpił przyrost masy o 900 m^3 . Zakładamy, że masa drzewna przyrasta przez cały czas w tym samym tempie. Oblicz, ile masy drzewnej będzie zawierać działka po upływie kolejnych 5 lat.

*** 5.18.** Dla jakiej wartości parametru m dziedziną funkcji f , określonej wzorem

$$f(x) = \log \left((9 - 4m^2)x + 4m + 6 \right), \text{ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych?}$$

*** 5.19.** Dla jakich wartości parametru m dziedziną funkcji f , określonej wzorem

$$f(x) = \log \left((2m - 3)x^2 - (6 - m)x + \frac{1}{7}(m - 9) \right), \text{ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych?}$$

5.20. Wyznacz dziedzinę i narysuj wykres funkcji $f(x) = \log_2 \frac{8}{x+1}$.

*** 5.21.** Wyznacz dziedzinę i narysuj wykres funkcji

$$f(x) = \log_2(x^2 - 9) - \log_2(x - 3).$$

*** 5.22.** Wyznacz dziedzinę i narysuj wykres funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x + 4)$.

Prosto do matury

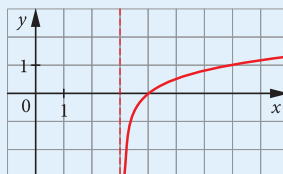


1. Dana jest funkcja $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 3) - 1$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Równanie $f(x) = -100$ ma jedno rozwiązanie.
- B. Miejscem zerowym funkcji $h(x) = f(x) + 3$ jest 1.
- C. Równanie $h(x) = |f(x)|$ ma dwa rozwiązania ujemne.

2. Narysuj wykres funkcji $f(x) = -2 - \log_2(x - 1)$.

3. Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji $f(x) = \log_a(x - b)$. Wyznacz wartości a i b .



4. Wykaż, że dziedziną funkcji $f(x) = \log_2(2x^2 - 6x + 5)$ jest zbiór liczb rzeczywistych.

5. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} \log_2(-x) - 1 & \text{dla } x < -2 \\ 3^{x+2} - 1 & \text{dla } x \geq -2 \end{cases}$.

5.19. $f(x) = \log \left((2m - 3)x^2 - (6 - m)x + \frac{1}{7}(m - 9) \right)$

$$D_f = \mathbf{R}, \text{ gdy } (2m - 3)x^2 - (6 - m)x + \frac{1}{7}(m - 9) > 0 \text{ dla } x \in \mathbf{R}.$$

Tak jest, gdy $2m - 3 > 0$ i $\Delta < 0$.

$$\Delta = (6 - m)^2 - 4(2m - 3) \cdot \frac{1}{7}(m - 9) = 36 - 12m + m^2 - \frac{4}{7}(2m^2 - 18m - 3m + 27) = \\ = \frac{1}{7}(252 - 84m + 7m^2 - 8m^2 + 84m - 108) = -\frac{1}{7}(m^2 - 144)$$

$$m > \frac{3}{2} \text{ i } (m < -12 \text{ lub } m > 12)$$

Odp.: $m \in (12; \infty)$

5.20. $D = (-1; \infty)$. Wskazówka: $f(x) = 3 - \log_2(x + 1)$

5.17. 4027 m^3

5.18. $f(x) =$

$$= \log \left((9 - 4m^2)x + 4m + 6 \right)$$

$$D_f = \mathbf{R},$$

$$\text{gdy } (9 - 4m^2)x + 4m + 6 > 0$$

dla $x \in \mathbf{R}$.

$$\text{Tak jest, gdy } 9 - 4m^2 = 0$$

$$\text{i } 4m + 6 > 0.$$

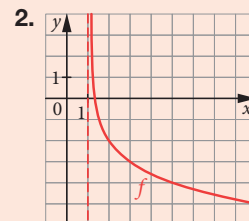
$$\left(m = -\frac{3}{2} \text{ lub } m = \frac{3}{2} \right) \text{ i } m > -\frac{3}{2}$$

$$m = \frac{3}{2}$$

Odp.: Dla $m = 1\frac{1}{2}$.

Prosto do matury

1. P, P, F



3. $a = 4, b = 3$

4. $f(x) = \log_2(2x^2 - 6x + 5)$

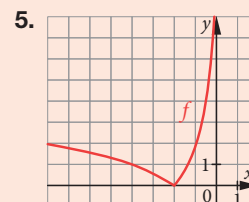
$$D_f = \{x: 2x^2 - 6x + 5 > 0\}$$

$$\Delta = 36 - 40 < 0,$$

$$\text{więc } g(x) = 2x^2 - 6x + 5$$

przyjmuje dla każdego $x \in \mathbf{R}$ wartości dodatnie.

Zatem $D_f = \mathbf{R}$.



6. Równania i nierówności wykładnicze

Umiejętności:

- rozwiązywanie prostych równań i nierówności wykładniczych

Prosta równoległa do osi x przecina krzywą wykładniczą w jednym punkcie albo nie przecina jej wcale. Inaczej mówiąc, równanie

$$a^x = m, \text{ gdzie } a > 0 \text{ i } a \neq 1$$

albo ma dokładnie jedno rozwiązanie, albo nie ma rozwiązania.

Na przykład:

- równanie $4^x = 64$ ma jedno rozwiązanie $x = 3$, bo $64 = 4^3$,
- równanie $2^x = \frac{1}{2}$ ma jedno rozwiązanie $x = -1$, bo $\frac{1}{2} = 2^{-1}$,
- równanie $3^x = -3$ nie ma rozwiązań.

Funkcja $f(x) = a^x$ dla $a > 1$ jest rosnąca, a dla $0 < a < 1$ jest malejąca. Z monotoniczności funkcji wykładniczej dla $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ wynika twierdzenie:

Jeżeli $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ i $p, q \in \mathbf{R}$, to $a^p = a^q$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p = q$.

Przykład 1 ◀ zad. 6.5

Rozwiążemy podane równanie.

Rozwiązanie

$$\text{a) } 13^{x-2} = 13^{6-x}$$

$$\begin{aligned} x-2 &= 6-x && \leftarrow \text{porównujemy} \\ 2x &= 8 && \text{wykładniki} \end{aligned}$$

$$\text{Odp.: } x = 4$$

$$\text{b) } 4^{x-2} = 1$$

Prawą stronę równania zapisujemy w postaci potęgi o podstawie 4.

$$\begin{aligned} 4^{x-2} &= 4^0 \\ x-2 &= 0 && \leftarrow \text{porównujemy} \\ \text{Odp.: } x &= 2 && \text{wykładniki} \end{aligned}$$

$$\text{c) } 7^{x+1} = 7^{3+x}$$

$$\begin{aligned} x+1 &= 3+x && \leftarrow \text{porównujemy} \\ 1 &= 3 && \text{wykładniki} \end{aligned}$$

Odp.: Równanie nie ma rozwiązań.

$$\begin{aligned} \text{d) } \left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} &= \frac{2}{3} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3(x-1)} &= \frac{2}{3} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-3(x-1)} &= \frac{2}{3} && \leftarrow \text{wykonujemy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x-3(x-1) &= 1 \\ -x+3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{Odp.: } x = 2$$

ZZ i MKP

temat 6.5

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 5.6

Generator
testów i sprawdzianów

◀ 6.5. Rozwiąż równanie.

$$\text{a) } 2^{x+3} = \frac{1}{2}$$

$$\text{d) } 5^{x-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{6-x}$$

$$\text{g) } \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} = \left(\frac{6}{5}\right)^{x-1}$$

$$\text{b) } \left(\frac{1}{7}\right)^{1-x} = 49$$

$$\text{e) } 3 \cdot 3^x - 2 = 7$$

$$\text{h) } \left(\frac{11}{8}\right)^{x-3} = \left(\frac{8}{11}\right)^{2x}$$

$$\text{c) } 3^{x-5} = 3^{5-x}$$

$$\text{f) } 2^{5x+2} = 0,25^{x+2,5}$$

$$\text{i) } 0,1^{2x+3} = 100^{x-1}$$

Odp.: a) $x = -4$ b) $x = 3$ c) $x = 5$ d) brak rozwiązań e) $x = 1$ f) $x = -1$ g) $x = 1$

h) $x = 1$ i) $x = -\frac{1}{4}$

Przykład 2 ◀ zad. 6.8

Rozwiążemy równanie $4^x - 2^x = 2$.

Rozwiązanie

Na ogół warto sprowadzać potęgi do tej samej podstawy, gdyż można wówczas zastosować metodę podstawiania.

$$(2^x)^2 - 2^x = 2$$

$$2^x = t, t > 0 \quad \leftarrow \text{wprowadzamy pomocniczą niewiadomą i określamy jej dziedzinę}$$

$$t^2 - t = 2 \quad \leftarrow \text{rozwiązujemy równanie kwadratowe}$$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$\Delta = 9, t_1 = -1, t_2 = 2 \quad \leftarrow \text{tylko drugie z podanych rozwiązań jest dodatnie}$$

$$2^x = 2 \quad \leftarrow \text{wracamy do równania zmiennej } x$$

$$2^x = 2^1 \quad \leftarrow \text{porównujemy wykładniki}$$

Odp.: $x = 1$

Wykorzystamy teraz monotoniczność funkcji wykładniczej do rozwiązywania nierówności wykładniczych.

Z monotoniczności funkcji wykładniczej dla $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ wynika twierdzenie:

- Jeżeli $a \in (0; 1)$ i $p, q \in \mathbf{R}$, to $a^p < a^q$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p > q$.
- Jeżeli $a \in (1; \infty)$ i $p, q \in \mathbf{R}$, to $a^p < a^q$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p < q$.

