

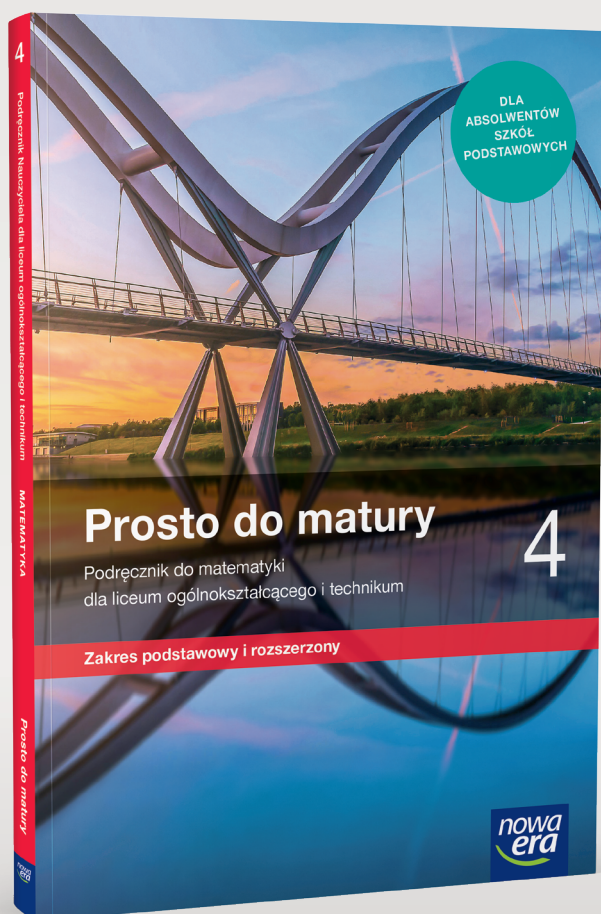
Prosto do matury

Podręcznik Nauczyciela

dla liceum ogólnokształcącego i technikum

4

Zakres podstawowy i rozszerzony



Podręcznik Nauczyciela zawiera:

- podręcznik ucznia
- odpowiedzi do wszystkich zadań
- rozwiązania trudniejszych zadań
- odnośniki do Multiteki – zasobów multimedialnych do lekcji
- komentarze merytoryczne

Program nauczania i inne materiały dydaktyczne są dostępne w portalu

dlanauczyciela.pl

Prosto do matury

Podręcznik Nauczyciela

dla liceum ogólnokształcącego i technikum

Zakres podstawowy i rozszerzony

4

Prosto do matury

Podręcznik Nauczyciela 4 został przygotowany do podręcznika autorstwa Macieja Antka, Krzysztofa Belki i Piotra Grabowskiego *Prosto do matury 4* dopuszczonego do użytku szkolnego i wpisanego do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki w szkołach ponadpodstawowych w zakresie podstawowym i rozszerzonym (1013/4/2022).

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2022
ISBN 978-83-267-4514-0

W publikacji zamieszczono strony z podręcznika *Prosto do matury* dla klasy 4 szkoły ponadpodstawowej w zakresie podstawowym i rozszerzonym.

© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2022

Autorzy komentarzy merytorycznych: Maciej Antek, Piotr Grabowski

Autorzy rozwiązań zadań: Jacek Klisowski, Renata Wolniewicz

Koordynacja prac: Anna Dubiel

Redakcja merytoryczna: Anna Drażek, Beata Zając

Korekta językowa: Dorota Rzeszewska

Nadzór artystyczny: Kaia Pichler

Opieka graficzna: Maciej Galiński

Projekt graficzny: Klaudia Jarocka-Ciok

Projekt okładki: Maciej Galiński

Realizacja projektu okładki: Klaudia Jarocka-Ciok

Rysunki: Tomasz Jagodziński

Realizacja projektu graficznego: Skład systemem T_EX. BOP sc.

Fotografia na okładce: Getty Images/iStock/Getty Images Plus/Kapook2981.

Fotografie: BE&W: Alamy Stock Photo/Archive PL s. 206 (Stefan Mazurkiewicz); Biblioteka Narodowa/polona.pl s. 207 (Lwów, Plac Akademicki i ul. Fredry); Getty Images: 500Px Plus/Minh Tang s. 113, Corbis Historical/Michael Nicholson s. 206 (Wacław Sierpiński), iStock Unreleased/Consu1961 s. 63 (piramida w Luwrze), Moment - fanjianhua s. 193, yuanyuan yan s. 178-179 (podest), Stone/Paul Souders s. 221; Indigo: Alamy Stock Photo/B Christopher s. 126; PAP: CAF/Danuta Rago s. 207 (Stanisław Mazur wręczający żywą gęś); Shutterstock: Aleksey Sagitov s. 76, Alexapicso s. 77 (piłka do baseballa), Autorstwa bioraven s. 207 (ikona obiadu), BAO-Images Bildagentur s. 77 (piłka do tenisa), Berezka_Klo s. 207 (ikona piwa), dotshock s. 158, Hein Nouwens s. 207 (ikona kawy), Jay Takayama s. 122, Kevin Tichenor s. 178 (Chevrolet Belair), Likanaris s. 178 (neon), lukaszimilena s. 187, Mesa Studios s. 76-77 (kopuła stacji na Antarktydzie), RedKoala s. 207 (ikona kawioru), Sanzhar Murzin s. 184, Scott Norsworthy s. 7, Surachart Jessadanont s. 30, titov dmitriy s. 77 (piłka do siatkówki), Vlad Klok s. 207 (ikona gęsi), yevgeniy11 s. 179 (koza); Thinkstock/Getty Images: iStockphoto - boggy22 s. 74, de_design s. 261, LiamDoerksen s. 63 (szklana piramida - Muttart Conservatory), yamanstock s. 104, Stockbyte/Comstock Images s. 95; Wikipedia/Wikimedia Commons s. 180 (Jacob Bernoulli); link: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/s.206> (Zygmunt Janiszewski); link: http://kielich.amu.edu.pl/Stefan_Banach/archiwalia.html s. 206-207 (kartka z Księgi Szkołkiej).

