

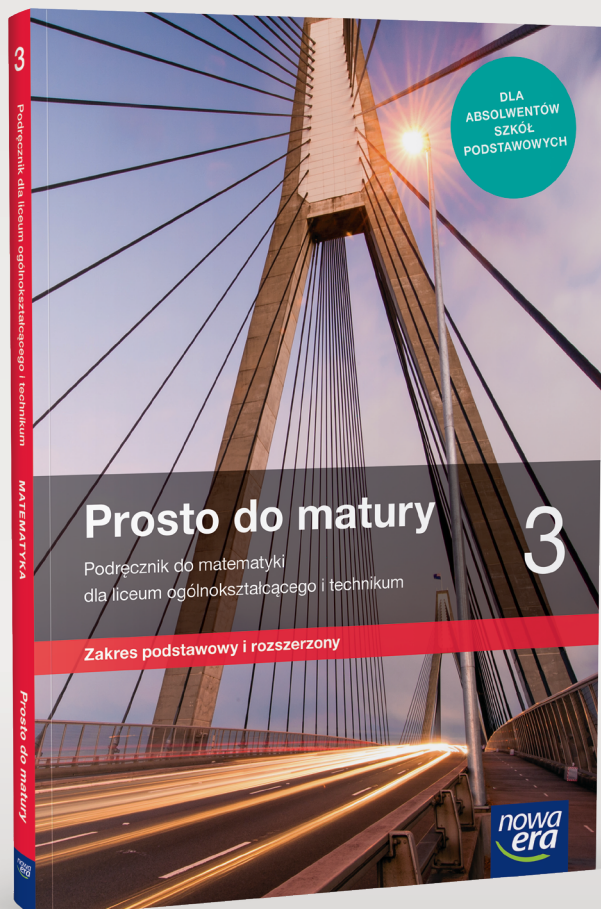
Prosto do matury

Podręcznik Nauczyciela

dla liceum ogólnokształcącego i technikum

3

Zakres podstawowy i rozszerzony



Podręcznik Nauczyciela zawiera:

- podręcznik ucznia
- odpowiedzi do wszystkich zadań
- rozwiązania trudniejszych zadań
- odnośniki do Multiteki – zasobów multimedialnych do lekcji
- komentarze merytoryczne

Program nauczania i inne materiały dydaktyczne są dostępne w portalu

dlanauczyciela.pl

Prosto do matury

Podręcznik Nauczyciela

dla liceum ogólnokształcącego i technikum

Zakres podstawowy i rozszerzony

3

Prosto do matury

Podręcznik Nauczyciela 3 został przygotowany do podręcznika autorstwa Macieja Antka, Krzysztofa Belki i Piotra Grabowskiego *Prosto do matury 3* dopuszczonego do użytku szkolnego i wpisanego do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki w szkołach ponadpodstawowych w zakresie podstawowym i rozszerzonym (1013/3/2021).

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2021
ISBN 978-83-267-4269-9

W publikacji zamieszczono strony z podręcznika *Prosto do matury* dla klasy 3 szkoły ponadpodstawowej w zakresie podstawowym i rozszerzonym.
© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2021

Autorzy komentarzy merytorycznych: Maciej Antek, Piotr Grabowski

Autorzy rozwiązań zadań: Jacek Klisowski, Ewa Muszyńska

Koordinacja prac: Anna Dubiel

Redakcja merytoryczna: Elżbieta Bagińska-Stawiarz, Anna Dubiel, Beata Zajac, Elżbieta Zięcina

Współpraca redakcyjna: Aleksandra Jankowska

Korekta językowa: Marta Zuchowicz

Nadzór artystyczny: Kaia Pichler

Opieka graficzna: Ewa Kaletyn

Projekt graficzny: Klaudia Jarocka-Ciok

Projekt okładki: Maciej Galiński, Klaudia Jarocka-Ciok

Rysunki: Andrzej Oziębło

Realizacja projektu graficznego: Skład systemem $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$. BOP sc.

Opracowanie graficzne infografik: Marek Błoszko

Realizacja projektu okładki: Klaudia Jarocka-Ciok

Fotografia na okładce: Getty Images/Julian Tatang/EyeEm.

Fotografie: Agencja Gazeta/Kamil Gozdan s. 403; BE&W: AKG IMAGES GmbH s. 429, Alamy Stock Photo - Art World s. 374, GL Archive s. 425 (Blaise Pascal), BEW NEWS/cienki s. 222, IAM Ltd/WORLD HISTORY ARCHIVE s. 161 (Apoloniusz z Perg), Getty Images: Bongarts/Alexander Hassenstein s. 337, De Agostini - DEA PICTURE LIBRARY s. 425 (waza grecka), DEA/G. DAGLI ORTI s. 424, DigitalVision Vectors/goldhafen s. 160 (statki), E+/Simonbradfield s. 377, iStock/Getty Images Plus/Campwillowlake s. 114; Indigo: Alamy Stock Photo - PA Images s. 336, Pictorial Press Ltd s. 425 (Pierre de Fermat), Science Photo Library/Dennis Kunkel Microscopy s. 205; Shutterstock: Aaron Amat s. 213, Abundance s. 204 (ananas), Alexander Raths s. 439, Amatveev s. 189, Artens s. 218, ArtisticPhoto s. 7, erashov s. 237, Fotokostic s. 239, KeepWatch s. 105, KLENY s. 233, maxtar s. 405, Mikbiz s. 387, Mimadeo s. 204 (szyszki), MM_photos s. 160, 161 (stara kartka), Nguyen Thai s. 204 (szyszka), Sergieiev s. 388, Targn Pleiades s. 371, wavebreakmedia s. 190; Thinkstock/Getty Images: iStockphoto - Liufuyu s. 267, Roob s. 434, Photodisc/James Woodson s. 449, Zoonar/J. Wachala s. 443.

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w podręczniku.
Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Nowa Era Sp. z o.o.
Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa
www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl
Centrum Kontaktu: 801 88 10 10, 58 721 48 00

Druk i oprawa: ArtDruk Kobyłka

Spis treści

Podręcznik Prosto do matury z materiałami dydaktycznymi	1
1. Trygonometria	7
2. Geometria analityczna	105
3. Ciągi	189
4. Analiza matematyczna	267
5. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka	371
 Skorowidz	 467
Wybrane wzory trygonometryczne	469
Tablica wartości funkcji trygonometrycznych	471

Legenda

ZZ i MKP

temat 5.10 (klasa 2)

Multiteka

- Twierdzenie sinusów

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 1.1

 **Generator**
testów i sprawdzianów

Podczas pracy z podręcznikiem PDM dodatkowo można korzystać z publikacji z serii **MATeMATyka: Zbiór zadań (ZZ)** i *Maturalne karty pracy (MKP)*. Odnosnik 5.10 (klasa 2) oznacza numer odpowiedniego tematu w tych publikacjach.

Multiteka – tu zamieszczamy tytuły zasobów zgromadzonych w Multitece, pomocnych w przeprowadzeniu konkretnych lekcji.

Materiały sprawdzające wiedzę są zgromadzone w dwóch miejscach:

- w portalu dlanauczyciela.pl – gotowe kartkówki, klasówki i sprawdziany,
- w Genaratorze – narzędziu z bogatą bazą zadań do tworzenia własnych kartkówek, klasówek i sprawdzianów, a także z propozycjami gotowych tego typu materiałów.

Maciej Antek
Krzysztof Belka
Piotr Grabowski

Prosto do matury

Podręcznik do matematyki
dla liceum ogólnokształcącego i technikum

3

Zakres podstawowy i rozszerzony

**nowa
era** *Twoje mocne strony*

Prosto do matury

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców:

dr Moniki Fabijańczyk, dr. Mariana Liskowskiego i dr hab. Anny Cegieli.

Zakres kształcenia: podstawowy i rozszerzony

Etap edukacyjny: III

Typ szkoły: ponadpodstawowa (liceum ogólnokształcące i technikum)

Rok dopuszczenia: 2021

Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 1013/3/2021

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum* autorstwa Piotra Grabowskiego.

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2021

ISBN 978-83-267-4210-1

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Magdalena Spalińska, Anna Dubiel

Współpraca redakcyjna: Aleksandra Jankowska, Marcin Minda

Opracowanie redakcyjne i merytoryczne infografik: Urszula Ciełniak

Konsultacje merytoryczne: Jacek Klisowski

Redakcja językowa: Marta Zuchowicz, Paulina Szulim

Korekta językowa: Anna Wesolowska

Nadzór artystyczny: Kaia Pichler

Opieka graficzna: Ewa Kaletyn

Projekt graficzny: Sławomir Włodarczyk, Ewa Kaletyn, Diana Gawronkiewicz/Point

Projekt okładki: Maciej Galiński, Ewa Kaletyn

Fotoedycja: Katarzyna Iwan-Malawska

Rysunki merytoryczne: Andrzej Oziębło

Opracowanie graficzne stron działowych: Maciej Galiński

Opracowanie graficzne infografik: Marek Błoszko, Enzo Di Giacomo

Realizacja projektu graficznego: BOP s.c.

Fotografia na okładce: Getty Images/Julian Tatant/EyeEm.

Fotografie: Agencja Gazeta/Kamil Gozdan s. 403; BE&W: AKG IMAGES GmbH s. 429, Alamy Stock Photo - Art World s. 374, GL Archive s. 425 (Blaise Pascal), BEW NEWS/Science s. 222, IAM Ltd/WORLD HISTORY ARCHIVE s. 161 (Apoloniusz z Perg), Getty Images: Bongarts/Alexander Hassenstein s. 337, De Agostini - DEA PICTURE LIBRARY s. 425 (waza grecka), DEA/G. DAGLI ORTI s. 424, DigitalVision Vectors/goldhafen s. 160 (staki), E+/Aimondradfield s. 377, iStock/Getty Images Plus/Campwillowlake s. 114; Indigo: Alamy Stock Photo - PA Images s. 336, Pictorial Press Ltd s. 425 (Pierre de Fermat), Science Photo Library/Dennis Kunkel Microscopy s. 205; Shutterstock: Aaron Amat s. 213, Abundance s. 204 (ananas), Alexander Rath s. 439, Amalveev s. 189, Artens s. 218, ArtisticPhoto s. 7, erashov s. 237, Fotokostic s. 239, KeepWatch s. 105, KELENY s. 233, maxtar s. 405, Mikbiz s. 387, Mimadeo s. 204 (szyszki), MM_photos s. 160, 161 (stara kartka), Nguyen Thai s. 204 (szyszka), Sergeiev s. 388, Targn Pleiades s. 371, wavebreakmedia s. 190; Thinkstock/Getty Images: iStockphoto - Liuflyu s. 267, Rob s. 434, Photodisc/James Woodson s. 449, Zoonar/J. Wachala s. 443.

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w podręczniku. Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Nowa Era Sp. z o.o.

Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa

www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl

Centrum Kontaktu: 801 88 10 10, 58 721 48 00

Druk i oprawa: ArtDruk Kobylka

Spis treści

Wstęp	5
Wykaz używanych oznaczeń matematycznych	6

Dział 1. Trygonometria

1. Twierdzenie sinusów	8
2. Twierdzenie cosinusów	17
3. Związki miarowe w wielokątach	24
4. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta	34
5. Własności funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta	47
6. Miara łukowa kąta	58
7. Wykresy funkcji trygonometrycznych	66
8. Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów	80
9. Równania i nierówności trygonometryczne	89
10. Powtórzenie	98

Dział 2. Geometria analityczna

1. Warto powtórzyć – równanie prostej, wektory	106
2. Odległość na płaszczyźnie kartezjańskiej	114
3. Położenie prostych na płaszczyźnie kartezjańskiej	124
4. Równanie okręgu. Nierówność opisująca koło	137
5. Okrąg i prosta. Dwa okręgi	147
6. Symetria środkowa	162
7. Symetria osiowa	171
8. Powtórzenie	180

Dział 3. Ciągi

1. Określenie i własności ciągu liczbowego	190
2. Ciąg arytmetyczny	206
3. Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego	216
4. Ciąg geometryczny	225
5. Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego	235
6. Oszczędzanie i kredyty w bankach	242
7. Powtórzenie	257

Dział 4. Analiza matematyczna

1. Granica ciągu	268
2. Szereg geometryczny zbieżny i jego suma	282

3. Granica funkcji w punkcie	288
4. Granice niewłaściwe	298
5. Funkcje ciągłe	307
6. Pochodna funkcji w punkcie	315
7. Pochodna jako funkcja	325
8. Pochodna funkcji złożonej	338
9. Monotoniczność i ekstrema funkcji różniczkowalnej	344
10. Wartość największa i wartość najmniejsza funkcji	356
11. Powtórzenie	365

Dział 5. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

1. Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa	372
2. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa	375
3. Reguła mnożenia	383
4. Obliczanie prawdopodobieństwa	394
5. Własności prawdopodobieństwa	406
6. Wartość oczekiwana w prostych grach losowych	418
7. Wstęp do statystyki	426
8. Mediana, średnia i dominanta	432
9. Miary rozproszenia	447
10. Powtórzenie	460
Odpowiedzi	467
Skorowidz	492
Wybrane wzory trygonometryczne	494
Tablica wartości funkcji trygonometrycznych	496

Wstęp

Podręcznik *Prosto do matury* dla klasy trzeciej jest dostosowany do podstawy programowej obowiązującej w liceum od września 2019 r. i obejmuje treści z zakresu podstawowego oraz rozszerzonego.

Książka zawiera ponad półtora tysiąca zadań do samodzielnego rozwiązania. To wystarczy do gruntownego przećwiczenia umiejętności nabytych podczas lekcji. Zadania trudniejsze oznaczone są * lub **, zadania typu „Wykaż...” poprzedzono znakiem , natomiast te zadania, do których rozwiązania przydatny jest kalkulator – znakiem .

Podręcznik dostosowany jest do samodzielnej nauki, co może być cenne na przykład w razie nieobecności w szkole. Wprowadzane pojęcia ilustrujemy przykładami rozwiązyanych zadań. W zrozumieniu materiału bardzo pomogą kolorowe rysunki merytoryczne. Wybrane rozwiązywane zadania typu maturalnego zostały oznaczone znakiem .

Różowym paskiem na marginesie oznaczono materiał realizowany w zakresie rozszerzonym.

Po każdym rozdziale proponujemy zestaw pięciu zadań zatytułowanych *Prosto do matury*. Po omówieniu każdego rozdziału uczniowie powinni rozwiązywać je samodzielnie. Będzie to dla nich sprawdzianem umiejętności potrzebnych na maturze.

Odpowiedzi do pytań, poleceń, rozwiązań zadań nie należy zapisywać w podręczniku.

Autorzy

Wykaz używanych oznaczeń matematycznych

$x \in A; x \notin A$	x należy do zbioru A ; x nie należy do zbioru A
$\{a, b, c\}; \emptyset$	zbiór, którego elementami są a, b, c ; zbiór pusty
$\mathbf{N, Z, Q, R}$	zbiór liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych, rzeczywistych
$A \subset B$	zbiór A jest podzbiorem zbioru B
$A \cap B$	część wspólna (iloczyn) zbiorów A i B
$A \cup B$	suma zbiorów A i B
$A - B$	różnica zbiorów A i B
$\sqrt[n]{a}$	pierwiastek stopnia n z liczby a
$\log_a b$ ($\log b$)	logarytm przy podstawie a (10) liczby b
$(a; b)$	przedział otwarty, zbiór liczb większych od a i mniejszych od b
$\langle a; b \rangle$	przedział domknięty (zamknięty)
$\langle a; b \rangle; (a; b)$	przedział lewostronnie domknięty; przedział prawostronnie domknięty
$ a $	wartość bezwzględna liczby a
$f(x)$	wartość funkcji f dla argumentu x
$D; ZW$	dziedzina funkcji; zbiór wartości funkcji
$o(S, r); k(S, r)$	okrąg o środku S i promieniu r ; koło o środku S i promieniu r
$P; obw$	pole figury; obwód figury
$A = (a, b)$	punkt A o współrzędnych a (tzw. odcięta) i b (tzw. rzędna)
$AB; AB $	odcinek o końcach A i B ; długość odcinka AB
$a \parallel b; a \perp b$	prosta a jest równoległa do prostej b ; prosta a jest prostopadła do prostej b
$\sphericalangle ABC$	kąt o wierzchołku B i ramionach: półprostej BA i półprostej BC
$\triangle ABC$	trójkąt ABC
$\sin \alpha$	sinus kąta α
$\cos \alpha$	cosinus kąta α
$\operatorname{tg} \alpha$	tangens kąta α
$(a_n); a_n$	ciąg; n -ty wyraz ciągu (a_n)
$S_n; S$	suma n początkowych wyrazów ciągu; suma szeregu geometrycznego
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$	granica ciągu (a_n)
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	granica funkcji f w punkcie x_0
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$	granica lewostronna, prawostronna funkcji f w punkcie x_0
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$	granica funkcji f w $-\infty$, w ∞
$f'(x)$	pochodna funkcji f
$\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AB} $	wektor o początku A i końcu B ; długość wektora $\overrightarrow{AB}$
$\vec{u} = [a, b]$	wektor $\vec{u}$ o współrzędnych a, b
$\Omega; \overline{\Omega}$	zbiór zdarzeń elementarnych; liczba zdarzeń elementarnych w zbiorze Ω
$\overline{A}$	liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A
$P(A)$	prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A
A'	zdarzenie przeciwne do zdarzenia A
EX	wartość oczekiwana
$\bar{x}; \bar{x}_w$	średnia wyników; średnia ważona wyników
σ^2	wariancja
σ	odchylenie standardowe

Trygonometria

1

Umiejętności

Po klasie drugiej szkoły ponadpodstawowej uczeń:

- wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych (sinus, cosinus, tangens) w trójkącie prostokątnym o danych bokach,
- oblicza długości boków i miary kątów trójkąta prostokątnego, jeżeli dane są jeden bok i wartość funkcji trygonometrycznej jednego z kątów ostrych,
- korzysta z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora),
- stosuje w zadaniach podstawowe związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego i rozwartego,
- wykorzystuje funkcje trygonometryczne do obliczania pól i obwodów trójkątów i czworokątów,
- korzysta ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi,
- oblicza wartości funkcji trygonometrycznych kątów wypukłych umieszczonych w układzie współrzędnych,
- konstruuje kąty w układzie współrzędnych, gdy dana jest wartość jednej z funkcji trygonometrycznych tych kątów,
- udowadnia proste tożsamości trygonometryczne i podaje założenia dotyczące tych tożsamości,
- stosuje wzory redukcyjne do obliczania funkcji trygonometrycznych kątów rozwartych.

Po tym dziale uczeń:

- znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów,
- korzysta z twierdzenia o dwusiecznej, a także ze wzorów na pole trójkąta wyrażonych za pomocą długości boków trójkąta oraz: promienia okręgu wpisanego w trójkąt i promienia okręgu opisanego na trójkącie,
- wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens dowolnego kąta o mierze wyrażonej w stopniach; stosuje wzory redukcyjne dla dowolnego kąta,
- opisuje własności funkcji trygonometrycznych, wykorzystuje zależności między nimi,
- stosuje miarę łukową, zamienia miarę łukową kąta na stopniową i odwrotnie,
- operuje funkcjami trygonometrycznymi zmiennej rzeczywistej,
- rysuje wykresy funkcji sinus, cosinus i tangens oraz przekształca te wykresy,
- stosuje wzory na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów oraz wzory na funkcje trygonometryczne kąta podwojonego,
- rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne.

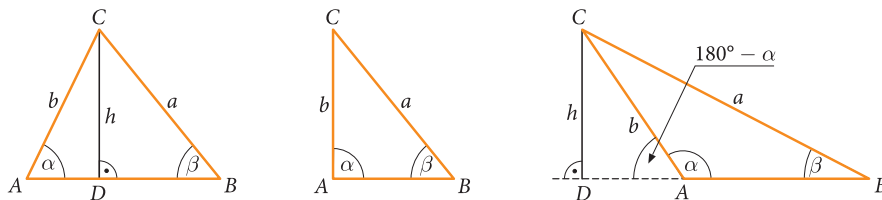
1. Twierdzenie sinusów

Umiejętności:

- znajdowanie związków miarowych w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów

Zadanie polegające na wyznaczeniu wszystkich nieznanymi długości boków oraz miar kątów w trójkącie nazywamy krótko **rozwiązywaniem trójkąta**. W kolejnych tematach zajmiemy się tym zagadnieniem. W tym celu będziemy stosować związki między funkcjami trygonometrycznymi zachodzące w trójkątach.

Pokażemy, że w każdym trójkącie wysokość można wyrazić w postaci iloczynu długości boku, na który ta wysokość nie jest opuszczona, i sinusa odpowiedniego kąta tego trójkąta. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunkach.



Zauważmy, że:

- jeżeli α jest kątem ostrym, to $\sin \alpha = \frac{h}{b}$, czyli $h = b \cdot \sin \alpha$,
- jeżeli α jest kątem prostym, to $h = b$, czyli $h = b \cdot \sin \alpha$, ponieważ $\sin 90^\circ = 1$,
- jeżeli α jest kątem rozwartym, to $\sin (180^\circ - \alpha) = \frac{h}{b}$, czyli $h = b \cdot \sin (180^\circ - \alpha)$, więc $h = b \cdot \sin \alpha$.

Niezależnie od miary kąta mamy więc równość:

$$h = b \cdot \sin \alpha$$

W identyczny sposób możemy poprowadzić rozumowanie dla boku a i kąta β . Otrzymamy wówczas równość:

$$h = a \cdot \sin \beta$$

Zatem:

$$b \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin \beta$$

Równość tę możemy zapisać w postaci:

$$(1) \quad \frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha} \quad \leftarrow \sin \alpha \neq 0 \text{ i } \sin \beta \neq 0$$

Przypominamy: w tych podręcznikach często zamiast pisać „kąt ABC o mierze α ” używamy krótszej formy „kąt ABC równy α ” albo „ $\sphericalangle ABC = \alpha$ ”. Podobnie – „wysokość równa 5”, a nie „długość wysokości równa 5”, „trójkąt ma równe przyprostokątne” zamiast „trójkąt ma przyprostokątne równej długości” itd.

ZZ i MKP

temat 5.10 (klasa 2)

Multiteka

- Twierdzenie sinusów

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 1.1

Generator
testów i sprawdzianów

Oznaczmy trzeci bok trójkąta literą c oraz kąt leżący naprzeciwko niego literą γ . Gdy poprowadzimy wysokość z wierzchołka A i będziemy rozumować podobnie jak wyżej, otrzymamy $b \cdot \sin \gamma = c \cdot \sin \beta$ lub inaczej:

$$(2) \quad \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad \leftarrow \sin \gamma \neq 0$$

Z równości (1) i (2) wynika, że:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Otrzymaną równość nazywamy **wzorem sinusów**.

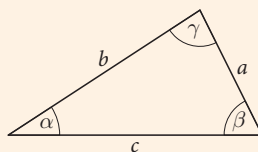
Udowodniliśmy w ten sposób następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Wzór sinusów

W dowolnym trójkącie stosunek długości boku do sinususa kąta leżącego naprzeciwko niego jest stały.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$



Twierdzenie to stosujemy na przykład do obliczania długości boków trójkąta, jeżeli dana jest jedna z nich oraz dane są kąty trójkąta.

Przykład 1 zad. 1.5

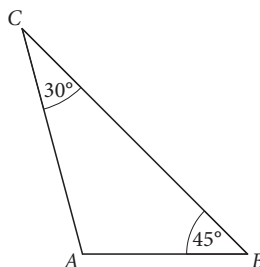
W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 12$, $\sphericalangle ABC = 45^\circ$, $\sphericalangle BCA = 30^\circ$. Obliczmy długość boku AC .

Rozwiązanie

Na mocy twierdzenia sinusów mamy:

$$\begin{aligned} \frac{|AB|}{\sin \sphericalangle BCA} &= \frac{|AC|}{\sin \sphericalangle ABC} \\ \frac{12}{\sin 30^\circ} &= \frac{|AC|}{\sin 45^\circ} \\ \frac{12}{\frac{1}{2}} &= \frac{|AC|}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ |AC| &= 12\sqrt{2} \end{aligned}$$

Odp.: Bok AC ma długość $12\sqrt{2}$.



1.5. Kąty trójkąta ABC

oznaczono α, β, γ , a literami a, b, c – boki odpowiednio przeciwległe do tych kątów. Oblicz

a) $\sin \beta$ dla $a = 20$, $b = 24$, $\alpha = 45^\circ$.

b) b dla $c = 36$, $\alpha = 75^\circ$, $\beta = 45^\circ$.

c) $\sin \alpha$ dla $a = 11$, $c = 17$, $\gamma = 71^\circ$.

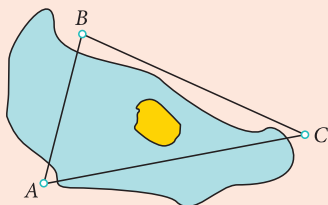
d) c dla $a = 16$, $\beta = 26^\circ$, $\gamma = 48^\circ$.

Odp.: a) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ b) $12\sqrt{6}$

c) 0,612 d) 12,37

◀1.6. Trójkąt ABC jest rozwartokątny o kącie rozwartym przy wierzchołku A . Dane są:
 $|AB| = 6$, $|BC| = 8$, $\sin \sphericalangle CAB = \frac{2}{3}$.
 Oblicz miarę kąta ACB .
Odp.: 30°

◀1.8. Gospodarstwa A , B , C są położone nad stawem, jak na rysunku poniżej.



Zmierzono, że $|BC| = 300$ m, $\sphericalangle C = 35^\circ$, $\sphericalangle B = 80^\circ$. Wyznacz odległość między gospodarstwami A i B z dokładnością do 1 metra.

Odp.: 190 m

Przykład 2 ◀ zad. 1.6

Trójkąt KLM jest rozwartokątny o kącie rozwartym przy wierzchołku M . Dane są:
 $|KL| = 16$, $|KM| = 9\sqrt{2}$, $\sin \sphericalangle LMK = \frac{8}{9}$. Obliczmy miarę kąta KLM .

Rozwiązanie

Na mocy twierdzenia sinusów mamy:

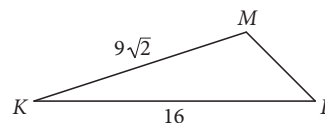
$$\frac{|KL|}{\sin \sphericalangle LMK} = \frac{|KM|}{\sin \sphericalangle KLM}$$

$$\frac{16}{\frac{8}{9}} = \frac{9\sqrt{2}}{\sin \sphericalangle KLM}, \text{ stąd } \sin \sphericalangle KLM = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sphericalangle KLM = 45^\circ \text{ lub } \sphericalangle KLM = 135^\circ \quad \leftarrow \sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha)$$

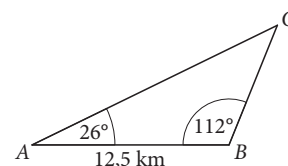
Wiemy, że trójkąt KLM jest rozwartokątny o kącie rozwartym przy wierzchołku M , zatem tylko kąt 45° spełnia warunki zadania.

Odp.: Kąt KLM ma miarę 45° .



Przykład 3 ◀ zad. 1.8

W górzystym terenie stoją dwie wieże triangulacyjne A i B . Odległość między nimi jest równa 12,5 km. Najwyższym w okolicy wierzchołkiem jest Góra Czarownic (oznaczona na rysunku literą C). Geodeta zmierzył dwa kąty: z wieży A kąt BAC o mierze 26° i z wieży B kąt ABC o mierze 112° . Obliczmy przybliżone odległości między Górą Czarownic a wieżami (mierzone w linii prostej i z dokładnością do jednego miejsca po przecinku).



Rozwiązanie

Zastosujemy dwa razy wzór sinusów. Miarę kąta leżącego naprzeciwko boku AB znajdziemy jako dopełnienie do 180° :

$$\gamma = 180^\circ - 26^\circ - 112^\circ = 42^\circ, \text{ zatem } \frac{|AB|}{\sin 42^\circ} = \frac{|AC|}{\sin 112^\circ}$$

$$|AC| = \frac{12,5 \cdot \sin 112^\circ}{\sin 42^\circ} = \frac{12,5 \cdot \sin (180^\circ - 68^\circ)}{\sin 42^\circ} = \frac{12,5 \cdot \sin 68^\circ}{\sin 42^\circ}$$

Odczytujemy z tablic matematycznych przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku:

$$\sin 68^\circ \approx 0,93, \sin 42^\circ \approx 0,67$$

$$\text{Zatem } |AC| \approx \frac{12,5 \cdot 0,93}{0,67} \approx 17,4.$$

Do obliczenia odległości $|BC|$ wybieramy inną proporcję ze wzoru sinusów:

$$\frac{|AB|}{\sin 42^\circ} = \frac{|BC|}{\sin 26^\circ} \quad \leftarrow \sin 26^\circ \approx 0,44$$

$$\text{czyli } |BC| = \frac{12,5 \cdot \sin 26^\circ}{\sin 42^\circ} \approx \frac{12,5 \cdot 0,44}{0,67} \approx 8,2$$

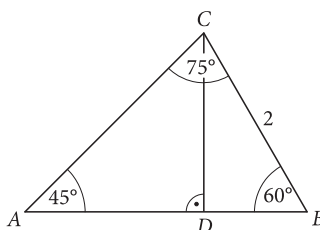
Odp.: Góra Czarownic jest oddalona od wieży A o ok. 17,4 km, a od wieży B o ok. 8,2 km.

D Przykład 4 ◀ zad. 1.18

Kąty trójkąta ABC mają miary 45° , 60° , 75° , a bok BC ma długość 2. Skorzystamy ze wzoru sinusów i wykażemy, że $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

Dowód

Zauważmy najpierw, że istnieje dokładnie jeden trójkąt spełniający warunki zadania – możemy go skonstruować, gdy określimy odcinek jednostkowy. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Zgodnie z nimi CD jest wysokością poprowadzoną z wierzchołka kąta o mierze 75° .



$$|DB| = 1 \text{ i } |DC| = \sqrt{3} \quad \leftarrow \triangle DBC \text{ jest połową trójkąta równobocznego o boku } 2$$

$$|AD| = \sqrt{3} \text{ i } |AC| = \sqrt{6} \quad \leftarrow \triangle ADC \text{ jest połową kwadratu o boku } |DC| = \sqrt{3}$$

$$|AB| = \sqrt{3} + 1$$

$$\frac{|AB|}{\sin 75^\circ} = \frac{|BC|}{\sin 45^\circ} \quad \leftarrow \text{twierdzenie sinusów dla trójkąta } ABC$$

$$\frac{\sqrt{3} + 1}{\sin 75^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}, \text{ stąd } \sin 75^\circ = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + 1)}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Koniec dowodu

Zauważmy, że jeśli w trójkącie ABC poprowadzimy wysokość BE z wierzchołka kąta o mierze 60° , to możemy w podobny sposób wykazać, że:

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Spotyka się również następujące zależności:

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}, \quad \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

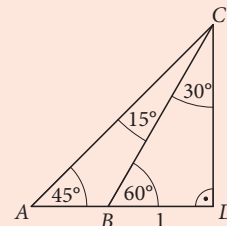
Za pomocą odpowiednich przekształceń można wykazać, że:

$$\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \quad \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

◀1.18. Wykaż, że

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Rozwiązanie



W trójkącie BDC : $|BC| = 2$,

$$|CD| = \sqrt{3}$$

W trójkącie ADC :

$$|AD| = |CD| = \sqrt{3}$$

$$|AB| = |AD| - |BD| = \sqrt{3} - 1$$

Z twierdzenia sinusów

w trójkącie ABC :

$$\frac{|AB|}{\sin 15^\circ} = \frac{|BC|}{\sin 45^\circ}$$

$$\text{Stąd } \sin 15^\circ = \frac{|AB| \sin 45^\circ}{|BC|} =$$

$$= \frac{(\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Wzór sinusów stosujemy również do wyznaczania promienia okręgu opisanego na trójkącie.

Twierdzenie

Twierdzenie sinusów

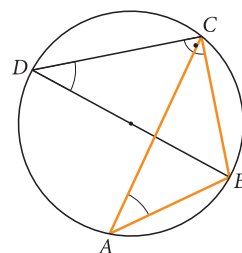
W dowolnym trójkącie stosunek długości boku do sinusa kąta leżącego naprzeciwko niego jest równy długości średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.

Założenie

Trójkąt ABC jest dowolny.

Teza

Stosunek długości boku trójkąta ABC do sinusa kąta leżącego naprzeciwko niego jest równy długości $2R$, czyli średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.



Dowód

Zgodnie ze wzorem sinusów dowód wystarczy przeprowadzić dla jednego kąta. Któryś z kątów trójkąta jest kątem ostrym; oznaczmy jego wierzchołek literą A . Z innego wierzchołka (np. B) prowadzimy średnicę BD .

$$\sphericalangle BDC = \sphericalangle BAC$$

← kąty wpisane oparte na tym samym łuku

$$\sin \sphericalangle BDC = \frac{|BC|}{|BD|}$$

← trójkąt BDC jest prostokątny

$$\sin \sphericalangle BDC = \frac{|BC|}{2R}$$

← R jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie ABC

Po przekształceniu tego wzoru otrzymujemy:

$$2R = \frac{|BC|}{\sin \sphericalangle BDC}$$

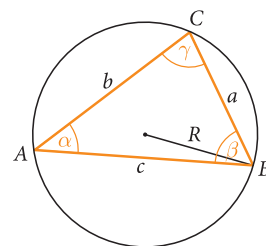
$$2R = \frac{|BC|}{\sin \sphericalangle BAC}$$

← $\sin \sphericalangle BDC = \sin \sphericalangle BAC$

Koniec dowodu

Korzystając z oznaczeń przedstawionych na rysunku, możemy treść twierdzenia, łącznie ze wzorem sinusów, zapisać krótko:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$



**Przykład 5** ◀ zad. 1.19

Na trójkącie, którego dwa boki mają długości 9 i $3\sqrt{6}$, opisano okrąg o promieniu $3\sqrt{3}$. Obliczmy miary kątów i długość trzeciego boku trójkąta.

Rozwiązanie

Oznaczmy:

α, β, γ – kąty leżące odpowiednio naprzeciwko boków a, b, c trójkąta,

R – promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Przyjmijmy, że $a = 9$, $b = 3\sqrt{6}$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{9}{\sin \alpha} &= 6\sqrt{3} && \leftarrow \text{zgodnie ze wzorem } \frac{a}{\sin \alpha} = 2R \\ \sin \alpha &= \frac{9}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\alpha = 60^\circ \text{ lub } \alpha = 120^\circ \quad \leftarrow \sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{3\sqrt{6}}{\sin \beta} &= 6\sqrt{3} \\ \sin \beta &= \frac{3\sqrt{6}}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \beta &= 45^\circ \text{ lub } \beta = 135^\circ && \leftarrow \sin \beta = \sin (180^\circ - \beta) \end{aligned}$$

Suma kątów trójkąta wynosi 180° , zatem $\alpha + \beta < 180^\circ$ i $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$. Nie istnieje trójkąt o kątach $\alpha = 60^\circ$ i $\beta = 135^\circ$ ani trójkąt o kątach $\alpha = 120^\circ$ i $\beta = 135^\circ$.

Możliwe są więc dwa rozwiązania:

I. trójkąt o kątach $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 75^\circ$

II. trójkąt o kątach $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 15^\circ$

Długość trzeciego boku trójkąta obliczamy ze wzoru $\frac{c}{\sin \gamma} = 2R$, czyli:

$$c = 2R \sin \gamma$$

$$c = 6\sqrt{3} \sin 75^\circ = 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{9\sqrt{2} + 3\sqrt{6}}{2} \quad \leftarrow \text{dla I trójkąta}$$

$$c = 6\sqrt{3} \sin 15^\circ = 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{9\sqrt{2} - 3\sqrt{6}}{2} \quad \leftarrow \text{dla II trójkąta}$$

$$\text{Odp.: } \alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 75^\circ, c = \frac{9\sqrt{2} + 3\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{lub } \alpha = 120^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 15^\circ, c = \frac{9\sqrt{2} - 3\sqrt{6}}{2}$$

◀1.19. Na trójkącie, którego dwa boki mają 4,2 cm i 6,3 cm, opisano okrąg o promieniu 5 cm. Oblicz miary kątów tego trójkąta z dokładnością do 1° i długość jego trzeciego boku z dokładnością do 1 mm.

Odp.: $25^\circ, 39^\circ, 116^\circ, 9,0$ cm

lub $25^\circ, 141^\circ, 14^\circ, 2,4$ cm

Zadania

W poniższych zadaniach odczytuj wartości funkcji trygonometrycznych z dokładnością do czwartego miejsca po przecinku, a miary kątów z dokładnością do 1° . Możesz wykorzystywać podane w przykładzie 4 dokładne wartości $\sin 75^\circ$ i $\sin 15^\circ$.

W każdym z zadań 1.1–1.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

Odpowiedzi i rozwiązania

1.1. B

1.2. C

1.3. B

1.4. $4(\sqrt{3} - 1)$

1.5. a) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ b) $12\sqrt{6}$
c) 0,612 d) 12,37

1.6. 30°

1.7. a) $\gamma = 43^\circ$, $b = 11,45$ cm,
 $c = 7,93$ cm
b) $\gamma = 57^\circ$, $a = 17,57$ cm,
 $c = 15,06$ cm
c) $\alpha = 33^\circ$, $a = 13,56$ cm,
 $b = 21,56$ cm

1.1. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 6\sqrt{3}$, $\sphericalangle BCA = 120^\circ$. Wskaż promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

A. $3\sqrt{3}$ B. 6 C. $6\sqrt{3}$ D. 12

1.2. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 24$, $|BC| = 16$, $\sphericalangle BCA = 60^\circ$. Wskaż wartość $\sin \sphericalangle CAB$.

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\sqrt{3}$

1.3. W trójkącie ABC dane są: $|BC| = 18$, $\sphericalangle CAB = 45^\circ$, $\sin \sphericalangle BCA = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Wskaż długość boku AB .

A. $4\sqrt{6}$ B. 12 C. $12\sqrt{2}$ D. 27

1.4. W trójkącie ABC dane są: $|BC| = 8$, $\sphericalangle CAB = 45^\circ$, $\sphericalangle BCA = 120^\circ$. Oblicz długość boku AC .

1.5. Kąty trójkąta ABC oznaczono α , β , γ , a literami a , b , c – boki odpowiednio przeciwległe do tych kątów. Oblicz

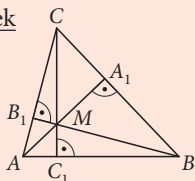
a) $\sin \beta$ dla $a = 20$, $b = 24$, $\alpha = 45^\circ$. c) $\sin \alpha$ dla $a = 11$, $c = 17$, $\gamma = 71^\circ$.
b) b dla $c = 36$, $\alpha = 75^\circ$, $\beta = 45^\circ$. d) c dla $a = 16$, $\beta = 26^\circ$, $\gamma = 48^\circ$.

1.6. Trójkąt ABC jest rozwartokątny o kącie rozwartym przy wierzchołku A . Dane są: $|AB| = 6$, $|BC| = 8$, $\sin \sphericalangle CAB = \frac{2}{3}$. Oblicz miarę kąta ACB .

1.7. Oblicz brakujące miary kątów (z dokładnością do 1°) i długości boków (z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku) trójkąta ABC , w którym α , β , γ są kątami wewnętrznymi oraz a , b , c – bokami odpowiednio przeciwległymi.

a) $a = 7$ cm, $\alpha = 37^\circ$, $\beta = 100^\circ$
b) $b = 12,7$ cm, $\alpha = 78^\circ$, $\beta = 45^\circ$
c) $c = 11,3$ cm, $\gamma = 27^\circ$, $\beta = 120^\circ$

1.20. I przypadek



$\sphericalangle AMC_1 = 90^\circ - \sphericalangle MAC_1 =$
 $= 90^\circ - \sphericalangle A_1AB = \sphericalangle ABA_1 = \sphericalangle ABC$
Analogicznie: $\sphericalangle BMC_1 = \sphericalangle BAC$.
Stąd $\sphericalangle AMB = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BAC =$
 $= 180^\circ - \sphericalangle ACB$.
Zatem $\sin \sphericalangle AMB = \sin \sphericalangle ACB$.
Analogicznie pokazujemy, że
 $\sin \sphericalangle BMC = \sin \sphericalangle BAC$,
 $\sin \sphericalangle AMC = \sin \sphericalangle ABC$.

II przypadek

$\sphericalangle AMB = \sphericalangle AMB_1 = 90^\circ - \sphericalangle MAB_1 = \sphericalangle ACB$
Analogicznie: $\sphericalangle BMC = \sphericalangle BAC$.
Stąd $\sphericalangle AMC = \sphericalangle ACB + \sphericalangle BAC = 180^\circ - \sphericalangle ABC$.
Zatem $\sin \sphericalangle AMB = \sin \sphericalangle ACB$, $\sin \sphericalangle BMC = \sin \sphericalangle BAC$,
 $\sin \sphericalangle AMC = \sin \sphericalangle ABC$.

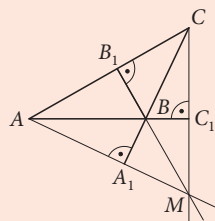
Niech: R_1, R_2, R_3, R – promienie okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach AMB, BMC, AMC i ABC .
Z twierdzenia sinusów w trójkątach ABM i ABC :

$$\frac{|AB|}{\sin \sphericalangle AMB} = 2R_1 \quad \text{i} \quad \frac{|AB|}{\sin \sphericalangle ACB} = 2R$$

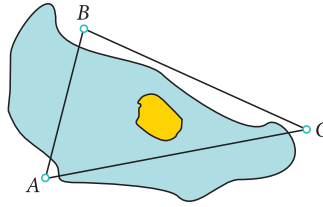
Sinusy kątów w równościach powyżej są równe, więc $R_1 = R$.

Analogicznie pokazujemy, że $R_2 = R$ i $R_3 = R$.

Zatem $R_1 = R_2 = R_3 = R$.



1.8. Gospodarstwa A, B, C są położone nad stawem, jak na rysunku obok. Zmierzono, że $|BC| = 300$ m, $\sphericalangle C = 35^\circ$, $\sphericalangle B = 80^\circ$. Wyznacz odległość między gospodarstwami A i B z dokładnością do 1 metra.



1.9. Przekątna równoległoboku ma długość 24 cm i dzieli kąt rozwarty równoległoboku na kąty o miarach 45° i 75° . Oblicz długości boków tego równoległoboku.

1.10. W trapezie równoramiennym $ABCD$, w którym $AB \parallel DC$, przekątna AC ma długość 8 cm, $\sphericalangle CAB = 22^\circ$ i $\sphericalangle ACB = 113^\circ$. Oblicz miary kątów i długości boków trapezu z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

1.11. Na brzegu jeziora znajdują się dwie przystanie, oznaczone jako A i B , oddalone w linii prostej o 1,6 km. Z każdej z nich widoczna jest ta sama mała wyspa – oznaczmy ją W . Za pomocą kompasu zmierzono kąty: $\sphericalangle WAB = 54^\circ$ i $\sphericalangle ABW = 48^\circ$. Oblicz odległość wyspy od każdej z tych przystani (z dokładnością do 0,01 km).