Przykład 3 ◀ zad. 6.9

Rozwiążemy podaną nierówność.

Rozwiązanie

a) $2^x > 8$

$$2^x > 2^3 \quad \leftarrow \text{podstawa potęgi jest większa od 1}$$

$$x > 3$$

Odp.: $x \in (3; \infty)$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^x < \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x < \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\right]^{x-1}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x < \left(\frac{2}{3}\right)^{-3x+3} \quad \leftarrow \text{podstawa potęgi jest mniejsza od 1}$$

$$x > -3x + 3, \text{ czyli } x > \frac{3}{4}$$

Odp.: $x \in \left(\frac{3}{4}; \infty\right)$

c) $5^{2x} - 5^{2x+1} + 25^{x+1} \leq 105$

$$5^{2x} - 5^{2x} \cdot 5 + (5^2)^{x+1} \leq 105$$

$$5^{2x} - 5^{2x} \cdot 5 + 5^{2x} \cdot 25 \leq 105$$

Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias.

$$5^{2x} (1 - 5 + 25) \leq 105$$

$$5^{2x} \leq 5 \quad \leftarrow \text{podstawa potęgi jest większa od 1}$$

$$2x \leq 1$$

Odp.: $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$

◀ 6.8. Rozwiąż równanie.

a) $4^x - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$

b) $25^x + 2 \cdot 5^x + 3 = 0$

c) $36^x - 2^{x+2} \cdot 3^x = 12$

d) $27^x - 3^{2x} + 3^{x+2} = 9$

e) $2 \cdot 49^x - 13 \cdot 7^x = 7$

f) $9^x + 8 \cdot 3^x = 9$

Odp.: a) $x = 2$ lub $x = 3$

b) brak rozwiązań

c) $x = 1$

d) $x = 0$

e) $x = 1$

f) $x = 0$

◀ 6.9. Rozwiąż nierówność.

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^{3x} > \left(\frac{2}{5}\right)^{2x+4}$

b) $3^x < 3^{6-x}$

c) $5^{x-1} \leq \frac{1}{5}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$

e) $\left(\frac{1}{7}\right)^x \geq 7$

f) $3^x < 27^{2x-1}$

g) $4^{x-1} > 8^{3-x}$

h) $\left(3\frac{1}{3}\right)^{2x-3} \geq 0,3^{x+2}$

Odp.: a) $x < 4$

b) $x < 3$

c) $x \leq 0$

d) $x < \frac{1}{4}$

e) $x \leq -1$

f) $x > \frac{3}{5}$

g) $x > 2\frac{1}{5}$

h) $x \geq \frac{1}{3}$

Przykład 4 ◀ zad. 6.11Rozwiążemy nierówność $0,7^{2x^2} < 0,7^{x+1}$.**Rozwiązanie**

$$2x^2 > x + 1$$

← podstawa potęgi jest **mniejsza od 1**

$$2x^2 - x - 1 > 0$$

$$2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right) > 0$$

$$\text{Odp.: } x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; \infty)$$

Zadania

W zadaniach 6.1–6.4 oceń prawdziwość podanych zdań.

6.1. Równanie $2^{x-1} = 4^{x+1}$ ma ten sam zbiór rozwiązań co równanie

A. $2^{x-1} = 2^{2x+1}$.

B. $2^{x-1} = 2^{x+2}$.

C. $2^{x-1} = 2^{4x+8}$.

6.2. Podany zbiór jest zbiorem rozwiązań nierówności $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} > \left(\frac{3}{2}\right)^x$.

A. $\left(\frac{2}{3}; \infty\right)$

B. $\left(-\frac{3}{2}; \infty\right)$

C. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$

6.3. Podana nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x .

A. $3^{2x} \leq 9^x$

B. $3^{3x} > 9^x$

C. $3^x \geq -9^x$

6.4. Podane równanie nie ma rozwiązań.

A. $2^{2x} + 3 \cdot 2^x + 2 = 0$

B. $2^{2x} - 2^{x+1} + 1 = 0$

C. $2^{2x} - 2^x + 1 = 0$

6.5. Rozwiąż równanie.

a) $2^{x+3} = \frac{1}{2}$

d) $5^{x-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{6-x}$

g) $\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} = \left(\frac{6}{5}\right)^{x-1}$

b) $\left(\frac{1}{7}\right)^{1-x} = 49$

e) $3 \cdot 3^x - 2 = 7$

h) $\left(\frac{11}{8}\right)^{x-3} = \left(\frac{8}{11}\right)^{2x}$

c) $3^{x-5} = 3^{5-x}$

f) $2^{5x+2} = 0,25^{x+2,5}$

i) $0,1^{2x+3} = 100^{x-1}$

6.6. Rozwiąż równanie.

a) $4^{x-1} \cdot 16^{2x+3} = 32$

d) $8^{7x+2} : 8^{x-1} = 1$

g) $\left(\frac{1}{81}\right)^{1-x} = \frac{243}{3^{x+3}}$

b) $2^{x+3} \cdot 2^{3x-1} = 4$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{3-x} = 2\frac{1}{4}$

h) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x+2} : \left(\frac{3}{4}\right)^{1-4x} = \frac{4}{3}$

c) $5^{1-2x} \cdot 5^{3(x+1)} = \frac{1}{5}$

f) $\sqrt[3]{8^{x-1}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

i) $0,2^{3x-1} : 5^{x+2} = 1$

◀ **6.11.** Rozwiąż nierówność.

a) $5^{2x^2+5x} > 5^3$

c) $7^{x^2} \leq 49^2$

e) $\left(\frac{5}{3}\right)^{x^2} < \left(\frac{5}{3}\right)^{x+6}$

b) $11^{3x} \geq 11^{x^2+2}$

d) $4^{-x^2+1} > \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$

f) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2-2x} \geq 8$

Odp.: a) $x \in (-\infty; -3) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$ **b)** $x \in \langle 1; 2 \rangle$ **c)** $x \in \langle -2; 2 \rangle$ **d)** $x \in (0; 1)$ **e)** $x \in (-2; 3)$ **f)** $x = 1$ **Odpowiedzi i rozwiązania****6.1.** F, F, P**6.2.** F, F, P**6.3.** P, F, P**6.4.** P, F, P**6.5. a)** $x = -4$ **b)** $x = 3$ **c)** $x = 5$ **d)** brak rozwiązań**e)** $x = 1$ **f)** $x = -1$ **g)** $x = 1$ **h)** $x = 1$ **i)** $x = -\frac{1}{4}$ **6.6. a)** $x = -\frac{1}{2}$ **b)** $x = 0$ **c)** $x = -5$ **d)** $x = -\frac{1}{2}$ **e)** $x = 1\frac{1}{2}$ **f)** $x = 1\frac{1}{2}$ **g)** $x = 1\frac{1}{5}$ **h)** $x = -\frac{2}{5}$ **i)** $x = -\frac{1}{4}$

6.7. Rozwiąż równanie.

a) $25 \cdot 5^{x^2-x} = 25^{2x-1}$

b) $3^{x^3-x} = 9^{2x^2-2}$

6.8. Rozwiąż równanie.

a) $4^x - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$

b) $25^x + 2 \cdot 5^x + 3 = 0$

c) $36^x - 2^{x+2} \cdot 3^x = 12$

c) $\left(\frac{1}{8}\right)^x = \frac{2}{4^x}$

d) $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{x+3} \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{4}{81}$

d) $27^x - 3^{2x} + 3^{x+2} = 9$

e) $2 \cdot 49^x - 13 \cdot 7^x = 7$

f) $9^x + 8 \cdot 3^x = 9$

6.9. Rozwiąż nierówność.

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^{3x} > \left(\frac{2}{5}\right)^{2x+4}$

b) $3^x < 3^{6-x}$

c) $5^{x-1} \leq \frac{1}{5}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$

e) $\left(\frac{1}{7}\right)^x \geq 7$

f) $3^x < 27^{2x-1}$

g) $4^{x-1} > 8^{3-x}$

h) $\left(3\frac{1}{3}\right)^{2x-3} \geq 0,3^{x+2}$

6.10. Rozwiąż nierówność.

a) $3^{3x} + 27^{x+1} < 84$

b) $\left(\frac{1}{7}\right)^x + \left(\frac{1}{7}\right)^{x+1} \geq 56$

c) $(4^x)^2 - 2^{4x+3} + 16^{x+1} > 36$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - 2^{-x} + \frac{3}{2^x} \leq 8$

6.11. Rozwiąż nierówność.

a) $5^{2x^2+5x} > 5^3$

c) $7^{x^2} \leq 49^2$

e) $\left(\frac{5}{3}\right)^{x^2} < \left(\frac{5}{3}\right)^{x+6}$

b) $11^{3x} \geq 11^{x^2+2}$

d) $4^{-x^2+1} > \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$

f) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2-2x} \geq 8$

6.12. Rozwiąż równanie $2^x - 5 = 24 \cdot 2^{-x}$.**6.13. Rozwiąż nierówność $5^{x+\frac{1}{2}} + 5^{x-\frac{1}{2}} > 9^{x+\frac{1}{2}} - 3^{2x}$.****6.14. Rozwiąż równanie $2^{\sqrt{x^2+6x+9}} + 4^{|x+3|} = 2$.****D****6.15. Wykaż, że równanie $4^x - k \cdot 2^x - 3 = 0$ ma dla każdej wartości parametru k dokładnie jedno rozwiązanie.**

6.15. $4^x - k \cdot 2^x - 3 = 0 \quad (1)$

$(2^x)^2 - k \cdot 2^x - 3 = 0$

Niech $t = 2^x > 0$.