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w podręczniku. Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Nowa Era Sp. z o.o.

Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa

www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl

Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

Spis treści

Podręcznik Prosto do matury z materiałami dydaktycznymi	1
1. Stereometria	7
2. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa	113
3. Dowody w matematyce.....	193
4. Powtórzenie	221
 Skorowidz	 343
Tablica wartości logarytmów dziesiętnych liczb od 1 do 9,9	345
Wybrane wzory trygonometryczne	346
Tablica wartości funkcji trygonometrycznych	348

MKP

tematy 3.1–3.3, 3.5–3.7

Multiteka

- Walec – konstrukcja, elementy i siatka
- Stożek – konstrukcja, elementy i siatka
- Przekroje brył obrotowych

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 1.6



Generator
testów i sprawdzianów

Legenda

Podczas pracy z podręcznikiem PDM dodatkowo można korzystać z publikacji z serii **MATeMATyka: Maturalne karty pracy ze zbiorom zadań** (MKP). Odnosnik tematy 3.1–3.3, 3.5–3.7 oznacza numery odpowiednich tematów w tych publikacjach.

Multiteka – tu zamieszczamy tytuły zasobów zgromadzonych w Multitece, pomocnych w przeprowadzeniu konkretnych lekcji.

Materiały sprawdzające wiedzę są zgromadzone w dwóch miejscach:

- w portalu dlanauczyciela.pl – gotowe kartkówki, klasówki i sprawdziany,
- w Genaratorze – narzędziu z bogatą bazą zadań do tworzenia własnych kartkówek, klasówek i sprawdzianów, a także z propozycjami gotowych tego typu materiałów.

Maciej Antek
Krzysztof Belka
Piotr Grabowski

Prosto do matury

Podręcznik do matematyki
dla liceum ogólnokształcącego i technikum

4

Zakres podstawowy i rozszerzony

**nowa
era** *Twoje mocne strony*

Prosto do matury

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców:

dr Moniki Fabijańczyk, dr Magdaleny Wojciechowskiej-Rysiawy i dr hab. Anny Cegieli.

Zakres kształcenia: podstawowy i rozszerzony

Etap edukacyjny: III

Typ szkoły: ponadpodstawowa (liceum ogólnokształcące i technikum)

Rok dopuszczenia: 2022

Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 1013/4/2022

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum* autorstwa Piotra Grabowskiego.

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek. Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2022
ISBN 978-83-267-4403-7

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Magdalena Spalińska, Anna Dubiel
Opracowanie redakcyjne i merytoryczne infografik: Urszula Cielniak

Konsultacje merytoryczne: Jacek Klisowski

Redakcja językowa: Marta Zuchowicz

Korekta językowa: Paulina Szulim

Nadzór artystyczny: Kaia Pichler

Opieka graficzna: Klaudia Jarocka

Projekt graficzny: Sławomir Włodarczyk, Ewa Kaletyn, Diana Gawronkiewicz/Point

Projekt okładki: Maciej Galiński, Ewa Kaletyn

Fotoedycja: Katarzyna Iwan-Malawska

Rysunki merytoryczne: Andrzej Oziębło

Opracowanie graficzne stron działowych: Marcin Kołacz

Opracowanie graficzne infografik: Ewa Kaletyn, Marcin Kołacz

Ilustracje na infografikach: Adam Król (bryły i piłka, s. 76), Laura Maziewska (ikony, s. 207)

Realizacja projektu graficznego: BOP s.c.

Fotografia na okładce: Getty Images/iStock/Getty Images Plus/Kapook2981.

Fotografie: BE&W, Alamy Stock Photo/Archive PL s. 206 (Stefan Mazurkiewicz); Biblioteka Narodowa/polina.pl s. 207 (Lwów, Plac Akademicki i ul. Fredry); Getty Images: 500Px Plus/Minh Tang s. 113, Corbis Historical/Michael Nicholson s. 206 (Wacław Sierpiński), iStock Unreleased/Consu1961 s. 63 (piramida w Luwrze), Moment - fanjinhua s. 193, yanyuan yan s. 178-179 (podest), Stone/Paul Souders s. 221, Indigo: Alamy Stock Photo/B Christopher s. 126; PAP: CAF/Danuta Rago s. 207 (Stanisław Mazur wręczający żywą geś); Shutterstock: Aleksey Sagitov s. 76, Alexapico s. 77 (piłka do baseballa), Autorstwa bioraven s. 207 (ikona obiadu), BAO-Images Bildagentur s. 77 (piłka do tenisa), Berezka_Klo s. 207 (ikona piwa), dotshock s. 158, Hein Nouwenis s. 207 (ikona kawy), Jay Takayama s. 122, Kevin Tichnor s. 179 (Chevrolet Belair), Likanaris s. 178 (teoria), lukaszchilena s. 187, Mesa Studios s. 76-77 (kopuła stacji na Antarktydzie), RedKaia s. 207 (ikona kawioru), Sanzhar Murzin s. 184, Scott Newsworthy s. 7, Surachart Jessadanont s. 30, titor dmitriy s. 77 (piłka do siatkówki), Vlad Klok s. 207 (ikona geś), yevgeniy11 s. 179 (kozł), Thinkstock/Getty Images: iStockphoto - boggy22 s. 74, de_design s. 261, LiamDoerksen s. 63 (izolana piramida - Muttart Conservatory), yamanstock s. 104, Stockbyte/Corbis Images s. 95; Wikipedia/Wikimedia Commons s. 180 (Jacob Bernoulli); link: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/s.206> (Zygmunt Janiszewski); link: http://kielich.amu.edu.pl/Stefan_Banach/archiwalia.html s. 206-207 (karta z Księgi Schockieja).