1.12. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie ABC , w którym
a) $\sphericalangle A = 14^\circ$, $|BC| = 10$ cm. b) $\sphericalangle B = 124^\circ$, $|AC| = 9$ cm.

1.13. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku S , $|AB| = 8$, $\sphericalangle ASC = 140^\circ$ i $\sphericalangle CSB = 100^\circ$. Oblicz długości boków BC oraz AC (z dokładnością do 0,01).

1.14. W trójkącie kąt o mierze 74° przylega do boku długości 10 cm. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 6 cm. Rozwiąż ten trójkąt.

1.15. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie, w którym jeden z boków ma długość $7\sqrt{3}$, a kąty przyległe do tego boku mają miary 80° i 40° .

1.16. Okrąg o promieniu 18 cm jest opisany na trójkącie, którego kąty pozostają w stosunku $3 : 4 : 5$. Oblicz długości boków tego trójkąta.

1.17. W trapezie równoramiennym przekątna o długości $3\sqrt{2}$ tworzy z krótszą podstawą kąt 45° , a z ramieniem kąt 75° . Oblicz obwód trapezu oraz długość okręgu na nim opisanego.

D 1.18. Wykaż, że $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

1.19. Na trójkącie, którego dwa boki mają 4,2 cm i 6,3 cm, opisano okrąg o promieniu 5 cm. Oblicz miary kątów tego trójkąta z dokładnością do 1° i długość jego trzeciego boku z dokładnością do 1 mm.

1.23. Z twierdzenia siunusów: $\frac{|AB|}{\sin \sphericalangle BCA} = \frac{|AC|}{\sin \sphericalangle ABC}$.

$$\sin \sphericalangle ABC = \frac{|AC| \sin \sphericalangle BCA}{|AB|} = \frac{4\sqrt{2} \cdot \sin 30^\circ}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Czyli $\sphericalangle ABC = 45^\circ$ lub $\sphericalangle ABC = 135^\circ$.

Stąd $\sphericalangle BAC = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 180^\circ - 75^\circ$ lub $\sphericalangle BAC = 180^\circ - (30^\circ + 135^\circ) = 15^\circ$.

$$\text{Zatem } \sin \sphericalangle BAC = \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ lub } \sin \sphericalangle BAC = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Z twierdzenia sinusów: } \frac{|BC|}{\sin \sphericalangle BAC} = \frac{|AB|}{\sin 30^\circ} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8.$$

$|BC| = 8 \sin \sphericalangle BAC$, czyli:

$$|BC| = 8 \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 2(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \text{ lub } |BC| = 8 \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

Odp.: $2(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ lub $2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

1.8. 190 m

1.9. $4(3\sqrt{2} + \sqrt{6})$ cm i $8\sqrt{6}$ cm

1.10. $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 45^\circ$,
 $\sphericalangle C = \sphericalangle D = 135^\circ$,
 $|AD| = |BC| = 4,24$ cm,
 $|AB| = 10,41$ cm, $|CD| = 4,42$ cm

1.11. $|AW| = 1,22$ km,
 $|BW| = 1,32$ km

1.12. a) ok. 20,7 cm
b) ok. 5,4 cm

1.13. $|BC| = 7,08$, $|AC| = 8,68$
lub $|BC| = 17,92$, $|AC| = 21,98$

1.14. 11,54 cm, 9,13 cm, 50° , 56°

1.15. 7

1.16. $18\sqrt{2}$ cm, $18\sqrt{3}$ cm,
 $9(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ cm

1.17. $obw = 2(3 + 2\sqrt{3})$,
długość okręgu: $2\pi\sqrt{6}$

1.18. Patrz s. 11.

1.19. 25° , 39° , 116° , 9,0 cm
lub 25° , 141° , 14° , 2,4 cm

1.20. Patrz s. 14.

1.21. Dana jest równość:

$$(1) \frac{|AB|}{\cos \angle BCA} = \frac{|BC|}{\cos \angle CAB}$$

Z twierdzenia sinusów:

$$(2) \frac{|AB|}{\sin \angle BCA} = \frac{|BC|}{\sin \angle CAB}$$

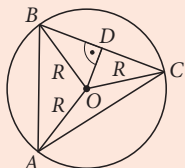
Dzielimy równości (1) i (2) stronami:

$$\frac{\sin \angle BCA}{\cos \angle BCA} = \frac{\sin \angle CAB}{\cos \angle CAB}$$

$$\operatorname{tg} \angle BCA = \operatorname{tg} \angle CAB$$

Zatem $\angle BCA = \angle CAB$,
czyli trójkąt ABC jest
równoramienny.

1.22.



a) $R = 11$ tys. km, $\angle BAC = 57^\circ$
 $|BC| = 2R \sin 57^\circ \approx$
 $\approx 22\,000 \cdot 0,8387 \approx 18,5$ tys. [km]

b) Satelita C jest widoczny
z kamery w satelicie B,
gdy $|OD| > 6300$ km.

$$|OD| = \sqrt{R^2 - |BD|^2} =$$

$$= \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}|BC|\right)^2} \approx$$

$$\approx \sqrt{11\,000^2 - 9250^2} \approx 6000 \text{ [km]}$$

$|OD| < 6300$ km, zatem satelita C
nie jest widoczny.

Odp.: a) ok. 18,5 tys. km b) nie

1.23. Patrz s. 15.

Prosto do matury

1. P, F, P

2. 3,7

3. 33°

$$4. \frac{d \cdot \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}, \frac{d \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

5. Wskazówka: Skorzystaj ze
wzoru $P = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$ oraz
z twierdzenia sinusów.

D

1.20. Punkt M jest punktem przecięcia prostych zawierających wysokości trójkąta ABC , różnym od jego wierzchołków. Udowodnij, że okręgi opisane na trójkątach ABM , BMC , ACM i ABC mają równe promienie.

D

* 1.21. Wykaż, że jeżeli w trójkącie ABC zachodzi związek $\frac{|AB|}{\cos \angle BCA} = \frac{|BC|}{\cos \angle CAB}$,
to trójkąt ABC jest równoramienny.

* 1.22. Po tej samej orbicie okołoziemskiej o promieniu 11 tys. km krążą trzy satelity:
 A , B i C . Kąt BAC ma miarę 57° .

a) Wyznacz odległość między satelitami B i C .b) Sprawdź, czy satelita C jest widoczny z kamery umieszczonej w satelicie B . Przyjmij, że promień Ziemi jest równy 6300 km.

* 1.23. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 4$, $|AC| = 4\sqrt{2}$, $\angle BCA = 30^\circ$. Oblicz
długość boku BC .

* 1.24. W pewnym czworokącie jedna z przekątnych ma długość równą promieniowi okręgu opisanego na tym czworokącie. Iloczyn sinusów wszystkich kątów tego czworokąta jest równy $\frac{1}{8}$. Oblicz miary kątów czworokąta.

Prosto do matury



1. Niech α , β , γ będą kątami trójkąta ABC , a , b , c – bokami odpowiednio przeciwległymi oraz $\alpha = 30^\circ$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$

B. $\frac{a}{c} = \frac{\sin \gamma}{2}$

C. Długość jednego z boków trójkąta jest równa promieniowi okręgu opisanego na tym trójkącie.

2. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 4$, $\angle CAB = 50^\circ$, $\angle ABC = 75^\circ$. Wyznacz
długość boku BC z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

3. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 32$, $|BC| = 26$, $\angle BCA = 42^\circ$. Wyznacz miarę
kąta CAB z dokładnością do 1° .

4. Przekątna równoległoboku ma długość d i dzieli jego kąt na dwa kąty o miarach α
oraz β . Wyznacz długości boków tego równoległoboku.

D

5. Wykaż, że pole trójkąta o kątach α , β , γ wpisanego w okrąg o promieniu R wyraża
się wzorem $P = 2R^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$.

1.24. Przyjmujemy, że $\angle B < \angle D$ i $\angle C < \angle A$. R – promień okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$ Z twierdzenia sinusów w trójkącie ABC :

$$\frac{|AC|}{\sin \angle B} = 2R \Leftrightarrow \frac{R}{\sin \angle B} = 2R \Leftrightarrow \sin \angle B = \frac{1}{2}$$

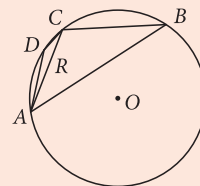
$$\text{Zatem } \angle B = 30^\circ, \angle D = 180^\circ - \angle B = 150^\circ.$$

$$\sin \angle A = \sin (180^\circ - \angle C) = \sin \angle C \text{ oraz } \sin \angle A \cdot \sin \angle B \cdot \sin \angle C \cdot \sin \angle D = \frac{1}{8}$$

Stąd:

$$\sin^2 \angle C \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \sin^2 \angle C = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \angle C = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Zatem } \angle C = 45^\circ, \angle A = 135^\circ.$$

Odp.: $30^\circ, 45^\circ, 135^\circ, 150^\circ$ 

2. Twierdzenie cosinusów

Umiejętności:

- znajdowanie związków miarowych w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia cosinusów

Trójkąt jest jednoznacznie określony, gdy dane są długości jego dwóch boków i kąt między nimi zawarty. Aby wyznaczyć długość trzeciego boku i miary pozostałych kątów, możemy skorzystać z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie

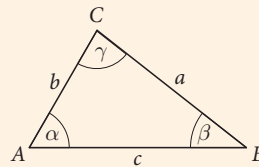
Twierdzenie cosinusów

Dla dowolnego trójkąta o bokach a, b, c i kątach α, β, γ leżących odpowiednio naprzeciw tych boków zachodzą równości:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cos \gamma$$



Założenie

Trójkąt ABC jest dowolny. Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku w twierdzeniu.

Teza

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cos \gamma$$

Twierdzenie cosinusów nazywane jest uogólnionym twierdzeniem Pitagorasa.

Dowód

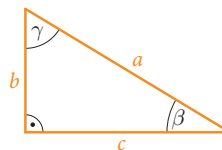
Wyznamy a w zależności od b, c oraz kąta α .

Zauważmy, że gdy α jest kątem prostym, to teza twierdzenia wynika wprost z twierdzenia Pitagorasa:

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ i } \cos \alpha = \cos 90^\circ = 0$$

więc:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$



ZZ i MKP

tematy 5.11, 5.12 (klasa 2)

Multiteka

- Twierdzenie cosinusów

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.2

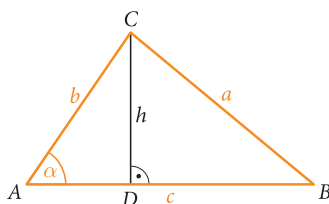
Generator
testów i sprawdzianów

Rozważmy pozostałe dwie sytuacje – gdy α jest kątem ostrym oraz gdy α jest kątem rozwartym.

Prowadzimy wysokość CD .

$$(1) \quad a^2 = |CD|^2 + |DB|^2$$

← w $\triangle DBC$ na mocy twierdzenia Pitagorasa



Jeżeli $\alpha < 90^\circ$, to:

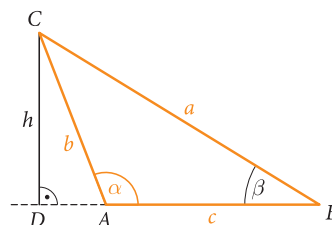
$$\frac{|CD|}{b} = \sin \alpha$$

$$\frac{|AD|}{b} = \cos \alpha$$

więc:

$$|CD| = b \sin \alpha$$

$$|DB| = c - |AD| = c - b \cos \alpha$$



Jeżeli $\alpha > 90^\circ$, to:

$$\frac{|CD|}{b} = \sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\frac{|AD|}{b} = \cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

więc:

$$|CD| = b \sin \alpha$$

$$|DB| = c + |AD| = c + b \cos \alpha$$

Niezależnie od rozwartości kąta α mamy więc:

$$\begin{aligned} |CD|^2 + |DB|^2 &= (b \sin \alpha)^2 + (c - b \cos \alpha)^2 = \\ &= b^2 \sin^2 \alpha + c^2 - 2bc \cos \alpha + b^2 \cos^2 \alpha = \\ &= b^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + c^2 - 2bc \cos \alpha = \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \end{aligned}$$

Zatem, po podstawieniu do równości (1), mamy:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Wyprowadzenie pozostałych dwóch równości przebiega analogicznie.

Koniec dowodu

Wniosek

Jeżeli oznaczymy długości boków trójkąta a, b, c oraz kąty leżące naprzeciwko nich odpowiednio α, β, γ , to prawdziwe są wzory:

$$\bullet \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \bullet \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \bullet \cos \gamma = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ba}$$

Przykład 1 ◀ zad. 2.5

Dane są długości dwóch boków trójkąta ABC : $|AB| = 6$, $|BC| = 4$ oraz $\sphericalangle ABC = 76^\circ$. Obliczmy $|AC|$ z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.

Rozwiązanie

$$|AC|^2 = 36 + 16 - 48 \cos 76^\circ \approx 40,39 \quad \leftarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$|AC| \approx \sqrt{40,39} \approx 6,36$$

Odp.: $|AC| \approx 6,36$

Przykład 2 ◀ zad. 2.8

Wyznamy (z dokładnością do 1°) kąty trójkąta o bokach długości 7, 8 i 3.

Rozwiązanie

Oznaczmy: $a = 7$, $b = 8$, $c = 3$.

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{64 + 9 - 49}{48} = \frac{1}{2}, \text{ stąd } \alpha = 60^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{49 + 9 - 64}{42} \approx -0,1429$$

$$0,1429 \approx \cos 82^\circ$$

$$-0,1429 \approx -\cos 82^\circ = \cos(180^\circ - 82^\circ) \quad \leftarrow \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\beta \approx 180^\circ - 82^\circ = 98^\circ$$

$$\gamma \approx 22^\circ \quad \leftarrow \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Odp.: $60^\circ, 98^\circ, 22^\circ$

Przykład 3 ◀ zad. 2.9

Sprawdźmy, czy trójkąt o bokach długości $\sqrt{2}$, $\sqrt{2} + 2$, $\sqrt{2} + 3$ jest rozwartokątny.

Rozwiązanie

Największy kąt trójkąta leży naprzeciwko najdłuższego boku. Najdłuższy bok badanego trójkąta to $a = \sqrt{2} + 3$. Niech α oznacza największy kąt trójkąta. Zbadamy znak cosinusa tego kąta.

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \text{ gdzie } b = \sqrt{2} \text{ i } c = \sqrt{2} + 2$$

Ponieważ $2bc > 0$, wystarczy zbadać znak wyrażenia w liczniku ułamka.

$$b^2 + c^2 - a^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2} + 2)^2 - (\sqrt{2} + 3)^2 = -3 - 2\sqrt{2} < 0$$

Zatem $\cos \alpha < 0$, czyli α jest kątem rozwartym.

Odp.: Badany trójkąt jest rozwartokątny.

◀2.5. W trójkącie ABC dane są: $\sphericalangle C = 54^\circ$, $|BC| = 10$, $|AC| = 8$. Oblicz długość boku AB z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

Odp.: 8,36

◀2.8. Dane są długości boków trójkąta. Oblicz miary jego kątów z dokładnością do 1° .

a) 8, 7, 10

b) 3, 5, 6

c) 24, 11, 18

d) $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, 3

Odp.: a) $53^\circ, 44^\circ, 83^\circ$

b) $30^\circ, 56^\circ, 94^\circ$

c) $109^\circ, 26^\circ, 45^\circ$

d) $46^\circ, 59^\circ, 75^\circ$

◀2.9. Jakim trójkątem ze względu na kąty jest trójkąt o bokach podanej długości?

a) 5, 9, 13

b) 8, 15, 17

c) $3\sqrt{2}$, 4, $1 + \sqrt{2}$

d) 7, 8, 9

Odp.: a) rozwartokątny

b) prostokątny

c) ostrokątny

d) ostrokątny

◀ 2.11. Patrz s. 21.

**Przykład 4** ◀ zad. 2.11

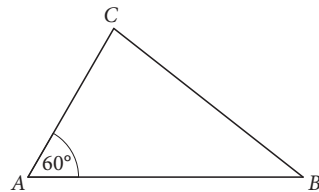
W trójkącie ABC mamy $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. Ponadto zachodzą warunki $|AB| = 2|AC| - 4$ i $|BC| = |AC| + 4$. Wyznaczmy długości boków tego trójkąta.

Rozwiązanie

Przyjmijmy, że $|AC| = x$. Wówczas $|AB| = 2x - 4$ i $|BC| = x + 4$. Zauważmy, że aby spełniony był warunek $|AB| > 0$, musimy założyć, że $x > 2$.

Na mocy twierdzenia cosinusów:

$$\begin{aligned} |BC|^2 &= |AC|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |AB| \cdot \cos \sphericalangle BAC \\ (x+4)^2 &= x^2 + (2x-4)^2 - 2 \cdot x \cdot (2x-4) \cdot \frac{1}{2} \\ x^2 + 8x + 16 &= x^2 + 4x^2 - 16x + 16 - 2x^2 + 4x \\ 2x^2 - 20x &= 0, \text{ stąd } 2x(x-10) = 0 \end{aligned}$$



Po uwzględnieniu warunków zadania otrzymujemy $x = 10$.

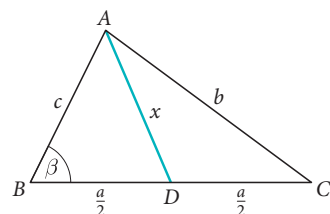
Odp.: Boki trójkąta mają długości: $|AC| = 10$, $|BC| = 14$ i $|AB| = 16$.

◀ 2.21. Wyznacz długości środkowych poprowadzonych w trójkącie o bokach długości 10, 12 oraz 9.

Odp.: $\frac{1}{2}\sqrt{407}$, $\frac{1}{2}\sqrt{218}$, $\frac{5}{2}\sqrt{14}$

Przykład 5 ◀ zad. 2.21

W trójkącie ABC dane są długości boków a , b i c . Wyznaczmy długość środkowej poprowadzonej z wierzchołka A .

**Rozwiązanie**

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Punkt D jest środkiem boku BC . Szukamy $x = |AD|$.

$$\begin{aligned} x^2 &= c^2 + \frac{a^2}{4} - ac \cdot \cos \beta && \leftarrow \text{twierdzenie cosinusów w trójkącie ABD} \\ \cos \beta &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} && \leftarrow \text{twierdzenie cosinusów w trójkącie ABC} \end{aligned}$$

$$x^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - ac \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$4x^2 = 4c^2 + a^2 - 2a^2 - 2c^2 + 2b^2$$

$$4x^2 = 2c^2 - a^2 + 2b^2$$

$$x^2 = \frac{1}{4}(2c^2 - a^2 + 2b^2), \text{ więc } x = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

Zauważmy, że w podobny sposób możemy wyznaczyć długości pozostałych środkowych. Wynoszą one odpowiednio – dla środkowej z wierzchołka B : $\frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$, a z wierzchołka C : $\frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

Odp.: Środkowa poprowadzona z wierzchołka A ma długość $\frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

Zadania

W każdym z zadań 2.1–2.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszyte.

2.1. Dwa boki trójkąta mają długości 5 i 4, a kąt między nimi ma miarę 120° . Wskaż długość trzeciego boku tego trójkąta.

- A. $\sqrt{21}$ B. $\sqrt{61}$ C. $\sqrt{41 - 20\sqrt{3}}$ D. $\sqrt{41 + 20\sqrt{3}}$

2.2. Trójkąt o bokach $\sqrt{10}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{30}$

- A. jest ostrokątny. C. jest rozwartokątny.
B. jest prostokątny. D. nie istnieje.

2.3. Wskaż wartość cosinusa kąta między ramionami trójkąta równoramiennego o podstawie 4 cm i ramionach 5 cm.

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{17}{25}$ D. $\frac{2\sqrt{21}}{5}$

2.4. Oblicz cosinusy kątów trójkąta o danych długościach boków.

- a) 5, 14, 15 b) 9, 10, 7 c) 7, 13, 16 d) $1 + \sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, 2

2.5. W trójkącie ABC dane są: $\sphericalangle C = 54^\circ$, $|BC| = 10$, $|AC| = 8$. Oblicz długość boku AB z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

2.6. W trójkącie ABC dane są: $\sphericalangle A = 120^\circ$, $|AC| = 6$, $|AB| = 12$. Oblicz długość boku BC oraz miary kątów trójkąta ABC z dokładnością do 1° .

2.7. Dwa boki trójkąta mają długości 7 i $3\sqrt{2}$, a kąt między nimi ma miarę 45° . Oblicz długość trzeciego boku i miary pozostałych kątów trójkąta z dokładnością do 1° .

2.8. Dane są długości boków trójkąta. Oblicz miary jego kątów z dokładnością do 1° .

- a) 8, 7, 10 b) 3, 5, 6 c) 24, 11, 18 d) $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, 3

2.9. Jakim trójkątem ze względu na kąty jest trójkąt o bokach podanej długości?

- a) 5, 9, 13 b) 8, 15, 17 c) $3\sqrt{2}$, 4, $1 + \sqrt{2}$ d) 7, 8, 9

2.10. Oblicz miarę największego kąta w trójkącie, którego boki mają długości $a = (3 - \sqrt{3})$ cm, $b = 2\sqrt{3}$ cm, $c = 3\sqrt{2}$ cm.

2.11. W trójkącie ABC dane są: $\cos \sphericalangle BAC = \frac{25}{32}$, $|BC| = |AB| - 3$, $|AC| = |AB| - 2$. Wyznacz długości boków tego trójkąta.

2.23. ABC – trójkąt równoramienny o boku 6 cm,

$$|AM| = |MN| = |NB|$$

$$\triangle AMC \equiv \triangle BNC$$

(cecha bkb: $|AM| = |BN|$, $\sphericalangle MAC = 60^\circ = \sphericalangle NBC$ i $|AC| = |BC|$)

Zatem $\alpha = \gamma$ i $|MC| = |NC|$.

$\sphericalangle AMC > \sphericalangle MAC$, więc $|AC| > |MC|$.

Z twierdzenia sinusów w trójkątach AMC i MNC :

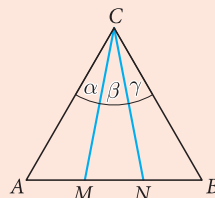
$$\frac{|AM|}{\sin \alpha} = \frac{|AC|}{\sin \sphericalangle AMC}, \quad \frac{|MN|}{\sin \beta} = \frac{|NC|}{\sin \sphericalangle NMC}$$

Dzielimy powyższe równości stronami (korzystamy z równości $|AM| = |MN|$

i $\sin \sphericalangle AMC = \sin \sphericalangle NMC$):

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{|AC|}{|NC|} = \frac{|AC|}{|MC|} > 1$$

Zatem $\sin \beta > \sin \alpha$, czyli $\beta > \alpha$.



Odpowiedzi i rozwiązania

2.1. B

2.2. C

2.3. C

- 2.4. a)** $\frac{33}{35}$, $\frac{9}{25}$, $-\frac{1}{35}$
b) $\frac{17}{35}$, $\frac{5}{21}$, $\frac{11}{15}$ **c)** $\frac{47}{52}$, $\frac{17}{28}$, $-\frac{19}{91}$
d) $\frac{9\sqrt{2}-4}{16}$, $\frac{5-3\sqrt{2}}{4}$, $\frac{10-3\sqrt{2}}{8}$

2.5. 8,36

2.6. $|BC| = 6\sqrt{7}$, $\sphericalangle B = 19^\circ$, $\sphericalangle C = 41^\circ$

2.7. 5, 37° , 98°

2.8. a) 53° , 44° , 83°

b) 30° , 56° , 94°

c) 109° , 26° , 45°

d) 46° , 59° , 75°

2.9. a) rozwartokątny

b) prostokątny

c) ostrokątny

d) ostrokątny

2.10. 120°

2.11. $|AB| = 8$, $|BC| = 5$, $|AC| = 6$

2.12. $obw = 7(3 + \sqrt{3})$ cm,
 $R = 7$ cm

2.13. $|AB| = 10$, $|AC| = 15$

2.14. a) $b = 2$, $c = \sqrt{3} + 1$, $\gamma = 75^\circ$

b) $a = 3 - \sqrt{3}$, $c = 3 + \sqrt{3}$, $\alpha = 15^\circ$

c) $a = \sqrt{2}$, $b = 3 + \sqrt{3}$, $\beta = 120^\circ$

d) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 105^\circ$

e) $b = 2\sqrt{3}$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$

f) $b = 2$, $\alpha = 45^\circ$, $\gamma = 30^\circ$

2.15. bok: $4\sqrt{7}$ cm,
 przekątna: $4\sqrt{13}$ cm,
 kąty: ok. 79° i ok. 101°

2.16. 45° , 60° , 75°

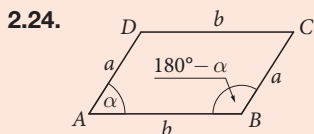
2.17. $80\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ cm,
 $80\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ cm

2.18. 6,2 cm

2.19. $\frac{\sqrt{21}}{7}$

2.20. $7\sqrt{7}$

2.21. $\frac{1}{2}\sqrt{407}$, $\frac{1}{2}\sqrt{218}$, $\frac{5}{2}\sqrt{14}$



Niech: $|BD| = d$, $|AC| = e$.

$$\begin{cases} d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha \\ e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(180^\circ - \alpha) \end{cases}$$

 $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, więc:

$$\begin{cases} d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha \\ e^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha \end{cases}$$

 Dodajemy równania stronami.
 $d^2 + e^2 = 2a^2 + 2b^2$
 $d^2 + e^2$ – suma kwadratów
 długości przekątnych,
 $2a^2 + 2b^2$ – suma kwadratów
 długości wszystkich boków.
 Zatem zachodzi równość, o której
 jest mowa w zadaniu.

2.12. Kąt trójkąta zawarty między dwoma bokami o długościach 14 cm i $7\sqrt{3}$ cm ma miarę 30° . Oblicz obwód trójkąta i promień R okręgu opisanego na tym trójkącie.

2.13. W trójkącie ABC dane są: $|BC| = 5\sqrt{7}$, $\sphericalangle A = 60^\circ$ oraz $|AC| : |AB| = 3 : 2$. Oblicz długości boków AC i AB .

2.14. W trójkącie ABC boki a , b , c są przeciwległe odpowiednio do kątów α , β , γ . Przerysuj tabelę i zastąp znaki $?$ odpowiednimi wartościami.

	a	b	c	α	β	γ
a)	$\sqrt{6}$	$?$	$?$	60°	45°	$?$
b)	$?$	$3\sqrt{2}$	$?$	$?$	60°	105°
c)	$?$	$?$	$\sqrt{6} + \sqrt{2}$	15°	$?$	45°
d)	$\sqrt{8}$	4	$2\sqrt{3} + 2$	$?$	$?$	$?$
e)	$2\sqrt{2}$	$?$	$\sqrt{2} + \sqrt{6}$	$?$	$?$	75°
f)	$2\sqrt{3} - 2$	$?$	$\sqrt{6} - \sqrt{2}$	$?$	105°	$?$

2.15. W równoległoboku krótsza przekątna i bok o długościach odpowiednio 12 cm i 8 cm tworzą kąt 60° . Oblicz długość drugiego boku i dłuższej przekątnej oraz miary kątów równoległoboku.

2.16. Dwa boki trójkąta ostrokątnego wpisanego w okrąg o promieniu r mają długości $r\sqrt{3}$ i $r\sqrt{2}$. Oblicz miary kątów trójkąta.

2.17. Romb, którego kąt rozwarty ma miarę 150° , opisany jest na okręgu o promieniu 20 cm. Oblicz długości przekątnych rombu.

2.18. W czworokącie wypukłym kolejne boki mają długości: 2 cm, 5 cm, 7 cm i $2\sqrt{13}$ cm. Jedna z przekątnych ma długość 8 cm. Oblicz długość drugiej przekątnej tego czworokąta z dokładnością do 0,1 cm.

2.19. W trójkącie równobocznym ABC na boku BC wybrano taki punkt M , że $|BM| = \frac{1}{2}|MC|$. Wyznacz sinus kąta CAM .

2.20. Trójkąt ABC jest równoramienny, $|AC| = |BC| = 14$ i kąt między ramionami ma miarę 120° . Oblicz długość środkowej AD tego trójkąta.

2.21. Wyznacz długości środkowych poprowadzonych w trójkącie o bokach długości 10, 12 oraz 9.

2.28. ABC – trójkąt prostokątny, $\sphericalangle CAB = 60^\circ$, $|AD| = 3$

$$\sphericalangle DAS = \frac{1}{2}\sphericalangle CAB = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$$

W trójkącie DSA (połowka trójkąta równobocznego):

$$|DA| = |DS|\sqrt{3}, \text{ stąd } |DS| = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

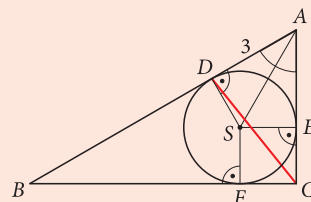
$$|AE| = |DA| = 3, |EC| = |SF| = |DS| = \sqrt{3},$$

$$|AC| = |AE| + |EC| = 3 + \sqrt{3}.$$

Z twierdzenia cosinusów w trójkącie CAD :

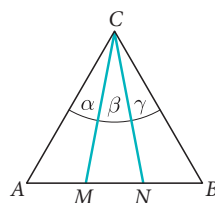
$$\begin{aligned} |CD|^2 &= |AD|^2 + |AC|^2 - 2|AD| \cdot |AC| \cdot \cos \sphericalangle CAB = 3^2 + (3 + \sqrt{3})^2 - 2 \cdot 3 \cdot (3 + \sqrt{3}) \cdot \frac{1}{2} = \\ &= 9 + 9 + 6\sqrt{3} + 3 - 9 - 3\sqrt{3} = 12 + 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{Odp.: } |CD| = \sqrt{12 + 3\sqrt{3}}$$



2.22. Środkowe AE i BF trójkąta ABC mają długości odpowiednio 15 oraz 18 i przecinają się pod kątem 120° . Oblicz długość trzeciej środkowej tego trójkąta.

D 2.23. W trójkącie równobocznym ABC o boku długości 6 cm, bok AB podzielono punktami M i N na trzy równe części, jak na rysunku. Wykaż, że $\beta > \alpha = \gamma$.



D * 2.24. Udowodnij, że suma kwadratów długości przekątnych równoległoboku jest równa sumie kwadratów długości wszystkich jego boków.

D * 2.25. Sinusy kątów pewnego trójkąta mają się do siebie jak 2 : 3 : 4. Udowodnij, że ten trójkąt jest rozwartokątny.

2.26. Dwa boki trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu R mają długości R i $\frac{3}{2}R$. Wyznacz długość trzeciego boku tego trójkąta.

D * 2.27. W trójkącie o kątach α, β, γ spełniona jest nierówność $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma < 0$. Wykaż, że $\cos \gamma < 0$.

*** 2.28.** W trójkąt prostokątny ABC , w którym bok AB jest przeciwprostokątną i $\sphericalangle CAB = 60^\circ$, wpisano okrąg styczny do przeciwprostokątnej w punkcie D . Odcinek AD ma długość 3. Oblicz $|CD|$.

Prosto do matury



1. W trójkącie o bokach a, b, c kąt α leżący naprzeciwko boku a jest rozwarty.

Oceń prawdziwość podanych zdań.

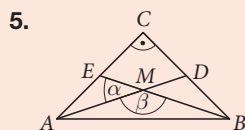
A. $a^2 + b^2 > c^2$ **B.** $b^2 + c^2 > a^2$ **C.** $c^2 + a^2 > b^2$

2. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 5$, $|BC| = 2$, $|AC| = 4$. Wyznacz z dokładnością do 1° miary kątów tego trójkąta.

3. Stosunek boków trójkąta wynosi 3 : 5 : 6. Wyznacz cosinus największego kąta w tym trójkącie.

4. Punkty K i L dzielą przekątną AC kwadratu $ABCD$ o boku a na trzy równe części. Oblicz długość boku rombu $BLDK$.

D 5. Wykaż, że w równoramiennym trójkącie prostokątnym tangens kąta ostrego między środkowymi poprowadzonymi z wierzchołków kątów ostrych jest równy 0,75.



$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta$$

Oznaczamy: $|AE| = |EC| = |CD| = |DB| = a$, $a > 0$.

$$|AD| = |BE| = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$$

Punkt M dzieli każdą środkową w stosunku 2 : 1, licząc od wierzchołka,

$$\text{zatem } |EM| = \frac{1}{3}a\sqrt{5}, \quad |AM| = \frac{2}{3}a\sqrt{5}.$$

Z twierdzenia cosinusów w trójkącie AEM : $|AE|^2 = |EM|^2 + |AM|^2 - 2|EM| \cdot |AM| \cdot \cos \alpha$

$$a^2 = \frac{5}{9}a^2 + \frac{20}{9}a^2 - 2a^2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{3} \cdot \cos \alpha \quad | : a^2$$

$$1 = \frac{25}{9} - \frac{20}{9} \cos \alpha, \quad \text{stad } \frac{20}{9} \cos \alpha = \frac{16}{9}, \quad \text{zatem } \cos \alpha = \frac{4}{5} \quad (\alpha - \text{kąt ostry}).$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}.$$

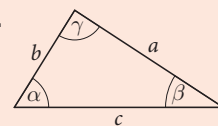
Zatem $\operatorname{tg} \alpha = 0,75$.

2.22. $3\sqrt{31}$

2.23. Patrz s. 21.

2.24. Patrz s. 22.

2.25.



$$\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = 2 : 3 : 4$$

Z twierdzenia sinusów:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{a}{c}, \quad \text{stad } \frac{a}{c} = \frac{1}{2}, \quad \text{czyli } a = \frac{c}{2}$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{b}{c}, \quad \text{stad } \frac{b}{c} = \frac{3}{4}, \quad \text{czyli } b = \frac{3}{4}c$$

Z twierdzenia cosinusów:

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Zatem:

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{\frac{c^2}{4} + \frac{9}{16}c^2 - c^2}{2 \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{3}{4}c} = \frac{\frac{13}{16}c^2 - c^2}{\frac{3}{4}c^2} = \\ &= \frac{-\frac{5}{16}}{\frac{3}{4}} = -\frac{5}{12} < 0 \end{aligned}$$

Stąd $\gamma \in (90^\circ; 180^\circ)$.

Zatem trójkąt jest rozwartokątny.

$$\mathbf{2.26.} \quad \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{7}}{4}R \quad \text{lub} \quad \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{7}}{4}R$$

2.27. Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku w rozwiązaniu zadania 2.25.

Z twierdzenia cosinusów:

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Zatem $\cos \gamma < 0$ wtedy i tylko

wtedy, gdy $a^2 + b^2 - c^2 < 0$,

czyli $a^2 + b^2 < c^2$.

Z twierdzenia sinusów:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{a}{c}, \quad \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{b}{c}$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta < \sin^2 \gamma$$

$$\left(\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \right)^2 + \left(\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \right)^2 < 1$$

$$\left(\frac{a}{c} \right)^2 + \left(\frac{b}{c} \right)^2 < 1$$

$$a^2 + b^2 < c^2$$

Zatem $\cos \gamma < 0$.

2.28. Patrz s. 22.

Prosto do matury

1. P, F, P

2. $\sphericalangle A = 23^\circ$, $\sphericalangle B = 49^\circ$, $\sphericalangle C = 108^\circ$

$$\mathbf{3.} \quad -\frac{1}{15}$$

$$\mathbf{4.} \quad \frac{\sqrt{5}}{3}a$$

3. Związki miarowe w wielokątach

Umiejętności:

- znajdowanie związków miarowych w wielokątach z użyciem trygonometrii

Udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Twierdzenie o dwusiecznej

Dwusieczna kąta wewnętrznego w trójkącie dzieli przeciwległy bok trójkąta na odcinki proporcjonalne do boków przyległych do tego kąta.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Założenie

CD jest dwusieczną kąta ACB .

Teza

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|CB|}$$

Dowód

$$\frac{P_{\triangle ADC}}{P_{\triangle DBC}} = \frac{|AD|}{|DB|}$$

$$\frac{P_{\triangle ADC}}{P_{\triangle DBC}} = \frac{|AC| \cdot |DC| \cdot \sin \alpha}{|CB| \cdot |DC| \cdot \sin \alpha} = \frac{|AC|}{|CB|}$$

$$\text{Zatem } \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|CB|}.$$

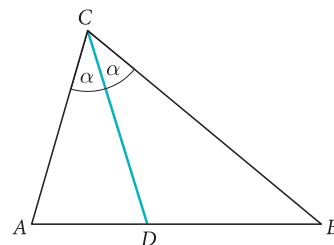
Koniec dowodu

Zachodzi też twierdzenie o dwusiecznej kąta zewnętrznego, czyli przyległego do kąta wewnętrznego trójkąta. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Wtedy twierdzenie to przyjmuje następującą postać:

Jeżeli prosta zawierająca dwusieczną kąta zewnętrznego przy wierzchołku C trójkąta

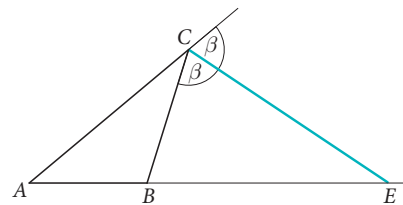
ABC przecina prostą AB w punkcie E , to $\frac{|AE|}{|BE|} = \frac{|AC|}{|CB|}$.

Dowód tego twierdzenia pominiemy.



← trójkąty ADC i DBC mają wspólną wysokość

← pole trójkąta jest równe $P = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$



ZZ i MKP

tematy 6.7 (klasa 1), 4.7 (klasa 2)

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.3

Generator
testów i sprawdzianów

Przykład 1 ◀ zad. 3.5

Boki trójkąta mają długości $|AB| = 6$, $|BC| = 5$, $|AC| = 4$. Obliczymy długości odcinków, na które dwusieczna AD dzieli bok BC .

Rozwiązanie

Oznaczmy $|BD| = x$, $|DC| = y$.

$$\frac{x}{y} = \frac{|AB|}{|AC|}$$

$$x + y = 5$$

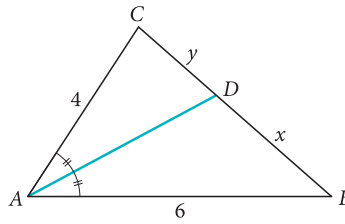
← na mocy twierdzenia o dwusiecznej

← z warunków zadania

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{6}{4} \\ x + y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ x + y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Odp.: $|BD| = 3$, $|DC| = 2$



◀3.5. Boki trójkąta mają długości $|AB| = 8$, $|BC| = 7$, $|AC| = 12$. Oblicz długości odcinków, na które każda z dwusiecznych dzieli przeciwległy bok.

Odp.: $AB: 2\frac{18}{19}$ i $5\frac{1}{19}$,
 $BC: 2,8$ i $4,2$,
 $AC: 6,4$ i $5,6$

**Przykład 2** ◀ zad. 3.7

Obwód trójkąta ABC jest równy 40, a dwusieczna kąta wewnętrznego przy wierzchołku C dzieli bok AB na odcinki o długościach $|AD| = 6$ i $|DB| = 10$. Obliczymy długości boków trójkąta ABC .

Rozwiązanie

$$|AB| = |AD| + |DB| = 16$$

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|CB|} \quad \leftarrow \text{na mocy twierdzenia o dwusiecznej}$$

Zatem:

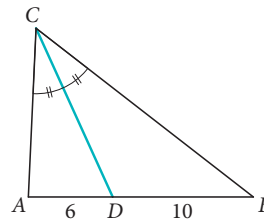
$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{6}{10}, \text{ stąd } |AC| = \frac{3}{5}|CB|$$

$$16 + |CB| + \frac{3}{5}|CB| = 40 \quad \leftarrow \text{obwód trójkąta } ABC \text{ jest równy } 40$$

$$\frac{8}{5}|CB| = 24$$

$$|CB| = \frac{5}{8} \cdot 24 = 15, \quad |AC| = \frac{3}{5} \cdot 15 = 9$$

Odp.: $|AB| = 16$, $|AC| = 9$, $|CB| = 15$



◀3.7. W trójkącie ABC dana jest suma długości boków: $|AB| + |AC| = 33$. Dwusieczna kąta wewnętrznego przy wierzchołku A dzieli bok BC na odcinki o długościach $|BD| = 12$ i $|DC| = 10$. Oblicz długości boków AB i AC .

Odp.: $|AB| = 18$, $|AC| = 15$

Wyprowadzimy teraz wzory łączące długości boków trójkąta i jego pole z promieniami okręgów: wpisanego w ten trójkąt i opisanego na nim.

Twierdzenie

Pole P trójkąta jest równe iloczynowi połowy obwodu trójkąta i promienia r okręgu wpisanego w ten trójkąt:

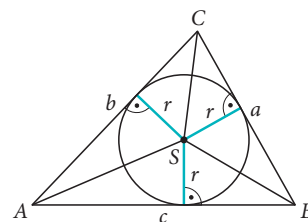
$$P = pr$$

gdzie $2p$ oznacza obwód trójkąta.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Założenia

a, b, c są długościami boków trójkąta,
 $2p$ oznacza obwód trójkąta,
 r jest promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt.

**Teza**

Pole P trójkąta jest równe $P = pr$.

Dowód

Wyznamy pole tego trójkąta.

$$P = P_{\triangle ABS} + P_{\triangle BCS} + P_{\triangle CAS}$$

$$P = \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br \quad \leftarrow r \text{ jest wysokością każdego z trójkątów: } ABS, BCS, CAS$$

$$P = \frac{1}{2}r(c + a + b)$$

$$P = pr$$

Koniec dowodu

Twierdzenie

Pole P trójkąta o bokach długości a, b, c jest równe:

$$P = \frac{abc}{4R}$$

gdzie R oznacza promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Założenia

a, b, c są długościami boków trójkąta,
 R jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie.

Teza

Pole P trójkąta jest równe $P = \frac{abc}{4R}$.

Dowód

Niech α oznacza kąt trójkąta leżący naprzeciw boku o długości a . Mamy:

$$P = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{2R}$$

← z twierdzenia sinusów $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$

$$P = \frac{abc}{4R}$$

Koniec dowodu

Podamy jeszcze wzór (jego wyprowadzenie pominiemy), za pomocą którego można obliczyć pole trójkąta, gdy dane są tylko długości jego boków.

Twierdzenie**Wzór Herona**

Pole P trójkąta o bokach długości a, b, c jest równe:

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

gdzie $2p$ oznacza obwód trójkąta.