$t^2 - kt - 3 = 0 \quad (2)$

 $\Delta = k^2 + 12 > 0$, więc równanie (2) ma 2 pierwiastki t_1, t_2 . Możemy przyjąć, że $t_1 < t_2$.
 $t_1 t_2 = -3 < 0$, więc dokładnie jeden pierwiastek jest dodatni, czyli $t_2 > 0$.Równanie $2^x = t_2$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Zatem równanie (1) ma dokładnie jedno rozwiązanie.

6.7. a) $x = 1$ lub $x = 4$

b) $x = -1$ lub $x = 1$ lub $x = 4$

c) $x = -1$ lub $x = \frac{2}{3}$

d) $x = -1$ lub $x = 2$

6.8. a) $x = 2$ lub $x = 3$

b) brak rozwiązań

c) $x = 1$

d) $x = 0$

e) $x = 1$

f) $x = 0$

6.9. a) $x < 4$

b) $x < 3$

c) $x \leq 0$

d) $x < \frac{1}{4}$

e) $x \leq -1$

f) $x > \frac{3}{5}$

g) $x > 2\frac{1}{5}$

h) $x \geq \frac{1}{3}$

6.10. a) $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$

b) $x \in (-\infty; -2)$

c) $x \in \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$

d) $x \in (-1; \infty)$

6.11. a) $x \in (-\infty; -3) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$

b) $x \in (1; 2)$

c) $x \in (-2; 2)$

d) $x \in (0; 1)$

e) $x \in (-2; 3)$

f) $x = 1$

6.12. $x = 3$

6.13. $x < \frac{1}{2}$

6.14. $x = -3$

7. Równania i nierówności logarytmiczne

Umiejętności:

- rozwiązywanie równań i nierówności logarytmicznych

Założmy, że $x > 0$, $a > 0$ i $a \neq 1$. Funkcja $f(x) = \log_a x$ dla $a > 1$ jest rosnąca, a dla $0 < a < 1$ jest malejąca. Z monotoniczności funkcji logarytmicznej dla $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ wynika twierdzenie:

- Jeżeli $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$, $p > 0$, $q > 0$, to $\log_a p = \log_a q$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p = q$.
- Jeżeli $a \in (0; 1)$, $p > 0$, $q > 0$, to $\log_a p > \log_a q$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p < q$.
- Jeżeli $a \in (1; \infty)$, $p > 0$, $q > 0$, to $\log_a p > \log_a q$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p > q$.

Przykład 1 ◀ zad. 7.5, 7.6

Rozwiążemy podane równanie.

Rozwiązanie

$$\text{a) } \log(2-x) = \log(3x+5)$$

Wyznaczamy dziedzinę D równania.

$$\begin{cases} 2-x > 0 \\ 3x+5 > 0 \end{cases} \quad D = \left(-\frac{5}{3}; 2\right)$$

$$2-x = 3x+5$$

← porównujemy liczby logarytmowane

$$x = -\frac{3}{4} \in D$$

← sprawdzamy, czy otrzymana liczba należy do dziedziny D

$$\text{Odp.: } x = -\frac{3}{4}$$

$$\text{b) } \log_3(x+1) + \log_3(2x-3) = 1$$

Wyznaczamy dziedzinę D równania.

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ 2x-3 > 0 \end{cases} \quad D = \left(\frac{3}{2}; \infty\right)$$

$$\log_3[(x+1)(2x-3)] = 1 \quad \leftarrow \text{korzystamy z własności logarytmów}$$

$$\log_3(2x^2 - x - 3) = 1$$

$$2x^2 - x - 3 = 3^1$$

← korzystamy z definicji logarytmu

$$2x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_1 = -\frac{3}{2} \notin D, \quad x_2 = 2 \in D$$

$$\text{Odp.: } x = 2$$

◀ 7.5. Rozwiąż równanie.

$$\text{a) } \log_2(x+4) = 3$$

$$\text{b) } \log_7(2x+1) = \log_7(3x+5)$$

$$\text{c) } \log_3(x-5) - \log_3(4x+3) = 0$$

$$\text{d) } \log_{0,1}(4x-7) = \log_{0,1}(3-2x)$$

$$\text{e) } \log_2(x^2 - 3x + 2) = \log_2(2x - 4)$$

$$\text{f) } \log(2x^2 - 4x) = \log(x^2 + x + 6)$$

$$\text{g) } \log_6(x^2 - 12) = \log_6(x-2) + 1$$

$$\text{h) } \log_{13}|x^3 - 27| - \log_{13}|x-3| = 1$$

$$\text{Odp.: a) } x = 4$$

$$\text{b) brak rozwiązań}$$

$$\text{c) brak rozwiązań}$$

$$\text{d) brak rozwiązań}$$

$$\text{e) } x = 3$$

$$\text{f) } x = -1 \text{ lub } x = 6$$

$$\text{g) } x = 6$$

$$\text{h) } x = -4 \text{ lub } x = 1$$

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 5.7

Generator
testów i sprawdzianów

◀ 7.6. Rozwiąż równanie.

$$\text{a) } \log_2(2x-3) + \log_2 x = 1$$

$$\text{c) } \log_5(x+1) + \log_5(x+2) = \log_5 6$$

$$\text{b) } \log_2(3x-2) = \log_2(2x-3) + 1$$

$$\text{d) } \log_3 x + \log_3(3-x) = 2 \log_3(x-1)$$

$$\text{Odp.: a) } x = 2 \quad \text{b) } x = 4 \quad \text{c) } x = 1 \quad \text{d) } x = \frac{5 + \sqrt{17}}{4}$$

$$c) 2 \log_2(x-1) + 2 = \log_2(11x+9)$$

Wyznaczamy dziedzinę D równania.

$$\begin{cases} x-1 > 0 \\ 11x+9 > 0 \end{cases} \quad D = (1; \infty)$$

$$\log_2(x-1)^2 + \log_2 4 = \log_2(11x+9) \quad \leftarrow \text{korzystamy z własności logarytmów}$$

$$\log_2[4 \cdot (x-1)^2] = \log_2(11x+9)$$

$$4(x^2 - 2x + 1) = 11x + 9 \quad \leftarrow \text{porównujemy liczby logarytmowane}$$

$$4x^2 - 19x - 5 = 0$$

$$x_1 = -\frac{1}{4} \notin D, \quad x_2 = 5 \in D$$

Odp.: $x = 5$

Przykład 2 zad. 7.7, 7.8

Rozwiążemy podaną nierówność.

Rozwiązanie

$$a) \log_{0,5}(x+3) > -2$$

Wyznaczamy dziedzinę D nierówności.

$$x+3 > 0 \quad D = (-3; \infty)$$

$$\log_{0,5}(x+3) > \log_{0,5}(0,5)^{-2} \quad \leftarrow \text{zapisujemy prawą stronę nierówności w postaci logarytmu}$$

$$\log_{0,5}(x+3) > \log_{0,5} 4$$

$$x+3 < 4 \quad \leftarrow \text{podstawa logarytmu jest mniejsza od 1}$$

$$x < 1$$

Wyznaczamy część wspólną otrzymanego zbioru i dziedziny.

$$\begin{cases} x < 1 \\ x \in (-3; \infty) \end{cases}$$

Odp.: $x \in (-3; 1)$

$$b) \log_5(x^2 - x) > \log_5(8+x)$$

Wyznaczamy dziedzinę D nierówności.

$$\begin{cases} x^2 - x > 0 \\ 8+x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x-1) > 0 \\ x > -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty) \\ x \in (-8; \infty) \end{cases}$$

$$D = (-8; 0) \cup (1; \infty)$$

◀ 7.7. Rozwiąż nierówność.

$$a) \log_2(5x-3) > \log_2(2x-6)$$

$$b) \log_{\frac{1}{4}}(x+2) > \log_{\frac{1}{4}}(6-x)$$

$$c) \log_3(x-12) > 2$$

$$d) \log_{0,5}(4-x) \geq -3$$

Odp.: a) $x \in (3; \infty)$

b) $x \in (-2; 2)$

c) $x \in (21; \infty)$

d) $x \in (-4; 4)$

◀ 7.8. Rozwiąż nierówność.

$$a) \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2) > 2$$

$$b) \log_2(x-1) - \log_2(5-x) > 3$$

$$c) \log_{\frac{1}{3}} \frac{x-2}{x} > -1$$

$$d) \log(x-1) + \log(2x-1) > 1$$

$$e) \log_{0,2}(3x-2) + 1 \geq 0$$

$$f) \log_3(3x^2 - 2x - 1) + \log_{\frac{1}{3}}(2x^2 - x + 5) < 0$$

Odp.:

$$a) x \in \left(-\frac{3}{2}; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; \frac{3}{2}\right)$$

$$b) x \in \left(4\frac{5}{9}; 5\right)$$

$$c) x \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$$

$$d) x \in (3; \infty)$$

$$e) x \in \left(\frac{2}{3}; 2\frac{1}{3}\right)$$

$$f) x \in \left(-2; -\frac{1}{3}\right) \cup (1; 3)$$

$$x^2 - x > 8 + x$$

← podstawa logarytmu jest **większa od 1**

$$x^2 - 2x - 8 > 0$$

$$(x + 2)(x - 4) > 0$$

$$x \in (-\infty; -2) \cup (4; \infty)$$

Wyznaczamy część wspólną otrzymanego zbioru i dziedziny D .