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w podręczniku.

Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Nowa Era Sp. z o.o.

Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa

www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl

Centrum Kontakt: 58 721 48 00

Druk i oprawa: Drukarnia Orthdruk

Spis treści

Wstęp	5
Wykaz używanych oznaczeń matematycznych	6

Dział 1. Stereometria

1. Proste i płaszczyzny w przestrzeni	8
2. Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny	21
3. Kąt dwuścienny	31
4. Graniastosłupy	37
5. Ostrosłupy	49
6. Bryły obrotowe	65
7. Pola powierzchni i objętości brył	78
8. Zadania optymalizacyjne	97
9. Powtórzenie	104

Dział 2. Kombinatoryka i teoria prawdopodobieństwa

1. Permutacje i wariacje	114
2. Kombinacje	128
3. Trójkąt Pascala i dwumian Newtona	137
4. Warto powtórzyć – prawdopodobieństwo i jego własności	147
5. Obliczanie prawdopodobieństwa z zastosowaniem kombinatoryki	151
6. Prawdopodobieństwo warunkowe	161
7. Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym	168
8. Schemat Bernoulliego	180
9. Powtórzenie	189

Dział 3. Dowody w matematyce

1. Dowody w geometrii	194
2. Dowody w algebrze	208

Dział 4. Powtórzenie

1. Liczby, wyrażenia algebraiczne	222
2. Funkcje. Funkcja liniowa	232
3. Funkcja kwadratowa, wielomiany i funkcje wymierne	244
4. Funkcje trygonometryczne	255
5. Funkcja wykładnicza i logarytmiczna	265
6. Ciągi liczbowe	273
7. Figury na płaszczyźnie	281

8. Geometria analityczna	293
9. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka	304
10. Stereometria	318
11. Analiza matematyczna	330
Odpowiedzi	343
Skorowidz	362
Tablica wartości logarytmów dziesiętnych	365
Wybrane wzory trygonometryczne	366
Tablica wartości funkcji trygonometrycznych	368

Wstęp

Podręcznik *Prosto do matury* dla klasy czwartej jest dostosowany do podstawy programowej obowiązującej w liceum od września 2019 r. i obejmuje treści z zakresu podstawowego oraz rozszerzonego. Jest ostatnim podręcznikiem w serii, dlatego też zamieściliśmy w nim dział *Powtórzenie*, w którym przypominamy najważniejsze definicje, twierdzenia oraz wnioski, które pojawiły się w czasie całego cyklu nauczania.

Po każdym temacie w działach *Stereometria* oraz *Kombinatoryka i teoria prawdopodobieństwa* proponujemy zestaw pięciu zadań zatytułowanych *Prosto do matury*. Po omówieniu każdego tematu uczniowie powinni rozwiązywać je samodzielnie. Będzie to dla nich sprawdzianem umiejętności potrzebnych na maturze.

Dział *Dowody w matematyce* ma na celu utrwalenie umiejętności logicznego wnioskowania i wykorzystywania zdobytej wcześniej wiedzy, co jest niezbędne do przeprowadzania dowodów matematycznych.

Książka zawiera prawie 1400 zadań do samodzielnego rozwiązania. To wystarczy do gruntownego przećwiczenia umiejętności nabytych podczas lekcji. Zadania trudniejsze oznaczono * lub **, zadania typu „Wykaż...” poprzedzono znakiem , natomiast te zadania, do których rozwiązania jest przydatny kalkulator – znakiem .

Podręcznik umożliwia samodzielną naukę, co może być cenne na przykład w razie nieobecności w szkole. Wprowadzane pojęcia ilustrujemy przykładami rozwiązyanych zadań. W zrozumieniu materiału bardzo pomogą kolorowe rysunki merytoryczne. Wybrane rozwiązywane zadania typu maturalnego zostały oznaczone znakiem .

Uwaga: W zadaniach testowych, w których należy wybrać jedną odpowiedź spośród czterech podanych, wybrana odpowiedź nie musi być jedynym istniejącym rozwiązaniem postawionego problemu.

Różowym paskiem na marginesie oznaczono materiał realizowany w zakresie rozszerzonym.

Odpowiedzi i rozwiązań zadań nie należy zapisywać w podręczniku.