Zauważmy, że w podanym wzorze niezależnie od rodzaju trójkąta wyrażenie pod pierwiastkiem jest dodatnie. Liczby a, b, c są długościami boków trójkąta, więc spełniają nierówność trójkąta:

$$a + b > c, \quad a + c > b, \quad b + c > a,$$

a stąd po prostych przekształceniach otrzymujemy:

$$p - c > 0, \quad p - b > 0, \quad p - a > 0.$$

Przykład 3 ◀ zad. 3.10, 3.11

Dany jest trójkąt o bokach długości 6, 5 i 7. Obliczymy promień R okręgu opisanego na tym trójkącie i promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Rozwiązanie

Niech p oznacza połowę obwodu, a P – pole tego trójkąta. Wówczas:

$$p = 9, \quad P = \sqrt{9 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2} = 6\sqrt{6}$$

$$R = \frac{abc}{4P} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6\sqrt{6}} = \frac{35\sqrt{6}}{24}, \quad r = \frac{P}{p} = \frac{6\sqrt{6}}{9} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Odp.: } R = \frac{35\sqrt{6}}{24}, \quad r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

◀ **3.10.** Odcinki o długościach 5 cm, 12 cm, 13 cm są bokami trójkąta. Oblicz stosunek promienia okręgu opisanego na tym trójkącie do promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

$$\text{Odp.: } 3\frac{1}{4}$$

◀ **3.11.** Boki trójkąta mają długości 4 cm, 5 cm, 6 cm. Oblicz promień R okręgu opisanego na tym trójkącie i promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt.

$$\text{Odp.: } R = \frac{8}{7}\sqrt{7} \text{ cm}, \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{7} \text{ cm}$$

◀3.15. Dwa boki trójkąta mają długości 8 i 15, a kąt między nimi ma miarę 60° . Oblicz promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Odp.: $\frac{5}{3}\sqrt{3}$

◀3.23. Czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu oraz $|AB| = 6$, $|AD| = 4$, $\cos \sphericalangle BAD = \frac{2}{3}$ i $\cos \sphericalangle BCD = -\frac{1}{3}$. Oblicz długości boków BC i CD tego czworokąta.

Odp.: $|BC| = \sqrt{7} + 1$,
 $|CD| = \sqrt{7} - 1$

D Przykład 4 ◀ zad. 3.15

W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych a i b poprowadzono dwusieczną kąta prostego. Wykażemy, że zawarty w trójkącie odcinek tej dwusiecznej ma długość $\frac{ab}{a+b}\sqrt{2}$.

Dowód

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

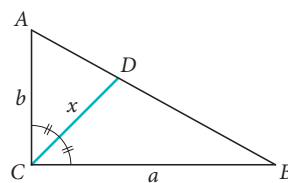
$$P_{BDC} = \frac{1}{2}a \cdot x \cdot \sin 45^\circ = \frac{ax\sqrt{2}}{4}, \quad P_{ADC} = \frac{1}{2}b \cdot x \cdot \sin 45^\circ = \frac{bx\sqrt{2}}{4}$$

Pole trójkąta ABC jest sumą pól trójkątów BDC i ADC . Zatem:

$$\frac{ab}{2} = \frac{ax\sqrt{2}}{4} + \frac{bx\sqrt{2}}{4}, \text{ czyli } 2ab = x\sqrt{2}(a+b)$$

$$x\sqrt{2} = \frac{2ab}{a+b}, \text{ stąd } x = \frac{ab}{a+b}\sqrt{2}$$

Koniec dowodu



Przykład 5 ◀ zad. 3.23

Czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu oraz $|AB| = 5$, $|AD| = 8$, $\sphericalangle BAD = 60^\circ$ i $\sphericalangle BCD = 120^\circ$. Obliczmy długości boków BC i CD tego czworokąta.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu, więc:

$$|CD| + 5 = x + 8, \text{ czyli } |CD| = x + 3$$

Stosujemy twierdzenie cosinusów dla trójkątów ABD i CBD .

$$d^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ \quad \leftarrow \text{w } \triangle ABD$$

$$d^2 = x^2 + (x+3)^2 - 2 \cdot x \cdot (x+3) \cdot \cos 120^\circ \quad \leftarrow \text{w } \triangle CBD$$

Zatem:

$$25 + 64 - 80 \cdot \frac{1}{2} = x^2 + x^2 + 6x + 9 - 2x(x+3) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

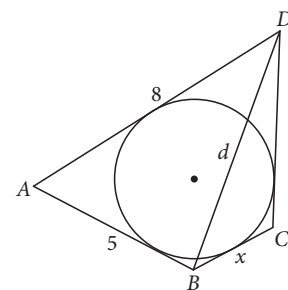
$$3x^2 + 9x - 40 = 0$$

$$\Delta = 561, \quad x_1 = \frac{-9 - \sqrt{561}}{6}, \quad x_2 = \frac{-9 + \sqrt{561}}{6}$$

Tylko druga z otrzymanych liczb jest dodatnia, czyli:

$$|BC| = \frac{\sqrt{561} - 9}{6}, \quad |CD| = \frac{\sqrt{561} - 9}{6} + 3 = \frac{\sqrt{561} + 9}{6}$$

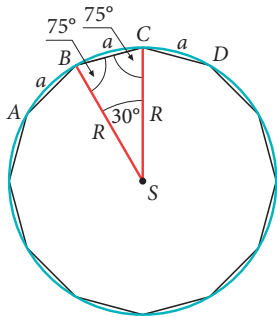
Odp.: $|BC| = \frac{\sqrt{561} - 9}{6}, \quad |CD| = \frac{\sqrt{561} + 9}{6}$



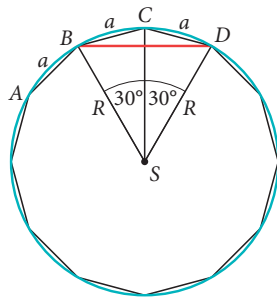
Przykład 6 ◀ zad. 3.27

Dany jest dwunastokąt foremny o boku a . Obliczmy

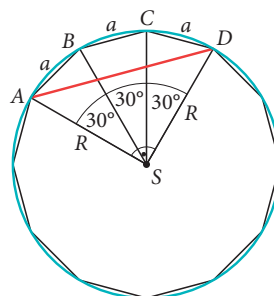
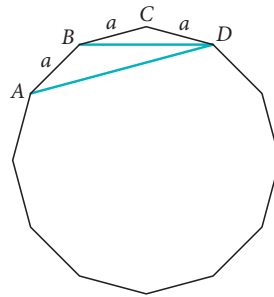
- promień okręgu opisanego na tym dwunastokącie.
- długość przekątnej BD .
- długość przekątnej AD .

Rozwiązanie

Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

- a) Zauważmy, że środek S okręgu opisanego na dwunastokącie leży na symetralnej boku BC tego wielokąta. Niech R będzie promieniem tego okręgu (rys. 1). Dwunastokąt ma wszystkie boki tej samej długości, zatem kąt BSC ma miarę $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$. Trójkąt BCS jest równoramienny o kącie przy podstawie 75° , więc:

$$\frac{\frac{a}{2}}{R} = \cos 75^\circ$$

$$R = \frac{a}{2 \cos 75^\circ}$$

$$\leftarrow \cos 75^\circ = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$R = \frac{2a}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{2a(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2})} = \frac{2a(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}a$$

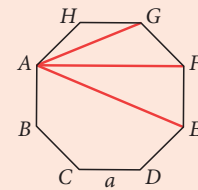
Odp.: $R = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}a$

- b) Trójkąty BCS i CDS są przystające, więc trójkąt BSD jest równoboczny (rys. 2) i $|BD| = R$, czyli:

$$|BD| = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}a$$

Odp.: $|BD| = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}a$

◀ 3.27. Bok ośmiokąta foremnego $ABCDEFGH$ ma długość a (zob. rysunek).



Wyznacz długość

- przekątnej AG .
- przekątnej AF .
- przekątnej AE .

Odp.: a) $a\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

b) $a(1 + \sqrt{2})$

c) $a\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$

Odpowiedzi i rozwiązania

3.1. B

3.2. A

3.3. C

3.4. $5\frac{5}{7}$, $4\frac{2}{7}$ 3.5. $AB: 2\frac{18}{19}$ i $5\frac{1}{19}$,
 $BC: 2,8$ i $4,2$,
 $AC: 6,4$ i $5,6$

3.6. 4 cm

3.7. $|AB| = 18$, $|AC| = 15$ 3.8. $\frac{2\sqrt{7}}{3}a$ c) Trójkąt ASD jest prostokątnym trójkątem równoramiennym, czyli jest połową kwadratu (rys. 3). Zatem:

$$|AD| = R\sqrt{2}$$

$$|AD| = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{2}a\sqrt{2} = a(1 + \sqrt{3})$$

Odp.: $|AD| = a(1 + \sqrt{3})$

Zadania

W każdym z zadań 3.1–3.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

3.1. Wskaż promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 6 cm i 8 cm.

A. 3 cm B. 2 cm C. 4 cm D. 1 cm

3.2. Ile wynosi pole trójkąta o bokach 4, 5, 7?

A. $4\sqrt{6}$ B. $6\sqrt{6}$ C. 4 D. $3\sqrt{6}$ 3.3. W trójkącie ABC o boku $|AC| = 18$ dwusieczna CD dzieli bok AB w stosunku $|BD| : |DA| = 1 : 6$. Wskaż długość boku CB .A. 1 B. $\frac{2}{3}$ C. 3 D. 5

3.4. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 6 i 8. Oblicz długości odcinków, na które dwusieczna kąta prostego podzieliła przeciwprostokątną.

3.5. Boki trójkąta mają długości $|AB| = 8$, $|BC| = 7$, $|AC| = 12$. Oblicz długości odcinków, na które każda z dwusiecznych dzieli przeciwległy bok.3.6. W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość 6 cm, a ramiona po 12 cm. Dwusieczne kątów przy podstawie przecinają ramiona w punktach M i N . Oblicz długość odcinka MN .3.7. W trójkącie ABC dana jest suma długości boków: $|AB| + |AC| = 33$. Dwusieczna kąta wewnętrznego przy wierzchołku A dzieli bok BC na odcinki o długościach $|BD| = 12$ i $|DC| = 10$. Oblicz długości boków AB i AC .3.8. W trójkącie ABC dane są: $|AC| = 2a$, $|BC| = a$ i $\angle ACB = 120^\circ$. Dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie D . Wyznacz długość odcinka AD .3.22. Są dwa przypadki: trójkąt ABC może być ostrokątny lub rozwartokątny. P – pole rombu $ABCD$, a – długość boku rombu

$$P = a^2 \sin \alpha$$

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB| \cdot |BC| \cdot \cos \angle ABC = 2a^2(1 - \cos \angle ABC)$$

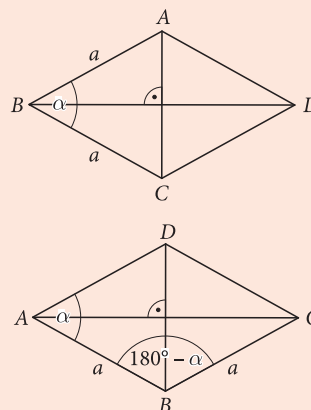
$$\cos \angle ABC = \cos \alpha \text{ lub } \cos \angle ABC = -\cos \alpha$$

$$\text{Zatem } |AC| = a\sqrt{2 - 2\cos \alpha} \text{ lub } |AC| = a\sqrt{2 + 2\cos \alpha}.$$

$$r = \frac{P_{ABC}}{0,5(|AB| + |BC| + |AC|)} = \frac{0,5P}{0,5(2a + |AC|)} = \frac{a^2 \sin \alpha}{2a + |AC|} = \frac{a \sin \alpha}{2 + \frac{|AC|}{a}}$$

$$\text{Stąd } a = \frac{\left(2 + \frac{|AC|}{a}\right)r}{\sin \alpha}, \text{ czyli } P = \left[\frac{\left(2 + \frac{|AC|}{a}\right)r}{\sin \alpha}\right]^2 \cdot \sin \alpha = \frac{\left(2 + \frac{|AC|}{a}\right)^2}{\sin \alpha} r^2.$$

$$\text{Odp.: } P = \frac{(2 + \sqrt{2 - 2\cos \alpha})^2}{\sin \alpha} r^2 \text{ lub } P = \frac{(2 + \sqrt{2 + 2\cos \alpha})^2}{\sin \alpha} r^2$$



3.9. Oblicz pole trójkąta o bokach podanej długości.

- a) 4, 6, 8 b) 8, 11, 13 c) 6, 10, 11 d) 4, 6, 7

3.10. Odcinki o długościach 5 cm, 12 cm, 13 cm są bokami trójkąta. Oblicz stosunek promienia okręgu opisanego na tym trójkącie do promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

3.11. Boki trójkąta mają długości 4 cm, 5 cm, 6 cm. Oblicz promień R okręgu opisanego na tym trójkącie i promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt.

3.12. Kąt między ramionami trójkąta równoramiennego ma miarę 32° . Oblicz (z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku) stosunek promienia okręgu opisanego na tym trójkącie do promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

3.13. Na boku BC równobocznego trójkąta ABC wybrano taki punkt D , że stosunek pola trójkąta ADB do pola trójkąta ADC wynosi $1 : 2$. Wyznacz tangens kąta DAB .

3.14. Miara kąta między ramionami trójkąta równoramiennego o polu $\sqrt{3}$ jest równa 120° . Oblicz pole koła wpisanego w ten trójkąt.

3.15. Dwa boki trójkąta mają długości 8 i 15, a kąt między nimi ma miarę 60° . Oblicz promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt.

3.16. Dwa boki trójkąta mają długości 4 cm i 5 cm. Jego pole jest równe 8 cm^2 . Oblicz długość x trzeciego boku trójkąta oraz promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt.

3.17. W trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta ostrego dzieli bok przeciwległy w stosunku $2 : 3$. Oblicz stosunek pola koła opisanego na trójkącie do pola koła wpisanego w ten trójkąt.

3.18. Dany jest trójkąt ABC , w którym: $|AB| = 8$, $|BC| = 4$ i $\sphericalangle ABC = 56^\circ$. Oblicz długość dwusiecznej BD w tym trójkącie. Wynik podaj z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.

3.19. W trójkącie ABC dane są długości boków: $|AB| = 4 \text{ cm}$, $|BC| = \sqrt{3} \text{ cm}$, $|AC| = 3 \text{ cm}$. Oblicz pole trójkąta ABC oraz stosunek promienia okręgu opisanego na tym trójkącie do promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

3.20. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych jest dwa razy mniejszy od drugiego. Długość okręgu wpisanego w ten trójkąt wynosi $2\pi \text{ cm}$. Oblicz pole koła opisanego na trójkącie.

3.26. $\text{tg} \sphericalangle CAB = \frac{|OB|}{|OA|} = \frac{3}{4}$

r – promień okręgu wpisanego w romb $ABCD$
Przyjmujemy: $|OB| = 3x$, $|OA| = 4x$.

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2} |AC| \cdot |BD| = \frac{1}{2} \cdot 8x \cdot 6x = 24x^2$$

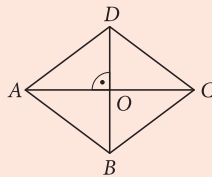
$$|AB| = \sqrt{|OA|^2 + |OB|^2} = \sqrt{(4x)^2 + (3x)^2} = 5x$$

$|AB| \cdot 2r = P_{ABCD}$, więc:

$$r = \frac{P_{ABCD}}{2|AB|} = \frac{24x^2}{2 \cdot 5x} = \frac{12}{5}x$$

$$\text{Szukany stosunek: } \frac{P_{ABCD}}{\pi r^2} = \frac{24x^2}{\pi \left(\frac{12}{5}x\right)^2} = \frac{25 \cdot 24}{144\pi} = \frac{25}{6\pi}$$

Odp.: $\frac{25}{6\pi}$



3.9. a) $3\sqrt{15}$ b) $8\sqrt{30}$ c) $\frac{45}{4}\sqrt{7}$
d) $\frac{3}{4}\sqrt{255}$

3.10. $3\frac{1}{4}$

3.11. $R = \frac{8}{7}\sqrt{7} \text{ cm}$, $r = \frac{1}{2}\sqrt{7} \text{ cm}$

3.12. 2,50

3.13. $\frac{\sqrt{3}}{5}$

3.14. $3\pi(7 - 4\sqrt{3})$

3.15. $\frac{5}{3}\sqrt{3}$

3.16. $x = \sqrt{17} \text{ cm}$,
 $r = \frac{9 - \sqrt{17}}{4} \text{ cm}$ lub $x = \sqrt{65} \text{ cm}$,
 $r = (9 - \sqrt{65}) \text{ cm}$

3.17. $\frac{9(3 + \sqrt{5})}{8}$

3.18. 4,71

3.19. $P = \frac{\sqrt{23}}{2} \text{ cm}^2$, $\frac{6(7\sqrt{3} + 3)}{23}$

3.20. $2\pi(2 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$

3.21. a) $r = \frac{2\sqrt{15}}{5} \text{ cm},$

$R = \frac{16\sqrt{15}}{15} \text{ cm}$ **b)** $\frac{2}{5}$

3.22. Patrz s. 30.

3.23. $|BC| = \sqrt{7} + 1,$
 $|CD| = \sqrt{7} - 1$

3.24. $3\frac{1}{2}$

3.25. $\cos \sphericalangle CBD = \frac{11\sqrt{14}}{42}$

3.26. Patrz s. 31.

3.27. a) $a\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

b) $a(1 + \sqrt{2})$ **c)** $a\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$

3.28. Każdy kąt wewnętrzny pięciokąta foremnego ma miarę 108° ($\frac{3}{5} \cdot 180^\circ$).

$\triangle ABC \equiv BCD$ (bkb)

Stąd $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA = \sphericalangle CBD =$
 $= \sphericalangle CDB = 36^\circ$ ($\frac{180^\circ - 108^\circ}{2}$).

Zatem w czworokącie $APDE$:

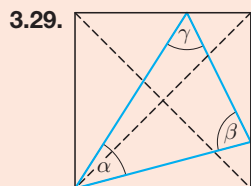
$\sphericalangle EAP = \sphericalangle EDP = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$

Czworokąt $APDE$ jest więc deltoidem, ale:

$\sphericalangle APD = 360^\circ - 108^\circ - 2 \cdot 72^\circ = 108^\circ$

Stąd $\sphericalangle APD = \sphericalangle AED = 108^\circ$.

Czworokąt $APDE$ jest deltoidem, którego przeciwległe kąty mają równe miary, zatem jest rombem.



Każdy bok trójkąta ma długość nie większą niż długość przekątnej kwadratu, czyli $\sqrt{2}$.

$$P_{\triangle} = \frac{1}{2}ab \sin \gamma =$$

$$= \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}ac \sin \beta$$

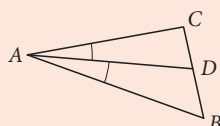
$$\frac{1}{2}ab \leq \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 1,$$

$$\frac{1}{2}bc \leq 1, \frac{1}{2}ac \leq 1$$

Zatem $P_{\triangle} \leq \sin \alpha,$

$$P_{\triangle} \leq \sin \beta, P_{\triangle} \leq \sin \gamma.$$

3.31.



$\sphericalangle ADB = 180^\circ - \sphericalangle ADC = \sphericalangle DAC +$
 $+ \sphericalangle ACD = \sphericalangle DAB + \sphericalangle ACD > \sphericalangle DAB$
 $\sphericalangle ADB > \sphericalangle DAB$, zatem
 $|AB| > |BD|$ (naprzeciwko większego kąta leży większy bok).

3.21. Boki trójkąta ABC mają długości: $|AB| = 4 \text{ cm}, |AC| = |BC| = 8 \text{ cm}.$

a) Oblicz promień r okręgu wpisanego w trójkąt ABC i promień R okręgu opisanego na tym trójkącie.

b) Oblicz stosunek pól figur, na które symetralna boku AC rozcina trójkąt ABC .

* **3.22.** W rombie $ABCD$ dana jest miara α kąta ostrego i promień r okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Oblicz pole rombu.

3.23. Czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu oraz $|AB| = 6, |AD| = 4,$
 $\cos \sphericalangle BAD = \frac{2}{3}$ i $\cos \sphericalangle BCD = -\frac{1}{3}$. Oblicz długości boków BC i CD tego czworokąta.

3.24. Długości boków czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg są równe: $|AB| = 3,$
 $|BC| = |CD| = 2, |DA| = 4$. Oblicz długość przekątnej BD tego czworokąta.

3.25. W trapez równoramienny $ABCD$, w którym $|AB| > |DC|$, wpisano okrąg o promieniu r . Punkt styczności P dzieli ramię AD na odcinki AP i PD w stosunku $5 : 1$. Oblicz cosinus kąta CBD .

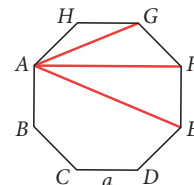
* **3.26.** Tangens kąta zawartego między dłuższą przekątną rombu a jego bokiem jest równy $\frac{3}{4}$. Oblicz stosunek pola rombu do pola koła wpisanego w ten romb.

3.27. Bok ośmiokąta foremnego $ABCDEFGH$ ma długość a (zob. rysunek). Wyznacz długość

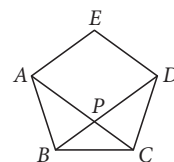
a) przekątnej AG .

b) przekątnej AF .

c) przekątnej AE .



3.28. W pięciokącie foremnym $ABCDE$ punkt P jest punktem przecięcia przekątnych AC i BD , jak na rysunku. Udowodnij, że czworokąt $APDE$ jest rombem.



* **3.29.** W kwadracie o boku długości 1 zawarty jest trójkąt. Wykaż, że pole tego trójkąta nie jest większe niż sinus dowolnego jego kąta.

* **3.30.** W trójkącie ABC kąt ACB ma miarę dwa razy większą niż kąt CAB . Dane są długości dwóch boków tego trójkąta: $|BC| = 9$ i $|AC| = 7$. Oblicz długość boku AB .

3.30. CD – dwusieczna kąta ACB

$\triangle ABC \sim \triangle CBD$

(cecha kk: $\sphericalangle BAC = \alpha = \sphericalangle BCD$ i $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CBD$)

Zatem $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|BD|}$ (*)

Z twierdzenia o dwusiecznej w trójkącie ABC :

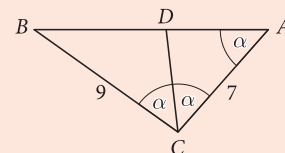
$$\frac{|BD|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|AC|} \Leftrightarrow |BD| = \frac{9}{7}|AD| \Leftrightarrow |BD| = \frac{9}{7}(|AB| - |BD|) \Leftrightarrow |BD| = \frac{9}{16}|AB|$$

Podstawiamy wyznaczone $|BD|$ do równości (*).

$$|AB| \cdot \frac{9}{16}|AB| = |BC|^2$$

$$|AB|^2 = \frac{16}{9} \cdot 9^2 = 144$$

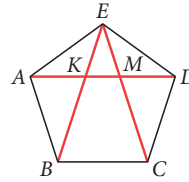
Odp.: $|AB| = 12$



3.31. W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczną AD . Wykaż, że $|BD| < |AB|$.

3.32. W trójkącie prostokątnym ABC wysokość CD dzieli przeciwprostokątną AB na odcinki o długościach 4 cm i 16 cm. Oblicz promienie okręgów wpisanych w trójkąty ADC i CDB oraz odległość między środkami tych okręgów.

3.33. W pięciokącie foremnym $ABCDE$ o boku 1 przekątne EB i EC przecinają przekątną AD odpowiednio w punktach K i M , jak na rysunku. Wykaż, że $|KM| = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.



3.34. Dwa boki trójkąta o polu P mają długości a i b . Wyznacz promień R okręgu opisanego na tym trójkącie.

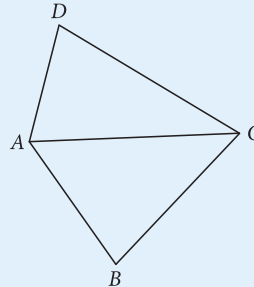
Prosto do matury



1. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest dwa razy krótsza od przeciwprostokątnej. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Jeden z kątów ostrych tego trójkąta jest dwa razy mniejszy od drugiego kąta ostrego.
- B. Dwusieczna kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na dwa odcinki, z których jeden jest dwa razy krótszy od drugiego.
- C. Stosunek promienia okręgu opisanego na tym trójkącie do promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt wynosi $1 + \sqrt{3}$.

2. W czworokącie $ABCD$ przedstawionym na rysunku obok dane są: $|AB| = 5$, $|BC| = 6$, $|CD| = 7$, $|DA| = 4$, $|AC| = 7$. Oblicz pole tego czworokąta.

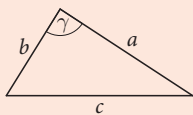


3. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AC| = |BC|$, $|AB| = 1 + \sqrt{3}$ i $\sphericalangle ACB = 120^\circ$. Oblicz długości odcinków, na które dwusieczna kąta przy podstawie dzieli ramię tego trójkąta.

4. Boki prostokąta $ABCD$ mają długości $|AB| = 20$, $|BC| = 25$. Oblicz odległość między środkami okręgów wpisanych w trójkąty ABC i CDA .

5. W trójkącie prostokątnym równoramiennym przez wierzchołek kąta prostego poprowadzono dwie proste, które podzieliły ten kąt na trzy równe kąty. Wyznacz długości odcinków, na które te proste dzielą przeciwprostokątną o długości c .

3.34.



$$P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma, \text{ stąd } \sin \gamma = \frac{2P}{ab}.$$

Z jedynki trygonometrycznej:

$$\cos^2 \gamma = 1 - \sin^2 \gamma = 1 - \frac{4P^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2 - 4P^2}{a^2b^2}$$

$$\text{Stąd } \cos \gamma = \frac{\sqrt{a^2b^2 - 4P^2}}{ab} \text{ lub } \cos \gamma = \frac{-\sqrt{a^2b^2 - 4P^2}}{ab}.$$

Z twierdzenia cosinusów: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.

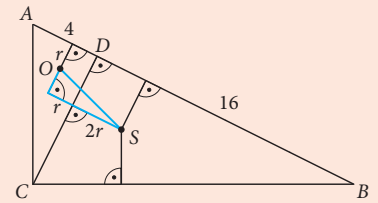
$$\text{Zatem } c^2 = a^2 + b^2 - 2\sqrt{a^2b^2 - 4P^2} \text{ lub } c^2 = a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2b^2 - 4P^2}.$$

Korzystamy ze wzoru na pole trójkąta $P = \frac{abc}{4R}$ i obliczamy R .

$$R = \frac{abc}{4P}, \text{ czyli } R = \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2 - 2\sqrt{a^2b^2 - 4P^2}}}{4P} \text{ lub } R = \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2b^2 - 4P^2}}}{4P}.$$

3.31. Patrz s. 32.

3.32.



$$|CD| = \sqrt{|AD| \cdot |DB|} = 8 \text{ [cm]}$$

$$|AC| = \sqrt{|CD|^2 + |AD|^2} = 4\sqrt{5} \text{ [cm]}$$

$$|BC| = \sqrt{|CD|^2 + |DB|^2} = 8\sqrt{5} \text{ [cm]}$$

r – promień okręgu wpisanego w trójkąt ADC

O, S – środki okręgów wpisanych w trójkąty ADC i CDB

$$r = \frac{P}{p} = \frac{0,5 \cdot 4 \cdot 8}{0,5(4 + 8 + 4\sqrt{5})} =$$

$$= 2(3 - \sqrt{5}) \text{ [cm]}$$

$\triangle CDB \sim \triangle ADC$ w skali $k = 2$, więc promień okręgu wpisanego w trójkąt CDB jest równy

$$2r = 4(3 - \sqrt{5}) \text{ [cm]}.$$

$$|OS| = \sqrt{r^2 + (3r)^2} = r\sqrt{10} =$$

$$= 2\sqrt{10}(3 - \sqrt{5}) \text{ [cm]}$$

$$\text{Odp.: } 2(3 - \sqrt{5}) \text{ cm,}$$

$$4(3 - \sqrt{5}) \text{ cm, } 2\sqrt{10}(3 - \sqrt{5}) \text{ cm}$$

3.33. Kąt wewnętrzny pięciokąta ma miarę 108° .

$$\sphericalangle AEB = 0,5(180^\circ - 108^\circ) = 36^\circ$$

$$\sphericalangle KEM = 180^\circ - 2 \cdot 36^\circ = 36^\circ$$

Zatem EK jest dwusieczną kąta AEM .

$$\sphericalangle AEM = 2 \cdot 36^\circ = 72^\circ$$

$$\sphericalangle AME = 180^\circ - (36^\circ + 72^\circ) = 72^\circ$$

$$\text{Stąd } |AM| = |AE| = 1.$$

$$\text{Niech } |KM| = x, x \in (0; 1).$$

$$\text{Wtedy } |AK| = 1 - x \text{ oraz } |EM| = |AK| = 1 - x.$$

Z twierdzenia o dwusiecznej w trójkącie AEM :

$$\frac{|AK|}{|KM|} = \frac{|AE|}{|EM|} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \notin (0; 1)$$

$$\text{Zatem } |KM| = x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Prosto do matury

1. P, F, P

$$2. 6(\sqrt{5} + \sqrt{6})$$

$$3. 1, \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$4. 5\sqrt{123 - 18\sqrt{41}}$$

$$5. \frac{\sqrt{3}-1}{2}c, (2-\sqrt{3})c, \frac{\sqrt{3}-1}{2}c$$

4. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

Umiejętności:

- wykorzystywanie definicji i wyznaczanie wartości funkcji sinus, cosinus i tangens dowolnego kąta o mierze wyrażonej w stopniach
- stosowanie wzorów redukcyjnych

Rozszerzymy definicje funkcji trygonometrycznych tak, aby dotyczyły nie tylko kątów wypukłych.

Do tej pory definiowaliśmy kąt jako część płaszczyzny wyznaczoną przez dwie półproste o wspólnym początku. Zgodnie z taką definicją miara dowolnego kąta α spełnia nierówność $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$. W niektórych zastosowaniach matematyki potrzebne są jednak kąty o miarach większych od 360° oraz kąty o ujemnych miarach. Jest tak na przykład w sytuacji, w której kąt rozumiemy jako **miarę obrotu**. Jeżeli na przykład wykonamy dwa pełne obroty klucza w zamku, to powiemy, że obróciliśmy go o 720° . W tej sytuacji trzeba jeszcze ustalić, w którą stronę wykonujemy obrót, bo przekręcenie klucza o 720° w jedną stronę przyniesie zupełnie inny efekt niż przekręcenie go w drugą stronę. Umieszczenie kąta w układzie współrzędnych pozwala to jednoznacznie określić:

- kąty odkładane przeciwnie do ruchu wskazówek zegara mają miarę dodatnią,
- kąty odkładane zgodnie z ruchem wskazówek zegara mają miarę ujemną.

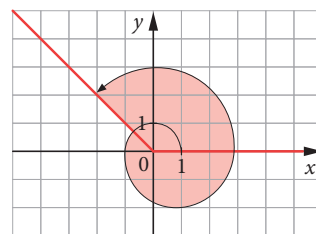
Przykład 1

Narysujemy w układzie współrzędnych dane kąty.

a) $\alpha = 495^\circ$

$$495^\circ = 360^\circ + 135^\circ$$

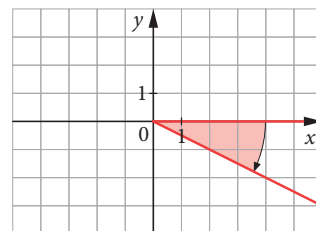
Mówiąc obrazowo, końcowe ramię kąta zatoczyło pełny obrót, a następnie pokryło się z końcowym ramieniem kąta 135° .



b) $\beta = -30^\circ$

Kąt ujemny odkładamy w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara.

Końcowe ramię kąta -30° pokrywa się z końcowym ramieniem kąta 330° . Jednak te kąty nie są równe. Obrót o 30° w jedną stronę oznacza co innego niż obrót o 330° w drugą stronę.



ZZ i MKP

tematy 1.1, 1.2, 1.13

Multiteka

- Funkcje trygonometryczne kąta w układzie współrzędnych (1)
- Funkcje trygonometryczne kąta w układzie współrzędnych (2)
- Funkcje trygonometryczne kąta w układzie współrzędnych (3)
- Wzory redukcyjne

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 1.4

Mówimy, że kąt α **należy do I (II, III, IV) ćwiartki układu współrzędnych**, jeżeli jego ramię wodzące zawiera się w I (odpowiednio II, III, IV) ćwiartce układu. Ramiona kątów o miarach będących wielokrotnościami 90° (czyli np. 0° , 90° , 180° , 270° , 360°) pokrywają się z półosiami układu, zatem kąty te nie należą do żadnej z ćwiartek układu.

Zauważmy, że po wykonaniu każdego pełnego obrotu o 360° lub o -360° ramię końcowe kąta α wróci do położenia, w którym było poprzednio.

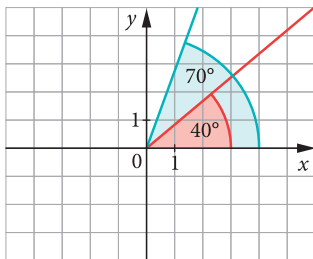
Wniosek

Dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ ramiona końcowe kątów α i $\beta = \alpha + k \cdot 360^\circ$ pokrywają się.

Przykład 2

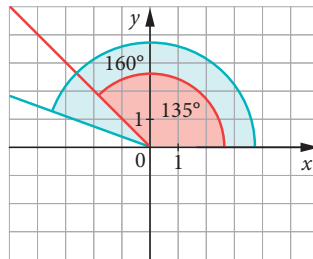
Napiszemy, jaki warunek spełniają kąty $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$ należące do kolejnych ćwiartek układu współrzędnych i zaznaczymy po dwa przykładowe kąty.

I ćwiartka układu



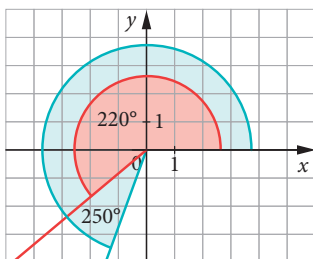
$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

II ćwiartka układu



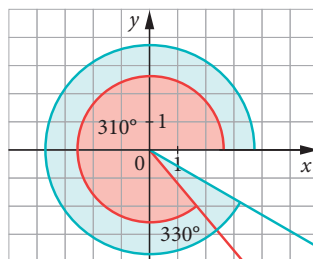
$$90^\circ < \alpha < 180^\circ$$

III ćwiartka układu



$$180^\circ < \alpha < 270^\circ$$

IV ćwiartka układu



$$270^\circ < \alpha < 360^\circ$$

◀4.4. Zapisz miarę kąta w postaci $k \cdot 360^\circ + \alpha$, gdzie $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$, oraz określ, do której ćwiartki należy ten kąt.

- a) 966°
- b) 1383°
- c) 1791°
- d) 1918°
- e) -480°
- f) -753°

Odp.: a) $2 \cdot 360^\circ + 246^\circ$

b) $3 \cdot 360^\circ + 303^\circ$

c) $4 \cdot 360^\circ + 351^\circ$

d) $5 \cdot 360^\circ + 118^\circ$

e) $-2 \cdot 360^\circ + 240^\circ$

f) $-3 \cdot 360^\circ + 327^\circ$

Przykład 3 ◀ zad. 4.4

Obliczymy, do której ćwiartki układu współrzędnych należą podane kąty.

Rozwiązanie

a) 500°

$$500^\circ = 360^\circ + 140^\circ$$

Kąt 360° stanowi pełen obrót, a kąt 140° należy do drugiej ćwiartki.

Odp.: Kąt 500° należy do drugiej ćwiartki układu współrzędnych.

b) 2015°

$$2015^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 215^\circ$$

Kąt $5 \cdot 360^\circ$ stanowi 5 pełnych obrotów, a kąt 215° należy do trzeciej ćwiartki.

Odp.: Kąt 2015° należy do trzeciej ćwiartki układu współrzędnych.

c) -1410°

I sposób

$$-1410^\circ = -3 \cdot 360^\circ - 330^\circ = -3 \cdot 360^\circ - 270^\circ - 60^\circ$$

Kąt $-3 \cdot 360^\circ$ stanowi 3 pełne obroty, a kąt $-270^\circ - 60^\circ$ (odkładamy go w ujemnym kierunku) należy do pierwszej ćwiartki.

II sposób

$$-1410^\circ = -4 \cdot 360^\circ + 30^\circ$$

Kąt $-4 \cdot 360^\circ$ stanowi 4 pełne obroty, a kąt 30° (odkładamy go w dodatnim kierunku) należy do pierwszej ćwiartki.

Odp.: Kąt -1410° należy do pierwszej ćwiartki układu współrzędnych.

Definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta są takie same jak wprowadzone wcześniej definicje dla kątów wypukłych.

Definicja

Sinusem kąta α nazywamy stosunek rzędnej dowolnego (różnego od wierzchołka) punktu wybranego na ramieniu wodzącym kąta do promienia wodzącego tego punktu.

Cosinusem kąta α nazywamy stosunek odciętej dowolnego (różnego od wierzchołka) punktu wybranego na ramieniu wodzącym kąta do promienia wodzącego tego punktu.

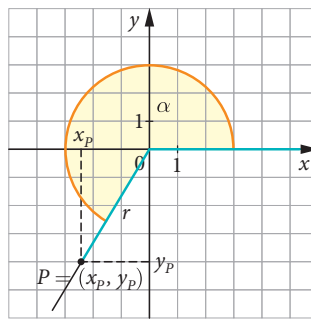
Tangensem kąta α nazywamy stosunek rzędnej dowolnego (różnego od wierzchołka) punktu wybranego na ramieniu wodzącym kąta do odciętej tego punktu; zakładamy, że ta odcięta jest różna od zera.

Jeżeli punkt $P = (x_P, y_P)$ leży na ramieniu wiodzącym kąta α , a r jest promieniem wiodzącym tego punktu, to:

$$\sin \alpha = \frac{y_P}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x_P}{r}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_P}{x_P}$$

Ponadto, skoro $P = (x_P, y_P)$, to:

$$r = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} \quad \leftarrow \text{twierdzenie Pitagorasa}$$



Zdefiniowaliśmy funkcje trygonometryczne za pomocą stosunków liczb związanych z punktem wybranym na ramieniu wiodzącym. Wykażemy, że wartości tych stosunków nie zależą od wyboru punktu.

Twierdzenie

Jeżeli $P = (x_P, y_P)$ jest punktem na ramieniu wiodzącym kąta α , a r jest promieniem wiodzącym punktu P , to wartości stosunków $\frac{x_P}{r}$, $\frac{y_P}{r}$, $\frac{y_P}{x_P}$ nie zależą od wyboru punktu P .

Założenia

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Niech $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $B = (x_1, 0)$, $A = (x_2, 0)$, $|OP_1| = r_1$, $|OP_2| = r_2$.

Teza

$$\frac{x_1}{r_1} = \frac{x_2}{r_2}, \quad \frac{y_1}{r_1} = \frac{y_2}{r_2}, \quad \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

Dowód

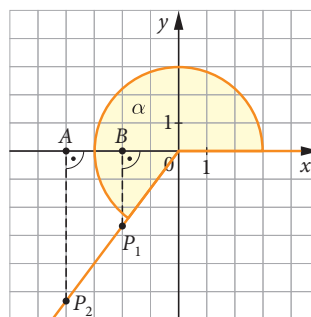
Jeżeli miara kąta α jest wielokrotnością 90° , to:

- albo ramię wiodzące zawiera się w osi y i wtedy $x_1 = x_2 = 0$, $|y_1| = r_1$, $|y_2| = r_2$,
- albo ramię wiodzące zawiera się w osi x i wtedy $y_1 = y_2 = 0$, $|x_1| = r_1$, $|x_2| = r_2$.

W pierwszym przypadku prawdziwe są pierwsze dwie z powyższych proporcji, a trzecia jest nieokreślona. W drugim – wszystkie są prawdziwe.

Załóżmy, że miara kąta α nie jest wielokrotnością 90° . Wtedy $BP_1 \parallel AP_2$, więc na mocy twierdzenia Talesa mamy:

$$\frac{|OB|}{|OP_1|} = \frac{|OA|}{|OP_2|}, \quad \frac{|BP_1|}{|OP_1|} = \frac{|AP_2|}{|OP_2|}, \quad \frac{|BP_1|}{|OB|} = \frac{|AP_2|}{|OA|}$$



Wyraźmy długości odcinków za pomocą współrzędnych punktów:

$$|OB| = |x_1|, \quad |OA| = |x_2|, \quad |BP_1| = |y_1|, \quad |AP_2| = |y_2|$$

$$\text{Zatem: } \frac{|x_1|}{r_1} = \frac{|x_2|}{r_2}, \quad \frac{|y_1|}{r_1} = \frac{|y_2|}{r_2}, \quad \frac{|y_1|}{|x_1|} = \frac{|y_2|}{|x_2|}.$$

Niezależnie od tego, w której ćwiartce znajduje się ramię wodzące kąta, odpowiednie współrzędne punktów P_1 i P_2 mają ten sam znak (tzn. ten sam znak mają liczby x_1 i x_2 oraz ten sam znak mają liczby y_1 i y_2). W powyższych proporcjach możemy więc pominąć znaki wartości bezwzględnych:

$$\frac{x_1}{r_1} = \frac{x_2}{r_2}, \quad \frac{y_1}{r_1} = \frac{y_2}{r_2}, \quad \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

Koniec dowodu

W zależności od znaków współrzędnych punktów na ramieniu końcowym kąta wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta są dodatnie lub ujemne.

α	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	$180^\circ < \alpha < 270^\circ$	$270^\circ < \alpha < 360^\circ$
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\operatorname{tg} \alpha$	+	-	+	-

◀4.8. Skonstruuj w układzie współrzędnych kąt α spełniający podane warunki.

- $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ i $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$
- $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$ i $180^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$
- $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2}$ i $270^\circ < \alpha \leq 360^\circ$
- $\sin \alpha = -0,2$ i $270^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$
- $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ i $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$
- $\operatorname{tg} \alpha = -4$ i $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$

Przykład 4 ◀ zad. 4.8

Dana jest wartość jednej z funkcji trygonometrycznych kąta $\alpha \in (0^\circ; 360^\circ)$. Skonstruujmy ten kąt.

Rozwiązanie

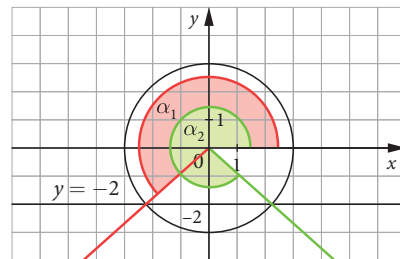
$$\text{a) } \sin \alpha = -\frac{2}{3}$$

$\sin \alpha = \frac{y_P}{r}$, więc przyjmujemy, że $y = -2$ i $r = 3$.

Konstrukcja przebiega następująco:

- rysujemy okrąg o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu $r = 3$,
- rysujemy prostą $k: y = -2$,
- z punktu $(0, 0)$ prowadzimy półprostą przez punkt przecięcia prostej k z okręgiem – jest ona drugim ramieniem kąta (pierwszym jest dodatnia półoś x).

Prosta k przecina okrąg w dwóch punktach, więc otrzymujemy dwa rozwiązania zadania: kąt α_1 oraz kąt α_2 .



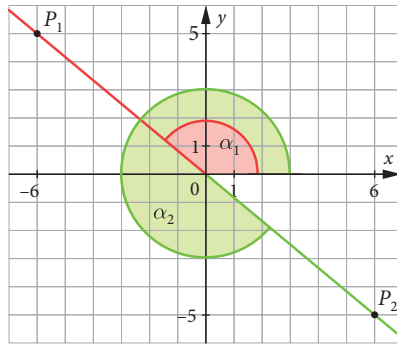
b) $\operatorname{tg} \alpha = -1,2$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_P}{x_P}$, możemy zatem przyjąć, że

$$P_1 = (-6, 5) \text{ oraz } P_2 = (6, -5).$$

Zadanie ma dwa rozwiązania: kąt α_1 i kąt α_2 , a ich ramionami końcowymi są odpowiednio półproste OP_1 i OP_2 .