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -2) \cup (4; \infty) \\ x \in (-8; 0) \cup (1; \infty) \end{cases}$$

Odp.: $x \in (-8; -2) \cup (4; \infty)$

c) $\log_{0,3} \frac{x-5}{x+2} > \log_{0,3} x$

Wyznaczamy dziedzinę D nierówności.

$$\begin{cases} \frac{x-5}{x+2} > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-5)(x+2) > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

← $\frac{a}{b} > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \cdot b > 0$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -2) \cup (5; \infty) \\ x \in (0; \infty) \end{cases}$$

$$D = (5; \infty)$$

$$\frac{x-5}{x+2} < x$$

← podstawa logarytmu jest **mniejsza od 1**

$$\frac{x-5}{x+2} - x < 0$$

$$\frac{-x^2 - x - 5}{x+2} < 0$$

← wyrażenie w liczniku jest zawsze ujemne

$$x+2 > 0$$

$$x > -2$$

Wyznaczamy część wspólną otrzymanego zbioru i dziedziny.

$$\begin{cases} x \in (-2; \infty) \\ x \in (5; \infty) \end{cases}$$

Odp.: $x \in (5; \infty)$

◀ 7.10. Rozwiąż równanie.

a) $2(\log_3 x)^2 - \log_3 x - 1 = 0$

b) $\frac{3}{\log_2(0,25x)} + \frac{4}{\log_2(8x)} = 1$

c) $\frac{2}{\log x} - \frac{1}{1 - \log x} = 2$

d) $\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^3 - 7 \log_{\frac{1}{2}} x + 6 = 0$

Odp.: a) $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ lub $x = 3$

b) $x = \frac{1}{2}$ lub $x = 128$

c) $x = \sqrt{10}$ lub $x = 100$

d) $x = \frac{1}{4}$ lub $x = \frac{1}{2}$ lub $x = 8$

Przykład 3 ◀ zad. 7.10

Rozwiążemy równanie $\frac{\log_3 x}{\log_3 x - 2} + \log_3 x = 6$.

Rozwiązanie

Przy wyznaczaniu dziedziny równania musimy uwzględnić następujące warunki:

$$\begin{cases} x > 0 & \leftarrow \text{aby logarytm był określony} \\ \log_3 x \neq 2 & \leftarrow \text{aby wyrażenie w mianowniku nie było równe 0} \end{cases}$$

$$D = (0; \infty) - \{9\}$$

Zastosujemy metodę podstawiania:

$$\log_3 x = t, \quad t \neq 2$$

Równanie przyjmuje postać $\frac{t}{t-2} + t = 6$.

Po przekształceniach otrzymujemy równanie $t^2 - 7t + 12 = 0$, którego rozwiązaniami są:

$$t_1 = 3, \quad t_2 = 4 \quad \leftarrow \text{oba rozwiązania należą do dziedziny}$$

$$\log_3 x = 3 \quad \text{lub} \quad \log_3 x = 4$$

$$x = 27 \quad \text{lub} \quad x = 81$$

Odp.: $x = 27$ lub $x = 81$

Zadania

W zadaniach 7.1–7.4 oceń prawdziwość podanych zdań.

7.1. Dane jest równanie $\log_2 x + \log_2(x+2) = 3$.

A. Jednym z rozwiązań równania jest liczba -4 .

B. Jednym z rozwiązań równania jest liczba 2 .

C. Równanie ma co najmniej jedno rozwiązanie.

7.2. Nierówność $\log_{0,5}(x-2) > \log_{0,5}(2x)$ jest równoważna nierówności

A. $x - 2 < 2x$.

B. $x > -2$.

C. $\log_2(x-2) < \log_2(2x)$.

7.3. Zbiór $(1; \infty)$ jest dziedziną nierówności

A. $\log(x+2) - \log(x-1) \leq 3$.

B. $\log x - \log(x^2 - 1) \leq 3$.

C. $\log \frac{x+1}{x-1} \leq 3$.

7.4. Równanie $\log_2(x^2 + 2) = m + 1$

A. dla $m = -1$ nie ma rozwiązań.

B. dla $m = 0$ ma jedno rozwiązanie.

C. dla $m = 1$ ma dwa rozwiązania.

Odpowiedzi i rozwiązania

7.1. F, P, P

7.2. F, F, P

7.3. P, P, F

7.4. P, P, P

7.5. a) $x = 4$ **b)** brak rozwiązań**c)** brak rozwiązań**d)** brak rozwiązań**e)** $x = 3$ **f)** $x = -1$ lub $x = 6$ **g)** $x = 6$ **h)** $x = -4$ lub $x = 1$ **7.6. a)** $x = 2$ **b)** $x = 4$ **c)** $x = 1$ **d)** $x = \frac{5 + \sqrt{17}}{4}$ **7.7. a)** $x \in (3; \infty)$ **b)** $x \in (-2; 2)$ **c)** $x \in (21; \infty)$ **d)** $x \in (-4; 4)$ **7.8. a)** $x \in \left(-\frac{3}{2}; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; \frac{3}{2}\right)$ **b)** $x \in \left(4\frac{5}{9}; 5\right)$ **c)** $x \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$ **d)** $x \in (3; \infty)$ **e)** $x \in \left(\frac{2}{3}; 2\frac{1}{3}\right)$ **f)** $x \in \left(-2; -\frac{1}{3}\right) \cup (1; 3)$ **7.9. a)** $x \in \left(0; \frac{1}{4}\right) \cup (4; \infty)$ **b)** $x \in \left(1\frac{9}{16}; 2\frac{1}{2}\right)$ **c)** $x \in (-6; 3) \cup (3; 12)$ **d)** $x \in (-6; -2) \cup (2; 6)$ **7.10. a)** $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ lub $x = 3$ **b)** $x = \frac{1}{2}$ lub $x = 128$ **c)** $x = \sqrt{10}$ lub $x = 100$ **d)** $x = \frac{1}{4}$ lub $x = \frac{1}{2}$ lub $x = 8$ **7.11.** $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 1) \cup (1; \infty)$ **7.12.** $D = \langle -2\sqrt{2}; 0 \rangle \cup (0; 2\sqrt{2})$ **7.5. Rozwiąż równanie.**

a) $\log_2(x+4) = 3$

b) $\log_7(2x+1) = \log_7(3x+5)$

c) $\log_3(x-5) - \log_3(4x+3) = 0$

d) $\log_{0,1}(4x-7) = \log_{0,1}(3-2x)$

e) $\log_2(x^2 - 3x + 2) = \log_2(2x - 4)$

f) $\log(2x^2 - 4x) = \log(x^2 + x + 6)$

g) $\log_6(x^2 - 12) = \log_6(x - 2) + 1$

h) $\log_{13}|x^3 - 27| - \log_{13}|x - 3| = 1$

7.6. Rozwiąż równanie.

a) $\log_2(2x-3) + \log_2 x = 1$

b) $\log_2(3x-2) = \log_2(2x-3) + 1$

c) $\log_5(x+1) + \log_5(x+2) = \log_5 6$

d) $\log_3 x + \log_3(3-x) = 2\log_3(x-1)$

7.7. Rozwiąż nierówność.

a) $\log_2(5x-3) > \log_2(2x-6)$

b) $\log_{\frac{1}{4}}(x+2) > \log_{\frac{1}{4}}(6-x)$

c) $\log_3(x-12) > 2$

d) $\log_{0,5}(4-x) \geq -3$

7.8. Rozwiąż nierówność.

a) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2) > 2$

b) $\log_2(x-1) - \log_2(5-x) > 3$

c) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{x-2}{x} > -1$

d) $\log(x-1) + \log(2x-1) > 1$

e) $\log_{0,2}(3x-2) + 1 \geq 0$

f) $\log_3(3x^2 - 2x - 1) + \log_{\frac{1}{3}}(2x^2 - x + 5) < 0$

7.9. Rozwiąż nierówność.

a) $|\log_2 x| > 2$

b) $\left| \log_{\frac{1}{2}}(2x-3) - 1 \right| < 2$

c) $\log_{\frac{1}{3}}|x-3| > -2$

d) $\log_4(|x|-2) \leq 1$

7.10. Rozwiąż równanie.

a) $2(\log_3 x)^2 - \log_3 x - 1 = 0$

b) $\frac{3}{\log_2(0,25x)} + \frac{4}{\log_2(8x)} = 1$

c) $\frac{2}{\log x} - \frac{1}{1 - \log x} = 2$

d) $\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^3 - 7\log_{\frac{1}{2}} x + 6 = 0$

7.11. Rozwiąż nierówność $\log \left| \frac{x-1}{2x+1} \right| < 0$.**7.12. Wyznacz dziedzinę funkcji** $f(x) = \frac{\sqrt{\log(9-x^2)}}{2^x - 1}$.*** 7.13. Rozwiąż równanie.**

a) $\log_2 x + \log_4 x - \log_8 x = 5$

b) $\log_3 x + 4\log_x 3 = 2\log_{\sqrt{7}} 7$

7.13.

a) $\log_2 x + \log_4 x - \log_8 x = 5$

$D = (0; \infty)$

$\log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 4} - \frac{\log_2 x}{\log_2 8} = 5$

$\log_2 x + \frac{\log_2 x}{2} - \frac{\log_2 x}{3} = 5 \cdot \frac{6}{6}$

$6\log_2 x + 3\log_2 x - 2\log_2 x = 30$

$7\log_2 x = 30$

$\log_2 x = \frac{30}{7}$

$x = 2^{\frac{30}{7}} = 2^{4 + \frac{2}{7}} = 2^4 \cdot 2^{\frac{2}{7}} = 16 \cdot \sqrt[7]{2^2}$

Odp.: $x = 16 \cdot \sqrt[7]{4}$

b) $\log_3 x + 4\log_x 3 = 2\log_{\sqrt{7}} 7$

$D = (0; 1) \cup (1; \infty)$

$\log_3 x + 4 \cdot \frac{\log_3 3}{\log_3 x} = 2 \cdot 2 \cdot \log_3 x$

$(\log_3 x)^2 + 4 = 4\log_3 x$

$(\log_3 x)^2 - 4\log_3 x + 4 = 0$

$(\log_3 x - 2)^2 = 0$

$\log_3 x - 2 = 0$

$\log_3 x = 2$

$x = 3^2$

Odp.: $x = 9$

8. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–21 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszyte.