Autorzy

Wykaz używanych oznaczeń matematycznych

$x \in A$; $x \notin A$	x należy do zbioru A ; x nie należy do zbioru A
$\{a, b, c\}$; $\emptyset$	zbiór, którego elementami są a, b, c ; zbiór pusty
$\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$	zbiór liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych, rzeczywistych
$A \subset B$	zbiór A jest podzbiorem zbioru B
$A \cap B$; $A \cup B$	część wspólna (iloczyn) zbiorów A i B ; suma zbiorów A i B
$A - B$	różnica zbiorów A i B
$\sqrt[n]{a}$	pierwiastek stopnia n z liczby a
$\log_a b$ ($\log b$)	logarytm przy podstawie a (10) liczby b
$(a; b)$; $\langle a; b \rangle$	przedział otwarty; przedział domknięty (zamknięty)
$\langle a; b \rangle$; $[a; b]$	przedział lewostronnie domknięty; przedział prawostronnie domknięty
$ a $	wartość bezwzględna liczby a
$f(x)$	wartość funkcji f dla argumentu x
$D; ZW$	dziedzina funkcji; zbiór wartości funkcji
$o(S, r)$; $k(S, r)$	okrąg o środku S i promieniu r ; koło o środku S i promieniu r
$A = (a, b)$	punkt A o współrzędnych a (tzw. odcięta) i b (tzw. rzędna)
AB ; $ AB $	odcinek o końcach A i B ; długość odcinka AB
$\overrightarrow{AB}$; $ \overrightarrow{AB} $	wektor o początku A i końcu B ; długość wektora $\overrightarrow{AB}$
$\vec{u} = [a, b]$	wektor $\vec{u}$ o współrzędnych a, b
$a \parallel b$; $a \perp b$	prosta a jest równoległa do prostej b ; prosta a jest prostopadła do prostej b
$\sphericalangle ABC$	kąt o wierzchołku B i ramionach: półprostej BA i półprostej BC
$\triangle ABC$	trójkąt ABC
P ; obw	pole figury; obwód figury
$\sin \alpha$; $\cos \alpha$; $\operatorname{tg} \alpha$	sinus kąta α ; cosinus kąta α ; tangens kąta α
(a_n) ; a_n	ciąg; n -ty wyraz ciągu (a_n)
S_n ; S	suma n początkowych wyrazów ciągu; suma szeregu geometrycznego
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$	granica ciągu (a_n)
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	granica funkcji f w punkcie x_0
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$	granica lewostronna, prawostronna funkcji f w punkcie x_0
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$	granica funkcji f w $-\infty$, w ∞
$f'(x)$	wartość pochodnej funkcji f dla argumentu x
Ω ; $\overline{\Omega}$	zbiór zdarzeń elementarnych; liczba zdarzeń elementarnych w zbiorze Ω
$\overline{A}$	liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A
$P(A)$	prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A
A'	zdarzenie przeciwne do zdarzenia A
$P(A B)$	prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B
$n!$	silnia liczby n
$\binom{n}{k}$	symbol Newtona (n po k)
$P_n(k)$	prawdopodobieństwo uzyskania k sukcesów w schemacie n prób Bernoulliego
EX	wartość oczekiwana
$\bar{x}$; $\bar{x}_w$	średnia wyników; średnia ważona wyników
σ^2 ; σ	wariancja; odchylenie standardowe

Stereometria

1

Umiejętności

Po szkole podstawowej uczeń:

- rozpoznaje graniastosłupy proste, ostrosłupy, walce, stożki i kule w sytuacjach praktycznych i wskazuje te bryły wśród innych modeli brył,
- wskazuje wśród graniastosłupów prostopadłościowy i sześcienny i uzasadnia swój wybór,
- rozpoznaje siatki graniastosłupów prostych i ostrosłupów,
- rysuje siatki prostopadłościowych,
- wykorzystuje podane zależności między długościami krawędzi graniastosłupa do wyznaczania długości poszczególnych krawędzi,
- oblicza objętość i pole powierzchni prostopadłościowego przy danych długościach krawędzi,
- stosuje jednostki objętości i pojemności: mililitr, litr, cm^3 , dm^3 , m^3 ,
- rozpoznaje graniastosłupy i ostrosłupy prawidłowe,
- oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów prostych, prawidłowych oraz ostrosłupów prawidłowych i takich, które nie są prawidłowe.

Po tym dziale uczeń:

- wskazuje płaszczyzny równoległe i płaszczyzny prostopadłe do danej płaszczyzny,
- wskazuje proste równoległe i prostopadłe do danej płaszczyzny,
- wskazuje proste równoległe, prostopadłe i skośne w przestrzeni,
- zaznacza rzut prostokątny punktu na płaszczyznę,
- oblicza odległość punktu od płaszczyzny,
- wyznacza kąt nachylenia prostej do płaszczyzny oraz kąt dwuścienny,
- rysuje rzuty graniastosłupów, równoległościennów oraz ostrosłupów,
- rysuje siatki graniastosłupów i ostrosłupów wypukłych,
- stosuje w zadaniach związki między liczbą ścian, krawędzi i wierzchołków graniastosłupów i ostrosłupów wypukłych,
- wskazuje promień podstawy, wysokość i tworzące walca oraz stożka; stosuje w zadaniach związki między nimi,
- stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków i miar kątów w bryłach,
- oblicza objętość i pole powierzchni graniastosłupa, ostrosłupa, walca, stożka i kuli,
- stosuje zależności między polami powierzchni i objętościami brył podobnych w zadaniach,
- rozwiązuje zadania optymalizacyjne z wykorzystaniem pochodnej.

Uwagi metodyczne

Podstawowe pojęcia związane z bryłami były już omawiane w trakcie nauki w szkole podstawowej.

Cały kurs geometrii przestrzennej jest prowadzony spiralnie – pojęcia wielokrotnie powtarzają się w różnych sformułowaniach i zadaniach. Często wykorzystujemy znane uczniom pojęcia graniastosłupa, ostrosłupa lub którejs z brył obrotowych i dopiero później porządkujemy związane z nimi definicje.

Geometria przestrzenna bardzo często sprawia uczniom dużo kłopotów – niejednokrotnie wynikają one z braku umiejętności wykonania poprawnego rysunku. Dlatego kładziemy duży nacisk właśnie na rysowanie.

W podręczniku zamieściliśmy wiele rysunków, za pomocą których pokazujemy kolejne etapy rysowania wielościanów najczęściej wykorzystywanych w zadaniach. Zwracamy uwagę na umiejętne stosowanie kolorów.

Nowością w szkole ponadpodstawowej jest stosowanie funkcji trygonometrycznych w zadaniach do wyznaczania miar kątów w bryłach. Dlatego większą wagę należy przyłożyć do omówienia pojęć kąta nachylenia prostej do płaszczyzny oraz kąta dwuściennego.