Zauważmy, że te półproste uzupełniają się do prostej, a punkty P_1 i P_2 są symetryczne względem początku układu współrzędnych.



Przykład 5 ◀ zad. 4.10

Obliczymy wartości funkcji trygonometrycznych kąta, którego drugie ramię przechodzi przez punkt P .

a) $P = (-2, -2)$

b) $P = (8, -6)$

Rozwiązanie

a) $P = (-2, -2)$

Obliczamy promień wodzący punktu P :

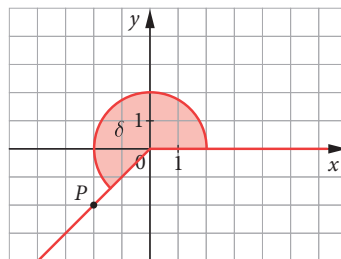
$$r = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$$

Zatem:

$$\sin \delta = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \delta = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{-2}{-2} = 1$$



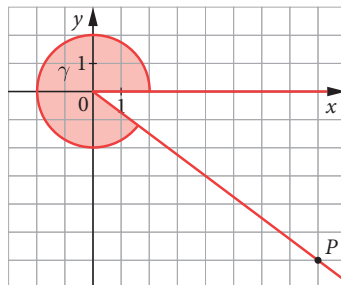
b) $P = (8, -6)$

$$r = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

$$\sin \gamma = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$$

$$\cos \gamma = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$$



◀ 4.10. Wyznacz sinus, cosinus i tangens kąta, którego ramię wodzące przechodzi przez podany punkt.

a) $(6, 8)$

b) $(-2, 6)$

c) $(-4, -2)$

d) $(12, -5)$

e) $(-11, 0)$

f) $(8, -15)$

Odp.: a) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = 1\frac{1}{3}$

b) $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg} \alpha = -3$

c) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$

d) $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$, $\cos \alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}$

e) $\sin \alpha = 0$, $\cos \alpha = -1$, $\operatorname{tg} \alpha = 0$

f) $\sin \alpha = -\frac{15}{17}$, $\cos \alpha = \frac{8}{17}$, $\operatorname{tg} \alpha = -1\frac{7}{8}$

Przykład 6

Niech $P = (x_P, y_P)$ oznacza punkt leżący na ramieniu wiodzącym kąta α oraz $r = |OP| = 1$. Obliczymy wartości funkcji trygonometrycznych kąta $\alpha = 270^\circ$.

Jeżeli promień wiodzący punktu P jest równy 1, to $P = (\cos \alpha, \sin \alpha)$.

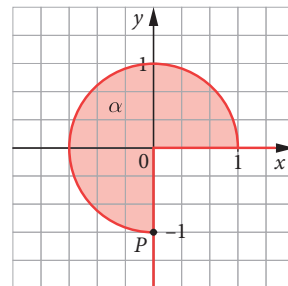
Rozwiązanie

Ramię wiodzące kąta pokrywa się z ujemną półosią y , zatem $x_P = 0$, $y_P = -1$. Nie istnieje tangens kąta 270° (nie jest wykonalne dzielenie przez 0), natomiast:

$$\sin 270^\circ = -1, \quad \cos 270^\circ = 0$$

Podobnie obliczamy wartości funkcji trygonometrycznych innych kątów będących wielokrotnościami 90° . Zauważmy, że ramię końcowe kąta 360° , podobnie jak kąta 0° , pokrywa się z ramieniem początkowym. Zatem $\sin 360^\circ = \sin 0^\circ$, $\cos 360^\circ = \cos 0^\circ$, $\operatorname{tg} 360^\circ = \operatorname{tg} 0^\circ$.

Wartości funkcji trygonometrycznych kątów będących wielokrotnościami 90° przedstawiono w tabeli.



α	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin \alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	nie istnieje	0	nie istnieje	0

Z wniosku zapisanego na s. 35 wynika prawdziwość następującego twierdzenia.

Twierdzenie

Dla dowolnego kąta α i dowolnego $k \in \mathbb{Z}$ prawdziwe są wzory:

- $\sin \alpha = \sin (\alpha + k \cdot 360^\circ)$
- $\cos \alpha = \cos (\alpha + k \cdot 360^\circ)$
- $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\alpha + k \cdot 360^\circ)$ dla $\alpha \neq 90^\circ + n \cdot 180^\circ$, $n \in \mathbb{Z}$

Wzory redukcyjne

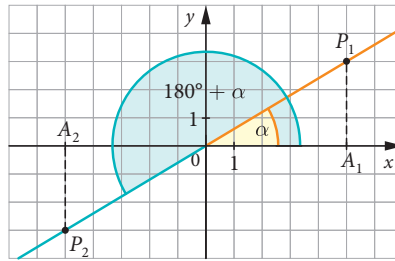
Wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta można obliczyć za pomocą wartości odpowiednich funkcji trygonometrycznych kąta ostrego. Służą do tego tzw. **wzory redukcyjne**. W klasie drugiej poznaliście takie wzory dla kątów z drugiej ćwiartki. Teraz wyprowadzimy analogiczne wzory dla kolejnych ćwiartek.

III ćwiartka

Każdy kąt $\beta \in (180^\circ; 270^\circ)$ możemy zapisać w postaci $180^\circ + \alpha$, gdzie α jest kątem ostrym.

Na przykład:

- $220^\circ = 180^\circ + 40^\circ$ $\alpha = 40^\circ$
- $260^\circ = 180^\circ + 80^\circ$ $\alpha = 80^\circ$
- $185^\circ = 180^\circ + 5^\circ$ $\alpha = 5^\circ$



Ramiona wodzące kątów $\beta = 180^\circ + \alpha$ oraz α tworzą w układzie współrzędnych prostą ($\sphericalangle A_2OP_2 = \alpha$, $\sphericalangle P_1OP_2$ jest kątem półpełnym). Punkty P_1 i P_2 wybrane tak, aby $|OP_1| = |OP_2|$, są symetryczne względem początku układu współrzędnych. Jeżeli przyjmiemy, że $P_1 = (a, b)$, to $P_2 = (-a, -b)$. $|OP_1| = |OP_2| = r$, zatem:

$$\sin(180^\circ + \alpha) = \frac{-b}{r} = -\frac{b}{r} = -\sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ + \alpha) = \frac{-a}{r} = -\frac{a}{r} = -\cos \alpha$$

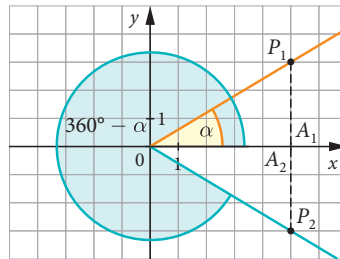
$$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \frac{-b}{-a} = \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \alpha$$

IV ćwiartka

Każdy kąt $\beta \in (270^\circ; 360^\circ)$ możemy zapisać w postaci $360^\circ - \alpha$, gdzie α jest kątem ostrym (czyli należącym do pierwszej ćwiartki).

Na przykład:

- $320^\circ = 360^\circ - 40^\circ$ $\alpha = 40^\circ$
- $280^\circ = 360^\circ - 80^\circ$ $\alpha = 80^\circ$
- $355^\circ = 360^\circ - 5^\circ$ $\alpha = 5^\circ$



Ramiona wodzące kątów $\beta = 360^\circ - \alpha$ oraz α są w układzie współrzędnych symetryczne względem osi x . Wynika to z przystawiania odpowiednich trójkątów prostokątnych. Wystarczy wybrać punkty P_1 i P_2 tak, aby $|OP_1| = |OP_2|$, jak na rysunku. Wtedy $\triangle OA_1P_1 \equiv \triangle OA_2P_2$ na mocy cechy kbk ($\sphericalangle A_2OP_2 = \alpha$), a stąd $|OA_1| = |OA_2|$. Jeżeli przyjmiemy, że $P_1 = (a, b)$, to $P_2 = (a, -b)$.

$|OP_1| = |OP_2| = r$, zatem:

$$\sin(360^\circ - \alpha) = \frac{-b}{r} = -\frac{b}{r} = -\sin \alpha$$

$$\cos(360^\circ - \alpha) = \frac{a}{r} = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) = \frac{-b}{a} = -\frac{b}{a} = -\operatorname{tg} \alpha$$

Zauważmy, że ramię wodzące kąta $360^\circ - \alpha$ jest jednocześnie ramieniem wodzącym kąta $-\alpha$. Zatem wzory wyprowadzone powyżej można zapisać w postaci:

$$\bullet \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \quad \bullet \cos(-\alpha) = \cos \alpha \quad \bullet \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

Wyprowadzone wzory redukcyjne zapiszemy w tabeli.

	II ćwiartka	III ćwiartka	IV ćwiartka
β	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$	$360^\circ - \alpha$
$\sin \beta$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos \beta$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} \beta$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$

W przykładzie 3 (s. 36) pokazaliśmy, że każdy kąt α można zapisać w postaci $\alpha = k \cdot 360^\circ + \beta$, gdzie $0 \leq \beta \leq 360^\circ$ i $k \in \mathbb{Z}$. Końcowe ramiona kątów α i β pokrywają się. Zatem podane wzory redukcyjne umożliwiają obliczenie wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta za pomocą wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych. Tablice z przybliżonymi wartościami tych funkcji dla kątów ostrych, których miara stopniowa jest liczbą całkowitą, znajdują się na końcu podręcznika.

◀4.11. Oblicz. Nie korzystaj z tablic trygonometrycznych.

a) $\cos 210^\circ$

b) $\sin 135^\circ$

c) $\operatorname{tg} 225^\circ$

d) $\sin(-300^\circ)$

e) $\operatorname{tg}(-150^\circ)$

f) $\cos(-315^\circ)$

Odp.: a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) 1

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

◀4.12. Oblicz. Skorzystaj z tablic trygonometrycznych.

a) $\sin 100^\circ$

b) $\cos 325^\circ$

c) $\operatorname{tg} 200^\circ$

d) $\sin(-296^\circ)$

e) $\cos(-95^\circ)$

f) $\operatorname{tg}(-179^\circ)$

Odp.: a) 0,9848 b) 0,8192

c) 0,3640 d) 0,8988

e) -0,0872 f) 0,0175

Przykład 7 ◀ zad. 4.11, 4.12

Obliczmy wartości funkcji trygonometrycznych podanych kątów.

a) 260°

b) 330°

c) 945°

d) -301°

Rozwiązanie

a) $\sin 260^\circ = \sin(180^\circ + 80^\circ) = -\sin 80^\circ \approx -0,9848 \quad \leftarrow 260^\circ = 180^\circ + 80^\circ$

$\cos 260^\circ = \cos(180^\circ + 80^\circ) = -\cos 80^\circ \approx -0,1736$

$\operatorname{tg} 260^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 80^\circ) = \operatorname{tg} 80^\circ \approx 5,6713$

b) $\sin 330^\circ = \sin(360^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -0,5 \quad \leftarrow 330^\circ = 360^\circ - 30^\circ$

$\cos 330^\circ = \cos(360^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{tg} 330^\circ = \operatorname{tg}(360^\circ - 30^\circ) = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\sin 945^\circ = \sin(2 \cdot 360^\circ + 225^\circ) = \sin 225^\circ = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 945^\circ = \cos(2 \cdot 360^\circ + 225^\circ) = \cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\operatorname{tg} 945^\circ = \operatorname{tg}(2 \cdot 360^\circ + 225^\circ) = \operatorname{tg} 225^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 45^\circ) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$

d) $\sin(-301^\circ) = -\sin 301^\circ = -\sin(360^\circ - 59^\circ) = -(-\sin 59^\circ) \approx 0,8572$

$\cos(-301^\circ) = \cos 301^\circ = \cos(360^\circ - 59^\circ) = \cos 59^\circ \approx 0,515$

$\operatorname{tg}(-301^\circ) = -\operatorname{tg} 301^\circ = -\operatorname{tg}(360^\circ - 59^\circ) = -(-\operatorname{tg} 59^\circ) \approx 1,6643$

Przykład 8 ◀ zad. 4.14

Wyznaczymy z dokładnością do 1° kąt β ($0^\circ \leq \beta < 360^\circ$) spełniający podany warunek.

a) $\operatorname{tg} \beta = -0,3839$

b) $\sin \beta = -0,9816$

Rozwiązanie

a) $\operatorname{tg} \alpha = 0,3839$

$\alpha \approx 21^\circ$

$\beta = 180^\circ - \alpha$ lub $\beta = 360^\circ - \alpha$

← α – pomocniczy kąt ostry← wartość kąta α odczytana z tablic← $\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{tg} \alpha$

Odp.: $\beta = 159^\circ$ lub $\beta = 339^\circ$

b) $\sin \alpha = 0,9816$

$\alpha \approx 79^\circ$

$\beta = 180^\circ + \alpha$ lub $\beta = 360^\circ - \alpha$

← α – pomocniczy kąt ostry← wartość kąta α odczytana z tablic← $\sin \beta = -\sin \alpha$

Odp.: $\beta = 259^\circ$ lub $\beta = 281^\circ$

Wyprowadzimy jeszcze wzory redukcyjne wiążące sinus z cosinusem. Będziemy z nich później korzystać podczas rysowania wykresów.

Przyjmijmy, że α jest kątem ostrym umieszczonym w układzie współrzędnych. Ramię wodzące kąta $90^\circ + \alpha$ jest wtedy zawarte w II ćwiartce układu. Wprowadzamy oznaczenia jak na rysunku i wybieramy punkty P_1 i P_2 takie, że $|OP_1| = |OP_2| = 1$.

$\sphericalangle A_1OP_2 = 90^\circ + \alpha$, więc $\sphericalangle B_2OP_2 = \alpha$.

Prostokątny trójkąt OA_1P_1 jest przystający do prostokątnego trójkąta OB_2P_2 (na mocy cechy przystawania kbk), więc jest również przystający do trójkąta P_2A_2O . W takim razie, jeżeli przyjmiemy, że $P_1 = (a, b)$, to $P_2 = (-b, a)$.

$|OP_1| = |OP_2| = 1$, zatem:

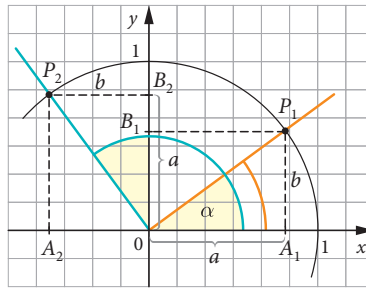
$\cos \alpha = a$

$\sin(90^\circ + \alpha) = a$

czyli:

$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$

W taki sam sposób wykazujemy, że $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$.



◀4.14. Wyznacz z dokładnością do 1° miarę kąta α ($0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$) spełniającego podany warunek.

a) $\cos \alpha = 0,848$

b) $\sin \alpha = -0,9135$

c) $\operatorname{tg} \alpha = 0,404$

d) $\cos \alpha = -0,97$

e) $\sin \alpha = 0,6$

f) $\operatorname{tg} \alpha = -14$

Odp.: a) $\alpha = 32^\circ$ lub $\alpha = 328^\circ$

b) $\alpha = 246^\circ$ lub $\alpha = 294^\circ$

c) $\alpha = 22^\circ$ lub $\alpha = 202^\circ$

d) $\alpha = 166^\circ$ lub $\alpha = 194^\circ$

e) $\alpha = 37^\circ$ lub $\alpha = 143^\circ$

f) $\alpha = 94^\circ$ lub $\alpha = 274^\circ$

Do wyprowadzenia każdego z powyższych wzorów redukcyjnych zostały wykorzystane własności figur geometrycznych. Istotne znaczenie miało tu założenie, że α jest kątem ostrym. Tymczasem można udowodnić (ten dowód pominiemy), że podane wzory redukcyjne są prawdziwe dla dowolnego kąta α (jedyne zastrzeżenia dotyczą dziedziny tangensa).

Twierdzenie

Wzory redukcyjne

Dla dowolnego kąta α prawdziwe są następujące równości:

- $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$
- $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$
- $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
- $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$
- $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$
- $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
- $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
- $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$
- $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$
- $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$
- $\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$

Można również wyprowadzić wzory redukcyjne dla funkcji trygonometrycznych kątów postaci $270^\circ \pm \alpha$ (zob. zadanie 4.18 oraz tablice na końcu podręcznika). Ponieważ jednak każdy kąt III lub IV ćwiartki można zapisać w jednej w wymienionych wyżej postaci, z tych wzorów nie będziemy korzystać.

Zadania

W każdym z zadań 4.1–4.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

Odpowiedzi i rozwiązania

4.1. C

4.2. A

4.3. D

- 4.4. a) $2 \cdot 360^\circ + 246^\circ$
 b) $3 \cdot 360^\circ + 303^\circ$
 c) $4 \cdot 360^\circ + 351^\circ$
 d) $5 \cdot 360^\circ + 118^\circ$
 e) $-2 \cdot 360^\circ + 240^\circ$
 f) $-3 \cdot 360^\circ + 327^\circ$

4.1. Do której ćwiartki układu współrzędnych należy kąt 625° ?

- A. do pierwszej B. do drugiej C. do trzeciej D. do czwartej

4.2. Ramię wodzące kąta α przechodzi przez punkt P i $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$. Jakie współrzędne może mieć punkt P ?

- A. $(-12, -5)$ B. $(-12, -13)$ C. $(-13, -12)$ D. $(-5, -12)$

4.3. Jaka jest wartość $\cos \alpha$, jeżeli $\sin \alpha = \frac{3}{5}$?

- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $-\frac{4}{5}$ D. Nie można tego jednoznacznie określić.

4.4. Zapisz miarę kąta w postaci $k \cdot 360^\circ + \alpha$, gdzie $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ)$, $k \in \mathbb{Z}$, oraz określ, do której ćwiartki należy ten kąt.

- a) 966° b) 1383° c) 1791° d) 1918° e) -480° f) -753°

4.5. Wskaż pary kątów, których ramiona wodzące przechodzą przez te same punkty.

- A. 123° D. 770° G. -108° J. -310°
 B. 525° E. 1000° H. -140° K. -597°
 C. 612° F. 1300° I. -195° L. -800°

4.6. W tabeli przedstawiono przybliżone czasy obrotu wybranych planet wokół własnej osi. Oblicz, o ile stopni obróci się każda z tych planet w ciągu 24 godzin.

Planeta	Okres obrotu
Merkury	180 dni
Jowisz	10 godzin
Neptun	18 godzin

4.7. Do której ćwiartki należy końcowe ramię kąta α spełniającego podane warunki?

- a) $\cos \alpha > 0$ i $\sin \alpha < 0$
 b) $\cos \alpha < 0$ i $\operatorname{tg} \alpha > 0$
 c) $\sin \alpha > 0$ i $\operatorname{tg} \alpha < 0$

4.8. Skonstruuj w układzie współrzędnych kąt α spełniający podane warunki.

- a) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ i $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ d) $\sin \alpha = -0,2$ i $270^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$
 b) $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$ i $180^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$ e) $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ i $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$
 c) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2}$ i $270^\circ < \alpha \leq 360^\circ$ f) $\operatorname{tg} \alpha = -4$ i $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$

4.9. Skonstruuj w układzie współrzędnych kąt α ($0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$) o podanej wartości jednej z jego funkcji trygonometrycznych.

- a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$ e) $\cos \alpha = -1$
 b) $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$ d) $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$ f) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{4}$

4.10. Wyznacz sinus, cosinus i tangens kąta, którego ramię wodzące przechodzi przez podany punkt.

- a) (6, 8) b) (-2, 6) c) (-4, -2) d) (12, -5) e) (-11, 0) f) (8, -15)

4.11. Oblicz. Nie korzystaj z tablic trygonometrycznych.

- a) $\cos 210^\circ$ b) $\sin 135^\circ$ c) $\operatorname{tg} 225^\circ$ d) $\sin(-300^\circ)$ e) $\operatorname{tg}(-150^\circ)$ f) $\cos(-315^\circ)$

4.12. Oblicz. Skorzystaj z tablic trygonometrycznych.

- a) $\sin 100^\circ$ b) $\cos 325^\circ$ c) $\operatorname{tg} 200^\circ$ d) $\sin(-296^\circ)$ e) $\cos(-95^\circ)$ f) $\operatorname{tg}(-179^\circ)$

4.13. Wyznacz z dokładnością do 1° miarę kąta α o podanych własnościach. Skorzystaj z tablic trygonometrycznych lub kalkulatora.

- a) $\operatorname{tg} \alpha = -0,9325$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ d) $\operatorname{tg} \alpha = 0,51$ i $180^\circ < \alpha < 270^\circ$
 b) $\sin \alpha = -0,342$ i $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ e) $\sin \alpha = -0,809$ i $270^\circ < \alpha < 360^\circ$
 c) $\cos \alpha = 0,1$ i $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ f) $\cos \alpha = -0,97$ i $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

- 4.10. a)** $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = 1\frac{1}{3}$ **b)** $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg} \alpha = -3$
c) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ **d)** $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$, $\cos \alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}$
e) $\sin \alpha = 0$, $\cos \alpha = -1$, $\operatorname{tg} \alpha = 0$ **f)** $\sin \alpha = -\frac{15}{17}$, $\cos \alpha = \frac{8}{17}$, $\operatorname{tg} \alpha = -1\frac{7}{8}$

- 4.11. a)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c)** 1 **d)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **e)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **f)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

- 4.12. a)** 0,9848 **b)** 0,8192 **c)** 0,3640 **d)** 0,8988 **e)** -0,0872 **f)** 0,0175

- 4.13. a)** $\alpha = 137^\circ$ **b)** $\alpha = 200^\circ$ **c)** $\alpha = 276^\circ$ **d)** $\alpha = 207^\circ$ **e)** $\alpha = 306^\circ$ **f)** $\alpha = 194^\circ$

4.5. A i K, B i I, C i G, D i J, E i L, F i H

4.6. Merkury o 2° , Jowisz o 864° , Neptun o 480°

4.7. a) IV **b)** III **c)** II

- 4.14.** a) $\alpha = 32^\circ$ lub $\alpha = 328^\circ$
 b) $\alpha = 246^\circ$ lub $\alpha = 294^\circ$
 c) $\alpha = 22^\circ$ lub $\alpha = 202^\circ$
 d) $\alpha = 166^\circ$ lub $\alpha = 194^\circ$
 e) $\alpha = 37^\circ$ lub $\alpha = 143^\circ$
 f) $\alpha = 94^\circ$ lub $\alpha = 274^\circ$

- 4.15.** a) 0 b) 0 c) 0
 d) $2\sqrt{3} - 3$

- 4.16.** a) -3 b) -4 c) 1 d) 2

4.18. $\cos(270^\circ - \alpha) =$
 $= \cos(180^\circ + (90^\circ - \alpha)) =$
 $= -\cos(90^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$

Prosto do matury

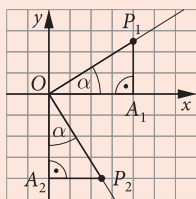
1. F, P, F

2. $\sin \alpha = -\frac{15}{17}$, $\cos \alpha = -\frac{8}{17}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{8}$

3. a) $\alpha = 148^\circ$
 b) $\alpha = 273^\circ$

4. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

5. I sposób



$|OP_2| = |OP_1|$, więc
 $\triangle OA_2P_2 \equiv \triangle OA_1P_1$.
 Jeżeli $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$,
 to $x_2 = y_1$, $y_2 = -x_1$.
 $\sin(270^\circ + \alpha) = \frac{y_2}{|OP_2|} = \frac{-x_1}{|OP_1|} = -\cos \alpha$

II sposób

$\sin(270^\circ + \alpha) =$
 $= \sin(180^\circ + (90^\circ + \alpha)) =$
 $= -\sin(90^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$

4.14. Wyznacz z dokładnością do 1° miarę kąta α ($0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$) spełniającego podany warunek.

- a) $\cos \alpha = 0,848$ c) $\operatorname{tg} \alpha = 0,404$ e) $\sin \alpha = 0,6$
 b) $\sin \alpha = -0,9135$ d) $\cos \alpha = -0,97$ f) $\operatorname{tg} \alpha = -14$

4.15. Oblicz wartość wyrażenia. Nie korzystaj z tablic trygonometrycznych.

- a) $\sin 150^\circ \operatorname{tg} 135^\circ + \cos 210^\circ \operatorname{tg} 330^\circ$ c) $2 \sin 120^\circ \sin 135^\circ + \sqrt{2} \cos 150^\circ \operatorname{tg} 225^\circ$
 b) $\sin 90^\circ \operatorname{tg} 180^\circ - \cos 0^\circ \operatorname{tg} 180^\circ$ d) $2 \operatorname{tg} 240^\circ + 9 \operatorname{tg} 150^\circ \operatorname{tg} 210^\circ$

4.16. Oblicz wartość wyrażenia. Nie korzystaj z tablic trygonometrycznych.

- a) $\frac{2 \sin 120^\circ \cos 135^\circ + 3 \sin 150^\circ \operatorname{tg} 135^\circ}{\cos 135^\circ \operatorname{tg} 150^\circ - \operatorname{tg} 210^\circ \cos 210^\circ}$
 b) $\left[\frac{\operatorname{tg} 120^\circ \cos 120^\circ \sin 120^\circ + \operatorname{tg} 120^\circ \sin 150^\circ \cos 210^\circ}{3 \operatorname{tg} 300^\circ (\operatorname{tg} 210^\circ - \operatorname{tg} 150^\circ)} \right]^{-1}$
 c) $\frac{(\cos 210^\circ \sin 330^\circ - \sin 210^\circ \cos 315^\circ)^2}{0,25 (5 \sin^2 150^\circ + 2 \cos 150^\circ \sin 225^\circ)}$
 d) $\frac{\sin 120^\circ \cos 135^\circ \cos 150^\circ + \cos 300^\circ \sin 315^\circ \sin 330^\circ}{\operatorname{tg} 210^\circ \operatorname{tg} 120^\circ \cos 315^\circ \sin 330^\circ}$

4.17. Udowodnij, że liczba $\sin(-403^\circ) + \cos(-503^\circ) - \sin 223^\circ + \cos 323^\circ$ jest całkowita.

4.18. Udowodnij, że dla dowolnego kąta ostrego α prawdziwy jest wzór redukcyjny $\cos(270^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$.

Prosto do matury



1. Oceń prawdziwość podanych zdań. Liczba $\sin 250^\circ$ równa jest liczbie

- A. $\sin 70^\circ$. B. $-\sin 70^\circ$. C. $-\cos 70^\circ$.

2. Wyznacz wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kąta α , którego ramię wodzące przechodzi przez punkt $(-8, -15)$.

3. Wyznacz z dokładnością do 1° miarę kąta α spełniającego podane warunki. Skorzystaj z tablic matematycznych.

- a) $\cos \alpha = -0,848$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ b) $\operatorname{tg} \alpha = -19$ i $270^\circ < \alpha < 360^\circ$

4. Oblicz $\cos(-150^\circ) \cdot \operatorname{tg} 330^\circ \cdot \sin 585^\circ$.

5. Udowodnij, że dla dowolnego kąta ostrego α prawdziwy jest wzór redukcyjny $\sin(270^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$.

4.17. $\sin(-403^\circ) + \cos(-503^\circ) - \sin 223^\circ + \cos 323^\circ =$
 $= -\sin 403^\circ + \cos 503^\circ - \sin 223^\circ + \cos 323^\circ =$
 $= -\sin(360^\circ + 43^\circ) + \cos(360^\circ + 143^\circ) - \sin(180^\circ + 43^\circ) + \cos(360^\circ - 37^\circ) =$
 $= -\sin 43^\circ + \cos(180^\circ - 37^\circ) + \sin 43^\circ + \cos 37^\circ =$
 $= -\sin 43^\circ - \cos 37^\circ + \sin 43^\circ + \cos 37^\circ = 0 \in \mathbb{Z}$

5. Własności funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta

Umiejętności:

- opisywanie własności funkcji trygonometrycznych
- wykorzystywanie zależności między funkcjami trygonometrycznymi

Funkcje okresowe

Jedną z ważniejszych własności funkcji trygonometrycznych jest ich **okresowość**, czyli powtarzalność. Wykres takiej funkcji możemy podzielić na przystające fragmenty, a do opisanja jej własności wystarczy zbadać je w pewnym podzbiorze dziedziny. Prześledźmy to na przykładzie.

Przykład 1 ◀ zad. 5.4

W zbiorze liczb całkowitych możemy w następujący sposób określić **dzielenie z resztą**.

Jeżeli liczbę całkowitą p podzielimy z resztą przez dodatnią liczbę naturalną n , to liczbę p możemy zapisać w postaci $p = k \cdot n + r$, gdzie k jest liczbą całkowitą, reszta r – liczbą naturalną i $0 \leq r < n$.

Na przykład:

$10 = 3 \cdot 3 + 1$, zatem reszta z dzielenia liczby 10 przez liczbę 3 jest równa 1.

$-7 = (-3) \cdot 3 + 2$, zatem reszta z dzielenia liczby -7 przez liczbę 3 jest równa 2.

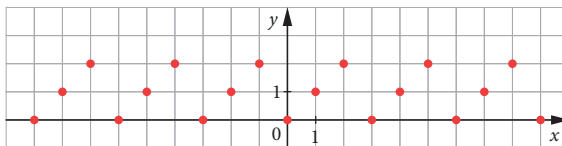
$-27 = (-9) \cdot 3 + 0$, zatem reszta z dzielenia liczby -27 przez liczbę 3 jest równa 0.

Narysujemy wykres funkcji f , która każdej liczbie całkowitej x przyporządkowuje resztę z dzielenia liczby x przez 3 i opiszemy własności tej funkcji.

Rozwiązanie

Sporządzmy częściową tabelę funkcji f .

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0

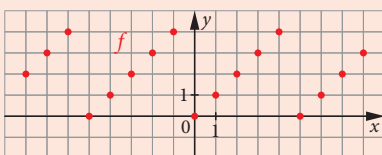


◀ 5.4. Funkcja f każdej liczbie całkowitej x przyporządkowuje resztę z dzielenia liczby x przez 5.

a) Narysuj wykres funkcji f dla $x \in \langle -8; 8 \rangle \cap \mathbb{Z}$.

b) Opisz następujące własności funkcji f : dziedzinę, zbiór wartości, wartość najmniejszą i wartość największą oraz argumenty, dla których funkcja je przyjmuje.

Odp.: a)



b) $D = \mathbb{Z}$, $ZW = \{0, 1, 2, 3, 4\}$;

wartość najmniejsza: 0 dla $x = 5k$, $k \in \mathbb{Z}$,

wartość największa: 4 dla $x = 5k + 4$, $k \in \mathbb{Z}$

ZZ i MKP

tematy 1.4, 1.11

Multiteka

- Zjawiska okresowe w przyrodzie – przyływy i odpływy morza

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 1.5

Generator
testów i sprawdzianów

Własności funkcji f .

- Funkcja jest określona dla każdej liczby całkowitej – jej dziedziną jest zbiór $\mathbf{Z}$.
- Zbiorem wartości funkcji jest zbiór $\{0, 1, 2\}$.
- Wartość najmniejszą równą 0 funkcja przyjmuje dla wszystkich liczb podzielnych przez 3, czyli dla $x = 3k$, $k \in \mathbf{Z}$. Są to jednocześnie miejsca zerowe tej funkcji.
- Wartość największą równą 2 funkcja przyjmuje dla $x = 3k + 2$, $k \in \mathbf{Z}$.

Dla argumentów różniących się o 3 funkcja przyjmuje takie same wartości, zatem dla każdej liczby całkowitej x prawdziwa jest równość:

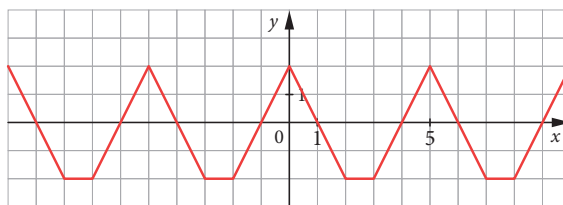
$$f(x + 3) = f(x)$$

Liczbę 3 nazywamy **okresem funkcji** f . Każda z wielokrotności liczby 3 też jest okresem tej funkcji, ale 3 jest najmniejszą liczbą dodatnią o tej własności. Nazywamy ją **okresem zasadniczym** lub **podstawowym**.

Odpowiadający okresowi fragment wykresu powtarza się wzdłuż osi liczbowej x nieskończenie wiele razy.

Przykład 2 ◀ zad. 5.5, 5.6

Funkcja f , której wykres znajduje się poniżej, ma okres zasadniczy równy 5.



Definicja

Funkcję f określoną na dziedzinie D nazywamy **okresową**, jeżeli istnieje taka liczba $T \neq 0$, że dla każdej liczby $x \in D$ spełnione są dwa warunki:

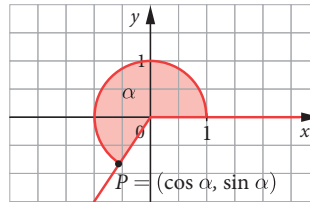
- $x + T \in D$ i $x - T \in D$,
- $f(x + T) = f(x)$.

Każdą z liczb T nazywamy **okresem** funkcji f , a jeżeli wśród nich istnieje najmniejsza dodatnia liczba T_0 , to nazywamy ją **okresem zasadniczym** funkcji f .

Przykładem funkcji okresowej, która nie ma okresu zasadniczego, jest funkcja stała. Jej okresem jest każda liczba rzeczywista różna od 0.

Założmy, że promień wodzący r punktu $P = (x_P, y_P)$ jest równy 1, czyli:

$$P = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

**Własności funkcji $f(\alpha) = \sin \alpha$**

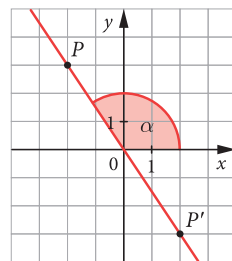
- Funkcja sinus jest określona dla każdego kąta α .
Zatem jej dziedziną jest zbiór wszystkich kątów.
- Zmiana kąta o 360° nie zmienia wartości y_P i żaden mniejszy dodatni kąt nie ma tej własności, zatem funkcja sinus jest okresowa o okresie zasadniczym 360° .
- $-1 \leq y_P \leq 1$, więc $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$. Ponadto, każda liczba z przedziału $\langle -1; 1 \rangle$ jest wartością y_P pewnego punktu P na okręgu o środku O i promieniu 1, zatem przedział $\langle -1; 1 \rangle$ jest zbiorem wartości funkcji sinus.
- Wartość największą równą 1 funkcja sinus przyjmuje dla kątów $\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 450^\circ$, $\alpha = 810^\circ$, ... oraz $\alpha = -270^\circ$, $\alpha = -630^\circ$, ..., czyli dla kątów, które można zapisać w postaci $\alpha = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
- Wartość najmniejsza: -1 , dla kątów $\alpha = 270^\circ + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin \alpha = 0$, gdy $y_P = 0$, czyli gdy ramię wodzące kąta zawiera się w osi x . Miejscami zerowymi funkcji sinus są zatem kąty $\alpha = k \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ mamy:
 $\sin \alpha > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $k \cdot 360^\circ < \alpha < 180^\circ + k \cdot 360^\circ$,
 $\sin \alpha < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $180^\circ + k \cdot 360^\circ < \alpha < 360^\circ + k \cdot 360^\circ$.

Własności funkcji $g(\alpha) = \cos \alpha$

- Funkcja cosinus jest określona dla każdego kąta α . Zatem jej dziedziną jest zbiór wszystkich kątów α .
- Zmiana kąta o 360° nie zmienia wartości x_P i żaden mniejszy dodatni kąt nie ma tej własności – funkcja cosinus jest funkcją okresową o okresie zasadniczym 360° .
- $-1 \leq x_P \leq 1$, więc $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$. Ponadto, każda liczba z przedziału $\langle -1; 1 \rangle$ jest wartością x_P pewnego punktu P na okręgu o środku O i promieniu 1, zatem przedział $\langle -1; 1 \rangle$ jest zbiorem wartości funkcji cosinus.
- Wartość największą równą 1 funkcja cosinus przyjmuje dla kątów $\alpha = 0^\circ + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Wartość najmniejsza: -1 , dla kątów $\alpha = 180^\circ + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos \alpha = 0$, gdy $x_P = 0$, czyli gdy ramię wodzące kąta zawiera się w osi y . Miejscami zerowymi funkcji cosinus są więc kąty $\alpha = 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ mamy:
 $\cos \alpha > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-90^\circ + k \cdot 360^\circ < \alpha < 90^\circ + k \cdot 360^\circ$,
 $\cos \alpha < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $90^\circ + k \cdot 360^\circ < \alpha < 270^\circ + k \cdot 360^\circ$.

Własności funkcji $h(\alpha) = \operatorname{tg} \alpha$

- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_P}{x_P}$, zatem funkcja tangens jest określona, gdy $x_P \neq 0$, czyli dla kątów $\alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Jeżeli na ramieniu wodzącym kąta α umieścimy punkt $P = (x_P, y_P)$, to punkt $P' = (-x_P, -y_P)$ leży na ramieniu wodzącym kąta $180^\circ + \alpha$. Zgodnie z definicją mamy $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_P}{x_P} = \frac{-y_P}{-x_P} = \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha)$ dla $\alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$. Kąty różniące się o 180° mają takie same tangensy i żaden mniejszy dodatni kąt nie ma tej własności – tangens jest funkcją okresową o okresie zasadniczym 180° .
- Jeżeli przyjmiemy $x_P = 1$, to $\operatorname{tg} \alpha = y_P$. Dowolna liczba rzeczywista jest współrzędną y_P pewnego punktu $P = (1, y_P)$, zatem zbiorem wartości funkcji tangens jest zbiór liczb rzeczywistych.
- $\operatorname{tg} \alpha = 0$, gdy $y_P = 0$. Miejscami zerowymi funkcji tangens są więc kąty $\alpha = k \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Funkcja tangens przyjmuje wartości dodatnie, gdy x_P oraz y_P mają ten sam znak, a wartości ujemne, gdy x_P oraz y_P mają znaki przeciwne. Dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ mamy:
 $\operatorname{tg} \alpha > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $0^\circ + k \cdot 180^\circ < \alpha < 90^\circ + k \cdot 180^\circ$,
 $\operatorname{tg} \alpha < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $90^\circ + k \cdot 180^\circ < \alpha < 180^\circ + k \cdot 180^\circ$.



Związki między funkcjami trygonometrycznymi dowolnego kąta są takie same jak w przypadku kątów wypukłych.

Twierdzenie

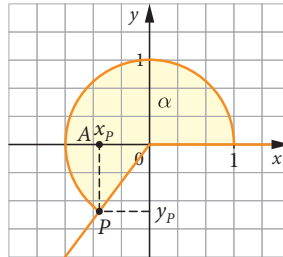
Jedynka trygonometryczna

Dla każdego kąta α prawdziwa jest równość:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Dowód

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku i założmy, że promień wodzący punktu $P = (x_P, y_P)$ jest równy 1. Wtedy $y_P = \sin \alpha$ i $x_P = \cos \alpha$.



- Jeżeli ramię wodzące kąta pokrywa się z jedną z półosi układu współrzędnych, to $|\sin \alpha| = 1$ i $\cos \alpha = 0$ lub $|\cos \alpha| = 1$ i $\sin \alpha = 0$.

W obu przypadkach $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

- Jeżeli ramię wodzące kąta nie pokrywa się z żadną z półosi układu współrzędnych, to mamy:

$$|OA|^2 + |AP|^2 = |OP|^2 \quad \leftarrow \text{twierdzenie Pitagorasa}$$

$$|x_P|^2 + |y_P|^2 = 1$$

$$x_P^2 + y_P^2 = 1 \quad \leftarrow |m|^2 = m^2$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \leftarrow x_P = \cos \alpha \text{ i } y_P = \sin \alpha$$

Koniec dowodu

Wykorzystajmy ponownie oznaczenia przyjęte w definicjach funkcji trygonometrycznych. Jeżeli $\cos \alpha \neq 0$, to:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{y_P}{r}}{\frac{x_P}{r}} = \frac{y_P}{x_P} = \operatorname{tg} \alpha$$

Wniosek

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ dla } \alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

◀5.10. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α , który spełnia podane warunki.

a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

b) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ i $270^\circ < \alpha < 360^\circ$

c) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}-2}{3}$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

d) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$ i $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

Odp.: a) $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

b) $\cos \alpha = \frac{1}{4}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{15}$

c) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2+4\sqrt{3}}}{3}$,

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2+4\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-2}$

d) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

◀5.11. Dana jest wartość jednej z funkcji trygonometrycznych kąta α . Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego kąta.

a) $\sin \alpha = 0,6$

b) $\cos \alpha = \frac{2}{3}$

c) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$

d) $\cos \alpha = -\frac{4}{7}$

Odp.: a) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$

lub $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$

b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$

lub $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

c) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$

lub $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{2}$

d) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{33}}{7}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{33}}{4}$

lub $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{33}}{7}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{33}}{4}$

Przykład 3 ◀ zad. 5.10

Kąt α spełnia warunki: $180^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$ i $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$. Obliczmy $\cos \alpha$.

Rozwiązanie

I sposób

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \quad \leftarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9}, \text{ stąd } \cos^2 \alpha = \frac{5}{9}$$

To równanie ma dwa rozwiązania: $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ lub $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Kąt α należy do III ćwiartki układu współrzędnych, więc wartość cosinusa tego kąta jest ujemna. Zatem tylko drugie rozwiązanie spełnia wszystkie warunki zadania.

II sposób

Niech $P = (x, y)$ oznacza punkt na ramieniu końcowym kąta α , a r – promień wodzący tego punktu. Ponieważ $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$ i α należy do III ćwiartki układu współrzędnych, możemy przyjąć, że $y = -2$ oraz $r = 3$. Wtedy:

$$x^2 + 4 = 9 \quad \leftarrow x^2 + y^2 = r^2 \text{ (twierdzenie Pitagorasa)}$$

$$x^2 = 5, \text{ stąd } x = \sqrt{5} \text{ lub } x = -\sqrt{5}$$

$$P = (-\sqrt{5}, -2) \quad \leftarrow x < 0, \text{ ponieważ } P \text{ jest punktem III ćwiartki}$$

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3} \quad \leftarrow \cos \alpha = \frac{x}{r}$$

Odp.: $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

Przykład 4 ◀ zad. 5.11

Obliczmy wartość cosinusa kąta α takiego, że $\sin \alpha = \frac{1}{5}$.

Rozwiązanie

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \quad \leftarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{25}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{24}{25}$$

To równanie ma dwa rozwiązania:

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{24}{25}} \text{ lub } \cos \alpha = -\sqrt{\frac{24}{25}}$$

Odp.: $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ lub $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$

Przykład 5

Obliczmy wartości sinusa oraz cosinusa kąta α takiego, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$.

Rozwiązanie

Niech $P = (x, y)$ oznacza punkt na ramieniu końcowym kąta α , a r – promień wodzący tego punktu.

$\operatorname{tg} \alpha > 0$, więc α jest kątem należącym do I lub III ćwiartki układu współrzędnych.