1. Jedna z liczb różni się od trzech pozostałych. Która to liczba?

- A. $\sqrt[3]{9}$ B. $3^{\log_3 \sqrt[3]{9}}$ C. $\frac{2}{3} \log_3 3$ D. $3^{\frac{2}{3}}$

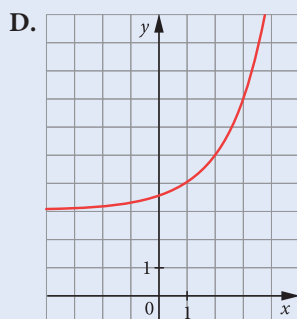
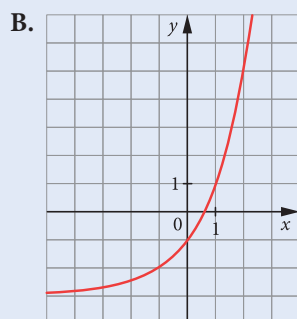
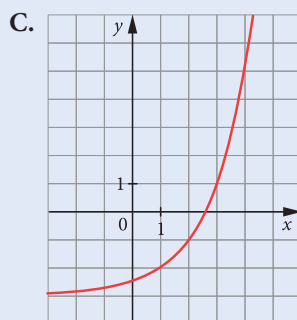
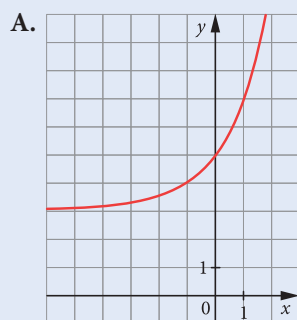
2. Wskaż liczbę równą $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$.

- A. $64^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}$ B. 4 C. 2 D. $\sqrt{8}$

3. Która nierówność jest fałszywa?

- A. $3^{\frac{2}{3}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}$ B. $2\sqrt{2} > 2^{\frac{4}{3}}$ C. $\log_5 3 > \log_5 1$ D. $\left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{7}{4}\right)^{-\frac{1}{3}}$

4. Na którym rysunku naszkicowany jest wykres funkcji $f(x) = 2^{x-1} - 3$?



5. Która z liczb jest równa 2?

- A. $7^{\log_7 2}$ B. $7^{\log_7 49}$ C. $7^{\log_2 7}$ D. $2^{\log_7 49}$

Odpowiedzi i rozwiązania

1. C

2. C

3. A

4. C

5. A

Multiteka

- Czy podane wyrażenia są równe
- Spirale w przyrodzie

dla nauczyciela.pl | Klasówka 5

Generator
testów i sprawdzianów

- 6. D**
- 6.** Dane są trzy równości.
 I. $8^{\log_2 3} = 27$ II. $(\log_5 1)^3 = 0$ III. $\sqrt{\log_3 81} = 2$
 Które z nich zachodzą?
 A. żadna B. tylko I i II C. tylko II i III D. wszystkie
- 7. B**
- 7.** Która z równości nie zachodzi?
 A. $\log 3 + \log 2 + \log 7 = \log 42$ C. $\frac{\log 15 - \log 3}{\log 10} = \log 5$
 B. $\frac{\log 15}{\log 3} = \log 5$ D. $\log 14 - \log 7 + \log 5 = 1$
- 8. C**
- 8.** Funkcja $f(x) = 2^x - 2$ przyjmuje tylko wartości dodatnie dla wszystkich
 A. $x > -1$. B. $x < 2$. C. $x > 1$. D. $x > 0$.
- 9. D**
- 9.** Które zdanie jest fałszywe?
 A. $\log 10 > \log 0,1$ C. $\log 100 + \log 10 = 3$
 B. $\log 0,1 < \log 1$ D. $\log 2 \cdot \log 5 = 1$
- 10. B**
- 10.** Dla jakich wartości m równanie $\left(\frac{1}{2}\right)^x - 3 = m$ ma dokładnie jedno rozwiązanie?
 A. dla $m = -3$ C. dla $m < -3$
 B. dla $m > -3$ D. Nie ma takich wartości m .
- 11. C**
- 11.** Dane są liczby $a = -\frac{1}{18}$, $b = \log_{\frac{1}{4}} 64$, $c = \log_{\frac{1}{5}} 25$. Iloczyn abc jest równy
 A. -9 . B. -64 . C. $-\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.
- 12. D**
- 12.** Wiadomo, że $c = \log_5 3$. Wynika stąd, że
 A. $c = 5^3$. B. $c^5 = 3$. C. $3^c = 5$. D. $5^c = 3$.
- 13. B**
- 13.** Dane są cztery zależności.
 I. $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$ III. $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$
 II. $\log_a x \cdot \log_a y = \log_a(x + y)$ IV. $\frac{\log_a x}{\log_a y} = \log_a(x - y)$
 Które z tych zależności są prawdziwe dla wszystkich $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$?
 A. tylko I i II B. tylko I i III C. tylko II i IV D. tylko III i IV
- 14. B**
- 14.** Liczby a, b, c są większe od 1 i liczba a podniesiona do potęgi b jest równa c .
 Zatem
 A. $a = \log_b c$. B. $b = \log_a c$. C. $c = \log_a b$. D. $b = \log_c a$.

15. Ile wynosi $2^{\log_4 \frac{1}{16}}$?

- A. -4 B. $\frac{1}{4}$ C. $\sqrt{2}$ D. 16

15. B

16. Liczba $\log_2 12$ nie jest równa liczbie

- A. $1 + \log_2 6$. B. $2 + \log_2 3$. C. $3 + \log_2 \frac{4}{3}$. D. $4 - \log_2 \frac{4}{3}$.

16. C

17. Która z wymienionych liczb jest najmniejsza?

- A. $(2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}$ B. $(\sqrt{2})^{2\frac{1}{3}}$ C. $[(\sqrt{2})^2]^{\frac{1}{3}}$ D. $\sqrt{2 \cdot 2^{\frac{1}{3}}}$

17. C

18. Liczbę $\sqrt{2\sqrt{2}}$ można zapisać jako

- A. $2^{\frac{3}{4}}$. B. $2^{\frac{3}{2}}$. C. $2^{\frac{1}{3}}$. D. $2^{\frac{1}{8}}$.

18. A

19. Do wykresu funkcji $f(x) = a^x$ należy punkt o współrzędnych (x, y) . Zatem do wykresu funkcji $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$

19. B

- A. należy punkt o współrzędnych $(x, -y)$.
 B. należy punkt o współrzędnych $(-x, y)$.
 C. należy punkt o współrzędnych $(-x, -y)$.
 D. nie należy żaden z punktów wymienionych w A, B lub C.

20. Dane są funkcje $f(x) = \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^x$ i $g(x) = \left(\frac{\sqrt{17}}{4}\right)^x$.

20. C

- A. Funkcja f jest rosnąca i funkcja g jest rosnąca.
 B. Funkcja f jest rosnąca, a funkcja g jest malejąca.
 C. Funkcja f jest malejąca, a funkcja g jest rosnąca.
 D. Funkcja f jest malejąca i funkcja g jest malejąca.

21. Funkcja $f(x) = 3^x$

21. B

- A. przyjmuje wartość 100 w przedziale $(3; 4)$.
 B. przyjmuje wartość 100 w przedziale $(4; 5)$.
 C. przyjmuje wartość 100 w przedziale $(5; 6)$.
 D. nie przyjmuje wartości 100 dla żadnego argumentu.

W zadaniach 22–39 oceń prawdziwość podanych zdań.

22. Liczba $9^{-\frac{3}{4}}$ jest równa liczbie p , gdy

22. F, P, P

- A. $p = (\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}$. B. $p = \frac{\sqrt{3}}{9}$. C. $p = \left((\sqrt{3})^{\sqrt{3}}\right)^{-\sqrt{3}}$.