1. Proste i płaszczyzny w przestrzeni

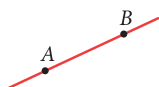
Umiejętności:

- rozpoznawanie wzajemnego położenia prostych i płaszczyzn w przestrzeni

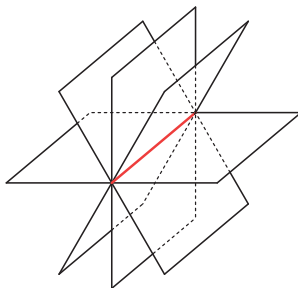
Tematy z geometrii przestrzeni (stereometrii) zaczniemy od przypomnienia i uporządkowania niektórych pojęć oraz zależności dotyczących prostych i płaszczyzn.

Wiemy, że:

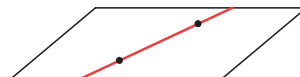
- przez dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta,



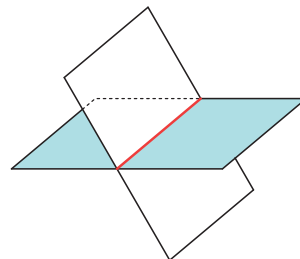
- każda prosta jest zawarta w nieskończenie wielu płaszczyznach,



- prosta przechodząca przez dwa różne punkty płaszczyzny jest zawarta w tej płaszczyźnie,

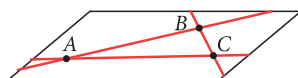


- jeżeli dwie różne płaszczyzny mają punkt wspólny, to mają wspólną prostą, zwaną krawędzią przecięcia.



Płaszczyzna jest zbiorem punktów. W przestrzeni ma wszystkie właściwości występujące w planimetrii. Jednoznaczne wyznaczenie płaszczyzny polega na precyzyjnym określeniu, które punkty przestrzeni do niej należą, a które nie należą. Płaszczyzna jest jednoznacznie wyznaczona przez każdy z podanych zbiorów punktów:

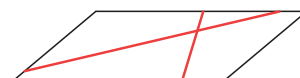
- trzy niewspółliniowe punkty,



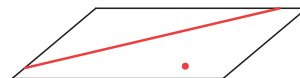
- dwie rozłączne proste równoległe,



- dwie przecinające się proste,



- prosta i punkt nienależący do niej.



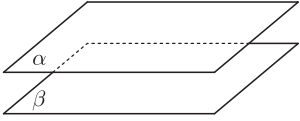
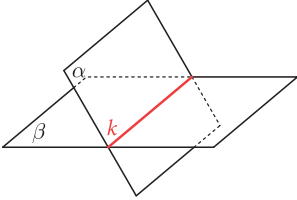
MKP

temat 2.1

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 1.1

Generator
testów i sprawdzianów

Wzajemne położenie dwóch płaszczyzn

Dwie różne płaszczyzny	
albo nie mają punktu wspólnego	albo mają punkt wspólny
 Płaszczyzny są równoległe: $\alpha \parallel \beta$.	 Płaszczyzny α i β przecinają się wzdłuż krawędzi k.

Przyjmujemy ponadto, że każda płaszczyzna jest równoległa do samej siebie.

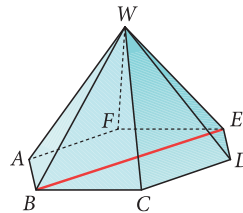
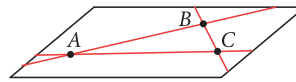
Definicja

Mówimy, że dwie płaszczyzny:

- są **równoległe**, jeżeli nie mają punktów wspólnych albo mają wszystkie punkty wspólne,
- przecinają się**, jeżeli mają wspólną prostą, nazywaną **krawędzią przecięcia**.

Płaszczyzny często oznacza się małymi literami alfabetu greckiego. Jeżeli podane są punkty A , B , C wyznaczające płaszczyznę, to będziemy ją oznaczać za pomocą skrótu „pł. ABC ”.

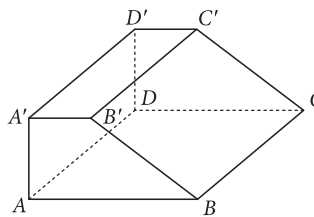
Skrótu „pł. $ABCD$ ” („pł. $ABCDE$ ” itd.) używamy wtedy, gdy chcemy wskazać więcej punktów leżących na płaszczyźnie, np. do opisu ścian wielościanów. Skrót „pr. BE ” oznacza natomiast prostą przechodzącą przez punkty B i E .



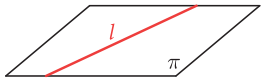
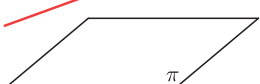
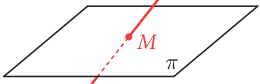
Przykład 1

W narysowanym wielościanie płaszczyzny równoległe są wyznaczone przez następujące pary ścian: $ABCD$ i $A'B'C'D'$ oraz $ABBA'$ i $DCC'D'$, czyli:

$$\begin{aligned} \text{pł. } ABCD &\parallel \text{pł. } A'B'C'D' \text{ oraz} \\ \text{pł. } ABBA' &\parallel \text{pł. } DCC'D' \end{aligned}$$



Wzajemne położenie płaszczyzny i prostej

 Prosta l ma wszystkie punkty wspólne z płaszczyzną π. Mówimy, że prosta l jest zawarta w płaszczyźnie π.	 Prosta k nie ma żadnego punktu wspólnego z płaszczyzną π.	 Prosta m ma dokładnie jeden punkt wspólny z płaszczyzną π. Mówimy, że prosta m przecina płaszczyznę π w punkcie M.
--	---	---

O prostych l i k mówimy, że są równoległe do płaszczyzny π :

$$l \parallel \pi \text{ i } k \parallel \pi$$

Definicja

Mówimy, że prosta:

- jest **równoległa do płaszczyzny**, jeżeli nie ma z nią punktów wspólnych albo jeżeli jest w niej zawarta,
- **przecina płaszczyznę**, jeżeli ma z nią jeden punkt wspólny.