- Dla $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ przyjmujemy, że $x = 3$ i $y = 4$. Wtedy:

$$r^2 = 25 \quad \leftarrow x^2 + y^2 = r^2$$

$$r = 5 \quad \leftarrow r > 0$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{5} \text{ i } \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

- Dla $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ przyjmujemy, że $x = -3$ i $y = -4$. Wtedy:

$$\sin \alpha = -\frac{4}{5} \text{ i } \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

Odp.: Zadanie ma dwa rozwiązania: $\begin{cases} \sin \alpha = \frac{4}{5} \\ \cos \alpha = \frac{3}{5} \end{cases}$ lub $\begin{cases} \sin \alpha = -\frac{4}{5} \\ \cos \alpha = -\frac{3}{5} \end{cases}$.

D Przykład 6 zad. 5.14

Wykażemy, że dla każdego kąta $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ prawdziwa jest tożsamość:

$$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

Dowód

Sprawdzamy najpierw, czy warunek ograniczający miarę kąta α wystarczy, aby wszystkie wyrażenia podane w zadaniu były określone. Wypisujemy założenia:

$$1 - \sin^2 \alpha > 0 \text{ i } 1 - \cos^2 \alpha > 0 \text{ i } \sin \alpha \neq 0 \text{ i } \cos \alpha \neq 0$$

Wszystkie powyższe warunki są spełnione dla $270^\circ < \alpha < 360^\circ$.

Przekształcamy lewą stronę podanej równości.

$$\begin{aligned} L &= \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \\ &= \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha}} - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha}} = \quad \leftarrow \text{korzystamy z jedynki trygonometrycznej} \\ &= \frac{\sin \alpha}{|\cos \alpha|} - \frac{\cos \alpha}{|\sin \alpha|} = \quad \leftarrow \sqrt{x^2} = |x| \\ &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = \quad \leftarrow \text{uwzględniamy znaki funkcji trygonometrycznych w IV ćwiartce} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = P \end{aligned}$$

Koniec dowodu

◀ 5.14. Udowodnij, że dla każdego kąta $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ podana równość jest tożsamością.

$$\frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{1 - \cos \alpha} - \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{4}{\sin \alpha \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

Rozwiązanie

Niech $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Wtedy $\cos \alpha < 0$ i $\operatorname{tg} \alpha > 0$, więc $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$ i $|\operatorname{tg} \alpha| = \operatorname{tg} \alpha$.

$$\begin{aligned} L &= \frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{1 - \cos \alpha} - \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \sqrt{\cos^2 \alpha}}{1 - \cos \alpha} - \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - |\cos \alpha|}{1 - \cos \alpha} - \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} - \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \\ &= \frac{(1 + \cos \alpha)^2 - (1 - \cos \alpha)^2}{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)} = \frac{(1 + \cos \alpha + 1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha - 1 + \cos \alpha)}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{4 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \\ P &= \frac{4}{\sin \alpha \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{4}{\sin \alpha |\operatorname{tg} \alpha|} = \frac{4}{\sin \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{4 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

$L = P$, czyli podana równość jest tożsamością.

Zadania

Odpowiedzi i rozwiązania

5.1. D

5.2. C

5.3. A

5.4. Patrz s. 47.

5.5. $ZW = \langle -2; 4 \rangle$;
 wartość najmniejsza: -2
 dla $x = 9k$, $k \in \mathbb{Z}$;
 wartość największa: 4
 dla $x = 9k + 6$, $k \in \mathbb{Z}$;
 miejsca zerowe: $x = 9k - 1$
 lub $x = 9k - 7$, $k \in \mathbb{Z}$;
 $f(x) > 0$
 dla $x \in (9k - 7; 9k - 1)$, $k \in \mathbb{Z}$;
 $f(x) < 0$
 dla $x \in (9k - 1; 9k + 2)$, $k \in \mathbb{Z}$

W każdym z zadań 5.1–5.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

5.1. Liczba 6 jest okresem funkcji f . Wskaż liczbę, która również jest okresem tej funkcji.

- A. 3 B. 9 C. 15 D. 18

5.2. Wiadomo, że $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ i $\cos \alpha = \frac{2}{3}$. Ile jest równy $\operatorname{tg} \alpha$?

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ C. $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$

5.3. Wskaż wartość, której nie może przyjąć wyrażenie $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha}$.

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. 1 D. $\sqrt{3}$

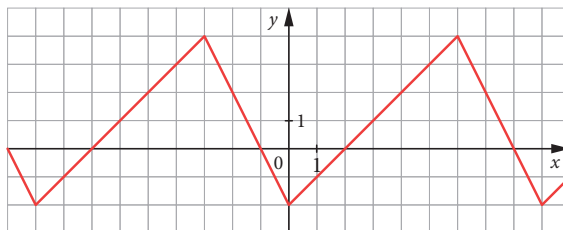
5.4. Funkcja f każdej liczbie całkowitej x przyporządkowuje resztę z dzielenia liczby x przez 5.

a) Narysuj wykres funkcji f dla $x \in \langle -8; 8 \rangle \cap \mathbb{Z}$.

b) Opisz następujące własności funkcji f :

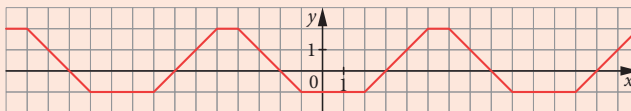
- dziedzinę,
- zbiór wartości,
- wartość najmniejszą i wartość największą oraz argumenty, dla których funkcja je przyjmuje.

5.5. Na wykresie przedstawiona jest funkcja okresowa f o dziedzinie $\mathbb{R}$ i okresie zasadniczym równym 9.

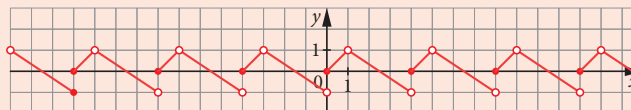


Na podstawie wykresu opisz następujące własności funkcji f : zbiór wartości, wartość najmniejszą i wartość największą oraz argumenty, dla których funkcja je przyjmuje, miejsca zerowe oraz przedziały, w których funkcja ma stały znak.

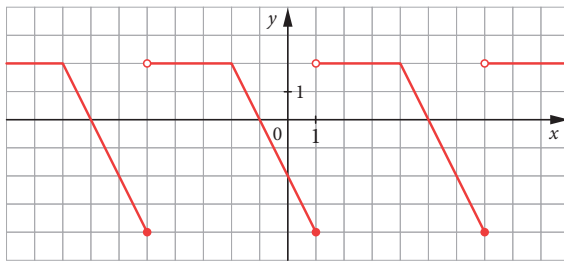
5.7. np.



5.8. np.



5.6. Na wykresie przedstawiona jest funkcja okresowa f o dziedzinie $\mathbf{R}$ i okresie zasadniczym równym 6.



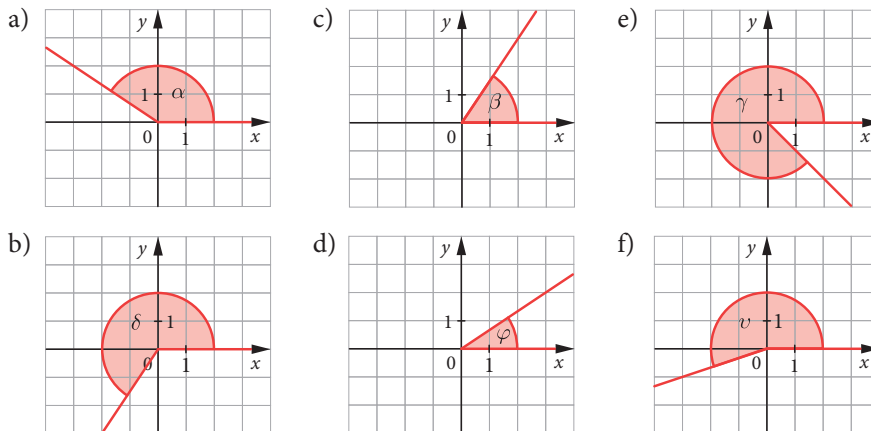
Na podstawie wykresu opisz następujące własności funkcji f : miejsca zerowe, przedziały, w których funkcja ma stały znak, oraz przedziały monotoniczności.

5.7. Naskicuj wykres dowolnej funkcji okresowej, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych, zbiorem wartości jest przedział $\langle -1; 2 \rangle$, a miejscami zerowymi są wszystkie liczby postaci $x = 5k + 3$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.8. Naskicuj wykres dowolnej funkcji okresowej f o następujących własnościach:

- dziedziną f jest zbiór $\{x \in \mathbf{R}: x \neq 4k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$,
- zbiorem wartości jest przedział $(-1; 1)$,
- f jest rosnąca w każdym z przedziałów $\langle 4k; 4k + 1 \rangle$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.9. Na podstawie rysunku porównaj sinus danego kąta z jego cosinusem.



5.15. a) Założenia: α dowolne.

$$L = \sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha - 2(1 - \sin^2 \alpha) = \sin^2 \alpha - 2 + 2 \sin^2 \alpha = 3 \sin^2 \alpha - 2 = P$$

Założenia do podpunktów b. c i d: $\sin \alpha \neq 0$ i $\cos \alpha \neq 0$, czyli $\alpha \neq k \cdot 90^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$.

$$\begin{aligned} \text{b) } P &= \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} - 1 \right) (\operatorname{tg} \alpha + 1) = \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - 1 \right) \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 1 \right) = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \\ &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } L &= \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha \right) \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right) \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \operatorname{tg} \alpha \right) = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha} \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot 1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = 1 = P \end{aligned}$$

$$\text{d) } L = \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\cos \alpha} \right) \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right) = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \cdot \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \cdot \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = P$$

5.6. miejsca zerowe:

$$x = 6k + 5, k \in \mathbf{Z};$$

$$f(x) > 0$$

$$\text{dla } x \in (6k - 5; 6k - 1), k \in \mathbf{Z},$$

$$f(x) < 0$$

$$\text{dla } x \in (6k - 1; 6k + 1), k \in \mathbf{Z};$$

funkcja malejąca w każdym z przedziałów $\langle 6k - 2; 6k + 1 \rangle$, $k \in \mathbf{Z}$,

stała w każdym z przedziałów $(6k - 5; 6k - 2)$, $k \in \mathbf{Z}$

5.7. Patrz s. 54.

5.8. Patrz s. 54.

5.9. a) $\sin \alpha > \cos \alpha$

b) $\sin \delta < \cos \delta$

c) $\sin \beta > \cos \beta$

d) $\sin \varphi < \cos \varphi$

e) $\sin \gamma < \cos \gamma$

f) $\sin v > \cos v$

5.10. Patrz s. 52.

5.11. Patrz s. 52.

5.12. a) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $\cos \alpha = \frac{12}{13}$
 lub $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$, $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$
 b) $\sin \alpha = -\frac{8}{17}$, $\cos \alpha = \frac{15}{17}$
 lub $\sin \alpha = \frac{8}{17}$, $\cos \alpha = -\frac{15}{17}$
 c) $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$
 lub $\sin \alpha = -\frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17}$
 d) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\cos \alpha = \frac{3}{4}$
 lub $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\cos \alpha = -\frac{3}{4}$

5.13. a), d), e), f) tak
 b), c) nie

5.14. Patrz s. 53.

5.15. Patrz s. 55.

5.10. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α , który spełnia podane warunki.

a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ c) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}-2}{3}$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$
 b) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ i $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ d) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$ i $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

5.11. Dana jest wartość jednej z funkcji trygonometrycznych kąta α . Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego kąta.

a) $\sin \alpha = 0,6$ c) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$
 b) $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ d) $\cos \alpha = -\frac{4}{7}$

5.12. Dana jest wartość tangensa kąta α . Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego kąta.

a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$ c) $\operatorname{tg} \alpha = 4$
 b) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{8}{15}$ d) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3}$

5.13. Sprawdź, czy istnieje kąt α spełniający podane warunki.

a) $\sin \alpha = \frac{1}{7}$ i $\cos \alpha < 0$ d) $\sin \alpha < 0$ i $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$
 b) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2$ e) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{4}$ i $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{11}}{4}$
 c) $\sin \alpha + \cos \alpha = 2$ f) $\operatorname{tg} \alpha = -100$ i $\cos \alpha > 0$

5.14. Udowodnij, że dla każdego kąta $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ podana równość jest tożsamością.

$$\frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{1 - \cos \alpha} - \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{4}{\sin \alpha \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

5.15. Udowodnij tożsamość. Podaj konieczne założenia.

a) $\sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha = 3 \sin^2 \alpha - 2$
 b) $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} - 1 \right) (\operatorname{tg} \alpha + 1)$
 c) $\left(\frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha \right) \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right) \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \operatorname{tg} \alpha \right) = 1$
 d) $\left(\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\cos \alpha} \right) \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right) = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$

5.16. a) Założenia: $\sin \alpha \neq 0$ i $\cos \alpha \neq 0$, i $1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \neq 0$.

$1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha$ oraz $\cos \alpha$ i $\sin \alpha$ nie mogą być jednocześnie równe 0,
 więc $1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha > 0$ dla dowolnego α . Zatem $\alpha \neq k \cdot 90^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$L = \left[\frac{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)}{\sin^2 \alpha} + \frac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{\cos^2 \alpha} \right] \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} - 2 \right)^{-1} = \left(\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right) \cdot \left(\frac{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \right)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right) \cdot \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = 1 = P$$

b) Założenia: $1 + \cos \alpha \neq 0$ i $1 - \cos \alpha \neq 0$, czyli $\alpha \neq k \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$L = \left(\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} + \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} \right)^2 = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} + 2 \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} + \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{(1 - \cos \alpha)^2 + 2(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha) + (1 + \cos \alpha)^2}{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)} =$$

$$= \frac{[(1 - \cos \alpha) + (1 + \cos \alpha)]^2}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2^2}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{4}{1 - \cos^2 \alpha} = P$$

D 5.16. Udowodnij tożsamość. Podaj założenia.

$$a) \left[\frac{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)}{\sin^2 \alpha} + \frac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{\cos^2 \alpha} \right] \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} - 2 \right)^{-1} = 1$$

$$b) \left(\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} + \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} \right)^2 = \frac{4}{1 - \cos^2 \alpha}$$

* **5.17.** Oblicz $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$, wiedząc, że $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$.

Prosto do matury



1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Istnieje kąt α spełniający warunki

A. $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$ i $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

B. $\operatorname{tg} \alpha = -3$ i $\cos \alpha = \sin \alpha$.

C. $\operatorname{tg} \alpha = -5$ i $\cos \alpha = \frac{1}{7}$, i $\sin \alpha = -\frac{5}{7}$.

2. Oblicz wartość tangensa kąta α , wiedząc, że $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{17}}{9}$.

3. Kąt α należy do III ćwiartki układu współrzędnych i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{7}$. Oblicz wartości sinusa i cosinusa kąta α .

D 4. Wykaż, że podana równość jest tożsamością.

$$\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2}{\cos \alpha}$$

Podaj założenia, które musi spełniać kąt α .

D 5. Wykaż, że dla każdego kąta $\alpha \neq k \cdot 90^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$, podane wyrażenie przyjmuje wartość całkowitą.

$$(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^{-1} + (1 + \operatorname{tg}^{-2} \alpha)^{-1}$$

5.16. Patrz s. 56.

$$\begin{aligned} \mathbf{5.17.} \quad \sin \alpha + \cos \alpha &= \frac{1}{2} \\ (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\frac{1}{4} - 1}{2} = -\frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned} \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha &= \\ &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \\ &= 1 - 2 (\sin \alpha \cos \alpha)^2 = \\ &= 1 - 2 \left(-\frac{3}{8}\right)^2 = 1 - 2 \cdot \frac{9}{64} = \\ &= 1 - \frac{9}{32} = \frac{23}{32} \end{aligned}$$

$$\text{Odp.: } \frac{23}{32}$$

Prosto do matury

1. F, F, F

2. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8\sqrt{17}}{17}$ lub $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{8\sqrt{17}}{17}$

3. $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{53}}{53}$, $\cos \alpha = -\frac{7\sqrt{53}}{53}$

4. Założenia: $1 + \sin \alpha \neq 0$ i $\cos \alpha \neq 0$, czyli $\alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} L &= \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + (1 + \sin \alpha)^2}{(1 + \sin \alpha) \cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + 1 + 2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{(1 + \sin \alpha) \cos \alpha} = \\ &= \frac{2(1 + \sin \alpha)}{(1 + \sin \alpha) \cos \alpha} = \frac{2}{\cos \alpha} = P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{5.} \quad (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^{-1} + (1 + \operatorname{tg}^{-2} \alpha)^{-1} &= \left(1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}\right)^{-1} + \left(1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}\right)^{-1} = \\ &= \left(\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}\right)^{-1} + \left(\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha}\right)^{-1} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

6. Miara łukowa kąta

Umiejętności:

- stosowanie miary łukowej
- zamiana miary łukowej kąta na stopniową i odwrotnie
- operowanie funkcjami trygonometrycznymi zmiennej rzeczywistej

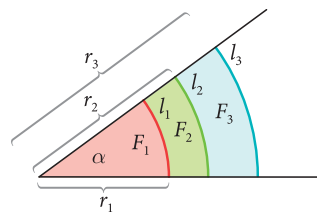
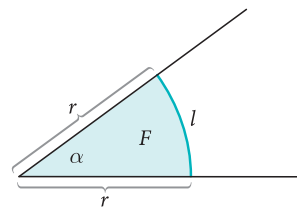
Wprowadzimy teraz inny sposób mierzenia kątów. Z wielu powodów miara stopniowa jest niewygodna. Podział 1° na $60'$ odbiega od powszechnie stosowanego systemu dziesiętnego. Jeżeli chcemy zaznaczać miary kątów na osi liczbowej, to potrzebny jest przelicznik, pozwalający wyrazić np. $137^\circ 20' 15''$ jedną liczbą rzeczywistą.

Przyjrzyjmy się rysunkowi kąta α . Jeśli poprowadzimy okrąg o środku w wierzchołku kąta, otrzymamy figurę oznaczoną literą F – jest to wycinek koła o promieniu r i długości łuku l .

Jeżeli zaznaczymy łuki o różnych promieniach i wspólnym środku w wierzchołku kąta, to odpowiednie wycinki kołowe są figurami podobnymi, zatem równe są stosunki:

$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_2}{r_2} = \frac{l_3}{r_3} \text{ itd.}$$

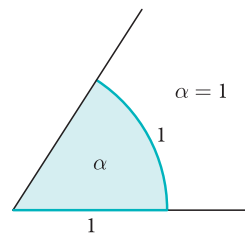
Każdemu kątowi można zatem jednoznacznie przyporządkować liczbę, która jest stosunkiem długości odpowiedniego łuku do promienia tego łuku. Tę liczbę przyjęto jako miarę kąta.



Definicja

Miarą łukową kąta jest stosunek długości zawartego w kącie łuku okręgu o środku w wierzchołku kąta do promienia tego okręgu.

Kąt, w którym łuk ma długość równą promieniowi ($l = r$), ma w przybliżeniu $57^\circ 17' 45''$ i jest **kątem jednostkowym** w mierze łukowej.



ZZ i MKP

temat 1.3

Multiteka

- Jednostki miar kątów

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.6

Generator
testów i sprawdzianów

Definicja

Jednostką miary łukowej jest **radian**. Kąt środkowy w okręgu oparty na łuku o długości promienia tego okręgu ma miarę 1 radiana.

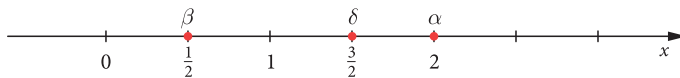
Miarą łukową danego kąta jest liczba zawartych w nim radianów.

Miara łukowa łączy pomiar rozwartości kąta z pomiarem długości.

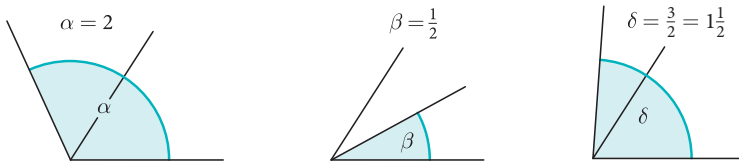
Podawanie miary stopniowej kąta wymaga używania zapisu mianowanego, tzn. symboli $^{\circ}$, $'$, $''$ (np. $\alpha = 27^{\circ} 13' 20''$). Nie ma takiej potrzeby przy zapisie miary łukowej, która jest ilorazem długości, na przykład „ $\alpha = 2$ radiany” zapiszemy krótko $\alpha = 2$.

Przykład 1

Na osi liczbowej zaznaczone są liczby: $\alpha = 2$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\delta = \frac{3}{2}$.



Narysujemy kąty o tych miarach, odkładając kąt jednostkowy.

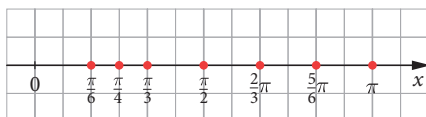
**Przykład 2**

Wyznamy miary łukowe kątów, które często występują w zadaniach.

Jeżeli $r = 1$, to długość okręgu jest równa 2π . Zatem kąt pełny ma miarę 2π .

$$\begin{array}{lllll} 30^{\circ} = \frac{\pi}{6} & 45^{\circ} = \frac{\pi}{4} & 60^{\circ} = \frac{\pi}{3} & 90^{\circ} = \frac{\pi}{2} & 120^{\circ} = \frac{2}{3}\pi \\ 135^{\circ} = \frac{3}{4}\pi & 150^{\circ} = \frac{5}{6}\pi & 180^{\circ} = \pi & 270^{\circ} = \frac{3}{2}\pi & 360^{\circ} = 2\pi \end{array}$$

Zaznamy teraz niektóre z tych miar na osi liczbowej.



Zauważmy, że $\pi \approx 3,14 \approx 3$.
Dlatego na osi x będziemy zaznaczać $180^{\circ} = \pi \approx 3$.

Jeżeli α oznacza miarę stopniową kąta, a x – jego miarę łukową, to na podstawie proporcji $\frac{180^\circ}{\alpha} = \frac{\pi}{x}$ w prosty sposób możemy zamienić miarę stopniową na łukową i na odwrót.

Wniosek

Jeżeli α oznacza miarę stopniową kąta, a x jest jego miarą łukową, to:

$$\bullet \quad x = \frac{\alpha \cdot \pi}{180^\circ} \qquad \bullet \quad \alpha = \frac{x \cdot 180^\circ}{\pi}$$

Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej

Każdemu kątowi α ($0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$) odpowiada dokładnie jedna liczba rzeczywista będąca jego miarą łukową i na odwrót – dowolnej liczbie rzeczywistej $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$ możemy przyporządkować kąt, którego miarą łukową jest t . Ponieważ przyporządkowanie to jest jednoznaczne, możemy zdefiniować funkcje trygonometryczne tak, aby ich argumentami były liczby.

Jeżeli liczba rzeczywista $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$ jest miarą łukową kąta α ($0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$), to przyjmujemy, że:

- $\sin t = \sin \alpha$
- $\cos t = \cos \alpha$
- $\operatorname{tg} t = \operatorname{tg} \alpha$ dla $t \neq \frac{\pi}{2}$ i $t \neq \frac{3}{2}\pi$

Dowolną liczbę rzeczywistą x możemy zapisać w postaci $x = t + n \cdot 2\pi$, gdzie $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$ i $n \in \mathbf{Z}$, więc:

- $\sin x = \sin t$
- $\cos x = \cos t$
- $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} t$ dla $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

Poznane wcześniej wzory i zależności możemy teraz zapisać dla funkcji trygonometrycznych zmiennej rzeczywistej. Na przykład:

- $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ dla $x \in \mathbf{R}$ i $k \in \mathbf{Z}$
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ dla $x \in \mathbf{R}$ i $k \in \mathbf{Z}$
- $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$ dla $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ i $k \in \mathbf{Z}$
- $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ dla $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ i $k \in \mathbf{Z}$
- **jedynka trygonometryczna:** $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ dla $x \in \mathbf{R}$

Przykład 3 ◀ zad. 6.5

Wyznaczmy miarę łukową albo stopniową podanego kąta.

Rozwiązanie

a) $\alpha = 37^\circ$

$$x = \frac{37^\circ \cdot \pi}{180^\circ}$$

$$x = \frac{37}{180}\pi$$

b) $\alpha = 240^\circ$

$$x = \frac{240 \cdot \pi}{180}$$

$$x = \frac{4}{3}\pi$$

c) $x = 14,5$

$$\alpha = \frac{14,5 \cdot 180^\circ}{\pi}$$

$$\alpha = \frac{2610^\circ}{\pi} \approx 831^\circ$$

Przykład 4 ◀ zad. 6.7

Miarę x kąta podaną w radianach zapiszemy w postaci $\alpha + k \cdot 360^\circ$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ i $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$.

Rozwiązanie

a) $x = \frac{31}{6}\pi$

$$\frac{31}{6}\pi = \frac{\pi}{6} + 5\pi = \frac{\pi}{6} + \pi + 4\pi$$

$$x = 30^\circ + 180^\circ + 2 \cdot 360^\circ = 210^\circ + 2 \cdot 360^\circ$$

b) $x = -\frac{83}{4}\pi$

$$-\frac{83}{4}\pi = -\frac{3}{4}\pi - 20\pi$$

$$x = -135^\circ - 10 \cdot 360^\circ = 225^\circ - 11 \cdot 360^\circ$$

Wyrazimy poznane wcześniej wzory redukcyjne w mierze łukowej.

Twierdzenie**Wzory redukcyjne**

Dla dowolnego kąta o mierze łukowej x zachodzą równości:

- $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$
- $\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x$
- $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

◀6.5. Zamień miarę stopniową na miarę łukową.

a) $20^\circ, 15^\circ, 42^\circ, 1^\circ$

b) $630^\circ, 100^\circ, 300^\circ$

Odp.: a) $20^\circ = \frac{\pi}{9}, 15^\circ = \frac{\pi}{12},$

$$42^\circ = \frac{7\pi}{30}, 1^\circ = \frac{\pi}{180}$$

b) $630^\circ = \frac{7\pi}{2}, 100^\circ = \frac{5\pi}{9},$

$$300^\circ = \frac{5\pi}{3}$$

◀6.7. Zapisz podaną miarę kąta w postaci $\alpha + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$ i $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$.

a) $\frac{33\pi}{4}, \frac{51\pi}{9}, \frac{19\pi}{6}$

b) $-\frac{35\pi}{9}, -\frac{32\pi}{3}, -\frac{5\pi}{4}$

Odp.: a) $\frac{33\pi}{4} = 45^\circ + 4 \cdot 360^\circ,$

$$\frac{51\pi}{9} = 300^\circ + 2 \cdot 360^\circ,$$

$$\frac{19\pi}{6} = 210^\circ + 360^\circ$$

b) $-\frac{35\pi}{9} = 20^\circ - 2 \cdot 360^\circ,$

$$-\frac{32\pi}{3} = 240^\circ - 6 \cdot 360^\circ,$$

$$-\frac{5\pi}{4} = 135^\circ - 360^\circ$$

Przykład 5 ◀ zad. 6.10

Skorzystamy ze wzorów redukcyjnych i obliczymy wartość podanego wyrażenia.

$$\frac{\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \cdot \cos\frac{11\pi}{6} \cdot \operatorname{tg}\frac{13\pi}{3}}{\sin^2\frac{2\pi}{9} + \sin^2\frac{5\pi}{18}}$$

Rozwiązanie

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\sin\frac{3\pi}{4} = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{11\pi}{6} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{13\pi}{3} = \operatorname{tg}\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\sin^2\frac{2\pi}{9} + \sin^2\frac{5\pi}{18} = \sin^2\frac{2\pi}{9} + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{18}\right) = \sin^2\frac{2\pi}{9} + \cos^2\frac{2\pi}{9} = 1$$

$$\frac{\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \cdot \cos\frac{11\pi}{6} \cdot \operatorname{tg}\frac{13\pi}{3}}{\sin^2\frac{2\pi}{9} + \sin^2\frac{5\pi}{18}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3}}{1} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

D **Przykład 6** ◀ zad. 6.18

Udowodnimy podaną tożsamość.

$$\cos(3\pi + x) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos 5\pi = \operatorname{tg}^2(\pi + x) \cdot \cos^2(\pi - x)$$

Rozwiązanie

Zaczynamy od wypisania założeń.

Wyrażenie $\operatorname{tg}(\pi + x)$ jest określone, jeśli $\pi + x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, czyli $x \neq -\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Pozostałe wyrażenia są określone dla wszystkich liczb rzeczywistych.

Dowód

Przekształcamy najpierw lewą stronę podanej równości.

$$\begin{aligned} L &= \cos(3\pi + x) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos 5\pi = \cos(\pi + x) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos \pi = \\ &= -\cos x \cdot \cos x - \cos \pi = -\cos^2 x + 1 = \sin^2 x \end{aligned}$$

Teraz przekształcamy prawą stronę podanej równości.

$$P = \operatorname{tg}^2(\pi + x) \cdot \cos^2(\pi - x) = \operatorname{tg}^2 x \cdot (-\cos x)^2 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x = \sin^2 x$$

$L = P$, czyli podana równość jest tożsamością dla wszystkich $x \neq -\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Koniec dowodu

◀ 6.10. Oblicz.

a) $\sin\frac{7\pi}{4} \cos\frac{5\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{7\pi}{4} \cos\frac{5\pi}{3}$

b) $\frac{4 \sin\frac{4\pi}{3} \cos^2\frac{7\pi}{4} + 2 \cos\frac{17\pi}{6}}{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}}$

c) $\frac{2 \sin\frac{7\pi}{6} \operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} \operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}}{\cos\frac{4\pi}{3} \cos\frac{5\pi}{3} \sin\frac{4\pi}{3}}$

d) $\frac{\left(\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}\right)^2 - \left(\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4} \operatorname{tg}\frac{4\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}\right)^2}{2 \sin\frac{7\pi}{4} \cos\frac{5\pi}{4} - 4 \cos\frac{17\pi}{6} \sin\frac{4\pi}{3}}$

Odp.: a) 0 b) 1 c) -8 d) 6

◀ 6.18. Udowodnij tożsamość $\frac{\operatorname{tg}(\pi - x) \cdot \cos(\pi + x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = 1$. Podaj konieczne założenia.

Rozwiązanie

Założenia:

- $\operatorname{tg}(\pi - x)$ jest określony, gdy $\pi - x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, czyli $x \neq \frac{\pi}{2} - k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \neq 0$, gdy $\frac{\pi}{2} - x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, czyli $x \neq -k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Tożsamość jest określona dla $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$L = \frac{\operatorname{tg}(\pi - x) \cdot \cos(\pi + x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{-\operatorname{tg} x \cdot (-\cos x)}{\sin x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x}{\sin x} = 1 = P$$

Przykład 7 ◀ zad. 6.19

Obliczmy wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych zmiennej x , wiedząc, że $\cos x = -\frac{2}{3}$ oraz $\operatorname{tg} x > 0$.

Rozwiązanie

$$\pi < x < \frac{3}{2}\pi \quad \leftarrow \cos x < 0 \text{ i } \operatorname{tg} x > 0$$

$$\sin^2 x = 1 - \frac{4}{9} \quad \leftarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{3} \quad \leftarrow \sin x < 0$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \leftarrow \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Odp.: $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Zadania

W każdym z zadań 6.1–6.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

6.1. Wskaż miarę łukową kąta 15° .

- A. $\frac{\pi}{9}$ B. $\frac{\pi}{12}$ C. $\frac{\pi}{15}$ D. $\frac{\pi}{24}$

6.2. Wskaż wartość $\operatorname{tg} \frac{17\pi}{6}$.

- A. 1 B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\sqrt{3}$

6.3. Do której ćwiartki układu współrzędnych należy kąt o mierze $3,5$?

- A. do pierwszej B. do drugiej C. do trzeciej D. do czwartej

6.4. Oblicz.

- a) $23^\circ 20' + 46^\circ 40'$ c) $137^\circ 27' - 15^\circ 19' + 27^\circ 52'$
b) $75^\circ 14' - 21^\circ 39'$ d) $89^\circ 17' + 2 \cdot 35^\circ 14' - 109^\circ 15'$

6.5. Zamień miarę stopniową na miarę łukową.

- a) $20^\circ, 15^\circ, 42^\circ, 1^\circ$ b) $630^\circ, 100^\circ, 300^\circ$

◀6.19. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych zmiennej x spełniającej podane warunki.

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\cos x < 0$

b) $\cos x = -\frac{1}{3}$ i $\operatorname{tg} x < 0$

c) $\operatorname{tg} x = 2$ i $\sin x < 0$

d) $\operatorname{tg} x = -1$ i $\sin x > 0$

Odp.: a) $\cos x = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

b) $\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg} x = -2\sqrt{2}$

c) $\sin x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

d) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Odpowiedzi i rozwiązania

6.1. B

6.2. C

6.3. C

6.4. a) 70°

b) $53^\circ 35'$

c) 150°

d) $50^\circ 30'$

6.5. a) $20^\circ = \frac{\pi}{9}$, $15^\circ = \frac{\pi}{12}$,

$42^\circ = \frac{7\pi}{30}$, $1^\circ = \frac{\pi}{180}$

b) $630^\circ = \frac{7\pi}{2}$, $100^\circ = \frac{5\pi}{9}$,

$300^\circ = \frac{5\pi}{3}$

6.6. a) $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$, $\frac{3\pi}{4} = 135^\circ$,
 $\frac{23\pi}{18} = 230^\circ$

b) $\frac{\pi}{9} = 20^\circ$, $\frac{2\pi}{5} = 72^\circ$, $\frac{10\pi}{3} = 600^\circ$

c) $2 = \left(\frac{360}{\pi}\right)^\circ$, $1,5 = \left(\frac{270}{\pi}\right)^\circ$,
 $0,7 = \left(\frac{126}{\pi}\right)^\circ$

d) $102 = \left(\frac{18360}{\pi}\right)^\circ$,
 $1,25 = \left(\frac{225}{\pi}\right)^\circ$, $7,5 = \left(\frac{1350}{\pi}\right)^\circ$

6.7. a) $\frac{33\pi}{4} = 45^\circ + 4 \cdot 360^\circ$,

$\frac{51\pi}{9} = 300^\circ + 2 \cdot 360^\circ$,

$\frac{19\pi}{6} = 210^\circ + 360^\circ$

b) $-\frac{35\pi}{9} = 20^\circ - 2 \cdot 360^\circ$,

$-\frac{32\pi}{3} = 240^\circ - 6 \cdot 360^\circ$,

$-\frac{5\pi}{4} = 135^\circ - 360^\circ$

6.8. a) $405^\circ = \frac{\pi}{4} + 2\pi$,

$1020^\circ = \frac{5\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi$, $520^\circ = \frac{8\pi}{9} + 2\pi$

b) $-405^\circ = \frac{7\pi}{4} - 2 \cdot 2\pi$,

$-30^\circ = \frac{11\pi}{6} - 2\pi$,

$-780^\circ = \frac{5\pi}{3} - 3 \cdot 2\pi$

6.9. $\sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

6.10. a) 0 **b)** 1 **c)** -8 **d)** 6

6.12. a) $\alpha < \beta$

b) $\alpha < \beta$

c) $\alpha = \beta$

d) $\alpha > \beta$

6.13. a) $\alpha < \beta$

b) $\alpha < \beta$

c) $\alpha = \beta$

d) $\alpha < \beta$

6.14. α, β, δ

6.15. a) kolejno: II, IV, I, IV

b) kolejno: II, I, II, III

6.6. Zamień miarę łukową na miarę stopniową.

a) $\frac{\pi}{6}, \frac{3}{4}\pi, \frac{23}{18}\pi$ b) $\frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{5}, \frac{10\pi}{3}$ c) 2; 1,5; 0,7 d) 102; 1,25; 7,5

6.7. Zapisz podaną miarę kąta w postaci $\alpha + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$ i $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$.

a) $\frac{33\pi}{4}, \frac{51\pi}{9}, \frac{19\pi}{6}$ b) $-\frac{35\pi}{9}, -\frac{32\pi}{3}, -\frac{5\pi}{4}$

6.8. Zapisz podaną miarę kąta w postaci $x + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ i $0 \leq x < 2\pi$.

a) $405^\circ, 1020^\circ, 520^\circ$ b) $-405^\circ, -30^\circ, -780^\circ$

6.9. Oblicz: $\sin \frac{5\pi}{3}$, $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{6}$, $\cos \frac{3\pi}{4}$.

6.10. Oblicz.

a) $\sin \frac{7\pi}{4} \cos \frac{5\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} \cos \frac{5\pi}{3}$

c) $\frac{2 \sin \frac{7\pi}{6} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4}}{\cos \frac{4\pi}{3} \cos \frac{5\pi}{3} \sin \frac{4\pi}{3}}$

b) $\frac{4 \sin \frac{4\pi}{3} \cos^2 \frac{7\pi}{4} + 2 \cos \frac{17\pi}{6}}{\operatorname{tg} \frac{5\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3}}$

d) $\frac{\left(\operatorname{tg} \frac{5\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3}\right)^2 - \left(\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3}\right)^2}{2 \sin \frac{7\pi}{4} \cos \frac{5\pi}{4} - 4 \cos \frac{17\pi}{6} \sin \frac{4\pi}{3}}$

6.11. Narysuj w układzie współrzędnych kąty o miarach: π , $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{6}$.

6.12. Porównaj kąty α i β .

a) $\alpha = \frac{\pi}{12}$, $\beta = 18^\circ$

c) $\alpha = \frac{\pi}{10}$, $\beta = 18^\circ$

b) $\alpha = \frac{\pi}{16}$, $\beta = 14^\circ$

d) $\alpha = \frac{\pi}{7}$, $\beta = 20^\circ$

6.13. Porównaj kąty α i β .

a) $\alpha = \frac{\pi}{5}$, $\beta = 40^\circ$

c) $\alpha = 0,6\pi$, $\beta = 108^\circ$

b) $\alpha = \frac{5\pi}{7}$, $\beta = 200^\circ$

d) $\alpha = \frac{3\pi}{11}$, $\beta = 50^\circ$

6.14. Które z podanych kątów są ostre: $\alpha = 1$, $\beta = 1,5$, $\gamma = 0,6\pi$, $\delta = \frac{37}{75}\pi$?

6.15. Określ, do której ćwiartki układu współrzędnych należy kąt o podanej mierze.

a) $\frac{4\pi}{7}$, $\frac{11\pi}{7}$, $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{11\pi}{6}$

b) $2\frac{1}{2}$, 0,7, $\frac{5\pi}{7}$, $\frac{9\pi}{8}$

6.16. Oblicz miarę łukową kąta wypukłego, który tworzą wskazówki zegara o podanej godzinie.

- a) 6^{00} b) 13^{00} c) 16^{10} d) 9^{12}

6.17. Uporządkuj rosnąco podane kąty.

$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \quad \beta = 0,24, \quad \gamma = 10^\circ 32', \quad \delta = \frac{\pi}{22}, \quad \nu = 1^\circ 12', \quad \varphi = 0,13$$

D 6.18. Udowodnij tożsamość $\frac{\operatorname{tg}(\pi - x) \cdot \cos(\pi + x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = 1$. Podaj konieczne założenia.

6.19. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych zmiennej x spełniającej podane warunki.

- a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\cos x < 0$ c) $\operatorname{tg} x = 2$ i $\sin x < 0$
 b) $\cos x = -\frac{1}{3}$ i $\operatorname{tg} x < 0$ d) $\operatorname{tg} x = -1$ i $\sin x > 0$

6.20. W kole o promieniu 3,5 cm kąt środkowy oparty jest na łuku długości 2,8 cm. Oblicz miarę stopniową tego kąta z dokładnością do 1° .

6.21. Oblicz długość łuku okręgu o promieniu 15 cm odpowiadającego kątowi środkowemu o podanej mierze.

- a) 3,1 b) 2,4 c) 160° d) 300°

Prosto do matury



1. Dane są kąty $\alpha = 1,75$ oraz $\beta = 100^\circ$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. $\alpha < \beta$ B. $\alpha > \beta$ C. $\alpha \geq \beta$

2. Podaj miary łukowe kątów: 36° , 200° , 280° .

3. Zapisz kąt o mierze -1044° w postaci $x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ i $0 \leq x < 2\pi$.

4. Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych: $\sin \frac{16\pi}{3}$, $\cos \frac{53\pi}{6}$, $\operatorname{tg} \frac{10\pi}{3}$.

D 5. Udowodnij tożsamość. Podaj odpowiednie założenia.

$$\cos(\pi - x) \cos(\pi + x) - \sin(2\pi - x) \sin(2\pi + x) = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

5. Założenia:

- $\operatorname{tg} x$ jest określony, gdy $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
- $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ jest określony, gdy $\frac{\pi}{2} - x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, czyli $x \neq -k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Tożsamość jest określona dla $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$L = \cos(\pi - x) \cos(\pi + x) - \sin(2\pi - x) \sin(2\pi + x) = -\cos x \cdot (-\cos x) - (-\sin x) \sin x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$P = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1 = L$$

6.16. a) π b) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{13\pi}{36}$
 d) $\frac{13\pi}{15}$

6.17. $\nu < \varphi < \delta < \gamma < \beta < \alpha$

6.18. Patrz s. 62.

6.19. a) $\cos x = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

b) $\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg} x = -2\sqrt{2}$

c) $\sin x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

d) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

6.20. 46°

6.21. a) 46,5 cm b) 36 cm

c) $13\frac{1}{3}\pi$ cm d) 25π cm

Prosto do matury

1. F, P, P

2. $36^\circ = \frac{\pi}{5}$, $200^\circ = \frac{10\pi}{9}$,
 $280^\circ = \frac{14\pi}{9}$

3. $\frac{\pi}{5} - 3 \cdot 2\pi$

4. $\sin \frac{16\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $\cos \frac{53\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{10\pi}{3} = \sqrt{3}$

7. Wykresy funkcji trygonometrycznych

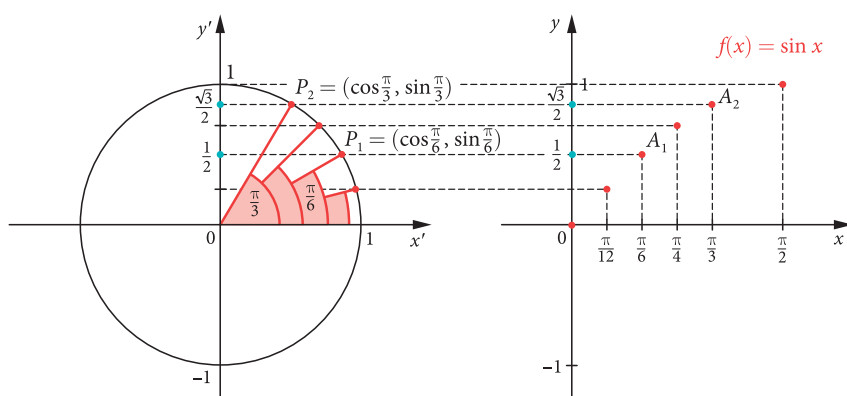
Umiejętności:

- rysowanie wykresów funkcji sinus, cosinus i tangens
- przekształcanie wykresów funkcji trygonometrycznych
- rozwiązywanie elementarnych równań i nierówności trygonometrycznych

Wykres funkcji $f(x) = \sin(x)$

Przyjrzyjmy się rysunkowi. W układzie współrzędnych $x'Oy'$ zaznaczamy kąty, a w układzie xOy punkty wykresu funkcji $f(x) = \sin x$.