23. P, F, P

23. Wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = g(x)$ są symetryczne względem jednej z osi układu współrzędnych. Funkcje te mogą być opisane wzorami

A. $f(x) = 3^x - 2$ i $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$.

B. $f(x) = \log_2 x - 2$ i $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x - 2$.

C. $f(x) = \log_2 x + 1$ i $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x - 1$.

24. P, F, F

24. Wykres funkcji $f(x) = 3^x - 1$ nie przecina wykresu funkcji

A. $g(x) = 3^{x-3} - 1$.

B. $h(x) = 3^{x-1}$.

C. $t(x) = 3^{-x} - 1$.

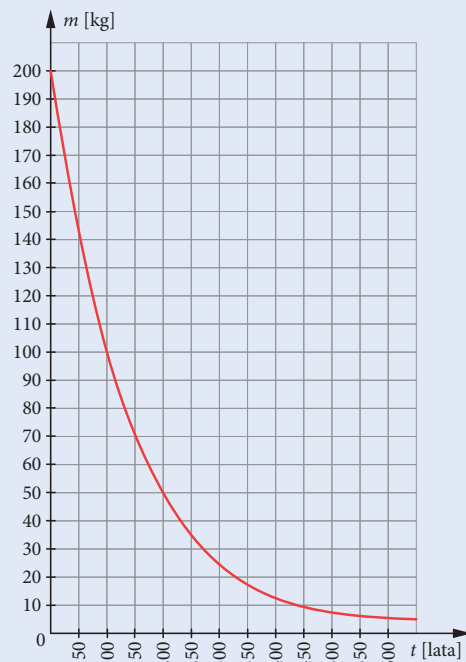
25. F, P, P

25. Wykres funkcji $m(t)$ przedstawia ilość (w kg) pewnego izotopu pierwiastka promieniotwórczego, która nie uległa rozpadowi po określonym czasie. Okres rozpadu połowicznego tego izotopu wynosi T .

A. $T = 300$ lat.

B. Z masy początkowej 200 kg tego pierwiastka po 200 latach pozostanie 50 kg.

C. $T = 100$ lat.



26. F, P, P

26. Funkcja

A. $f(x) = -3^{-x}$ jest malejąca.

B. $f(x) = \log_2(-x)$ jest malejąca.

C. $f(x) = |0,9^x|$ jest malejąca.

27. P, P, P

27. Zbiór rozwiązań nierówności $9^{x-1} < 3$ jest zawarty w zbiorze rozwiązań nierówności

A. $\left(\frac{1}{4}\right)^x > \frac{1}{16}$.

B. $25^x \geq -5$.

C. $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^x \leq 1\frac{1}{4}$.

28. F, P, F

28. Liczba

A. $p = 3^{\log_9 2}$ jest wymierna.

B. $p = 9^{\log_3 2}$ jest wymierna.

C. $p = 3^{\frac{1}{2} - \log_3 2}$ jest wymierna.

29. Liczba $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{6}$ jest równa liczbie

- A. $1 + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$. B. $-\log_{\frac{1}{3}} 6$. C. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{18} - 1$.

30. Niech $\log_{15} 3 = a$. Wtedy

- A. $\log_5 3 = \frac{a}{1-a}$. B. $\log_3 5 = \frac{a}{1+a}$. C. $\log_5 15 = 1 - a$.

31. Równość $\log(x-1) + \log(x+1) = \log(x^2-1)$ zachodzi

- A. dla każdej liczby rzeczywistej x .
B. dla każdego $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$.
C. dla każdego $x \in (1; \infty)$.

32. Dana jest funkcja $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} - 1$.

- A. Zbiorem wartości tej funkcji jest $\langle 1; \infty \rangle$.
B. Miejscem zerowym funkcji jest -2 .
C. $f(2020) > f(2021)$

33. Dana jest funkcja $f(x) = \log_{\frac{2}{3}}(-x)$.

- A. Funkcja f nie ma miejsc zerowych.
B. Dziedziną funkcji f jest $(-\infty; 0)$.
C. Funkcja f jest rosnąca.

34. Funkcja

- A. $f(x) = \log_{\frac{4}{3}}(x+7)$ jest malejąca.
B. $f(x) = \log_{\sqrt{2}}(-x)$ jest malejąca.
C. $f(x) = -\log_{0,1} x$ jest malejąca.

35. Wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = g(x)$ są symetryczne względem osi x . Funkcje te mogą być opisane wzorami

- A. $f(x) = \log_3 x$ i $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$.
B. $f(x) = \log_5 x$ i $g(x) = -\log_5 x$.
C. $f(x) = \log x$ i $g(x) = \log_5(-x)$.

36. Funkcja

- A. $f(x) = \log(x^2)$ nie ma miejsc zerowych.
B. $f(x) = \log(x^2 - 3)$ nie ma miejsc zerowych.
C. $f(x) = \log(x^2 + 3)$ nie ma miejsc zerowych.

29. P, P, P

30. P, F, F

31. F, F, P

32. F, P, P

33. F, P, P

34. F, P, F

35. P, P, F

36. F, F, P

37. F, F, P

38. F, P, F

39. F, P, F

37. Dana jest funkcja $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2x + 2)$.

- A. Dziedziną funkcji f jest przedział $(0; \infty)$.
 B. Funkcja f nie ma miejsc zerowych.
 C. Funkcja f nie przyjmuje wartości dodatnich.

38. Zbiór rozwiązań nierówności $2^x \leq 32^{x+1}$ jest zawarty w zbiorze rozwiązań nierówności

- A. $3^x < \frac{1}{3}$. B. $3^x > -\frac{1}{3}$. C. $\left(\frac{1}{9}\right)^x < \sqrt{27}$.

39. Zbiór rozwiązań nierówności $\log_{\frac{1}{2}}(3-x) \leq \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ jest zawarty w zbiorze rozwiązań nierówności

- A. $\log_3 x < 0$. B. $\log_{0,1} x \leq 0$. C. $\log_2 x < 1$.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

D 40. Wykaż, że $\left(3^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = 3^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}}$.

41. a) 0 b) 1 c) 0 d) 1

42. a) 3 b) 0 c) 3 d) 0

43. $\frac{1}{2}$

44. 2,77

45. a) 1 b) -2 c) 2 d) 0

46. a) 18 b) 49 c) 2 d) $1\frac{1}{3}$
e) 3 f) 6

41. Oblicz.

- a) $\log 10 + \log 100 - \log 1000$ c) $5 \log_2 \frac{1}{2} - 2 \log_2 \sqrt{2} + 3 \log_2 4$
 b) $3 \log_7 2 + \log_7 56 - 2 \log_7 8$ d) $2 \log_{12} 2 + \log_{12} 3$

42. Oblicz.

- a) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} + 3 \log_{\frac{1}{2}} 2 - \log_{\frac{1}{2}} 8$ c) $\log 10 + \frac{1}{2} \log 100 + \frac{1}{3} \log 1000$
 b) $5 \log_4 2 - 2 \log_4 4 + \log_4 \frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{4} \log_3 6 + \frac{1}{2} \log_3 2 - 0,25 \log_3 24$

43. Wiadomo, że $\log_9 x = \frac{1}{2}$. Oblicz $\log_x \sqrt{3}$.44. Przyjmij, że $\log_3 7 \approx 1,77$ i oblicz $\log_3 42 - \log_3 2$.

45. Oblicz.

- a) $\log_2 \log_5 25$ c) $\log_{\sqrt{3}} \log_4 64$
 b) $\log_{\frac{1}{2}} \log_3 81$ d) $\log_{\frac{1}{27}} \log_{\sqrt{2}} \sqrt[4]{4}$

46. Oblicz.

- a) $3^{\log_3 18}$ c) $8^{1-\log_8 4}$ e) $81^{1-\log_3 \sqrt[4]{27}}$
 b) $25^{\log_5 7}$ d) $2^{2-\log_4 9}$ f) $216^{\frac{5-\log_6 36}{9}}$

$$40. \left(3^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{3^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}}} = \frac{3^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}}}{3 - 2} = 3^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}}$$

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

47. Przedstaw podane wyrażenie w postaci potęgi.

$$\left(2^{\frac{2}{3}} \cdot 0,25^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{4}\right)^{-1} : \left[\left(\frac{10}{3}\right)^{\frac{2}{5}} \cdot 0,81^{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt[5]{100}\right]^{-\frac{1}{3}}$$

48. Wykonaj działania.

$$a) \frac{\left(7^{\frac{1}{2}} - 9^{\frac{1}{2}}\right)(\sqrt{7} + 3)}{\left(12^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{1}{2}}\right)^2}$$

$$c) \left[9^{-\frac{1}{4}} + \left(\frac{1}{3^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right] \left[3^{-0,5} - (3\sqrt{3})^{-\frac{4}{3}}\right]$$

$$b) \left[\frac{\left(3^{\frac{1}{4}} - 2^{\frac{1}{4}}\right)\left(3^{\frac{1}{4}} + (\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}\right)}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}\right]^2$$

$$d) \left[\left(2 - 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} - (2 + \sqrt{3})^{\frac{1}{2}}\right]^2$$

49. Oblicz.

$$a) \frac{\left(3 \log \frac{1}{7} + 2 \log 49\right)^2}{\log 7} - \log 70$$

$$c) \frac{\log_5 \log_2 32 + \log_2 \log_5 25}{\log_5 \sqrt{\log_2 32}}$$

$$b) \frac{1}{2} \log_2 \log_2 16 + (\log_2 4 - \log_2 0,5)^2$$

$$d) \frac{\log \log_7 \log_2 128}{\log_2 \log_7 \log 18} + \frac{\log_2 18}{\log_2 \frac{1}{18}}$$

50. Skorzystaj z definicji logarytmu i rozwiąż równanie.

$$a) \log_4(3x + 1) = 2$$

$$c) \log \log_2 [\log_5(11x + 4) - 1] = 0$$

$$b) \log_9 \log_4(65 - x) = \frac{1}{2}$$

$$d) \log_{0,5} \log_5 [\log_3(x^2 - 4x + 6) + 22] = -1$$

51. Niech $a = \log_7 4$. Przedstaw wartość podanego wyrażenia za pomocą a .

$$a) \log_7 28 - \log_2 14 \quad b) \frac{\log_{\frac{2}{7}} 7 + \log_{\frac{4}{7}} 7}{\log_{\frac{4}{7}} 7 \cdot \log_{\frac{2}{7}} 7} \quad c) \frac{\log_{\frac{2}{7}} 49 + \log_{\frac{4}{7}} 49}{\log_{\frac{4}{7}} 7 - \log_{\frac{2}{7}} 7} \quad d) \frac{\log_4 7 \cdot \log_7 16}{\log_{14} \sqrt{7}}$$