Przykład 2

Opiszemy położenie prostej BM względem płaszczyzn wyznaczonych przez ściany sześciennego pudełka przedstawionego na rysunku.

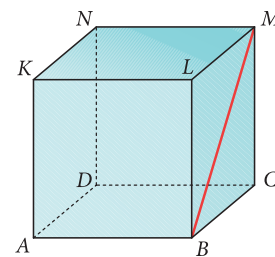
Rozwiązanie

Prosta BM jest równoległa do płaszczyzny:

- $BCML$, ponieważ jest zawarta w tej płaszczyźnie,
- $ADNK$, bo nie ma z tą płaszczyzną żadnego punktu wspólnego.

Prosta BM przecina płaszczyznę:

- $ABCD$ w punkcie B ,
- $ABLK$ w punkcie B ,
- $KLMN$ w punkcie M ,
- $DCMN$ w punkcie M .



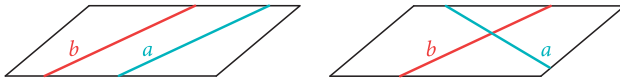
Wzajemne położenie dwóch prostych w przestrzeni

Definicja

Jeżeli dwie różne proste zawarte są w jednej płaszczyźnie, to takie proste nazywamy **współpłaszczyznowymi**.

Przykład 3

Proste a i b są współpłaszczyznowe.



Definicja

Dwie proste, przez które nie można poprowadzić jednej płaszczyzny, nazywamy **skośnymi**.

Przykład 4

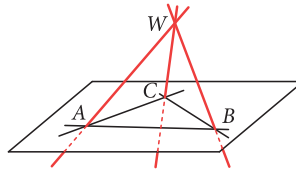
◀ zad. 1.7–1.9

Wypiszemy wszystkie pary prostych skośnych pokazanych na rysunku.

Rozwiązanie

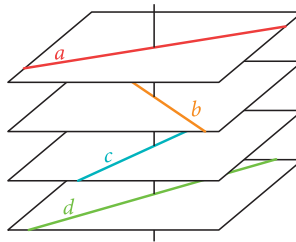
Skośne są proste:

- pr. AB i pr. CW ,
- pr. AC i pr. BW ,
- pr. BC i pr. AW .

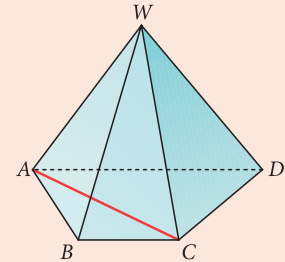


Przykład 5

Na rysunku obok pokazujemy sposób umieszczenia w przestrzeni dowolnej liczby prostych, z których każde dwie są skośne (na rysunku mamy model utworzony z czterech prostych: a, b, c, d).

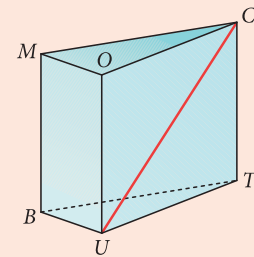


◀ 1.7. Na rysunku poniżej przedstawiony jest wielościan $ABCDW$. Wypisz wszystkie jego krawędzie, które są zawarte w prostych skośnych do prostej AC .



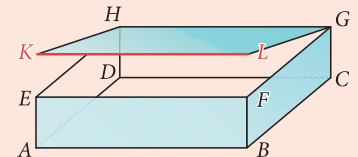
Odp.: BW, DW

◀ 1.8. Na rysunku poniżej przedstawiono graniastosłup prosty $BUTMOC$ o podstawie trójkątnej. Wypisz wszystkie jego krawędzie, które są zawarte w prostych skośnych do prostej UC .



Odp.: BT, MO, MB

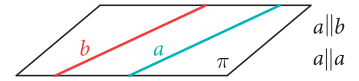
◀ 1.9. Na rysunku poniżej przedstawiono otwarte prostokątne pudełko. Wszystkie jego narożniki oznaczono literami. Wypisz krawędzie zawarte w prostych skośnych do prostej KL .



Odp.: $BC, AD, FG, EH, AE, BF, CG, DH$

Równoległość i prostotałość w przestrzeni

Jeżeli dwie różne proste na płaszczyźnie nie mają żadnego punktu wspólnego, to są równoległe. Przyjmujemy również, że każda prosta jest równoległa do samej siebie, czyli $a \parallel a$.



Równoległość w przestrzeni definiujemy tak, aby odróżnić proste skośne od prostych równoległych. Proste skośne nie mają punktów wspólnych, ale nie nazywamy ich równoległymi.

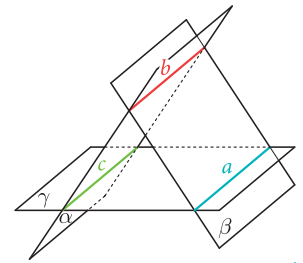
Definicja

Dwie proste nazywamy **równoległymi w przestrzeni**, jeżeli są współpłaszczyznowe i równoległe na płaszczyźnie, na której leżą.

Przykład 6

Proste a , b , c są równoległe w przestrzeni, ponieważ:

- $a \parallel b$ w płaszczyźnie β ,
- $a \parallel c$ w płaszczyźnie γ ,
- $b \parallel c$ w płaszczyźnie α .



Zdefiniowaliśmy równoległość prostej a do płaszczyzny α oraz równoległość dwóch płaszczyzn.