Przyjmijmy zaokrąglenie $\pi \approx 3$, zatem $\frac{\pi}{3} \approx 1$, $\frac{\pi}{6} \approx \frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{2} \approx \frac{3}{2}$ itd.



Punkt $A_1 = \left(\frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{6}\right)$, ponieważ jego druga współrzędna jest równa drugiej współrzędnej punktu P_1 wybranego na ramieniu końcowym kąta $\frac{\pi}{6}$ (układ $x'Oy'$, $|OP_1| = 1$).

Podobnie – punkt $A_2 = \left(\frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3}\right)$, bo jego druga współrzędna jest równa drugiej współrzędnej punktu P_2 wybranego na ramieniu końcowym kąta $\frac{\pi}{3}$.

Im więcej kątów odłożymy w układzie $x'Oy'$, tym więcej punktów należących do wykresu funkcji $f(x) = \sin x$ można zaznaczyć w układzie xOy .

ZZ i MKP

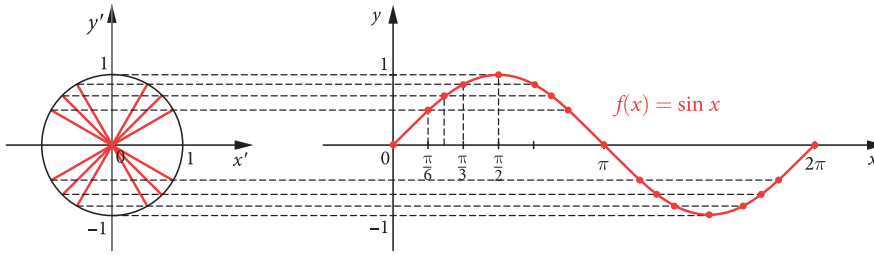
tematy 1.5–1.10

Multiteka

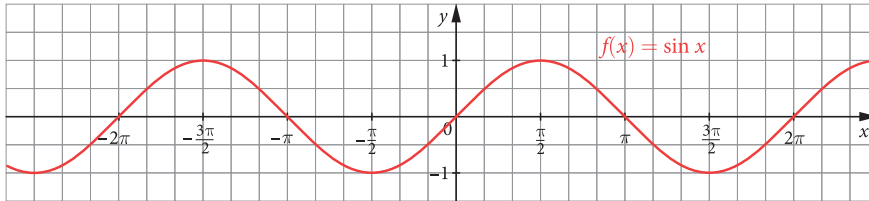
- Wykres funkcji sinus
- Przekształcenia wykresu funkcji sinus (1)
- Przekształcenia wykresu funkcji sinus (2)
- Wykres funkcji cosinus
- Przekształcenia wykresu funkcji cosinus (1)
- Przekształcenia wykresu funkcji cosinus (2)
- Wykres funkcji tangens
- Przekształcenia wykresu funkcji tangens (1)
- Przekształcenia wykresu funkcji tangens (2)
- Ruch po okręgu a sinusoida (1)
- Ruch po okręgu a sinusoida (2)
- Ruch po okręgu a tangensoida
- Wykresy funkcji trygonometrycznych
- Jak brzmi sinusoida?
- Wykres funkcji cotangens
- Przekształcenia wykresu funkcji cotangens (1)
- Przekształcenia wykresu funkcji cotangens (2)

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.7

Poniżej prezentujemy wykres funkcji $f(x) = \sin x$ dla kątów z przedziału $\langle 0; 2\pi \rangle$.



Funkcja $f(x) = \sin x$ ($x \in \mathbf{R}$) jest funkcją okresową o okresie zasadniczym 2π , zatem narysowany fragment wykresu będzie się powtarzał nieskończenie wiele razy.



Krzywą będącą wykresem funkcji $f(x) = \sin x$ nazywamy **sinusoidą**.

Opiszemy własności funkcji $f(x) = \sin x$.

- $D = \mathbf{R}$, $ZW = \langle -1; 1 \rangle$
- Funkcja ma wartość największą równą 1 dla każdego $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
Funkcja ma wartość najmniejszą równą -1 dla każdego $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
- Miejscami zerowymi są argumenty postaci $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
- Funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów należących do każdego z przedziałów postaci $(2k\pi; \pi + 2k\pi)$ oraz ujemne dla argumentów należących do każdego z przedziałów postaci $(\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$.
- Funkcja nie jest monotoniczna w całej dziedzinie, natomiast jest:
rosnąca w każdym z przedziałów postaci $\left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$,
malejąca w każdym z przedziałów postaci $\left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$.
- Równanie $\sin x = m$ ma nieskończenie wiele rozwiązań dla $m \in \langle -1; 1 \rangle$, a dla $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ nie ma rozwiązań.

Zamiast zwrotu: krzywa, która jest wykresem funkcji $y = f(x)$, często używamy krótszego: krzywa o równaniu $y = f(x)$.



Przypomnijmy:
Zapis $(2k\pi; \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$ oznacza rodzinę przedziałów.

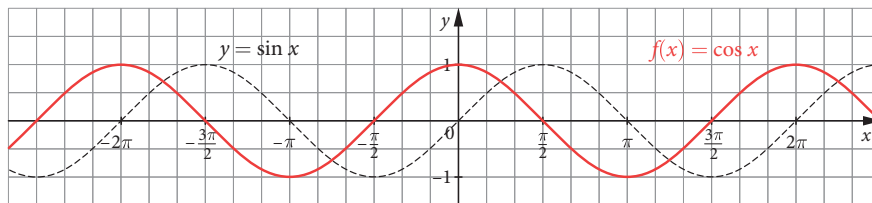


Wykres funkcji $f(x) = \cos(x)$

Do narysowania wykresu funkcji $f(x) = \cos x$ skorzystamy ze wzoru redukcyjnego:

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Wykres funkcji $f(x) = \cos x$, tzw. **cosinusoidę**, otrzymamy zatem po przesunięciu sinusoidy $y = \sin x$ o wektor $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, czyli o $\frac{\pi}{2}$ w lewo wzdłuż osi x .

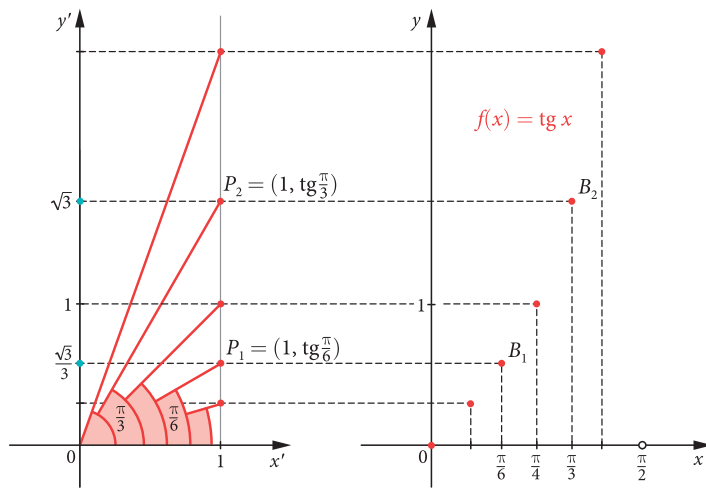


Na podstawie wykresu funkcji $f(x) = \cos x$ opiszemy jej własności.

- $D = \mathbf{R}$, $ZW = \langle -1; 1 \rangle$
- Funkcja ma wartość największą równą 1 dla każdego $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
Funkcja ma wartość najmniejszą równą -1 dla każdego $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
- Miejscami zerowymi są argumenty postaci $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
- Funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów należących do każdego z przedziałów postaci $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ oraz ujemne dla argumentów należących do każdego z przedziałów postaci $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.
- Funkcja nie jest monotoniczna w całej dziedzinie, natomiast jest:
rosnąca w każdym z przedziałów postaci $\langle \pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbf{Z}$,
malejąca w każdym z przedziałów postaci $\langle 2k\pi; \pi + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbf{Z}$.
- Równanie $\cos x = m$ ma nieskończenie wiele rozwiązań dla $m \in \langle -1; 1 \rangle$, a dla $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ nie ma rozwiązań.

Wykres funkcji $f(x) = \operatorname{tg}(x)$

Ponownie umieszczamy obok siebie dwa układy współrzędnych. W układzie współrzędnych $x'Oy'$ zaznaczamy kąty, a w układzie xOy punkty wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$. Tym razem skorzystamy z tego, że jeżeli wybierzemy punkt P na ramieniu końcowym kąta α tak, aby jego pierwsza współrzędna była równa 1, to jego druga współrzędna jest równa tangensowi kąta α .

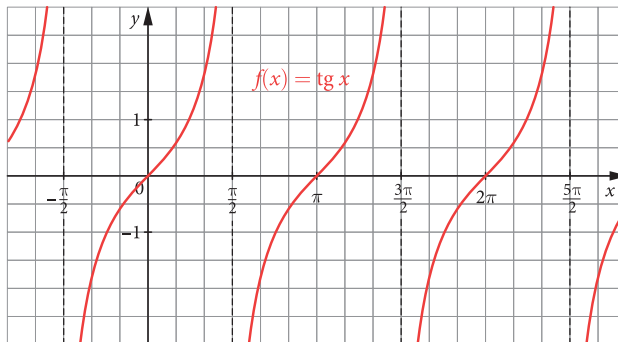


Punkt $B_1 = \left(\frac{\pi}{6}, \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}\right)$, ponieważ jego druga współrzędna jest równa drugiej współrzędnej punktu P_1 na ramieniu końcowym kąta $\frac{\pi}{6}$. Podobnie $B_2 = \left(\frac{\pi}{3}, \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right)$.

Na rysunku zaznaczyliśmy kilka punktów dla kątów z I ćwiartki. Wartości tangensa dla coraz większych kątów ostrych są coraz większe. Im bardziej do dodatniej półosi y' zbliżają się ramiona wodzące kątów, tym bliżej prostej o równaniu $x = \frac{\pi}{2}$ znajdują się odpowiadające tym kątom punkty wykresu. Tę prostą będziemy nazywać **asymptotą pionową** wykresu.

Do narysowania następnego fragmentu wykresu można wykorzystać kąty z IV ćwiartki i fakt, że kąty te są przyporządkowane liczbom z przedziału $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

Okresem zasadniczym funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$ jest π , zatem otrzymany dla $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ wykres powtarzamy w pozostałych przedziałach.



Krzywą będącą wykresem funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$ nazywamy **tangensoidą**.

Opiszemy własności funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$.

- Dziedziną jest zbiór $\mathbf{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$, $k \in \mathbf{Z}$.
- Zbiorem wartości jest zbiór $\mathbf{R}$.
- Proste o równaniach $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, są asymptotami pionowymi wykresu.
- Funkcja nie ma wartości największej i nie ma wartości najmniejszej.
- Miejscami zerowymi są argumenty postaci $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
- Funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów należących do każdego z przedziałów postaci $\left(k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, a ujemne dla argumentów należących do każdego z przedziałów postaci $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi; \pi + k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.
- Funkcja nie jest monotoniczna w całej dziedzinie, natomiast jest rosnąca w każdym z przedziałów postaci $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.
- Równanie $\operatorname{tg} x = m$ ma dla dowolnego $m \in \mathbf{R}$ nieskończenie wiele rozwiązań.

◀ 7.4. Patrz s. 76.

◀ 7.5. Patrz s. 77.

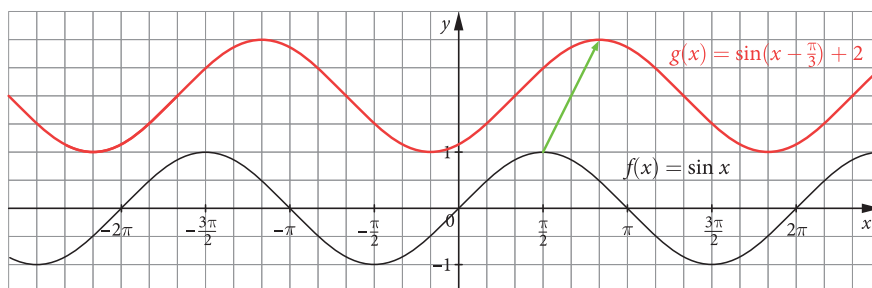
Przykład 1 ◀ zad. 7.4, 7.5

Narysujemy wykres funkcji $g(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$.

Rozwiązanie

Wykres funkcji g otrzymamy w wyniku przesunięcia sinusoidy o równaniu

$y = \sin x$ o wektor $\left[\frac{\pi}{3}, 2\right]$, czyli o $\frac{\pi}{3}$ w prawo wzdłuż osi x i o 2 w górę wzdłuż osi y .



Przykład 2 ◀ zad. 7.12

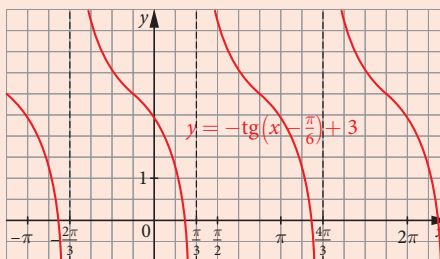
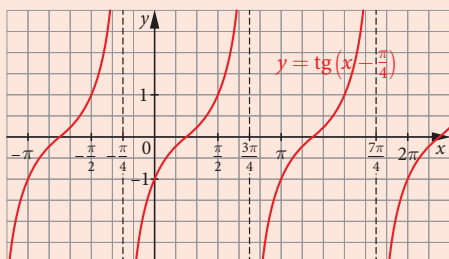
Narysujemy wykres funkcji $g(x) = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ i wyznaczmy jej miejsca zerowe oraz równania asymptot pionowych wykresu.

◀ 7.12. Narysuj wykres funkcji i podaj równania asymptot pionowych wykresu.

a) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ b) $y = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 3$

Odp.: a) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

b) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

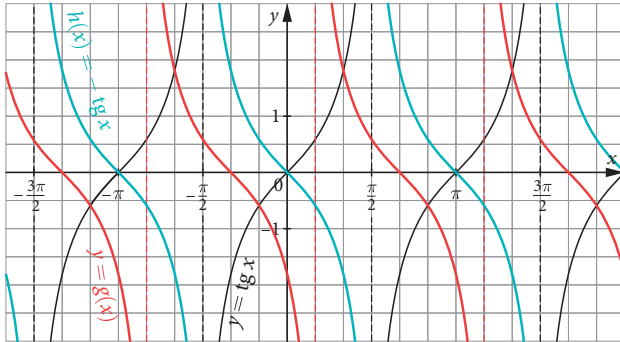


Rozwiązanie

Rozwiązujemy zadanie w dwóch krokach.

Krok 1: Rysujemy wykres funkcji $h(x) = -\operatorname{tg} x$ (obraz wykresu funkcji $y = \operatorname{tg} x$ w symetrii względem osi x).

Krok 2: Przesuwamy otrzymany w poprzednim kroku wykres o wektor $\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$, czyli o $\frac{\pi}{3}$ w lewo wzdłuż osi x .



Z wykresu odczytujemy, że dla funkcji $g(x) = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$:

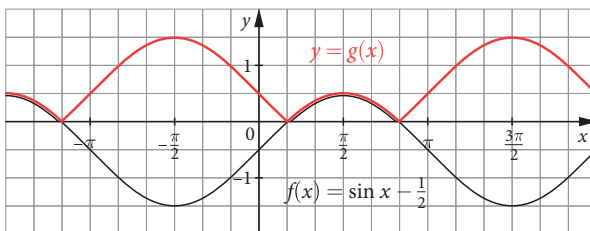
- miejscami zerowymi są liczby postaci $-\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
- asymptoty pionowe wykresu mają równania postaci $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 3 ◀ zad. 7.13

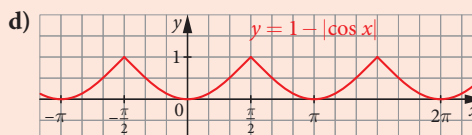
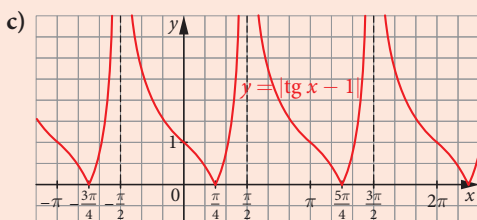
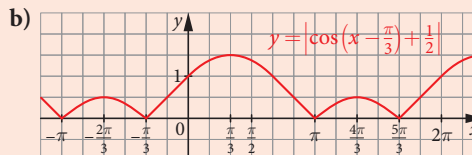
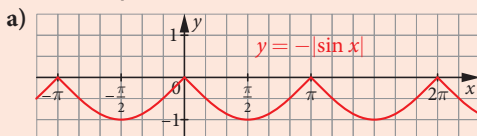
Narysujemy wykres funkcji $g(x) = \left|\sin x - \frac{1}{2}\right|$.

Rozwiązanie

Rysujemy wykres funkcji $f(x) = \sin x - \frac{1}{2}$. Aby otrzymać wykres funkcji $g(x) = |f(x)|$, przekształcamy przez symetrię względem osi x te fragmenty krzywej o równaniu $f(x) = \sin x - \frac{1}{2}$, które leżą poniżej osi x .

**◀7.13. Narysuj wykres funkcji.**

- $y = -|\sin x|$
- $y = \left|\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\right|$
- $y = |\operatorname{tg} x - 1|$
- $y = 1 - |\cos x|$

◀7.13. Odp.:

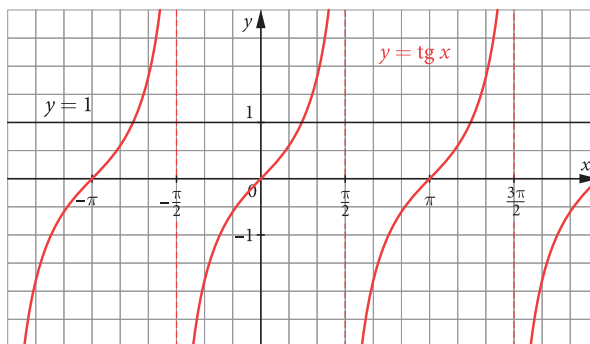
Elementarne równania i nierówności trygonometryczne

Równanie, w którym niewiadoma występuje tylko jako argument funkcji trygonometrycznej, nazywamy **równaniem trygonometrycznym**. Analogicznie – nierówność, w której niewiadoma występuje tylko jako argument funkcji trygonometrycznej, nazywamy **nierównością trygonometryczną**.

Przykład 4

Odczytamy z wykresu funkcji $y = \operatorname{tg} x$ rozwiązania równania $\operatorname{tg} x = 1$.

Rozwiązanie



- ← prowadzimy prostą k o równaniu $y = 1$
- ← odczytujemy pierwsze współrzędne punktów przecięcia prostej k z wykresem

Równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań. Z rysunku możemy odczytać trzy z nich: $x = -\frac{3}{4}\pi$, $x = \frac{\pi}{4}$ oraz $x = \frac{5}{4}\pi$.

Funkcja $y = \operatorname{tg} x$ jest rosnącą w każdym z przedziałów postaci $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Wystarczy więc odczytać jedno rozwiązanie w którymś z tych przedziałów, np. w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, bo pozostałe rozwiązania będą się różniły o wielokrotność okresu zasadniczego tangensa.

Wykres funkcji rosnącej (malejącej) może mieć z prostą równoległą do osi x co najwyżej jeden punkt wspólny.

Odp.: Rozwiązaniami równania są liczby postaci $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

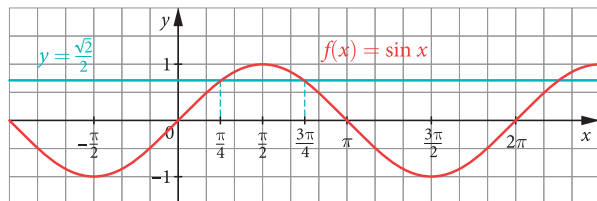
Każda funkcja trygonometryczna jest okresowa, zatem jeżeli ograniczymy się do rozwiązania równania trygonometrycznego w przedziale o długości okresu zasadniczego, to wyznaczymy również pozostałe pierwiastki równania – będą się one różniły o wielokrotność okresu zasadniczego.

Wniosek

Rozwiązaniami równania $\operatorname{tg} x = a$ są liczby postaci $x = x_0 + k\pi$, gdzie x_0 jest jednym z rozwiązań tego równania i $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 5

Odczytamy z wykresu funkcji $y = \sin x$ rozwiązania równania $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



← prowadzimy prostą
o równaniu $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

W przedziale $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$ rozwiązaniami równania $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ są liczby $\frac{\pi}{4}$ oraz $\frac{3\pi}{4}$.

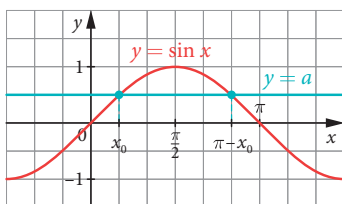
Zatem wszystkie rozwiązania tego równania są postaci $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ lub $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Odp.: $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ lub $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Podsumujmy:

- Równanie $\sin x = a$ ma rozwiązania pod warunkiem, że $-1 \leq a \leq 1$.
- Rozwiązania równań: $\sin x = -1$, $\sin x = 1$, $\sin x = 0$ zostały już odczytane wcześniej (odpowiednio: argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości najmniejsze, wartości największe oraz miejsca zerowe funkcji).
- Dla $a \in (-1; 1) - \{0\}$ równanie $\sin x = a$ ma w przedziale o długości okresu zasadniczego dwa rozwiązania.

Przyjrzyjmy się wykresowi sinusa w przedziale $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$.



Dla $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ równanie $\sin x = a$ (gdzie $a \in \langle -1; 1 \rangle$) ma jedno rozwiązanie (sinus jest w tym przedziale funkcją rosnącą), dla $x \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$ również jedno (sinus jest w tym przedziale funkcją malejącą). Jeżeli pierwsze z tych rozwiązań oznaczmy x_0 , to drugie jest równe $\pi - x_0$.

Wniosek

Rozwiązaniami równania $\sin x = a$ przy założeniu, że $-1 \leq a \leq 1$, są liczby postaci $x = x_0 + 2k\pi$ oraz $x = \pi - x_0 + 2k\pi$, gdzie x_0 jest jednym z rozwiązań tego równania i $k \in \mathbb{Z}$.

Cosinusoidę otrzymujemy po przesunięciu sinusoidy w lewo wzdłuż osi x o $\frac{\pi}{2}$, zatem rozwiązania równania $\cos x = a$ odczytamy z przedziału $\langle -\pi; \pi \rangle$.

Wniosek

Rozwiązaniami równania $\cos x = a$ przy założeniu, że $-1 \leq a \leq 1$, są liczby postaci $x = x_0 + 2k\pi$ oraz $x = -x_0 + 2k\pi$, gdzie x_0 jest jednym z rozwiązań tego równania i $k \in \mathbb{Z}$.

◀ 7.21. Rozwiąż równanie.

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos x = -1$

c) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

d) $2 \sin x - \sqrt{2} = 0$

e) $2 \cos x + 1 = 0$

f) $3 \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$

Odp.: a) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

lub $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

lub $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

e) $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

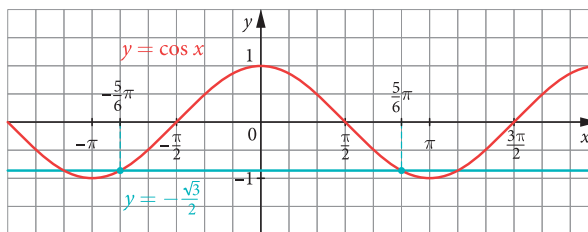
lub $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

f) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Przykład 6 ◀ zad. 7.21

Rozwiążemy równanie $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rozwiązanie



W przedziale $\langle -\pi; \pi \rangle$ rozwiązaniami równania są liczby $\frac{5\pi}{6}$ i $-\frac{5\pi}{6}$. Zatem wszystkie rozwiązania tego równania są postaci $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Odp.: $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Przykład 7 ◀ zad. 7.22

Rozwiążemy równanie $\sin x = 0,4384$.

Rozwiązanie

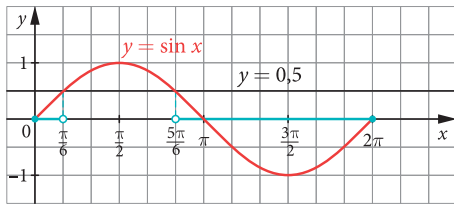
$$0,4384 \approx \sin 26^\circ \text{ i } 26^\circ = \frac{13\pi}{90}$$

Odp.: $x \approx \frac{13}{90}\pi + 2k\pi$ lub $x \approx \frac{77}{90}\pi + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

**Przykład 8** ◀ zad. 7.23

Narysujemy wykres funkcji $y = \sin x$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$ i odczytamy z niego, które argumenty z tego przedziału spełniają nierówność $\sin x < 0,5$.

Rozwiązanie



← prowadzimy prostą o równaniu $y = 0,5$
 ← wyznaczamy rozwiązania równania $\sin x = 0,5$

Poprowadzona prosta przecina ten fragment sinusoidy w dwóch punktach – dla $x = \frac{\pi}{6}$ oraz $x = \frac{5\pi}{6}$. Z wykresu odczytujemy, że $\sin x < 0,5$ dla $x \in \langle 0; \frac{\pi}{6} \rangle \cup \langle \frac{5\pi}{6}; 2\pi \rangle$.

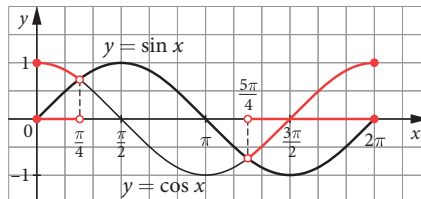
Odp.: $x \in \langle 0; \frac{\pi}{6} \rangle \cup \langle \frac{5\pi}{6}; 2\pi \rangle$

Przykład 9 ◀ zad. 7.24

Narysujemy w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $y = \sin x$ i $y = \cos x$. Odczytamy, które argumenty z przedziału $\langle 0; 2\pi \rangle$ spełniają nierówność $\cos x > \sin x$.

Rozwiązanie

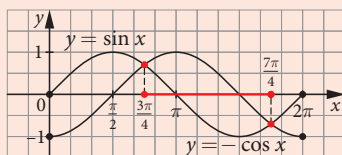
Fragmenty cosinusoidy leżące w rozpatrywanym przedziale powyżej sinusoidy zaznaczone są na rysunku kolorem czerwonym. Na osi x odczytujemy argumenty spełniające żadaną nierówność.



Odp.: $x \in \langle 0; \frac{\pi}{4} \rangle \cup \langle \frac{5\pi}{4}; 2\pi \rangle$

◀ 7.24. Narysuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x) = \sin x$ oraz $g(x) = -\cos x$ i odczytaj, dla jakich argumentów z przedziału $\langle 0; 2\pi \rangle$ prawdziwa jest nierówność $\sin x + \cos x \leq 0$.

Odp.:



$x \in \langle \frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \rangle$

◀ 7.22. Rozwiąż równanie.

- a) $\sin x = 0,829$
- b) $\cos x = 0,342$
- c) $\operatorname{tg} x = 1,327$
- d) $\sin x = -0,6428$
- e) $\cos x = -0,515$
- f) $\operatorname{tg} x = -11,43$

Odp.: a) $x \approx \frac{14}{45}\pi + 2k\pi$

lub $x \approx \frac{31}{45}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

b) $x \approx \frac{7}{18}\pi + 2k\pi$

lub $x \approx -\frac{7}{18}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

c) $x \approx \frac{53}{180}\pi + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

d) $x \approx -\frac{2}{9}\pi + 2k\pi$

lub $x \approx -\frac{7}{9}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

e) $x \approx \frac{121}{180}\pi + 2k\pi$ lub

$x \approx -\frac{121}{180}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

f) $x \approx -\frac{17}{36}\pi + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

◀ 7.23. Rozwiąż nierówność dla $x \in \langle -2\pi; 2\pi \rangle$.

a) $\sin x \geq \frac{1}{2}$

b) $2 \cos x < \sqrt{3}$

c) $\sqrt{3} \operatorname{tg} x > 1$

d) $6 \cos x + 3\sqrt{2} \leq 0$

Odp.:

a) $x \in \langle -\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6} \rangle \cup \langle \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \rangle$

b) $x \in \langle -\frac{11\pi}{6}; -\frac{\pi}{6} \rangle \cup \langle \frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \rangle$

c) $x \in \langle -\frac{11\pi}{6}; -\frac{3\pi}{2} \rangle \cup$

$\cup \langle -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2} \rangle \cup \langle \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \rangle \cup \langle \frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2} \rangle$

d) $x \in \langle -\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4} \rangle \cup \langle \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \rangle$

◀ 7.25. Rozwiąż nierówność.

- a) $\sin x + 1 > 0$
 b) $\sqrt{2} \cos x \leq 1$
 c) $\operatorname{tg} x > -1$
 d) $2 \cos x + 1 > 0$

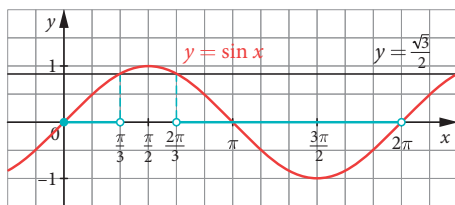
Odp.:

- a) $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
 b) $x \in \left\langle \frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \right\rangle,$
 $k \in \mathbb{Z}$
 c) $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right), k \in \mathbb{Z}$
 d) $x \in \left(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right),$
 $k \in \mathbb{Z}$

Przykład 10 ◀ zad. 7.25

Rozwiążemy nierówność $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

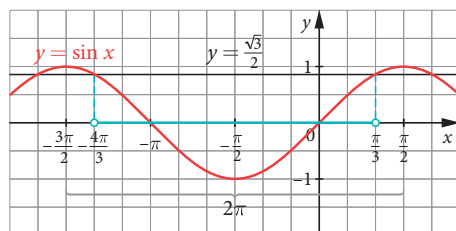
Rozwiązanie



◀ opisujemy najpierw rozwiązania nierówności np. w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$ lub jakimkolwiek innym przedziale o długości równej okresowi zasadniczemu funkcji

W przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$ rozwiązaniami nierówności są wszystkie liczby należące do sumy przedziałów $\langle 0; \frac{\pi}{3} \rangle \cup \left(\frac{2\pi}{3}; 2\pi \right)$. Zatem wszystkie rozwiązania tej nierówności można zapisać w postaci $\left\langle 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle \cup \left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi \right), k \in \mathbb{Z}$.

Rozwiązania tej nierówności można zapisać na wiele sposobów. Gdybyśmy na przykład rozwiązyli na początku nierówność w przedziale $\left\langle -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$, otrzymalibyśmy rozwiązania zapisane w postaci $x \in \left(-\frac{4\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right), k \in \mathbb{Z}$.

Odp.: $x \in \left(-\frac{4\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right), k \in \mathbb{Z}$

Zadania

W każdym z zadań 7.1–7.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

7.1. Wskaż funkcję, która jest rosnąca w przedziale $\langle \pi; 2\pi \rangle$.

- A. $y = \sin x$ C. $y = \sin(x - \pi)$
 B. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ D. $y = \sin(x + 2\pi)$

7.2. Wskaż okres zasadniczy funkcji $y = |\cos x|$.

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. π C. 2π D. 4π

7.3. Wskaż liczbę rozwiązań równania $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ w przedziale $\langle -\pi; 2\pi \rangle$.

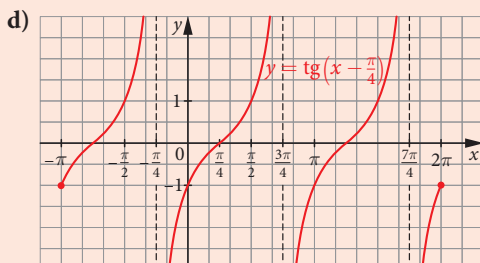
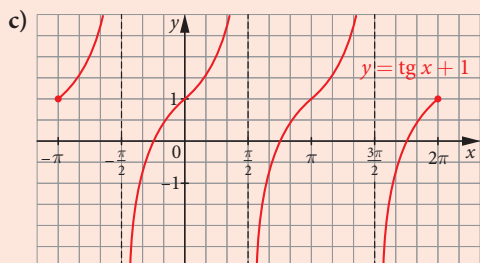
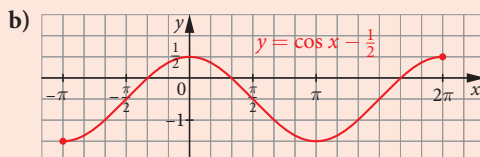
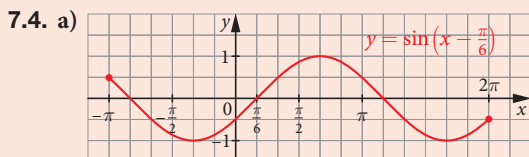
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Odpowiedzi i rozwiązania

7.1. B

7.2. B

7.3. C



7.4. Narysuj wykres funkcji dla $x \in \langle -\pi; 2\pi \rangle$.

a) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

c) $y = \operatorname{tg} x + 1$

b) $y = \cos x - \frac{1}{2}$

d) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

7.5. Narysuj wykres funkcji.

a) $y = -\cos x + \frac{1}{2}$

c) $y = 3 - \cos x$

b) $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

d) $y = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1$

7.6. Wyznacz zbiór wartości funkcji.

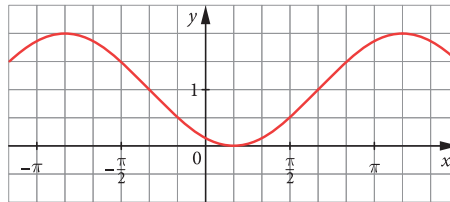
a) $f(x) = \sin x + 1$

c) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

b) $f(x) = -\sin x$

d) $f(x) = \sin(x + \pi) - 1$

7.7. Funkcja trygonometryczna przedstawiona na wykresie ma okres zasadniczy 2π . Podaj przykładowy wzór tej funkcji.



7.8. Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ określ przedziały monotoniczności funkcji f .

a) $f(x) = \cos\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$

b) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$

7.9. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f w podanym przedziale. Dla których argumentów są przyjmowane te wartości?

a) $f(x) = \sin x$ $x \in \left\langle 0; \frac{4}{3}\pi \right\rangle$

b) $f(x) = \sin x$ $x \in \left\langle -\frac{\pi}{6}; \frac{7}{4}\pi \right\rangle$

c) $f(x) = \cos x$ $x \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi \right\rangle$

7.10. Wyznacz wartość największą i wartość najmniejszą funkcji w podanym przedziale. Dla których argumentów są przyjmowane te wartości?

a) $f(x) = -\sin x + \frac{1}{2}$ $x \in \left\langle -\frac{\pi}{6}; 2\pi \right\rangle$

b) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$ $x \in \left\langle -\frac{\pi}{4}; \pi \right\rangle$

7.4. Patrz s. 76.

7.6. a) $\langle 0; 2 \rangle$ b) $\langle -1; 1 \rangle$

c) $\langle -1; 1 \rangle$ d) $\langle -2; 0 \rangle$

7.7. np. $f(x) = \sin\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) + 1$

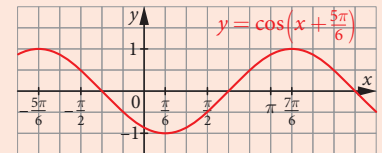
7.8. a)

maleje w każdym z przedziałów

$$\left\langle -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle,$$

rośnie w każdym z przedziałów

$$\left\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle, k \in \mathbb{Z}$$

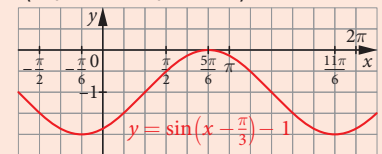


b) maleje w każdym z przedziałów

$$\left\langle \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle,$$

rośnie w każdym z przedziałów

$$\left\langle -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle, k \in \mathbb{Z}$$



7.9. a) wartość najmniejsza: $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

dla $x = \frac{4\pi}{3}$, wartość największa: 1

dla $x = \frac{\pi}{2}$

b) wartość najmniejsza: -1

dla $x = \frac{3\pi}{2}$, wartość największa: 1

dla $x = \frac{\pi}{2}$

c) wartość najmniejsza: -1

dla $x = \pi$, wartość największa: 0

dla $x \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$

7.10. a) wartość najmniejsza:

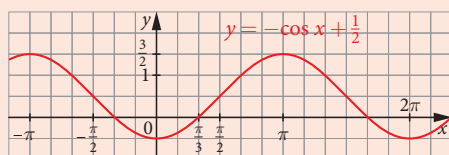
$-\frac{1}{2}$ dla $x = \frac{\pi}{2}$, wartość największa:

$1\frac{1}{2}$ dla $x = \frac{3\pi}{2}$

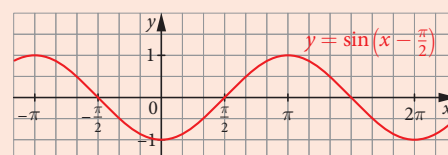
b) wartość najmniejsza: 0 dla $x = -\frac{\pi}{4}$,

wartość największa: 2 dla $x = \frac{3\pi}{4}$

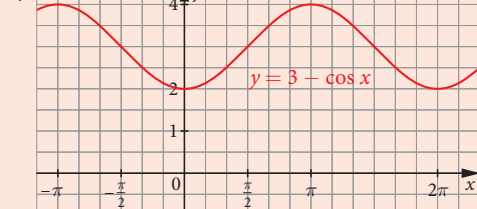
7.5. a)



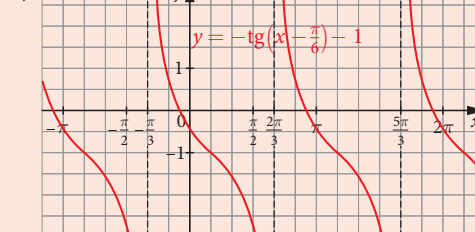
b)



c)



d)



7.11. Patrz s. 79.

7.12. Patrz s. 70.

7.13. Patrz s. 71.

7.15. a), b), c), d) dodatni,
e), f) ujemny7.16. a), c) dodatni,
b), d), e), f) ujemny

7.17.

a) $\sin 5 < \sin 3 < \sin \frac{1}{2} < \sin(-4)$
b) $\cos 3 < \cos 2 < \cos(-1) < \cos 6$ 7.19. $\sin x \geq -1$ dla $x \in \mathbb{R}$
i $\cos x \geq -1$ dla $x \in \mathbb{R}$ Poza tym jeżeli $\sin x = -1$,
to $\cos x = 0$. Zatem
 $\sin x + \cos x > -2$ dla $x \in \mathbb{R}$,
czyli $f(x) > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$.
Stąd wynika, że funkcja f nie ma
miejsc zerowych.7.20. a) $x \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$ b) $x \in \left\{ \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right\}$ c) $x \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}$ d) $x \in \left\{ \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$

7.11. Narysuj wykres funkcji i odczytaj jej miejsca zerowe.

a) $y = \cos\left(x - \frac{2}{3}\pi\right)$

c) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

b) $y = \cos x + \frac{1}{2}$

d) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 3$

7.12. Narysuj wykres funkcji i podaj równania asymptot pionowych wykresu.

a) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

b) $y = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 3$

7.13. Narysuj wykres funkcji.

a) $y = -|\sin x|$

c) $y = |\operatorname{tg} x - 1|$

b) $y = \left| \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \right|$

d) $y = 1 - |\cos x|$

* 7.14. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{\cos^2 x - |\cos x|}{\cos x}$ w przedziale $(-\pi; 3\pi)$ i podaj argumenty, dla których wartości tej funkcji są równe $\frac{1}{2}$.

7.15. Na podstawie odpowiednich wykresów ustal znak różnicy.

a) $\sin 2,5 - \sin 3$

c) $\sin(-4) - \sin(-1)$

e) $\cos 7 - \cos(-0,5)$

b) $\cos 4 - \cos 3$

d) $\cos(-5) - \cos(-2)$

f) $\sin 8,5 - \sin 1,5$

7.16. Na podstawie odpowiednich wykresów ustal znak liczby.

a) $\sin 2 - \cos 4$

c) $\cos 8 - \sin 4,5$

e) $\cos(-5) + \cos(-2,5)$

b) $\cos(-3) - \sin(-4)$

d) $\sin 2,5 + \cos(-2,5)$

f) $\cos 1 - \sin 7$

7.17. Skorzystaj z odpowiedniego wykresu funkcji i ustaw podane liczby od najmniejszej do największej.

a) $\sin 3, \sin(-4), \sin 5, \sin \frac{1}{2}$

b) $\cos 2, \cos 6, \cos 3, \cos(-1)$

* 7.18. Narysuj wykres funkcji.

a) $f(x) = \frac{\sin x}{|\sin x|}$

b) $f(x) = \frac{1}{2}(\sin x - |\sin x|)$

7.19. Czy funkcja $f(x) = \sin x + \cos x + 2$ ma miejsca zerowe? Odpowiedź uzasadnij.7.20. Rozwiąż równanie dla $x \in (0; 2\pi)$.

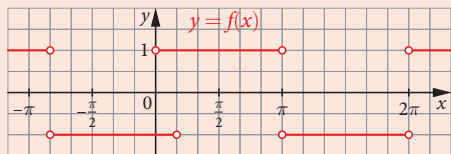
a) $\sin x = \frac{1}{2}$

c) $\operatorname{tg} x = 1$

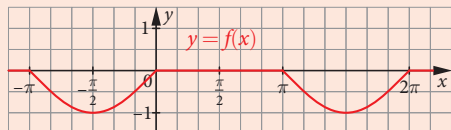
b) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

7.18. a) $f(x) = \frac{\sin x}{|\sin x|} = \begin{cases} 1 & \text{dla } \sin x > 0 \\ -1 & \text{dla } \sin x < 0 \end{cases}$



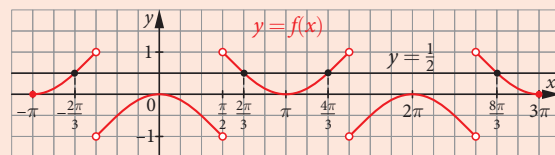
b) $f(x) = \frac{1}{2}(\sin x - |\sin x|) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \sin x > 0 \\ \sin x & \text{dla } \sin x < 0 \end{cases}$



7.14. Jeżeli $\cos x > 0$, to $f(x) = \frac{\cos^2 x - \cos x}{\cos x} = \cos x - 1$.

Jeżeli $\cos x < 0$, to $f(x) = \frac{\cos^2 x + \cos x}{\cos x} = \cos x + 1$.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x - 1 & \text{dla } x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right) \\ \cos x + 1 & \text{dla } x \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{2}; 3\pi\right) \end{cases}$$



Odp.: $f(x) = \frac{1}{2}$ dla $x \in \left\{ -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3} \right\}$

7.21. Rozwiąż równanie.

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

e) $2 \cos x + 1 = 0$

b) $\cos x = -1$

d) $2 \sin x - \sqrt{2} = 0$

f) $3 \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$

7.22. Rozwiąż równanie.

a) $\sin x = 0,829$

c) $\operatorname{tg} x = 1,327$

e) $\cos x = -0,515$

b) $\cos x = 0,342$

d) $\sin x = -0,6428$

f) $\operatorname{tg} x = -11,43$

7.23. Rozwiąż nierówność dla $x \in \langle -2\pi; 2\pi \rangle$.

a) $\sin x \geq \frac{1}{2}$

b) $2 \cos x < \sqrt{3}$

c) $\sqrt{3} \operatorname{tg} x > 1$

d) $6 \cos x + 3\sqrt{2} \leq 0$

7.24. Narysuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x) = \sin x$ oraz $g(x) = -\cos x$ i odczytaj, dla jakich argumentów z przedziału $\langle 0; 2\pi \rangle$ prawdziwa jest nierówność $\sin x + \cos x \leq 0$.