52. Który ze znaków: $<$, $>$ czy $=$ należy wstawić zamiast $?$, aby otrzymać zależność prawdziwą?

$$a) 2^{\log_2 3} \quad ? \quad 4^{\log_2 5 + \log_{\frac{1}{2}} 7}$$

$$c) 6^{\log_{\frac{1}{6}} \frac{3}{2} + \log_6 9} \quad ? \quad (\sqrt{7})^{2 \log_7 3 + \frac{1}{2} \log_7 16}$$

$$b) \sqrt{0,007} \quad ? \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 4 - \log_{\frac{1}{3}} 9}$$

$$d) 10^{-1 + 4 \log 5} \quad ? \quad 2^{5 - \frac{1}{2} \log_2 12}$$

$$47. 9^{\frac{1}{5}}$$

$$48. a) -\frac{2}{3} \quad b) 1 \quad c) \frac{26}{81} \quad d) 2$$

$$49. a) -1 \quad b) 10 \quad c) 4 \quad d) -1$$

$$50. a) x = 5 \\ b) x = 1 \\ c) x = 11 \\ d) x = -3 \text{ lub } x = 7$$

$$51. a) a - \frac{2}{a}$$

$$b) \frac{3}{2}a - 2$$

$$c) \frac{8 - 6a}{a}$$

$$d) \frac{8}{a + 2}$$

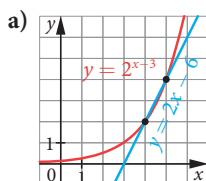
$$52. a) > \quad b) > \quad c) = \quad d) >$$

53. $ZW = (1; \infty)$

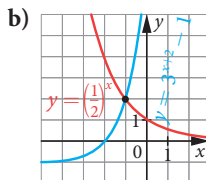
54. $x = -1$

55. $a = \frac{1}{4}$

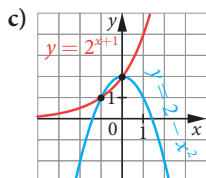
56.



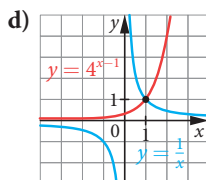
$x = 4 \text{ lub } x = 5$



$x = -1$

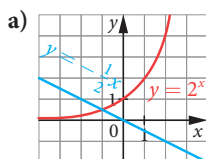


$x = -1 \text{ lub } x = 0$

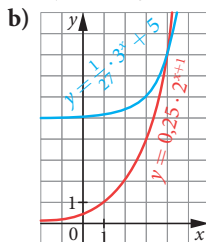


$x = 1$

57.



$x \in (-\infty; -1)$



$x \in (-\infty; 4)$

58. a) $x = 9$ b) $x = 0$

c) $x = 2$ d) $x = -\frac{2}{3}$

59. a) $x \in \langle -4; \infty \rangle$

b) $x \in (-\infty; -2)$

c) $x \in (-4; \infty)$

d) $x \in \langle -4\frac{1}{4}; 8 \rangle$

60. a) $2\sqrt[5]{2}$ b) $\frac{6}{11}$

53. Narysuj wykres funkcji $f(x) = 3^{x+2} + 1$. Podaj zbiór wartości tej funkcji.54. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - 4$ i odczytaj z wykresu jej miejsca zerowe.55. Wykres funkcji $f(x) = a^{x-3} - 2$ przechodzi przez punkt $A = (2, 2)$. Oblicz a i naszkicuj wykres tej funkcji.

56. Rozwiąż graficznie równanie.

a) $2^{x-3} = 2x - 6$

c) $2^{x+1} = 2 - x^2$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 3^{x+2} - 1$

d) $4^{x-1} = \frac{1}{x}$

57. Rozwiąż graficznie nierówność.

a) $2^x \leq -\frac{1}{2}x$

b) $0,25 \cdot 2^{x+1} < \frac{1}{8} \cdot 2^x + 6$

58. Rozwiąż równanie.

a) $9 \cdot 3^{x-7} = 81$

c) $0,4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{x-7} = \left(2\frac{1}{2}\right)^{2x}$

b) $9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+3} = \frac{1}{3^{1-2x}}$

d) $\left(\frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{8}\right)^{x-2} = 2\sqrt[3]{32}$

59. Dana jest funkcja $f(x) = 3^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$. Rozwiąż nierówność.

a) $f(x-1) \geq f\left(\frac{1}{2}x-3\right)$

c) $2f(x+5) > \left(\frac{1}{2}f(x+3)\right)^{-1}$

b) $3f(x+5) \leq \frac{1}{27}f(3-x)$

d) $\frac{1}{9}f(x) < f(\sqrt{4x+17})$

60. Liczby a, b, c spełniają warunek

a) $\log_5 a = 2 \log_3 b = 2 + \log_2 c = 4$. Oblicz $\sqrt[5]{(\sqrt{a}-b) \cdot c}$.

b) $\log_a x = \log_b x - 2 = \log_c x - 4 = 2$. Oblicz $\log_{a^2b^2c^2} x$.

D 61. Wykaż, że jeżeli $\log_2 4a = 15$ i $\log_2 \frac{8}{b} = 12$, to $ab = 16$.D 62. Wykaż, że jeżeli $a = \log 5$, to $3 - 2a = \log 40$.

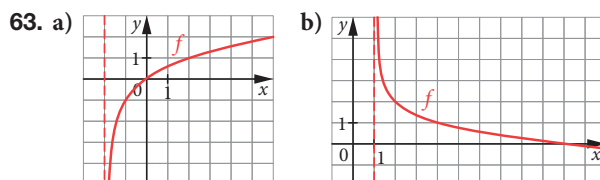
63. Narysuj wykres funkcji.

a) $f(x) = \log_2(x+2) - 1$

b) $f(x) = 2 - \log_3(x-1)$

61. $4a = 2^{15} \Leftrightarrow a = \frac{1}{4} \cdot 2^{15} = 2^{13}$, $\frac{8}{b} = 2^{12} \Leftrightarrow \frac{1}{b} = 2^9 \Leftrightarrow b = 2^{-9}$, $ab = 2^{13} \cdot 2^{-9} = 2^4 = 16$

62. $3 - 2a = 3 - 2 \cdot \log 5 = 3 - \log 25 = \log 1000 - \log 25 = \log \frac{1000}{25} = \log 40$





64. Fundusz inwestycyjny „Ryzyko” obiecuje podwojenie zainwestowanego kapitału w ciągu trzech lat. Załóżmy, że taka obietnica byłaby spełniona i że kapitał przyra-
stałby przez cały czas w tym samym tempie.

- a) O ile procent zwiększy się kapitał po roku?
b) Po ilu miesiącach kapitał zwiększy się o 10%?
Przyjmij, że $\log_2 11 \approx 3,46$ i $\log_2 10 \approx 3,22$.

65. Narysuj wykres funkcji.

a) $f(x) = \left| \log_{\frac{1}{3}}(-x) \right|$ b) $f(x) = 4^{\log_2 x}$

66. Wyznacz dziedzinę funkcji.

a) $f(x) = -\log_{\frac{1}{3}}(5x - 15)$ c) $f(x) = \log(2^x - 1)$
b) $f(x) = \log_3(-x^2 - 7x - 10)$ d) $f(x) = \log_x(4 - x)$

67. Dane są liczby:

$$a = \log_{\pi} 3, \quad b = \log_{\frac{1}{\pi}} \frac{1}{3}, \quad c = 2^{0,1}, \quad d = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}, \quad e = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{5}{3}}, \quad f = \left(2^{\sqrt{2}-1}\right)^{\sqrt{2}+1}.$$

- a) Która z podanych liczb jest rozwiązaniem równania $(\log_2 x)^2 + 1,9 \log_2 x = 0,2$?
b) Które z podanych liczb są równe 1, które mniejsze od 1, a które większe od 1?

68. Rozwiąż równanie.

a) $\log_2(3x+5) - \log_2(1-x) = 1$ b) $\log(x^2 - 16) - 2 = 2 \log 3 - \log(x^2 + 16)$

69. Dane są funkcje $f(x) = 2^{3x^2+x-18}$ i $g(x) = 4^{x^2+1}$. Dla jakich x wartości funkcji f są nie większe od wartości funkcji g ?

70. Rozwiąż równanie $0,125^x \cdot (\sqrt{2})^{8-2x} = \sqrt{2^{x-1}}$.

71. Rozwiąż nierówność.

a) $\left(\frac{1}{27} \cdot \sqrt[3]{3}\right)^x < 27 \cdot 3^{2-x}$ b) $5^{x^2} < \frac{125^x}{25}$

* **72.** Rozwiąż nierówność $8^x + 5 \cdot 2^x \geq 2 + 4^{x+1}$.

* **73.** Rozwiąż równanie $\log 2 + \log(4^{x-2} + 9) = 1 + \log(2^{x-2} + 1)$.

* **74.** Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - 2x - \log_{0,5} \frac{m^2 - 3m + 4}{m-1} = 0$ ma dwa różne dodatnie pierwiastki rzeczywiste?