Zauważmy jeszcze, że przez każdy punkt przestrzeni przechodzi:

- dokładnie jedna prosta równoległa do danej prostej a ,
- nieskończenie wiele prostych równoległych do danej płaszczyzny α – suma tych prostych tworzy płaszczyznę równoległą do płaszczyzny α ,



- dokładnie jedna płaszczyzna równoległa do danej płaszczyzny α .

Pokażemy jeszcze prosty przykład twierdzenia udowodnionego metodą nie wprost.

Przykład 7

Dane są dwie równoległe płaszczyzny α i β oraz nierównoległa do nich płaszczyzna π . Niech $\alpha \cap \pi = a$ oraz $\beta \cap \pi = b$. Wykażemy, że $a \parallel b$.

Dowód (nie wprost)

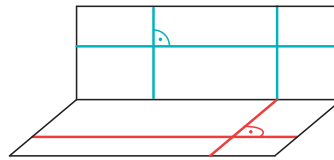
Założmy, że proste a i b nie są równoległe. Ponieważ leżą w jednej płaszczyźnie π , muszą się przecinać. Oznacza to jednak, że punkt przecięcia tych prostych jest punktem wspólnym płaszczyzn α i β . A to jest sprzeczne z założeniem, że $\alpha \parallel \beta$. Zatem $a \parallel b$.

Koniec dowodu

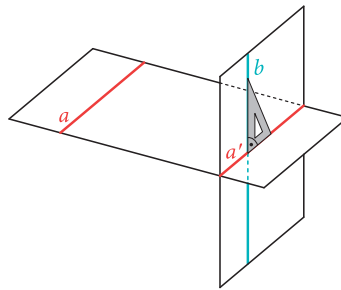
Podobnie jak w planimetrii przyjmujemy zasadę: kiedy piszemy „dwie proste” („dwa punkty”, „dwie płaszczyzny”), zakładamy, że te proste (punkty, płaszczyzny) są różne.



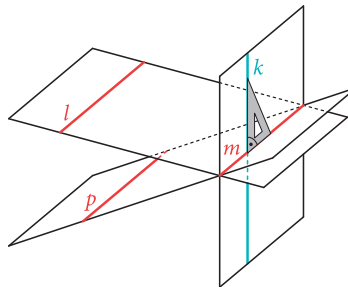
Dwie proste przecinające się na płaszczyźnie pod kątem prostym nazywamy prostymi prostopadłymi. Prostopadłość prostych w przestrzeni definiujemy w bardziej ogólny sposób, tak aby rozszerzyć pojęcie prostopadłości prostych na proste skośne.

**Definicja**

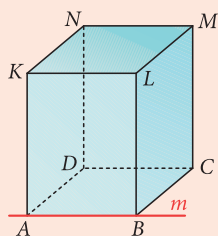
Prosta a jest prostopadła do prostej b w przestrzeni ($a \perp b$), gdy istnieje prosta a' równoległa do prostej a i przecinająca prostą b pod kątem prostym.



Na rysunku obok przedstawiona jest sytuacja, w której proste k i m przecinają się pod kątem prostym, czyli $k \perp m$. Proste l i p są równoległe do prostej m (i skośne do prostej k). Zgodnie z definicją $k \perp l$ i $k \perp p$. Prosta k jest prostopadła w przestrzeni do każdej prostej równoległej do m .



◀ 1.12.



Na rysunku pokazano prostopadłościan z wyróżnioną krawędzią AB , wyznaczającą prostą m . Wypisz wszystkie

- krawędzie równoległe do m .
- krawędzie prostopadłe do m .
- krawędzie skośne do m .
- ściany równoległe do m .
- ściany prostopadłe do m .

Odp.: a) AB, DC, KL, NM

b) $AK, BL, CM, DN, AD, BC, LM, KN$

c) KN, ND, ML, MC

d) $ABCD, DCMN, KLMN, ABLK$

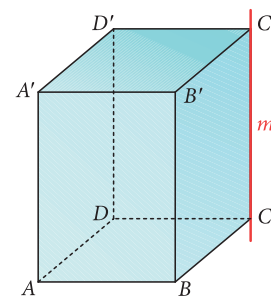
e) $BCML, ADNK$

Przykład 8 ◀ zad. 1.12

Wypiszemy wszystkie krawędzie równoległe i wszystkie krawędzie prostopadłe do prostej m w prostopadłościanie $ABCD A' B' C' D'$.

Rozwiązanie

- Krawędzie równoległe:
 $CC' \parallel m$ (bo krawędź CC' jest zawarta w prostej m),
 $AA' \parallel m, BB' \parallel m, DD' \parallel m$.
- Krawędzie prostopadłe:
 $B'C' \perp m, A'D' \perp m, D'C' \perp m, A'B' \perp m,$
 $BC \perp m, AD \perp m, DC \perp m, AB \perp m$.

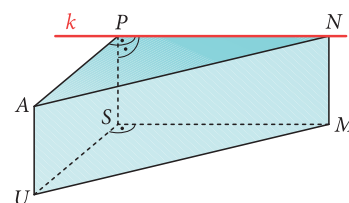


Przykład 9

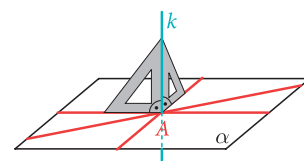
Wypiszemy krawędzie prostopadłe do prostej k w graniastosłupie prostym $SUMPAN$, którego podstawą jest trójkąt prostokątny.

Rozwiązanie

$AP \perp k, US \perp k, PS \perp k, MN \perp k, AU \perp k$.



Jeżeli ustawimy ekierki na stole w sposób przedstawiony na rysunku, to prosta k , zawierająca jedną z przyprostokątnych, będzie prostopadła do każdej prostej przechodzącej przez punkt A i zawartej w płaszczyźnie stołu. Jest zatem prostopadła do dowolnej prostej zawartej w płaszczyźnie stołu.