7.25. Rozwiąż nierówność.

a) $\sin x + 1 > 0$

b) $\sqrt{2} \cos x \leq 1$

c) $\operatorname{tg} x > -1$

d) $2 \cos x + 1 > 0$

* **7.26.** Dla jakich wartości parametru m równanie $\cos x = -\frac{1}{2}$ ma w przedziale $\langle 0; m \rangle$ dokładnie jedno rozwiązanie?

Prosto do matury



1. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji trygonometrycznej f o okresie zasadniczym 2π .

Oceń prawdziwość podanych zdań.

Funkcja f może być opisana za pomocą wzoru

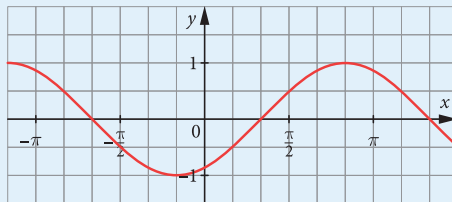
A. $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. B. $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$. C. $f(x) = \cos\left(x + \frac{7\pi}{6}\right)$.

2. Wyznacz wartość największą i wartość najmniejszą funkcji $f(x) = -\sin x + \frac{1}{2}$ w przedziale $\left\langle \frac{7\pi}{6}; 2\pi \right\rangle$. Podaj argumenty, dla których są przyjmowane te wartości.

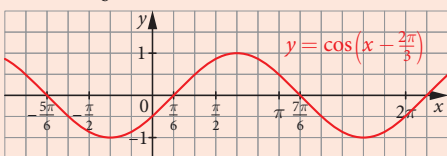
3. Rozwiąż równanie $\operatorname{tg} x = -0,7265$ dla $x \in \langle -\pi; 2\pi \rangle$.

4. Rozwiąż nierówność $\cos x \leq -\frac{1}{2}$ dla $x \in \langle -2\pi; 2\pi \rangle$.

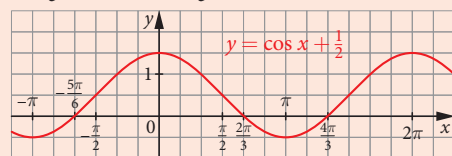
5. Rozwiąż równanie $2 \sin x + \sqrt{3} = 0$.



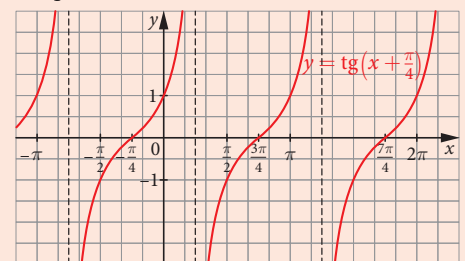
7.11. a) $\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$



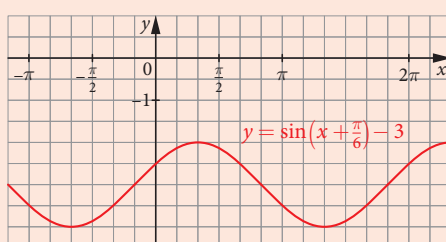
b) $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ lub $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$



c) $\frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$



d) brak miejsc zerowych



7.21. Patrz s. 74.

7.22. Patrz s. 75.

7.23.

a) $x \in \left\langle -\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\rangle$

b) $x \in \left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{\pi}{6} \right) \cup \left(\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right)$

c) $x \in \left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{3\pi}{2} \right) \cup$

$\cup \left(-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2} \right)$

d) $x \in \left\langle -\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right\rangle$

7.24. Patrz s. 75.

7.25. Patrz s. 76.

7.26. Najmniejsze dodatnie

rozwiązania równania $\cos x = -\frac{1}{2}$

to $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ i $\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$.

Zatem dane równanie ma

w przedziale $\langle 0; m \rangle$ co najmniej

jedno rozwiązanie, gdy $m \geq \frac{2\pi}{3}$,

a co najwyżej jedno rozwiązanie, gdy $m > 0$ i $m < \frac{4\pi}{3}$.

Odp.: $m \in \left\langle \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} \right\rangle$

Prosto do matury

1. P, F, P

2. wartość najmniejsza: $\frac{1}{2}$

dla $x = 2\pi$, wartość największa: $\frac{3}{2}$

dla $x = \frac{3\pi}{2}$

3. $x \approx -\frac{\pi}{5}$ lub $x \approx \frac{4\pi}{5}$ lub $x \approx \frac{9\pi}{5}$

4. $x \in \left\langle -\frac{4\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} \right\rangle$

5. $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

8. Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów

Umiejętności:

- stosowanie wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów
- stosowanie wzorów na sinus, cosinus i tangens kąta podwojonego

Sinus i cosinus sumy i różnicy kątów

Wzory podane w twierdzeniu wyrażają związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta $\alpha + \beta$ lub kąta $\alpha - \beta$ a funkcjami trygonometrycznymi kątów α i β .

Twierdzenie

Dla dowolnych kątów α i β prawdziwe są wzory:

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

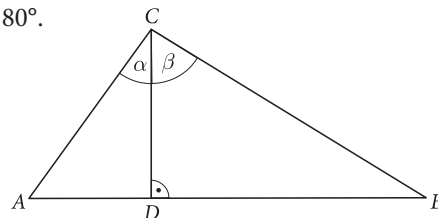
Dowód

Wzory redukcyjne umożliwiają wyrażenie funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta za pomocą funkcji trygonometrycznych odpowiednich kątów ostrych. Wyprowadzenie wzorów podanych w twierdzeniu ograniczymy więc do sytuacji, w której kąty α i β są ostre. Ponadto będziemy korzystać z własności trójkąta na płaszczyźnie, zatem kąty α i β przedstawimy w mierze stopniowej.

Skoro α i β są kątami ostrymi, to $\alpha + \beta < 180^\circ$.

Istnieje nieskończenie wiele trójkątów, w których jeden z kątów ma miarę $\alpha + \beta$.

Rozważmy trójkąt ABC przedstawiony na rysunku. Obliczymy jego pole dwoma sposobami.



$$(1) \quad P_{ABC} = \frac{1}{2} |AC| \cdot |BC| \cdot \sin(\alpha + \beta)$$

$$(2) \quad P_{ABC} = P_{ADC} + P_{BDC} = \frac{1}{2} |AD| \cdot |DC| + \frac{1}{2} |DB| \cdot |DC|$$

Zauważmy, że:

$$|AD| = |AC| \sin \alpha \qquad |DB| = |BC| \sin \beta$$

$$|DC| = |BC| \cos \beta \qquad |DC| = |AC| \cos \alpha$$

ZZ i MKP

temat 1.12

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.8

Generator
testów i sprawdzianów

Zatem, ze wzoru (2), $P_{ABC} = \frac{1}{2}|AC| \sin \alpha \cdot |BC| \cos \beta + \frac{1}{2}|BC| \sin \beta \cdot |AC| \cos \alpha$. Stąd:

$$(3) \quad P_{ABC} = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BC|(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)$$

Porównujemy równości (1) i (3), i otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}|AC| \cdot |BC| \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BC|(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)$$

czyli

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

Wyprowadziliśmy w ten sposób wzór na **sinus sumy dwóch kątów**. Skorzystamy z niego przy dowodzeniu następnych wzorów.

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) = \\ &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad \leftarrow \sin(-\beta) = -\sin \beta, \cos(-\beta) = \cos \beta \end{aligned}$$

Zatem:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

Otrzymaliśmy wzór na **sinus różnicy dwóch kątów**.

Podobnie wyprowadzamy wzór na **cosinus sumy dwóch kątów**.

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \sin(90^\circ - (\alpha + \beta)) = & \leftarrow \sin(90^\circ - \gamma) = \cos \gamma \\ &= \sin((90^\circ - \alpha) - \beta) = & \leftarrow \sin(\delta - \beta) = \sin \delta \cos \beta - \cos \delta \sin \beta \\ &= \sin(90^\circ - \alpha) \cos \beta - \cos(90^\circ - \alpha) \sin \beta = & \leftarrow \cos(90^\circ - \gamma) = \sin \gamma \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

Zatem:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Wyprowadzenie wzoru na **cosinus różnicy dwóch kątów** pozostawiamy jako zadanie.

Koniec dowodu

Przykład 1

Obliczymy wartości funkcji sinus oraz cosinus kątów 75° i 15° .

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Odp.: } \cos 15^\circ = \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \quad \cos 75^\circ = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

◀8.5. Kąty α i β spełniają warunki: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $90^\circ < \beta < 180^\circ$, $\sin \alpha = \frac{5}{6}$, $\cos \beta = -\frac{3}{4}$. Oblicz wartości sinusa, cosinusa i tangensa kąta $\alpha + \beta$.

Odp.: $\sin(\alpha + \beta) = \frac{-15 + \sqrt{77}}{24}$,

$\cos(\alpha + \beta) = \frac{-3\sqrt{11} - 5\sqrt{7}}{24}$,

$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{27\sqrt{7} - 20\sqrt{11}}{19}$

◀8.6. Kąty α i β spełniają warunki: $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, $270^\circ < \beta < 360^\circ$, $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, $\sin \beta = -\frac{1}{3}$. Oblicz wartości sinusa, cosinusa i tangensa kąta $\alpha - \beta$.

Odp.: $\sin(\alpha - \beta) = \frac{4\sqrt{2} - \sqrt{5}}{9}$,

$\cos(\alpha - \beta) = \frac{-2 - 2\sqrt{10}}{9}$,

$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{2}$

Przykład 2 ◀ zad. 8.5, 8.6

Obliczymy $\sin(\alpha + \beta)$ i $\cos(\alpha + \beta)$ dla α i β takich, że $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $180^\circ < \beta < 270^\circ$, $\cos \alpha = \frac{1}{4}$ i $\sin \beta = -\frac{3}{5}$.

Rozwiązanie

Obliczamy wartości $\sin \alpha$ oraz $\cos \beta$ występujące w potrzebnych nam wzorach.

• $\sin^2 \alpha + \frac{1}{16} = 1$

◀ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\sin^2 \alpha = \frac{15}{16}$, stąd $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$

◀ $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, więc $\sin \alpha > 0$

• $\frac{9}{25} + \cos^2 \beta = 1$

$\cos^2 \beta = \frac{16}{25}$, stąd $\cos \beta = -\frac{4}{5}$

◀ $180^\circ < \beta < 270^\circ$, więc $\cos \beta < 0$

Zatem:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{-3 - 4\sqrt{15}}{20}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{-4 + 3\sqrt{15}}{20}$$

Odp.: $\sin(\alpha + \beta) = \frac{-3 - 4\sqrt{15}}{20}$, $\cos(\alpha + \beta) = \frac{-4 + 3\sqrt{15}}{20}$

Tangens sumy i tangens różnicy kątów

Korzystając ze wzorów na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, można wyprowadzić wzory na tangens sumy i tangens różnicy kątów.

Twierdzenie

Dla dowolnych kątów α i β prawdziwe są wzory:

• $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

• $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

Udowodnimy pierwszy z tych wzorów.

Dowód

Lewa strona wzoru jest określona, gdy $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Prawa strona jest określona, gdy $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ i $1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \neq 0$.

Zastanówmy się, dla jakich kątów spełniony jest ostatni z wymienionych warunków.

Zauważmy, że gdy $\operatorname{tg} \alpha = 0$ lub $\operatorname{tg} \beta = 0$, to $1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \neq 0$.

Przyjmijmy, że $\operatorname{tg} \beta \neq 0$, czyli $\beta \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Warunek $1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \neq 0$ można teraz zapisać w postaci $\operatorname{tg} \alpha \neq \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$. Stąd:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \neq \frac{\cos \beta}{\sin \beta}, \text{ czyli } \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \neq 0, \text{ więc } \cos(\alpha + \beta) \neq 0$$

Zatem $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ten warunek został już uwzględniony jako założenie dotyczące lewej strony wzoru. Ostatecznie wszystkie założenia konieczne w tym wzorze tworzą następujący układ:

$$\begin{cases} \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, & k \in \mathbf{Z} \\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + m\pi, & m \in \mathbf{Z} \\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + l\pi, & l \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

Przekształcamy lewą stronę wzoru.

$$\begin{aligned} L = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \leftarrow \text{stosujemy wzory na sinus i cosinus sumy kątów} \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \leftarrow \cos \alpha \cos \beta \neq 0, \text{ więc dzielimy każdy składnik przez } \cos \alpha \cos \beta \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \end{aligned}$$

Koniec dowodu

Wyprowadzenie wzoru na **tangens różnicy dwóch kątów** pozostawiamy jako zadanie do samodzielnego wykonania.

Przykład 3 $\triangleleft$ zad. 8.7

Dane są kąty α i β takie, że $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{5}$ i $\operatorname{tg} \beta = -\sqrt{2}$. Obliczmy wartość funkcji tangens kąta $\alpha - \beta$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha - \beta) &= \frac{\sqrt{5} - (-\sqrt{2})}{1 + \sqrt{5} \cdot (-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{10}} = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(1 + \sqrt{10})}{(1 - \sqrt{10})(1 + \sqrt{10})} = \\ &= \frac{\sqrt{5} + 5\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2\sqrt{5}}{1 - 10} = \frac{3\sqrt{5} + 6\sqrt{2}}{9} = -\frac{\sqrt{5} + 2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Odp.: } \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = -\frac{\sqrt{5} + 2\sqrt{2}}{3}$$

◀ 8.7. Dane są: $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{5}$

i $\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{2}$. Oblicz wartości tangensa kątów $\alpha + \beta$ oraz $\alpha - \beta$.

$$\text{Odp.: } \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{11}{16},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = -\frac{19}{4}$$

Funkcje trygonometryczne podwojonego kąta

Za pomocą wzorów na funkcje trygonometryczne sumy kątów możemy wyprowadzić wzory na funkcje trygonometryczne kąta podwojonego.

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad 2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Twierdzenie

Dla dowolnego kąta α prawdziwe są wzory:

- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

Dla kątów $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ i $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) prawdziwy jest wzór:

- $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$

Można skorzystać z jedynej trygonometrycznej i wyrazić $\cos 2\alpha$ za pomocą jednej funkcji trygonometrycznej zmiennej α :

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

lub

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

◀ 8.7. Patrz s. 83.

Przykład 4

◀ zad. 8.7

Kąt α jest ostry i $\sin \alpha = \frac{7}{25}$. Obliczymy $\sin 2\alpha$ i $\cos 2\alpha$.

Rozwiązanie

Obliczamy wartość $\cos \alpha$.

$$\frac{49}{625} + \cos^2 \alpha = 1 \quad \leftarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{576}{625}, \quad \text{stąd } \cos \alpha = \frac{24}{25} \quad \leftarrow \cos \alpha > 0$$

Zatem:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{7}{25} \cdot \frac{24}{25} = \frac{336}{625}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{576}{625} - \frac{49}{625} = \frac{527}{625}$$

$$\text{Odp.: } \sin 2\alpha = \frac{336}{625}, \quad \cos 2\alpha = \frac{527}{625}$$

◀ 8.19. Rozwiązanie a) • $1 + \cos 2\alpha \neq 0$, czyli $\cos 2\alpha \neq -1$, stąd $2\alpha \neq \pi + 2k\pi$, czyli $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

• $1 + \cos \alpha \neq 0$, czyli $\cos \alpha \neq -1$, stąd $\alpha \neq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, • $\cos \frac{\alpha}{2} \neq 0$, stąd $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, czyli $\alpha \neq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Założenia: $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ i $\alpha \neq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$L = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + 2 \cos^2 \alpha - 1} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{1 + 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = P$$

b) Założenia: $1 + \cos 2\alpha \neq 0$, czyli $\cos 2\alpha \neq -1$, stąd $2\alpha \neq \pi + 2k\pi$, czyli $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$L = \frac{\sin 2\alpha \cdot \cos \alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \cos \alpha}{1 + 2 \cos^2 \alpha - 1} = \frac{2 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \sin \alpha = P$$

c) • $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \neq 0$, czyli $\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} \neq -1$, $\operatorname{tg} 2\alpha \neq -1$, stąd $2\alpha \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$, czyli $\alpha \neq -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$,

• $\cos \alpha \neq 0$, stąd $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Założenia: $\alpha \neq -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$ i $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$L = \frac{1 + 2 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \frac{1 + 2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha (\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)} = \frac{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos^2 \alpha (\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = P$$

Przykład 5 ◀ zad. 8.18

Obliczmy dokładną wartość tangensa kąta $22,5^\circ$.

Rozwiązanie

Skorzystamy ze wzoru na tangens kąta podwojonego: $\operatorname{tg}(2 \cdot 22,5^\circ) = \frac{2 \operatorname{tg} 22,5^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 22,5^\circ}$.

Niech $\operatorname{tg} 22,5^\circ = x$. Otrzymujemy równanie:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{2x}{1-x^2}, \text{ stąd } 1-x^2 = 2x \quad \leftarrow \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

$$x^2 + 2x - 1 = 0 \quad \Delta = 8, \quad x = -1 - \sqrt{2} \text{ lub } x = -1 + \sqrt{2}$$

Tangens kąta $22,5^\circ$ jest liczbą dodatnią, więc rozwiązaniem równania jest druga z otrzymanych liczb.

Odp.: $\operatorname{tg} 22,5^\circ = \sqrt{2} - 1$

Przykład 6 ◀ zad. 8.19

Udowodnimy tożsamość $1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{\cos x}$.

Dowód

Zbadamy najpierw, dla jakich argumentów wyrażenia po obu stronach znaku równości mają sens.

Aby określone były funkcje $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, muszą być spełnione następujące warunki:

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{oraz} \quad \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \text{czyli } x \neq \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Aby określona była prawa strona równania, należy założyć, że:

$$\cos x \neq 0, \quad \text{czyli } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ostatecznie $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ i $x \neq \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Przekształcamy lewą stronę równania.

$$\begin{aligned} L &= 1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1 + \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = && \leftarrow \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos \frac{x}{2} + \sin x \cdot \sin \frac{x}{2}}{\cos x \cdot \cos \frac{x}{2}} = && \leftarrow \cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x-y) \\ &= \frac{\cos\left(x - \frac{x}{2}\right)}{\cos x \cdot \cos \frac{x}{2}} = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\cos x \cdot \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{\cos x} = P \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy prawą stronę równania. Zatem dla wszystkich kątów spełniających założenia $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ i $x \neq \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$, podana równość jest prawdziwa.

Koniec dowodu

◀ 8.19. Ciąg dalszy. d) Założenia: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} L &= \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = \\ &= (1 - \sin^2 \alpha) \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha = P \end{aligned}$$

e) $\sin \alpha \neq 0$ i $\cos \alpha \neq -1$, i $\cos \frac{\alpha}{2} \neq 0$, stąd $\alpha \neq k\pi$ i $\alpha \neq \pi + 2k\pi$, i $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Założenia: $\alpha \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$P = \frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha (1 - \cos \alpha)}{2 \sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2})}{1 + 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = L$$

f) $\sin 2\alpha \neq 0$ i $\cos 2\alpha \neq -1$, i $\cos \alpha \neq 0$, stąd $2\alpha \neq k\pi$ i $2\alpha \neq \pi + 2k\pi$, i $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, czyli $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$ i $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, i $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Założenia: $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$L = \frac{2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2 \sin 2\alpha + \sin 4\alpha} = \frac{2 \sin 2\alpha - 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{2 \sin 2\alpha + 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha} = \frac{2 \sin 2\alpha (1 - \cos 2\alpha)}{2 \sin 2\alpha (1 + \cos 2\alpha)} = \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 \alpha)}{1 + 2 \cos^2 \alpha - 1} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha = P$$

◀ 8.18. Wykaż, że

$$\sin 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}.$$

Rozwiązanie

$$1 - 2 \sin^2 22,5^\circ = \cos 45^\circ$$

$$\begin{aligned} \sin^2 22,5^\circ &= \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \\ &= \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$\sin 22,5^\circ > 0$, więc $\sin 22,5^\circ =$

$$= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

◀ 8.19. Wykaż, że podane równanie jest tożsamością. Zapisz konieczne założenia.

a) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

b) $\frac{\sin 2\alpha \cdot \cos \alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \sin \alpha$

c) $\frac{1 + 2 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

d) $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha$

e) $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha}$

f) $\frac{2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2 \sin 2\alpha + \sin 4\alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$

Przykład 7 ◀ zad. 8.20

Uprościmy wyrażenie $\frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{1 - \cos 4x}$.

Rozwiązanie

Zapišemy najpierw konieczne założenia.

Wyrażenie $\frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{1 - \cos 4x}$ jest określone, gdy $1 - \cos 4x \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{1 - \cos 4x} &= \frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{1 - 1 + 2 \sin^2 2x} = && \leftarrow \cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x \\ &= \frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{2 \sin^2 2x} = \frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{2 \cdot 4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{1}{8} && \leftarrow \sin 2x = 2 \sin x \cos x \end{aligned}$$

Odp.: Dla każdego kąta x spełniającego założenie $1 - \cos 4x \neq 0$, wartość podanego wyrażenia jest równa $\frac{1}{8}$.

Zadania

W każdym z zadań 8.1–8.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszytach.

Odpowiedzi i rozwiązania

8.1. D

8.1. Wiadomo, że α jest kątem rozwartym i $\sin \alpha = \frac{5}{13}$. Wskaż wartość $\sin 2\alpha$.

- A. $\frac{10}{13}$ B. $-\frac{10}{13}$ C. $\frac{120}{169}$ D. $-\frac{120}{169}$

8.2. B

8.2. Wskaż wartość $\operatorname{tg} 75^\circ$.

- A. $\sqrt{3} - 1$ B. $\sqrt{3} + 2$ C. $\frac{\sqrt{3} + 1}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3} + 3}{3}$

8.3. C

8.3. Wskaż wyrażenie równe wyrażeniu $\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha$.

- A. $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$ B. $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$ C. $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$ D. $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$

8.4. $\frac{-3\sqrt{3} - 2\sqrt{10}}{14}$

8.4. Kąt α jest rozwarty i $\cos \alpha = -\frac{3}{7}$. Oblicz $\sin(120^\circ + \alpha)$.

8.5. $\sin(\alpha + \beta) = \frac{-15 + \sqrt{77}}{24}$,

$\cos(\alpha + \beta) = \frac{-3\sqrt{11} - 5\sqrt{7}}{24}$,

$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{27\sqrt{7} - 20\sqrt{11}}{19}$

8.5. Kąty α i β spełniają warunki: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $90^\circ < \beta < 180^\circ$, $\sin \alpha = \frac{5}{6}$, $\cos \beta = -\frac{3}{4}$. Oblicz wartości sinus, cosinusa i tangensa kąta $\alpha + \beta$.

◀ **8.20.** Uprość wyrażenie $\frac{4 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x}{(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)}$.

Rozwiązanie

$$\frac{4 \sin x \cos x \cos 2x}{(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)} = \frac{2 \sin 2x \cos 2x}{\cos^2 2x - \sin^2 2x} = \frac{\sin 4x}{\cos 4x} = \operatorname{tg} 4x$$

$\cos 4x \neq 0$, stąd $4x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, czyli $x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.

8.6. Kąty α i β spełniają warunki: $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, $270^\circ < \beta < 360^\circ$, $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, $\sin \beta = -\frac{1}{3}$. Oblicz wartości sinusa, cosinusa i tangensa kąta $\alpha - \beta$.

8.7. Dane są: $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{5}$ i $\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{2}$. Oblicz wartości tangensa kątów $\alpha + \beta$ oraz $\alpha - \beta$.

8.8. Kąt α jest ostry i $\sin \alpha = \frac{2}{3}$. Oblicz $\sin 2\alpha$.

8.9. Kąt α spełnia warunki: $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ oraz $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Oblicz $\cos 3\alpha$.

8.10. Dany jest $\operatorname{tg} \alpha = -2$. Oblicz $\operatorname{tg} 4\alpha$.

8.11. Oblicz wartość wyrażenia bez użycia tablic trygonometrycznych.

- a) $\sin 20^\circ \cdot \cos 40^\circ + \cos 20^\circ \cdot \sin 40^\circ$
- b) $\sin 80^\circ \cdot \cos 50^\circ - \cos 80^\circ \cdot \sin 50^\circ$
- c) $\cos 15^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 15^\circ \cdot \sin 30^\circ$
- d) $\cos 70^\circ \cdot \cos 40^\circ + \sin 70^\circ \cdot \sin 40^\circ$

8.12. Oblicz wartość wyrażenia bez użycia tablic trygonometrycznych.

- a) $\frac{2 \sin 75^\circ \cdot \cos 75^\circ}{\cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ}$
- b) $\frac{\cos^2 67^\circ 30' - \sin^2 67^\circ 30'}{\sin 112^\circ 30' \cdot \cos 112^\circ 30'}$
- c) $\frac{\sin 44^\circ \cdot \cos 44^\circ}{\cos (90^\circ - 88^\circ)}$
- d) $\frac{\sin^2 12^\circ - \cos^2 12^\circ}{\sin 12^\circ \cdot \sin 78^\circ \cdot \operatorname{tg} 66^\circ}$

D 8.13. Udowodnij wzór $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$. Skorzystaj ze wzoru na cosinus sumy kątów.

D 8.14. Udowodnij, że $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$. Zapisz konieczne założenia. Skorzystaj ze wzoru na tangens sumy kątów.

8.15. Oblicz wartość wyrażenia. Zapisz konieczne założenia.

$$1 - 2 \cos x + \cos 2x + 4 \cos x \cdot \sin^2 \frac{x}{2}$$

8.16. Oblicz $\log(\cos 2x + \sin 2x \operatorname{tg} x)$. Podaj konieczne założenia.

$$\begin{aligned} 8.13. \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) = \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha(-\sin \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

$$8.14. \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ i } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ i } \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg}(\alpha + (-\beta)) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(-\beta)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(-\beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$8.6. \sin(\alpha - \beta) = \frac{4\sqrt{2} - \sqrt{5}}{9},$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{-2 - 2\sqrt{10}}{9},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{2}$$

$$8.7. \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{11}{16},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = -\frac{19}{4}$$

$$8.8. \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

$$8.9. \frac{23}{27}$$

$$8.10. -\frac{24}{7}$$

$$8.11. \text{ a) } \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ b) } \frac{1}{2} \quad \text{ c) } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ d) } \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$8.12. \text{ a) } -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ b) } 2 \quad \text{ c) } \frac{1}{2} \quad \text{ d) } -2$$

$$8.15. 0, x \in \mathbb{R}$$

$$8.16. 0, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

8.17. a) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$

b) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$

8.18. $1 - 2 \sin^2 22,5^\circ = \cos 45^\circ$

$$\sin^2 22,5^\circ = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$\sin 22,5^\circ > 0$, więc $\sin 22,5^\circ =$

$$= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

8.19. Patrz s. 84, 85.

8.20. Patrz s. 86.

8.17. Zapisz podane wyrażenie w postaci funkcji trygonometrycznej sumy lub różnicy kątów.

a) $\frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha$

8.18. Wykaż, że $\sin 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$.

8.19. Wykaż, że podane równanie jest tożsamością. Zapisz konieczne założenia.

a) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

d) $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha$

b) $\frac{\sin 2\alpha \cdot \cos \alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \sin \alpha$

e) $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha}$

c) $\frac{1 + 2 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

f) $\frac{2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2 \sin 2\alpha + \sin 4\alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$

* 8.20. Uprość wyrażenie $\frac{4 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x}{(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)}$.

* 8.21. Udowodnij równość $\cos \frac{180^\circ}{5} \cdot \cos \frac{360^\circ}{5} = \frac{1}{4}$.

Prosto do matury

1. F, F, P

2. $\frac{\sqrt{21} - 4\sqrt{6}}{25}$

3. $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ lub $\frac{\sqrt{6}}{3}$

Prosto do matury



1. Wiadomo, że α i β są kątami ostrymi oraz $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ i $\sin \beta = \frac{1}{3}$.

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $\sin(\alpha + \beta) = 1$ B. $\cos(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{5} + 2\sqrt{2}}{3}$ C. $\cos(\alpha - \beta) = \frac{2\sqrt{10} + 2}{9}$

2. Dane są kąty α i β takie, że $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, $90^\circ < \beta < 180^\circ$, $\sin \alpha = -0,4$, $\cos \beta = -0,2$. Oblicz $\cos(\alpha - \beta)$.

3. Dany jest $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Oblicz $\cos \frac{\alpha}{2}$.

4. Wykaż, że równanie $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$ jest tożsamością.

5. Udowodnij tożsamość. Zapisz konieczne założenia.

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{\operatorname{tg}^3 \alpha - 3 \operatorname{tg} \alpha}{3 \operatorname{tg}^2 \alpha - 1}$$

8.21. $L = \cos \frac{180^\circ}{5} \cdot \cos \frac{360^\circ}{5} = \cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ = \frac{\sin 36^\circ \cos 36^\circ \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{\sin 72^\circ \cos 72^\circ}{2 \sin 36^\circ} = \frac{\sin 144^\circ}{4 \sin 36^\circ} = \frac{\sin(180^\circ - 36^\circ)}{4 \sin 36^\circ} = \frac{\sin 36^\circ}{4 \sin 36^\circ} = \frac{1}{4} = P$

4. $L = \sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha =$
 $= 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha = P$

5. Założenia:

• $\cos 3\alpha \neq 0$, stąd $3\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, czyli $\alpha \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$,

• $\operatorname{tg}^2 \alpha \neq \frac{1}{3}$, stąd $\alpha \neq -\frac{\pi}{6} + k\pi$ i $\alpha \neq \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Tożsamość jest określona dla $\alpha \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$L = \operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg}(2\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg}^3 \alpha - 3 \operatorname{tg} \alpha}{3 \operatorname{tg}^2 \alpha - 1} = P$$

9. Równania i nierówności trygonometryczne

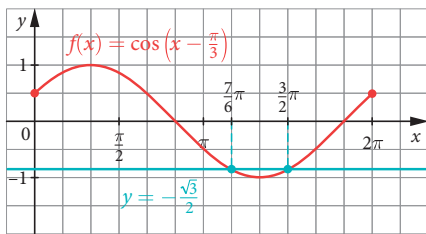
Umiejętności:

- rozwiązywanie równań i nierówności trygonometrycznych

Przykład 1 ◀ zad. 9.4

Narysujemy wykres funkcji $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$ i odczytamy z niego, dla jakich $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ spełnione jest równanie $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rozwiązanie



← prowadzimy prostą k o równaniu $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

← odczytujemy pierwsze współrzędne punktów wspólnych wykresu funkcji f i prostej k

Z wykresu odczytujemy, że $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ dla $x = \frac{7}{6}\pi$ lub $x = \frac{3}{2}\pi$.

Odp.: $x = \frac{7}{6}\pi$ lub $x = \frac{3}{2}\pi$

Z własności funkcji trygonometrycznych wynika, że:

- $\sin x = \sin t$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = t + 2k\pi$ lub $x = \pi - t + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
- $\cos x = \cos t$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = t + 2k\pi$ lub $x = -t + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
- $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} t$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = t + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; zakładamy, że x i t należą do dziedziny funkcji tangens.

Przykład 2 ◀ zad. 9.5

Skorzystamy z powyższych faktów i rozwiążemy dane równanie.

Rozwiązanie

a) $\sin 3x = \sin 2x$

$$3x = 2x + 2k\pi \text{ lub } 3x = \pi - 2x + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2k\pi \text{ lub } 5x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Odp.: $x = 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{5}(2k + 1)$, $k \in \mathbb{Z}$

◀ 9.5. Rozwiąż równanie.

a) $\operatorname{tg}(x - 1) = \operatorname{tg} 2x$ c) $\sin 4x = \sin \frac{1}{2}x$

b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x$ d) $\sin 3x = \cos x$

Odp.: a) $x = -1 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

b) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

c) $x = \frac{4}{7}k\pi$ lub $x = \frac{2}{9}\pi + \frac{4}{9}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

d) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

◀ 9.4. Rozwiąż równanie dla $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

a) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$

c) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{3}$

d) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Odp.: a) $x = \frac{\pi}{2}$ lub $x = \frac{5}{6}\pi$

b) $x = \frac{2}{3}\pi$ c) $x = \frac{\pi}{6}$ lub $x = \frac{7}{6}\pi$

d) $x = 0$ lub $x = \frac{3}{2}\pi$ lub $x = 2\pi$

ZZ i MKP

tematy 1.14–1.16

Multiteka

- Równania trygonometryczne – sinus
- Równania trygonometryczne – cosinus
- Równania trygonometryczne – tangens
- Nierówności trygonometryczne – sinus
- Nierówności trygonometryczne – cosinus
- Nierówności trygonometryczne – tangens

dlauczyciela.pl | Kartkówka 1.9

b) $\operatorname{tg}(x-2) = \operatorname{tg} 6x$

To równanie wymaga zapisania założeń związanych z dziedziną funkcji tangens:

Dziedziną równania (nierówności) nazywamy zbiór wszystkich liczb, dla których równanie (nierówność) ma sens.

$$\begin{cases} x-2 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 6x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbf{Z}, \text{ zatem } \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + 2 + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6} \end{cases}, k \in \mathbf{Z}$$

Teraz rozwiązujemy równanie.

$$x-2 = 6x + k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

$$-5x = 2 + k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

$$x = -\frac{2}{5} - \frac{k\pi}{5}, k \in \mathbf{Z}$$

Sprawdzenie, czy wszystkie znalezione rozwiązania należą do dziedziny równania, jest na ogół skomplikowane, gdyż dotyczy zbiorów liczb. Dlatego pokażemy takie rozumowanie tylko dla jednego przykładu. Zastosujemy dowód nie wprost.

Założmy, że istnieją pewne liczby całkowite k oraz m , dla których prawdziwa jest równość:

$$-\frac{2}{5} - \frac{k\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + 2 + m\pi, \text{ stąd } -\frac{12}{5} = \frac{\pi}{2} + m\pi + \frac{k\pi}{5}, \text{ czyli } -24 = \pi(5 + 10m + 2k)$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, ponieważ dla dowolnych liczb całkowitych k oraz m prawa strona równości jest liczbą niewymierną, a lewa liczbą wymierną. Zatem każde rozwiązanie x_0 równania spełnia pierwsze założenie: $x \neq \frac{\pi}{2} + 2 + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Podobnie można wykazać, że otrzymane rozwiązania spełniają drugie założenie.

Odp.: $x = -\frac{2}{5} - \frac{k\pi}{5}, k \in \mathbf{Z}$

c) $\cos \frac{1}{2}x = \sin \frac{1}{3}x$

Korzystamy z odpowiedniego wzoru redukcyjnego i doprowadzamy najpierw równanie do takiej postaci, w której porównywane będą te same funkcje trygonometryczne.

$$\cos \frac{1}{2}x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}x \right) \quad \leftarrow \sin t = \cos \left(\frac{\pi}{2} - t \right)$$

Otrzymujemy dwie serie zależności:

$$\frac{1}{2}x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}x + 2k\pi \text{ lub } \frac{1}{2}x = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}x + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

$$\frac{5}{6}x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ lub } \frac{1}{6}x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

Odp.: $x = \frac{3}{5}\pi + \frac{12}{5}k\pi$ lub $x = -3\pi + 12k\pi, k \in \mathbf{Z}$

Przykład 3 ◀ zad. 9.6

Rozwiążemy równanie $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie

Wprowadzamy pomocniczą niewiadomą $t = 2x - \frac{\pi}{3}$. Wtedy równanie ma postać:

$$\sin t = -\frac{1}{2}$$

Z wykresu funkcji $y = \sin t$ odczytujemy, że $\sin t = -\frac{1}{2}$, gdy:

$$t = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } t = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

Zatem:

$$2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

$$2x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ lub } 2x = -\frac{5}{6}\pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

$$\text{Odp.: } x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ lub } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

Przykład 4 ◀ zad. 9.7

Rozwiążemy równanie $\cos\left(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ w przedziale $\langle -\pi; 2\pi \rangle$.

Rozwiązanie

Rozwiążemy najpierw to równanie w zbiorze liczb rzeczywistych.

Wprowadzamy pomocniczą niewiadomą $t = \frac{3}{2}x + \frac{\pi}{3}$. Wtedy równanie ma postać:

$$\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$t = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } t = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

Zatem:

$$\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } \frac{3}{2}x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

$$\frac{3}{2}x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ lub } \frac{3}{2}x = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

$$\frac{3}{2}x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } \frac{3}{2}x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{9} + \frac{4}{3}k\pi \text{ lub } x = -\frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

◀ 9.6. Rozwiąż równanie.

a) $\sin 5x = 0$

b) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$

c) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$

d) $2 \sin \frac{x-\pi}{4} + \sqrt{2} = 0$

Odp.: a) $x = \frac{1}{5}k\pi, k \in \mathbf{Z}$

b) $x = \frac{5}{8}\pi + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

c) $x = -\frac{\pi}{2} + 3k\pi, k \in \mathbf{Z}$

d) $x = 8k\pi \text{ lub } x = 6\pi + 8k\pi, k \in \mathbf{Z}$

◀ 9.7. Rozwiąż równanie w podanym przedziale.

a) $\cos 3x = 0, x \in \langle 0; 2\pi \rangle$

b) $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, x \in \langle -\pi; \pi \rangle$

c) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) = -1, x \in \langle -\pi; 5\pi \rangle$

d) $\sin\left(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, x \in \langle 0; 2\pi \rangle$

Odp.:

a) $x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi\right\}$

b) $x \in \left\{-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi\right\}$

c) $x \in \left\{\frac{5}{6}\pi, \frac{17}{6}\pi, \frac{29}{6}\pi\right\}$

d) $x \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi\right\}$

Teraz uwzględniamy fakt, że rozwiązania mają należeć do przedziału $\langle -\pi; 2\pi \rangle$. Podstawiamy w miejsce k kolejne liczby całkowite.

- Dla $k = 0$ mamy $x = -\frac{\pi}{9} \in \langle -\pi; 2\pi \rangle$ lub $x = -\frac{\pi}{3} \in \langle -\pi; 2\pi \rangle$.
- Dla $k = 1$ mamy $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{4}{3}\pi = \frac{11}{9}\pi \in \langle -\pi; 2\pi \rangle$ lub $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}\pi = \pi \in \langle -\pi; 2\pi \rangle$.

Można sprawdzić, że po podstawieniu w miejsce k innych liczb całkowitych otrzymamy wartości x spoza przedziału $\langle -\pi; 2\pi \rangle$.

$$\text{Odp.: } x \in \left\{ -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{9}, \pi, \frac{11}{9}\pi \right\}$$

Przykład 5 ◀ zad. 9.8

$$\text{Rozwiążemy nierówność } \sin\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3}\right) < -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Rozwiązanie

Wprowadzamy pomocniczą niewiadomą $t = \frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3}$. Wtedy nierówność ma postać:

$$\sin t < -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Z wykresu funkcji $y = \sin t$ odczytujemy, że rozwiązaniami tej nierówności są wszystkie liczby t spełniające warunek $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi < t < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Zapisujemy tę podwójną nierówność w postaci układu.

$$\begin{cases} t > \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \\ t < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

Wracamy do naszego podstawienia. Mamy do rozwiązania następujący układ nierówności.

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3} > \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x > \pi + 2k\pi \\ \frac{1}{3}x < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 3\pi + 6k\pi \\ x < 4\pi + 6k\pi \end{cases}$$

$$\text{Odp.: } x \in (3\pi + 6k\pi; 4\pi + 6k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

◀ 9.8. Rozwiąż nierówność.

$$\text{a) } \sin \frac{x}{3} \leq 0 \qquad \text{c) } \operatorname{tg}\left(6x - \frac{\pi}{3}\right) > 0$$

$$\text{b) } \cos 2x < -\frac{1}{2} \qquad \text{d) } 2 \cos \frac{x + 3\pi}{4} \geq \sqrt{3}$$

$$\text{Odp.: a) } x \in (3\pi + 6k\pi; 6\pi + 6k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{b) } x \in \left(\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{2}{3}\pi + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{c) } x \in \left(\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{6}; \frac{5}{36}\pi + \frac{k\pi}{6}\right), k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{d) } x \in \left(-\frac{11}{3}\pi + 8k\pi; -\frac{7}{3}\pi + 8k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$$

Przykład 6 ◀ zad. 9.9

Rozwiążemy równanie $\sin 2x - \cos x = 0$.

Rozwiązanie

Zapisujemy lewą stronę równania w postaci iloczynu.

$$\begin{aligned} 2 \sin x \cos x - \cos x &= 0 & \leftarrow \sin 2x = 2 \sin x \cos x \\ \cos x (2 \sin x - 1) &= 0, \text{ stąd } \cos x = 0 \text{ lub } \sin x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Z odpowiednich wykresów odczytujemy rozwiązania równań.

$$\text{Odp.: } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \text{ lub } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Przykład 7 ◀ zad. 9.10

Rozwiążemy równanie $\cos 2x + 4 \sin^2 x = 3 \sin x$.

Rozwiązanie

Przekształcamy równanie tak, aby występowała w nim tylko jedna funkcja trygonometryczna.

$$\begin{aligned} 1 - 2 \sin^2 x + 4 \sin^2 x &= 3 \sin x & \leftarrow \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x \\ 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Wprowadzamy pomocniczą niewiadomą $t = \sin x$. Zatem $t \in \langle -1; 1 \rangle$.

Wtedy równanie ma postać:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0, \quad \Delta = 1, \quad t_1 = \frac{1}{2}, \quad t_2 = 1$$

Oba rozwiązania spełniają warunek $t \in \langle -1; 1 \rangle$, zatem $\sin x = \frac{1}{2}$ lub $\sin x = 1$.

$$\text{Odp.: } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \text{ lub } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ } k \in \mathbb{Z}$$

Przykład 8 ◀ zad. 9.12

Rozwiążemy równanie $\cos 10x + 2 \sin 7x \sin 3x = \frac{1}{2}$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że jeżeli przedstawimy $10x$ jako $7x + 3x$ i skorzystamy ze wzoru na cosinus sumy kątów, to otrzymamy wyłącznie funkcje trygonometryczne argumentów $7x$ albo $3x$.

$$\begin{aligned} \cos(7x + 3x) + 2 \sin 7x \sin 3x &= \frac{1}{2} \\ \cos 7x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x + 2 \sin 7x \sin 3x &= \frac{1}{2} \\ \cos 7x \cos 3x + \sin 7x \sin 3x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

◀9.12. Rozwiąż równanie.