74. Szukamy m , dla którego spełnione są jednocześnie trzy warunki:

(1) $\Delta > 0$, (2) $x_1 + x_2 > 0$, (3) $x_1 x_2 > 0$

Wyznaczamy dziedzinę logarytmu: $D_m = (1; \infty)$.

(1) $\Delta > 0 \Rightarrow 4 + 4 \log_{0,5} \frac{m^2 - 3m + 4}{m-1} > 0 \Rightarrow \log_{0,5} \frac{m^2 - 3m + 4}{m-1} > \log_{0,5} 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{m^2 - 3m + 4}{m-1} < 2 \quad | \cdot (m-1) \quad (m \in D_m) \Rightarrow m^2 - 5m + 6 < 0, \text{ stąd } \Delta_m = 1,$$

$$m_1 = 2, \quad m_2 = 3 \Rightarrow m \in (2; 3)$$

(2) $x_1 + x_2 = 2 > 0$ dla $m \in \mathbf{R}$

(3) $x_1 x_2 > 0 \Rightarrow -\log_{0,5} \frac{m^2 - 3m + 4}{m-1} > 0 \Rightarrow \log_{0,5} \frac{m^2 - 3m + 4}{m-1} < \log_{0,5} 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{m^2 - 3m + 4}{m-1} > 1 \quad | \cdot (m-1) \quad (m \in D_m) \Rightarrow m^2 - 4m + 5 > 0, \text{ stąd } \Delta_m < 0.$$

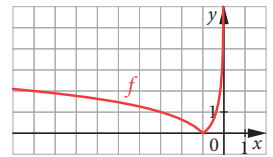
Zatem $m^2 - 4m + 5 > 0$ dla $m \in \mathbf{R}$.

Odp.: $m \in (2; 3)$

64. a) o 26%

b) po 5 miesiącach

65. a)



b)



66. a) $D = (3; \infty)$

b) $D = (-5; -2)$

c) $D = (0; \infty)$

d) $D = (0; 1) \cup (1; 4)$

67. a) c **b)** Większe od 1 są c i f, pozostałe liczby są mniejsze od 1.

68. a) $x = -\frac{3}{5}$

b) $x = -\sqrt{34}$ lub $x = \sqrt{34}$

69. $x \in \langle -5; 4 \rangle$

70. $x = 1$

71. a) $x \in (-3; \infty)$

b) $x \in (1; 2)$

72. $8^x + 5 \cdot 2^x \geq 2 + 4^{x+1}$
 $(2^x)^3 - 4 \cdot (2^x)^2 + 5 \cdot 2^x - 2 \geq 0$

$t = 2^x > 0$

$t^3 - 4t^2 + 5t - 2 \geq 0$

	1	-4	5	-2
1	1	-3	2	0

$(t-1)(t^2 - 3t + 2) \geq 0$

$(t-1)(t-1)(t-2) \geq 0$

$(t-1)^2(t-2) \geq 0$

$t = 1$ lub $t \geq 2$

$2^x = 1$ lub $2^x \geq 2$

$x = 0$ lub $x \geq 1$

Odp.: $x \in \{0\} \cup \langle 1; \infty \rangle$

73. $\log 2 + \log(4^{x-2} + 9) =$

$1 + \log(2^{x-2} + 1), D = \mathbf{R}$

$\log(2(4^{x-2} + 9)) =$

$\log(10(2^{x-2} + 1))$

$2(4^{x-2} + 9) = 10(2^{x-2} + 1) \quad | : 2$

$(4^{x-2} + 9) = 5 \cdot 2^{x-2} + 5$

$4^{-2} \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^{-2} \cdot 2^x + 4 = 0$

$\frac{1}{16} \cdot (2^x)^2 - \frac{5}{4} \cdot 2^x + 4 = 0 \quad | \cdot 16$

$(2^x)^2 - 20 \cdot 2^x + 64 = 0,$

$\Delta = 400 - 256 = 144, \sqrt{\Delta} = 12$

$t_1 = \frac{20-12}{2} = 4, \quad t_2 = \frac{20+12}{2} = 16$

$2^x = 4$ lub $2^x = 16$

$2^x = 2^2$ lub $2^x = 2^4$

Odp.: $x = 2$ lub $x = 4$

Skorowidz

Brzeg koła 218

Cechy podobieństwa trójkątów 284, 285

cięciwa okręgu (koła) 217, 218

cosinus kąta 313, 344

cotangens kąta 313

Dwusieczna kąta 211

dziedzina wyrażenia wymiernego 156

Figury podobne 273

— przystające 273

funkcja homograficzna 190

— kwadratowa 8

— logarytmiczna 392

— wielomianowa 89

— wykładnicza 368

— wymierna 188

funkcje trygonometryczne 313

— równe 92

Jednomian stopnia n 90

jednomiany podobne 90

jedynka trygonometryczna 323, 353

Kąt środkowy 231

— wpisany 234

koło 218

konstrukcje geometryczne 212

krzywa logarytmiczna 392

— wykładnicza 368

Liczba logarytmowana 378

logarytm 378

— dziesiętny 378

— iloczynu 381

— ilorazu 382

— potęgi 383

Łuk okręgu 217

Nierówność kwadratowa 37

— trójkąta 208

— wielomianowa 145

— wymierna 180

Odległość punktu od prostej 219

okrąg 217

— opisany na trójkącie 226

— wpisany w trójkąt 224

okres połowicznego rozpadu 373

okręgi przecinające się 218

— rozłączne wewnętrznie 218

— — zewnętrznie 218

— styczne wewnętrznie 218

— — zewnętrznie 218

— współśrodkowe 219

ortocentrum 226

Pierścień kołowy 234

pierwiastek równania kwadratowego 22

— n -krotny wielomianu 140

— wielomianu 110

podobieństwo o skali k 273

podstawa logarytmu 378

podzielność wielomianów 123

postać iloczynowa funkcji kwadratowej 25

— kanoniczna funkcji kwadratowej 8

— ogólna funkcji kwadratowej 9

półokrąg 217

promień okręgu 217

— wodzący punktu 343

punkt styczności 221

Ramię wodzące kąta 343

redukcja wyrazów podobnych 90

rozwiązywanie trójkąta 315

równanie kwadratowe 22

— wielomianowe 110

— wymierne 171

różnica wielomianów 97

Siatka znaków 145

schemat Hornera 133

sieczna okręgu (koła) 217, 218

sinus kąta 313, 344

skracanie wyrażenia wymiernego 157

styczna do okręgu 221

- suma algebraiczna 88
- wielomianów 97
- symetralna odcinka 210
- Średnia geometryczna 290
- średnica okręgu (koła) 217, 218
- środek ciężkości trójkąta 292
- Tangens kąta 312, 344
- tożsamość trygonometryczna 355
- twierdzenie Bézouta 127
 - o całkowitych pierwiastkach wielomianu 137
 - o wymiernych pierwiastkach wielomianu 138
 - odwrotne do twierdzenia Pitagorasa 209
 - — — Talesa 265
 - o odcinkach stycznych 223
 - o środkowych w trójkącie 292
- Pitagorasa 209
- Talesa 263
- Wielokąt opisany na okręgu 255
 - wpisany w okrąg 248
- wielomian 88
 - zerowy 89
- wierzchołek paraboli 8, 9
- wnętrze koła 218
- wycinek kołowy 233
- wyraz wolny wielomianu 91
- wyrażenie wymierne 156
- wyróżnik funkcji kwadratowej 9
- wzory redukcyjne 346
 - Viète'a 30
- wzór na zamianę podstawy logarytmu 385

Tablica wartości logarytmów dziesiętnych liczb od 1 do 9,9

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
$\log x$	0,000	0,041	0,079	0,114	0,146	0,176	0,204	0,230	0,255	0,279
x	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
$\log x$	0,301	0,322	0,342	0,362	0,380	0,398	0,415	0,431	0,447	0,462
x	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
$\log x$	0,477	0,491	0,505	0,519	0,531	0,544	0,556	0,568	0,580	0,591
x	4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9
$\log x$	0,602	0,613	0,623	0,633	0,643	0,653	0,663	0,672	0,681	0,690
x	5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9
$\log x$	0,699	0,708	0,716	0,724	0,732	0,740	0,748	0,756	0,763	0,771
x	6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9
$\log x$	0,778	0,785	0,792	0,799	0,806	0,813	0,820	0,826	0,833	0,839
x	7	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9
$\log x$	0,845	0,851	0,857	0,863	0,869	0,875	0,881	0,886	0,892	0,898
x	8	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9
$\log x$	0,903	0,908	0,914	0,919	0,924	0,929	0,934	0,940	0,944	0,949
x	9	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9
$\log x$	0,954	0,959	0,964	0,968	0,973	0,978	0,982	0,987	0,991	0,996

Tablica wartości funkcji trygonometrycznych

Miara kąta α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	Miara kąta α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
0°	0,0000	1,0000	0,0000	45°	0,7071	0,7071	1,0000
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,6820	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,7660	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,7880	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,3270
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,8090	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,8290	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,2250	0,9744	0,2309	58°	0,8480	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,5150	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,8660	0,5000	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,8040
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,3090	0,9511	0,3249	63°	0,8910	0,4540	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,3420	0,9397	0,3640	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,2460
22°	0,3746	0,9272	0,4040	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,3420	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,4540	0,8910	0,5095	72°	0,9511	0,3090	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5000	0,8660	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,5150	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,8480	0,6249	77°	0,9744	0,2250	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,8290	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,8090	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,7880	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,7660	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,4301
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,3007
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,0811
43°	0,6820	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,6363
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,2900
45°	0,7071	0,7071	1,0000	90°	1,0000	0,0000	—