- a) $\sin 5x - \cos 3x \sin 2x = 0$ c) $4 \cos x \cos 4x = 2 \cos 5x + 1$
 b) $\sin 5x + 2 \cos 6x \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\cos 9x + 4 \sin 7x \sin x \cos x = 1$

$$\text{Odp.: a) } x = \frac{k\pi}{3} \text{ lub } x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}k\pi, \text{ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{b) } x = \frac{1}{28}\pi + \frac{2}{7}k\pi \text{ lub } x = \frac{3}{28}\pi + \frac{2}{7}k\pi, \text{ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{c) } x = \frac{1}{9}\pi + \frac{2}{3}k\pi \text{ lub } x = -\frac{1}{9}\pi + \frac{2}{3}k\pi, \text{ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{d) } x = \frac{2}{5}k\pi, \text{ } k \in \mathbb{Z}$$

◀9.9. Rozwiąż równanie.

- a) $4 \sin^2 x - 1 = 0$
 b) $2 \cos^2 x - 1 = 0$
 c) $(\sin x + 2)^2 = 1$
 d) $3 \cos^2 x - 6 \cos x = 0$
 e) $3 \operatorname{tg}^2 x - 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1 = 0$
 f) $\cos^2 x - \sin^2 x = (\sin x - \cos x)^2$

$$\text{Odp.: a) } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\text{lub } x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

$$\text{lub } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\text{lub } x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, \text{ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{b) } x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\text{lub } x = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi$$

$$\text{lub } x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \text{ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{c) } x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \text{ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{d) } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{e) } x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \text{ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{f) } x = k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ } k \in \mathbb{Z}$$

◀9.10. Rozwiąż równanie.

- a) $4 \cos^2 x - 4 \cos x = 3$
 b) $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$
 c) $2 \cos^2 x + 5 \cos x = 3$
 d) $2 \cos^2 x + 5 \cos x = -2$
 e) $\sin^3 x - 6 \sin^2 x - \sin x + 6 = 0$
 f) $(\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 = 2 \sin^2 x$

$$\text{Odp.: a) } x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

$$\text{lub } x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \text{ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{b) } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

$$\text{lub } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{c) } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{d) } x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

$$\text{lub } x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \text{ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{e) } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \text{ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{f) } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \text{ } k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(7x - 3x) = \frac{1}{2}$$

← korzystamy ze wzoru na cosinus różnicy kątów

$$\cos 4x = \frac{1}{2}$$

$$4x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ lub } 4x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Odp.: } x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \text{ lub } x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

◀ 9.26. Dla jakich wartości parametru m równanie ma rozwiązanie?

a) $2 \cos x = 4m^2 - 2$

b) $\operatorname{tg} x = 5m^2 - 7m + 11$

c) $\sin x = m^2 - 2m$

d) $\sin^2 x - \cos^2 x = m^2 - 6m + 10$

Odp.: a) $m \in \langle -1; 1 \rangle$

b) $m \in \mathbb{R}$

c) $m \in \langle 1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2} \rangle$

d) $m = 3$

Przykład 9 ◀ zad. 9.26

Sprawdźmy, dla jakich wartości parametru m równanie $\sin x \cos x = 2m^2 - 4m + 2$ ma rozwiązanie.

Rozwiązanie

Przekształcamy równanie tak, aby skorzystać ze wzoru na sinus kąta podwojonego.

$$2 \sin x \cos x = 4m^2 - 8m + 4$$

$$\sin 2x = 4m^2 - 8m + 4 \quad \leftarrow \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

Wyrażenie po lewej stronie tego równania przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $\langle -1; 1 \rangle$. Zatem dane równanie będzie miało rozwiązanie, jeżeli spełniona będzie nierówność podwójna:

$$-1 \leq 4m^2 - 8m + 4 \leq 1$$

którą zapiszemy w postaci układu nierówności:

$$\begin{cases} 4m^2 - 8m + 4 \geq -1 \\ 4m^2 - 8m + 4 \leq 1 \end{cases}$$

Rozwiązujemy kolejno obie powyższe nierówności.

$$4m^2 - 8m + 4 \geq -1$$

$$4m^2 - 8m + 5 \geq 0$$

$$\Delta = -16$$

Wyrażenie $4m^2 - 8m + 5$ jest zawsze dodatnie, więc pierwsza nierówność jest prawdziwa dla każdej rzeczywistej wartości m .

$$4m^2 - 8m + 4 \leq 1$$

$$4m^2 - 8m + 3 \leq 0$$

$$\Delta = 16, \quad m_1 = \frac{1}{2}, \quad m_2 = \frac{3}{2}$$

Druga nierówność jest prawdziwa dla $m \in \langle \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \rangle$. Zatem przedział $\langle \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \rangle$ jest zbiorem rozwiązań układu nierówności.

Odp.: Równanie ma rozwiązania dla $m \in \langle \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \rangle$.

Zadania

W każdym z zadań 9.1–9.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

9.1. Wszystkie rozwiązania równania $\operatorname{tg}^2 x = 1$ można zapisać w postaci

- A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

9.2. Wszystkie rozwiązania równania $\cos \frac{1}{2}x = -1$ można zapisać w postaci

- A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = 2\pi + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = 3\pi + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

9.3. Wskaż liczbę rozwiązań równania $\sin 2x = \frac{1}{2}$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

9.4. Rozwiąż równanie dla $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

- a) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$
 c) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{3}$
 d) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

9.5. Rozwiąż równanie.

- a) $\operatorname{tg}(x - 1) = \operatorname{tg} 2x$
 b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x$
 c) $\sin 4x = \sin \frac{1}{2}x$
 d) $\sin 3x = \cos x$

9.6. Rozwiąż równanie.

- a) $\sin 5x = 0$
 b) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$
 c) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$
 d) $2 \sin \frac{x - \pi}{4} + \sqrt{2} = 0$

9.7. Rozwiąż równanie w podanym przedziale.

- a) $\cos 3x = 0, x \in \langle 0; 2\pi \rangle$
 b) $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, x \in \langle -\pi; \pi \rangle$
 c) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) = -1, x \in \langle -\pi; 5\pi \rangle$
 d) $\sin\left(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, x \in \langle 0; 2\pi \rangle$

9.7. a) $x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi\right\}$

b) $x \in \left\{-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi\right\}$

c) $x \in \left\{\frac{5}{6}\pi, \frac{17}{6}\pi, \frac{29}{6}\pi\right\}$

d) $x \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi\right\}$

Odpowiedzi i rozwiązania

9.1. C

9.2. C

9.3. D

9.4. a) $x = \frac{\pi}{2}$ lub $x = \frac{5}{6}\pi$

b) $x = \frac{2}{3}\pi$

c) $x = \frac{\pi}{6}$ lub $x = \frac{7}{6}\pi$

d) $x = 0$ lub $x = \frac{3}{2}\pi$ lub $x = 2\pi$

9.5. a) $x = -1 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ lub

$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $x = \frac{4}{7}k\pi$ lub $x = \frac{2}{9}\pi + \frac{4}{9}k\pi,$
 $k \in \mathbb{Z}$

d) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,$
 $k \in \mathbb{Z}$

9.6. a) $x = \frac{1}{5}k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $x = \frac{5}{8}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $x = -\frac{\pi}{2} + 3k\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) $x = 8k\pi$ lub $x = 6\pi + 8k\pi,$
 $k \in \mathbb{Z}$

9.10. a) $x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$

lub $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$

lub $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) $x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$

lub $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

e) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ lub $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

f) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ lub $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

9.11. a) $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5}{6}\pi; \frac{13}{6}\pi \right\rangle$

b) $x \in \left\langle -2\pi; -\frac{3}{4}\pi \right\rangle \cup$

$\cup \left\langle -\frac{\pi}{4}; \frac{5}{4}\pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{7}{4}\pi; 2\pi \right\rangle$

c) $x \in \{-\pi, 0, \pi, 2\pi\}$

d) $x \in (-\pi; 0) \cup (\pi; 2\pi)$

9.12. a) $x = \frac{k\pi}{3}$ lub $x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $x = \frac{1}{28}\pi + \frac{2}{7}k\pi$ lub

$x = \frac{3}{28}\pi + \frac{2}{7}k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $x = \frac{1}{9}\pi + \frac{2}{3}k\pi$ lub

$x = -\frac{1}{9}\pi + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) $x = \frac{2}{5}k\pi, k \in \mathbb{Z}$

9.13. $x \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi \right\}$

9.14. $x \in \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi, 2\pi, \frac{7}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi \right\}$

9.15. $x \in \left\{ 0, \frac{7}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi, \pi \right\}$

9.16. $x \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi \right\}$

9.17. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

9.18. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

9.8. Rozwiąż nierówność.

a) $\sin \frac{x}{3} \leq 0$

b) $\cos 2x < -\frac{1}{2}$

c) $\operatorname{tg} \left(6x - \frac{\pi}{3} \right) > 0$

d) $2 \cos \frac{x+3\pi}{4} \geq \sqrt{3}$

9.9. Rozwiąż równanie.

a) $4 \sin^2 x - 1 = 0$

b) $2 \cos^2 x - 1 = 0$

c) $(\sin x + 2)^2 = 1$

d) $3 \cos^2 x - 6 \cos x = 0$

e) $3 \operatorname{tg}^2 x - 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1 = 0$

f) $\cos^2 x - \sin^2 x = (\sin x - \cos x)^2$

9.10. Rozwiąż równanie.

a) $4 \cos^2 x - 4 \cos x = 3$

b) $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$

c) $2 \cos^2 x + 5 \cos x = 3$

d) $2 \cos^2 x + 5 \cos x = -2$

e) $\sin^3 x - 6 \sin^2 x - \sin x + 6 = 0$

f) $(\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 = 2 \sin^2 x$

9.11. Rozwiąż nierówność w podanym przedziale.

a) $(1 - \sin x)^2 + \cos^2 x \geq 1$ i $x \in \left\langle 0; 2\frac{1}{2}\pi \right\rangle$

b) $(\sin x - \cos x)^2 - 2 \sin x (1 - \cos x) \leq \sqrt{2} + 1$ i $x \in \langle -2\pi; 2\pi \rangle$

c) $2 \sin^2 x + \cos^2 x \leq 1$ i $x \in \langle -\pi; 2\pi \rangle$

d) $2(\sin x - \cos x)^2 + \sin x (4 \cos x - 1) > 3 \sin x + 2$ i $x \in \langle -\pi; 3\pi \rangle$

9.12. Rozwiąż równanie.

a) $\sin 5x - \cos 3x \sin 2x = 0$

b) $\sin 5x + 2 \cos 6x \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $4 \cos x \cos 4x = 2 \cos 5x + 1$

d) $\cos 9x + 4 \sin 7x \sin x \cos x = 1$

9.13. Rozwiąż równanie $\sin x \cdot \sin 2x - \cos x = 0, x \in \langle 0; \pi \rangle$.

9.14. Rozwiąż równanie $2 \cos^2 x + \sqrt{3} \sin x = 2, x \in (0; 3\pi)$.

9.15. Rozwiąż równanie $\sin 4x + \cos 2x = 2 \sin 2x + 1, x \in \langle 0; \pi \rangle$.

9.16. Rozwiąż równanie $4 \cos^2 x - 4 \cos^2 x \cdot \sin x + 3 \sin x = 3, x \in (0; 2\pi)$.

9.17. Rozwiąż równanie $\frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x + \sin \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) = 0$.

9.18. Rozwiąż równanie $\sin x \cdot \left[\cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \right] = \sqrt{3} \cos x$.

9.8. a) $x \in \langle 3\pi + 6k\pi; 6\pi + 6k\pi \rangle, k \in \mathbb{Z}$ **b)** $x \in \left(\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{2}{3}\pi + k\pi \right), k \in \mathbb{Z}$

c) $x \in \left(\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{6}; \frac{5}{36}\pi + \frac{k\pi}{6} \right), k \in \mathbb{Z}$ **d)** $x \in \left\langle -\frac{11}{3}\pi + 8k\pi; -\frac{7}{3}\pi + 8k\pi \right\rangle, k \in \mathbb{Z}$

9.9. a) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ lub $x = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi$ lub $x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **d)** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

e) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **f)** $x = k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

9.19. Rozwiąż nierówność $2 \sin^2 x + \sin x - 1 < 0$ dla $0 < x < \pi$.

9.20. Rozwiąż nierówność $\cos^2 x - 3 \sin x + \frac{3}{4} > 0$ dla $0 < x < 2\pi$.

9.21. Rozwiąż nierówność $\frac{1 - 2 \sin x}{\cos 2x} > 0$ dla $0 < x < \pi$.

D 9.22. Wykaż, że jeżeli $\sin(x - y) = \sin^2 x - \sin^2 y$, to albo $x - y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, albo $x + y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

*** 9.23.** Rozwiąż równanie $\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} + 1 = \cos x$.

*** 9.24.** Rozwiąż równanie $\sin \frac{x}{2} + \cos x = 1$.

*** 9.25.** Rozwiąż równanie $\cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x$.

9.26. Dla jakich wartości parametru m równanie ma rozwiązanie?

a) $2 \cos x = 4m^2 - 2$

c) $\sin x = m^2 - 2m$

b) $\lg x = 5m^2 - 7m + 11$

d) $\sin^2 x - \cos^2 x = m^2 - 6m + 10$

Prosto do matury



1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Do zbioru rozwiązań równania $3 \operatorname{tg}^2 \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = 1$ należą liczby postaci

A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. B. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. C. $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Rozwiąż równanie $\sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = 1$ w przedziale $(-\pi; 2\pi)$.

3. Rozwiąż nierówność $\cos 3x \leq \frac{1}{2}$.

4. Rozwiąż równanie $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$.

5. Dla jakich wartości parametru m równanie $\cos x = m^2 + 4m + 4$ ma rozwiązanie?

9.20. $x \in \left(0; \frac{\pi}{6} \right) \cup \left(\frac{5}{6}\pi; 2\pi \right)$

9.21. $x \in \left(0; \frac{\pi}{6} \right) \cup \left(\frac{\pi}{4}; \frac{3}{4}\pi \right) \cup \left(\frac{5}{6}\pi; \pi \right)$

9.22. Można udowodnić, że $\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x + y) \sin(x - y)$.

$$\begin{aligned} P &= (\sin x \cos y + \cos x \sin y) (\sin x \cos y - \cos x \sin y) = \sin^2 x \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y = \\ &= \sin^2 x (1 - \sin^2 y) - (1 - \sin^2 x) \sin^2 y = \sin^2 x - \sin^2 x \sin^2 y - \sin^2 y + \sin^2 x \sin^2 y = \\ &= \sin^2 x - \sin^2 y = L \end{aligned}$$

Założmy, że $\sin(x - y) = \sin^2 x - \sin^2 y$. Stąd:

$$\sin(x - y) = \sin(x + y) \sin(x - y)$$

$$\sin(x - y) (1 - \sin(x + y)) = 0$$

$$\sin(x - y) = 0 \text{ lub } \sin(x + y) = 1$$

$$x - y = k\pi \text{ lub } x + y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

9.19. $x \in \left(0; \frac{\pi}{6} \right) \cup \left(\frac{5}{6}\pi; \pi \right)$

9.23. $\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} + 1 = \cos x$
 $\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} + 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} + \sqrt{2} \sin \frac{x}{2} = 0$$

$$\sin \frac{x}{2} \left(2 \sin \frac{x}{2} + \sqrt{2} \right) = 0$$

$$\sin \frac{x}{2} = 0 \text{ lub } \sin \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{x}{2} = k\pi \text{ lub } \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,$$

$$\text{lub } \frac{x}{2} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Odp.: $x = 2k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{2} + 4k\pi$,

$$\text{lub } x = \frac{5\pi}{2} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

9.24. $\sin \frac{x}{2} + \cos x = 1$

$$\sin \frac{x}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1$$

$$\sin \frac{x}{2} \left(1 - 2 \sin \frac{x}{2} \right) = 0$$

$$\sin \frac{x}{2} = 0 \text{ lub } \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2} = k\pi \text{ lub } \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,$$

$$\text{lub } \frac{x}{2} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Odp.: $x = 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{3} + 4k\pi$,

$$\text{lub } x = \frac{5\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

9.25. $\cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x$

$$\cos 2x = \sin \frac{\pi}{4} \sin x + \cos \frac{\pi}{4} \cos x$$

$$\cos 2x = \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$2x = x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\text{lub } 2x = \frac{\pi}{4} - x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ lub } 3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

Odp.: $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$$\text{lub } x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

9.26. a) $m \in \langle -1; 1 \rangle$

b) $m \in \mathbb{R}$

c) $m \in \langle 1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2} \rangle$

d) $m = 3$

Prosto do matury

1. F, F, F

2. $x = -\frac{5}{8}\pi$ lub $x = \frac{3}{8}\pi$

$$\text{lub } x = \frac{11}{8}\pi$$

3. $x \in \left\langle \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi; \frac{5}{9}\pi + \frac{2}{3}k\pi \right\rangle,$

$$k \in \mathbb{Z}$$

4. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

5. $m \in \langle -3; -1 \rangle$

10. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–12 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

Odpowiedzi i rozwiązania

1. D
 2. B
 3. B
 4. B
 5. B
 6. C
 7. C
 8. D
 9. C
1. Promień okręgu opisanego na trójkącie jest równy 17. Jeden z kątów trójkąta ma miarę 78° . Do którego przedziału należy długość boku leżącego naprzeciw tego kąta?
A. $\langle 30; 31 \rangle$ B. $\langle 31; 32 \rangle$ C. $\langle 32; 33 \rangle$ D. $\langle 33; 34 \rangle$
 2. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 24$, $\sphericalangle ABC = 45^\circ$, $\sphericalangle CAB = 75^\circ$. Zatem
A. $|AC| = 8\sqrt{3}$. B. $|AC| = 8\sqrt{6}$. C. $|AC| = 12\sqrt{6}$. D. $|AC| = 24\sqrt{3}$.
 3. Boki trójkąta mają długości 7, 12 i 13. Ile wynosi pole tego trójkąta?
A. $12\sqrt{3}$ B. $24\sqrt{3}$ C. $4\sqrt{273}$ D. $8\sqrt{273}$
 4. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 12 i 16. Ile wynosi promień okręgu wpisanego w ten trójkąt?
A. 3 B. 4 C. 5 D. 6
 5. W trójkącie ABC dane są długości boków: $|AB| = 15$, $|AC| = 12$, $|BC| = 18$. Dwusieczna kąta CAB przecina bok BC w punkcie D . Wskaż długość odcinka CD .
A. 6 B. 8 C. 10 D. 12
 6. Który z podanych kątów nie jest kątem wypukłym?
A. $\alpha = \frac{3\pi}{7}$ B. $\beta = 2,5$ C. $\gamma = 3,5$ D. $\delta = \frac{3}{2}$
 7. Niech α oznacza miarę stopniową kąta $\frac{3}{8}\pi$. Wskaż prawdziwą zależność.
A. $\alpha < 65^\circ$ B. $65^\circ < \alpha < 67^\circ$ C. $67^\circ < \alpha < 68^\circ$ D. $\alpha > 68^\circ$
 8. Ile jest równa liczba $\sin 240^\circ$?
A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
 9. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{\sin 2x \cdot \cos 4x}{1 - \operatorname{tg} 2x}$. Ile jest równa wartość $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$?
A. 0 B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{3 + \sqrt{3}}{8}$ D. $\frac{\pi}{12}$ nie należy do dziedziny tej funkcji.

Multiteka

- Odległość Ziemi od Słońca i Księżyca

dla nauczyciela.pl | Klasówka 1



Generator
testów i sprawdzianów

10. Wskaż zbiór rozwiązań układu nierówności $\begin{cases} \cos x + \frac{1}{2} \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases}$.

- A. $\langle 0; \frac{2\pi}{3} \rangle \cup \langle \frac{4\pi}{3}; 2\pi \rangle$ B. $\langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$ C. $\langle \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} \rangle$ D. $\langle \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \rangle$

10. A

11. Dla której z podanych funkcji oś y nie jest osią symetrii jej wykresu?

- A. $y = \cos x$ B. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ C. $y = \sin(x + \pi)$ D. $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

11. C

12. Wskaż największą wartość przyjmowaną przez funkcję $f(x) = 1 - \operatorname{tg} x$ w przedziale $\langle -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3} \rangle$.

- A. $1 - \sqrt{3}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{3} - 1$ C. $\sqrt{3} + 1$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3} + 1$

12. D

W zadaniach 13–27 oceń prawdziwość podanych zdań.

13. Boki trójkąta mają się do siebie jak $3 : 5 : 6$. Wynika stąd, że

- A. trójkąt ten jest rozwartokątny.
B. cosinus największego kąta tego trójkąta jest równy $-\frac{1}{15}$.
C. cosinus najmniejszego kąta tego trójkąta jest równy $\frac{13}{15}$.

13. P, P, P

14. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$, $\sphericalangle ABC = 30^\circ$. Zatem

- A. pole tego trójkąta jest równe $\frac{1}{2}ac$.
B. promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy b .
C. $\sin \sphericalangle CAB = \frac{a}{2b}$.

14. F, P, P

15. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = \sqrt{5}$, $|BC| = \sqrt{6}$, $|AC| = \sqrt{7}$. Zatem

- A. $\cos \sphericalangle ABC = \frac{\sqrt{30}}{15}$. B. $\cos \sphericalangle CAB = \frac{3}{\sqrt{35}}$. C. $\sin \sphericalangle ABC = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{15}}$.

15. P, P, P

16. Miara łukowa kąta α jest równa 6.

- A. Miara stopniowa kąta α jest równa $\frac{1080}{\pi}$. B. $\sin \alpha < 0$ C. Kąt α jest ostry.

16. P, P, F

17. Do zbioru rozwiązań równania $\cos x = -\frac{1}{2}$ należą liczby postaci

- A. $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. B. $x = -\frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. C. $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

17. F, F, F

18. F, F, P

19. F, F, P

20. P, P, F

21. P, F, P

22. P, P, F

23. F, P, P

24. F, P, P

25. F, F, F

26. F, P, P

18. Dla dowolnych kątów α i β prawdziwy jest wzór

A. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \sin \beta$. B. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha$. C. $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \alpha)$.

19. Wiadomo, że kąt α jest rozwarty i $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. Zatem

A. $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$. B. $\sin 2\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{9}$. C. $\cos 2\alpha = \frac{7}{9}$.

20. Liczba $a \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ spełnia warunek $\cos 2a = \frac{1}{4}$. Zatem

A. $\sin^2 a = \frac{3}{8}$. B. $a < \frac{\pi}{4}$. C. $a = \frac{\pi}{6}$.

21. Równanie $\sin x = ax$ może mieć dla pewnej liczby rzeczywistej a

A. dokładnie jedno rozwiązanie.

B. dokładnie dwa rozwiązania.

C. dokładnie trzy rozwiązania.

22. Dla dowolnego kąta α prawdziwy jest wzór

A. $\sin 12\alpha = 2 \sin 6\alpha \cos(-6\alpha)$.

B. $\sin 12\alpha = \sin 4\alpha \cos 8\alpha - \cos 4\alpha \sin(-8\alpha)$.

C. $\sin 12\alpha = \sin 3\alpha \cos 9\alpha + \cos 5\alpha \sin 7\alpha$.

23. Dany jest taki kąt ostry α , że $\sin \alpha = \frac{1}{4}$. Wtedy

A. $\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$. B. $\cos 2\alpha = \frac{7}{8}$. C. $\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{8}$.

24. Do zbioru rozwiązań równania $2 \sin x + 1 = 0$ należą liczby postaci

A. $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. B. $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. C. $x = \frac{19}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

25. Zbiór rozwiązań równania $\cos x = 0$ jest równy zbiorowi rozwiązań równania

A. $\cos 2x = 0$. B. $2 \cos \frac{x}{2} = 0$. C. $\frac{1}{\operatorname{tg} x} = 0$.

26. Wszystkie rozwiązania równania $2 \cos^2 x = 1$ można zapisać w postaci

A. $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ lub $x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ lub $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
 36. \quad & \cos 100^\circ \operatorname{tg} 260^\circ \sin 80^\circ + \cos 440^\circ \cos 620^\circ = \\
 & = \cos(180^\circ - 80^\circ) \cdot \operatorname{tg}(180^\circ + 80^\circ) \cdot \sin 80^\circ + \cos(360^\circ + 80^\circ) \cdot \cos(720^\circ - 100^\circ) = \\
 & = -\cos 80^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ \cdot \sin 80^\circ + \cos 80^\circ \cdot \cos 100^\circ = \\
 & = -\cos 80^\circ \cdot \frac{\sin 80^\circ}{\cos 80^\circ} \cdot \sin 80^\circ + \cos 80^\circ \cdot (-\cos 80^\circ) = \\
 & = -\sin^2 80^\circ - \cos^2 80^\circ = -(\sin^2 80^\circ + \cos^2 80^\circ) = -1 \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

27. Zbiór rozwiązań nierówności $\cos 3x < \frac{1}{2}$ można zapisać w postaci

A. $(\pi + 6k\pi; 5\pi + 6k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

B. $(\frac{1}{9}\pi + \frac{2}{3}k\pi; \frac{5}{9}\pi + \frac{2}{3}k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

C. $(-\frac{1}{9}\pi + \frac{2}{3}k\pi; \frac{1}{9}\pi + \frac{2}{3}k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

28. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 6$, $\sphericalangle ABC = 35^\circ$, $\sphericalangle BCA = 74^\circ$. Wyznacz obwód tego trójkąta z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

29. Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równy 20, $\sphericalangle CAB = 40^\circ$ i $\sphericalangle ABC = 22^\circ$. Wyznacz obwód tego trójkąta z dokładnością do 0,1.

30. Bok BC trójkąta ABC ma długość $16\sqrt{3}$, a promień okręgu opisanego na tym trójkącie wynosi 16. Wyznacz miarę $\sphericalangle CAB$.

31. Wyznacz sinus, cosinus i tangens kąta, którego ramię wodzące przechodzi przez punkt $(5, -4)$.

32. Skonstruuj w układzie współrzędnych kąt α taki, że $\cos \alpha = -\frac{3}{7}$ oraz $\operatorname{tg} \alpha > 0$.

33. Oblicz wartość sinusa oraz cosinusa kąta α , wiedząc, że $\operatorname{tg} \alpha = -2,6$.

34. Przyporządkuj podane kąty do odpowiednich ćwiartek układu współrzędnych.

$$1299^\circ, \quad \frac{11\pi}{7}, \quad -1, \quad 2, \quad -541^\circ, \quad -\frac{9\pi}{5}, \quad 4, \quad \frac{14\pi}{3}, \quad 3, 14\pi$$

35. Oblicz dokładną wartość wyrażenia.

$$\text{a) } \operatorname{tg} 210^\circ \operatorname{tg} 405^\circ + \sin(-300^\circ) \cos 1080^\circ \quad \text{b) } \sin \frac{11\pi}{6} \cos \frac{3\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{7\pi}{6} \cos \frac{13\pi}{3}$$

D

36. Wykaż, że wartość wyrażenia $\cos 100^\circ \operatorname{tg} 260^\circ \sin 80^\circ + \cos 440^\circ \cos 620^\circ$ jest liczbą całkowitą.

37. Kąt α jest rozwarty i $\cos \alpha = -\frac{5}{6}$. Oblicz $\cos 2\alpha$.

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

38. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 7$, $|BC| = 9$, $|CA| = 10$. Wyznacz długość środkowej BD .

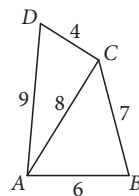
43. Z twierdzenia cosinusów w trójkątach ABC i ADC :

$$\cos \sphericalangle ABC = \frac{6^2 + 7^2 - 8^2}{2 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{21}{84} = \frac{1}{4}$$

$$\cos \sphericalangle ADC = \frac{9^2 + 4^2 - 8^2}{2 \cdot 9 \cdot 4} = \frac{33}{72} = \frac{11}{24}$$

$$\cos \sphericalangle ABC \neq -\cos \sphericalangle ADC, \text{ więc } \sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC \neq 180^\circ.$$

Zatem na czworokącie $ABCD$ nie można opisać okręgu.



45. Z twierdzenia o kątach wpisanych opartych na tym samym łuku: $\sphericalangle AKC = \sphericalangle ABC = 60^\circ$, $\sphericalangle AKB = \sphericalangle ACB = 60^\circ$.

$$\text{Zatem } \cos \sphericalangle AKC = \cos \sphericalangle AKB = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Z twierdzenia cosinusów w trójkącie ACK: } |AC|^2 = |CK|^2 + |AK|^2 - 2|CK| \cdot |AK| \cdot \frac{1}{2}, \quad |AC|^2 = |CK|^2 + |AK|^2 - |CK| \cdot |AK|.$$

$$\text{Z twierdzenia cosinusów w trójkącie ABK i } |AB| = |AC|: |AC|^2 = |KB|^2 + |AK|^2 - |KB| \cdot |KA|.$$

$$\text{Porównujemy powyższe równości i otrzymujemy tezę: } |CK|^2 - |CK| \cdot |AK| = |KB|^2 - |KB| \cdot |KA|.$$

27. F, P, F

28. 15,5

29. 76,0

30. 60° lub 120°

$$\begin{aligned} 31. \sin \alpha &= -\frac{4\sqrt{41}}{41}, \quad \cos \alpha = \frac{5\sqrt{41}}{41}, \\ \operatorname{tg} \alpha &= -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 33. \sin \alpha &= -\frac{13\sqrt{194}}{194}, \\ \cos \alpha &= \frac{5\sqrt{194}}{194} \\ \text{lub } \sin \alpha &= \frac{13\sqrt{194}}{194}, \\ \cos \alpha &= -\frac{5\sqrt{194}}{194} \end{aligned}$$

34. kolejno:
III, IV, IV, II, II, I, III, II, III

$$35. \text{ a) } \frac{5\sqrt{3}}{6} \quad \text{ b) } \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{12}$$

36. Patrz s. 100.

$$37. \frac{7}{18}$$

$$38. 2\sqrt{10}$$

39. $|AC| = \sqrt{97}$, $|BD| = \sqrt{273}$

40. Przyjmujemy:

α, β, γ – kąty trójkąta,

$\sin \alpha = \frac{1}{7}$, $\sin \beta = \frac{2}{7}$, $\sin \gamma = \frac{5}{7}$,

a, b, c – długości boków leżących naprzeciwko kątów α, β, γ .

Z twierdzenia sinusów:

$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{2}$, stąd $b = 2a$

$\frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{1}{5}$, stąd $c = 5a$

Nie istnieje trójkąt o bokach

długości: $a, 2a$ i $5a$, bo

$a + 2a < 5a$, co jest sprzeczne

z nierównością trójkąta.

41. a) $\sphericalangle CAD = 41^\circ$, $\sphericalangle DAB = 19^\circ$

b) 1

42. $\sphericalangle A = 45^\circ$, $\sphericalangle B = 105^\circ$,

$\sphericalangle C = 30^\circ$, $P = 32\pi$

43. Patrz s. 101.

44. $\frac{4\sqrt{21}}{3}$

45. Patrz s. 101.

46. $|BC| = \frac{7\sqrt{10}}{10}r$,

$\cos \sphericalangle CDB = \frac{7\sqrt{89}}{89}$

47. Oznaczamy:

α – kąt leżący naprzeciwko boku $2a$,

R – promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Z twierdzenia cosinusów:

$\cos \alpha = \frac{16a^2 + 9a^2 - 4a^2}{2 \cdot 3a \cdot 4a} =$

$= \frac{21a^2}{24a^2} = \frac{7}{8}$

Zatem $\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{8}$.

Z twierdzenia sinusów $\frac{2a}{\sin \alpha} = 2R$.

Stąd $R = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{8a}{\sqrt{15}} = \frac{8\sqrt{15}}{15}a$.

48. a) 120° b) $\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$

c) $\sqrt{6}$

39. W równoległoboku $ABCD$ dane są: $|AB| = 11$, $|BC| = 8$, $\sphericalangle ABC = 60^\circ$. Wyznacz długości przekątnych tego równoległoboku.

40. Wykaż, że nie istnieje trójkąt, w którym sinusy kątów są równe $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$ i $\frac{5}{7}$.

41. Na boku BC trójkąta równobocznego ABC obrano taki punkt D , że $|CD| : |DB| = 2 : 1$. Oblicz

a) miary kątów CAD i DAB z dokładnością do 1° .

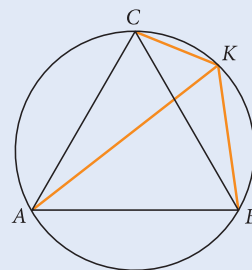
b) stosunek promieni okręgów opisanych na trójkątach ACD i ABD .

42. W trójkącie rozwartokątnym ABC o kącie rozwartym przy wierzchołku B dane są $|AB| = 4\sqrt{2}$ i $|AC| = 4(1 + \sqrt{3})$. Poprowadzono wysokość BD i otrzymano trójkąt równoramienny ABD . Wyznacz kąty trójkąta ABC oraz pole P koła opisanego na tym trójkącie.

43. W czworokącie $ABCD$ dane są: $|AB| = 6$, $|BC| = 7$, $|CD| = 4$, $|DA| = 9$, $|AC| = 8$. Wykaż, że na tym czworokącie nie można opisać okręgu.

44. W trójkącie równoramiennym ABC miara kąta BAC jest równa 30° , a podstawa AB ma długość 8. Oblicz długość środkowej AD tego trójkąta.

45. Na trójkącie równobocznym ABC opisano okrąg. Na łuku BC obrano punkt K , jak na rysunku obok. Wykaż, że $|CK|^2 - |CK| \cdot |AK| = |KB|^2 - |KB| \cdot |KA|$.



46. Na okręgu o promieniu r opisano trapez równoramienny $ABCD$ o dłuższej podstawie AB i krótszej CD . Punkt styczności S dzieli ramię BC tak, że $\frac{|CS|}{|SB|} = \frac{2}{5}$. Wyznacz długość ramienia tego trapezu. Oblicz $\cos \sphericalangle CDB$.

47. Boki trójkąta mają długości $2a, 3a, 4a$. Wykaż, że promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $\frac{8\sqrt{15}}{15}a$.

48. Odcinki o długościach: $2\sqrt{3}$, $3 - \sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$ są bokami trójkąta.

a) Wyznacz miarę największego kąta tego trójkąta.

b) Oblicz wysokość poprowadzoną z wierzchołka tego kąta.

c) Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

51. Założenia: $\cos \alpha \neq 0$ i $\sin \alpha \neq 0$, stąd $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$ i $\alpha \neq k\pi$, czyli $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$L = (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^{-1} \alpha)^2 = \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 = \left(\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \right)^2 = \left(\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \right)^2 =$$

$$= (\sin \alpha \cos \alpha)^{-2} = P$$

52. $L = 4 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \cdot \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 4 \left(\sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6} \right) \left(\sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6} \right) = 4 \left[\left(\sin x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \left(\cos x \cdot \frac{1}{2} \right)^2 \right] =$

$= 4 \left(\frac{3}{4} \sin^2 x - \frac{1}{4} \cos^2 x \right) = 3 \sin^2 x - \cos^2 x = 2 \sin^2 x + \sin^2 x - \cos^2 x = 2 \sin^2 x + (1 - \cos^2 x) - \cos^2 x = 2 \sin^2 x - 2 \cos^2 x + 1 = P$

53. $f(x) = \cos^2 x + \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{3} \right) - \cos x \cdot \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \cos^2 x + \left(\cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3} \right)^2 - \cos x \left(\cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3} \right) =$

$= \cos^2 x + \cos^2 x \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 - 2 \sin x \cos x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin^2 x \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \cos^2 x \cdot \frac{1}{2} + \sin x \cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos^2 x + \frac{1}{4} \cos^2 x + \frac{3}{4} \sin^2 x - \frac{1}{2} \cos^2 x =$

$= \frac{3}{4} (\cos^2 x + \sin^2 x) = \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}$, czyli funkcja f jest funkcją stałą.

49. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 6$, $|BC| = 9$, $\sphericalangle ABC = 60^\circ$. Wyznacz długości odcinków, na które dwusieczna kąta ABC dzieli bok CA .

50. W trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta prostego podzieliła przeciwprostokątną na odcinki o długościach $2 + \sqrt{3}$ i $3 + 2\sqrt{3}$. Wyznacz miary kątów trójkąta.

D 51. Wykaż, że równość $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^{-1} \alpha)^2 = (\sin \alpha \cdot \cos \alpha)^{-2}$ jest tożsamością. Podaj założenia, które musi spełniać kąt α .

D 52. Udowodnij tożsamość $4 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin^2 x - 2 \cos^2 x + 1$.

D 53. Wykaż, że funkcja $f(x) = \cos^2 x + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ jest funkcją stałą.

54. Wyznacz dziedzinę i narysuj wykres funkcji $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \operatorname{tg} x$.

55. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$. Odczytaj z wykresu miejsca zerowe funkcji f .

56. Wyznacz dziedzinę i narysuj wykres funkcji $f(x) = \left|\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right| - 2$.

57. Ustal znak liczby $\cos 4,5 - \cos 5$ na podstawie odpowiedniego wykresu funkcji.

58. Rozwiąż równanie $\cos \frac{2}{3}x = \sin \frac{3}{2}x$.

59. Rozwiąż nierówność $\cos \frac{1}{3}x < \sin \frac{13}{3}\pi$.

60. Rozwiąż równanie $(2 \sin x + 1)^2 + 4 \cos^2 x = 3$.

61. Rozwiąż nierówność $\sqrt{2} \cos x + 1 \geq 0$ w przedziale $\langle -\pi; 3\pi \rangle$.

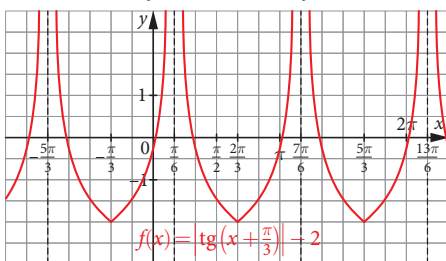
62. Rozwiąż równanie.

a) $4 \cos 2x = 2 \cos x - 1$

b) $2 \cos^2 x + \sin^2 x = 2 \cos x$

c) $(\cos^2 x - \sin^2 x)^2 = \cos 2x$

56. $D = \mathbf{R} - \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$



49. $\frac{6\sqrt{7}}{5}, \frac{9\sqrt{7}}{5}$

50. $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

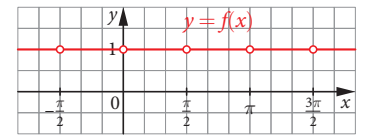
51. Patrz s. 102.

52. Patrz s. 102.

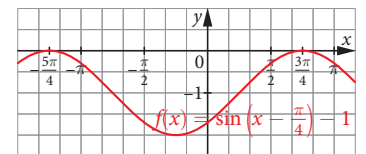
53. Patrz s. 102.

54. $D = \mathbf{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$

$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \operatorname{tg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 1$



55.



$x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

57. ujemna

58. $x = \frac{3}{5}\pi + \frac{12}{5}k\pi$

lub $x = \frac{3}{13}\pi + \frac{12}{13}k\pi, k \in \mathbf{Z}$

59. $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 6k\pi; \frac{11}{2}\pi + 6k\pi\right), k \in \mathbf{Z}$

60. $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

lub $x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

61. $x \in \left\langle -\frac{3}{4}\pi; \frac{3}{4}\pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{5}{4}\pi; \frac{11}{4}\pi \right\rangle$

62. a) $x \approx -41^\circ + k \cdot 360^\circ$

lub $x \approx 41^\circ + k \cdot 360^\circ$

lub $x = -120^\circ + k \cdot 360^\circ$

lub $x = 120^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$

b) $x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

c) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ lub $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$

63. $x = -\frac{2}{3}\pi$ lub $x = \frac{2}{3}\pi$

64. $x \in \left\{-\pi, 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi, 2\pi\right\}$

65. $x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right\}$

66. $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$

67. $x = \frac{\pi}{2}$ lub $x = \frac{5}{6}\pi$

68. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$
lub $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$

69. a) $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{2}{3}\pi; \pi\right)$

b) $x \in \left(\frac{2}{3}\pi; \pi\right)$

70. $\frac{1 - \sqrt{2}}{2} \leq m \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$

71. a) $x = 0$ lub $x = \frac{\pi}{2}$

lub $x = \frac{3\pi}{2}$

b) $p \in (-2; 0)$

73. $m \in \left\langle 0; \frac{1}{2} \right\rangle \cup (2; \infty)$

74. $\alpha = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

75. $\alpha = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
lub $\alpha = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

63. Rozwiąż równanie $4 \sin^2 x + 4 \cos x = 1$, $x \in \langle -\pi; \pi \rangle$.

64. Rozwiąż równanie $2 \sin^2 x = \sqrt{3} \sin x$, $x \in \langle -\pi; 2\pi \rangle$.

65. Rozwiąż równanie $\sin^2 2x - 4 \cos^2 x + 1 = 0$, $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

66. Rozwiąż równanie $\cos 2x + 5 \cos x = 2$.

67. Rozwiąż równanie $\sqrt{3} \sin x = \cos x + \sqrt{3}$, $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

68. Rozwiąż równanie $\left| \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

69. Rozwiąż nierówność dla $0 < x < \pi$.

a) $\frac{\cos 2x}{\cos x} < 1$

b) $\frac{1 + 2 \cos x}{\sin x} < 0$

70. Dla jakich wartości parametru m równanie $\sin x + \cos x = 2m - 1$ ma rozwiązanie?

71. Dane jest równanie postaci $(\cos x - 1) \cdot (\cos x + p + 1) = 0$ z parametrem p .

a) Dla $p = -1$ wypisz wszystkie rozwiązania tego równania należące do przedziału $\langle 0; 5 \rangle$.

b) Wyznacz wszystkie wartości parametru p , dla których dane równanie ma w przedziale $\langle -\pi; \pi \rangle$ trzy różne rozwiązania.

72. Dana jest funkcja $f(x) = 1 + \frac{2 \sin 2x + 3 \sin 3x}{\sin x}$.

a) Wykaż, że jeżeli $\sin x \neq 0$, to $f(x) = 2(6 \cos^2 x + 2 \cos x - 1)$.

b) Znajdź zbiór wartości funkcji f .

73. Dla jakich wartości parametru m równanie $m^2(1 - \sin x) - 4m + 1 + \sin x = 0$ ma rozwiązanie?

74. Dla jakich wartości parametru α suma sześciątów pierwiastków równania $x^2 - 2x \cdot \sin \alpha - \cos^2 \alpha = 0$ jest równa 0?

75. Dla jakich wartości parametru α najmniejsza wartość funkcji $f(x) = x^2 - 2x + \cos 2\alpha + \sin \alpha + 3$ wynosi 2?

72. $f(x) = 1 + \frac{2 \sin 2x + 3 \sin 3x}{\sin x}$

a) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 2 \sin x \cos^2 x + (2 \cos^2 x - 1) \sin x =$
 $= \sin x (2 \cos^2 x + 2 \cos^2 x - 1) = \sin x (4 \cos^2 x - 1)$

Jeżeli $\sin x \neq 0$, to:

$f(x) = 1 + \frac{2 \cdot 2 \sin x \cos x + 3 \sin x (4 \cos^2 x - 1)}{\sin x} = 1 + 4 \cos x + 12 \cos^2 x - 3 =$
 $= 2(6 \cos^2 x + 2 \cos x - 1)$

b) $ZW = \left\langle -2\frac{1}{3}; 14 \right\rangle$