Definicja

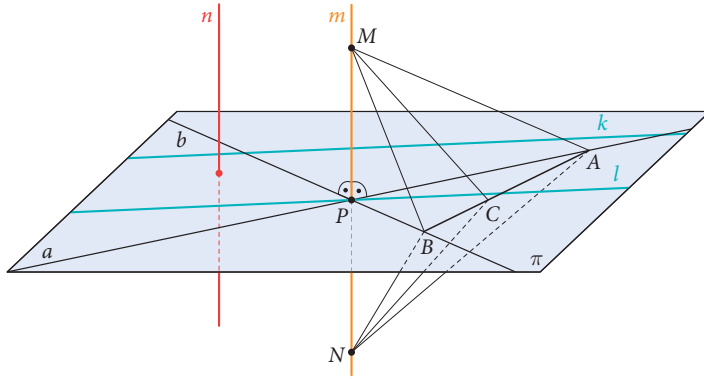
Mówimy, że **prosta k jest prostopadła do płaszczyzny α** ($k \perp \alpha$), jeżeli jest prostopadła do każdej prostej zawartej w płaszczyźnie α .

Udowodnimy twierdzenie.

Twierdzenie

Prosta prostopadła do dwóch przecinających się prostych jest prostopadła do płaszczyzny wyznaczonej przez te proste.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Założenia

1. Proste a i b wyznaczają płaszczyznę π i przecinają się w punkcie P .
2. $n \perp a$ i $n \perp b$

Teza

$$n \perp \pi$$

Dowód

Zauważmy, że skoro prosta n jest prostopadła do każdej z przecinających się prostych a i b , to nie może być zawarta w płaszczyźnie π .

Aby dowieść prawdziwości tezy, musimy wykazać, że prosta n jest prostopadła do każdej prostej k zawartej w płaszczyźnie π .

Na płaszczyźnie π istnieje dokładnie jedna prosta – oznaczmy ją l – równoległa do wybranej prostej k i przechodząca przez punkt P . Jeżeli $P \in k$, to oczywiście $l = k$. Ponadto istnieje dokładnie jedna prosta – oznaczmy ją m – równoległa do n i przechodząca przez punkt P . Jeżeli $P \in n$, to oczywiście $m = n$.

Pokażemy, że $m \perp l$, i tym samym dowiedziemy, że $n \perp k$.

Prowadzimy na płaszczyźnie π prostą przecinającą proste a , b i l odpowiednio w punktach A , B i C , jak na rysunku powyżej.

Na prostej m wybieramy takie punkty M i N , aby $|PM| = |PN|$, i rozpatrujemy własności dwóch trójkątów: MNA i MNB .

- W trójkącie MNA mamy:

$$|PM| = |PN|$$

$$\sphericalangle MPA = 90^\circ = \sphericalangle APN \quad \leftarrow \text{z założenia}$$

Bok PA jest wspólny dla trójkątów MPA i APN , zatem:

$$\triangle MPA \equiv \triangle NPA \quad \leftarrow \text{cecha bkb przystawiania trójkątów}$$

Stąd $|AM| = |AN|$.

- Podobnie w trójkącie MNB :

$$|PM| = |PN|$$

$$\sphericalangle MPB = 90^\circ = \sphericalangle BPN$$

$$\triangle MPB \equiv \triangle NPB$$

← cecha bkb przystawania trójkątów

Stąd $|BM| = |BN|$.

Zatem $\triangle ABM \equiv \triangle ABN$.

← cecha bbb przystawania trójkątów

Zbadamy teraz własności trójkąta MNC .

Z przystawania trójkątów ABM i ABN mamy:

$$\sphericalangle ABM = \sphericalangle ABN$$

Odcinek BC jest wspólnym bokiem trójkątów BCM i BCN , zatem:

$$\triangle BCM \equiv \triangle BCN$$

← cecha bkb przystawania trójkątów

i w szczególności $|CM| = |CN|$.

← trójkąt MNC jest równoramienny

Odcinek PC jest wspólnym bokiem trójkątów PCM i PCN , zatem:

$$\triangle PCM \equiv \triangle PCN$$

← cecha bbb przystawania trójkątów

Z przystawania tych trójkątów mamy:

$$\sphericalangle MPC = \sphericalangle NPC$$

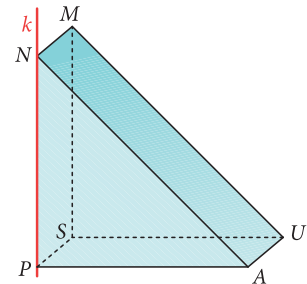
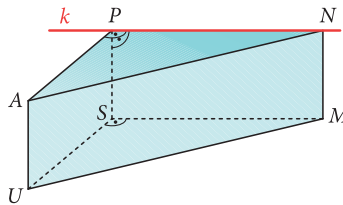
a ponieważ są to kąty przyległe, każdy z nich jest kątem prostym.

Wykazaliśmy, że $m \perp l$, a skoro $m \parallel n$ i $l \parallel k$, to tym samym $n \perp k$, czyli $n \perp \pi$.

Koniec dowodu

Przykład 10

Prosta k z przykładu 9 jest prostopadła do dwóch prostych: AP i PS , przecinających się w punkcie P . Jest więc prostopadła do płaszczyzny zawierającej ścianę boczną $PAUS$. Rysunek po prawej stronie przedstawia ten sam graniastosłup, ale stojący na ścianie $PAUS$.



Definicja

Mówimy, że **płaszczyzna α jest prostopadła do płaszczyzny β** , jeżeli α zawiera prostą prostopadłą do płaszczyzny β .

Jeżeli płaszczyzna α zawiera prostą prostopadłą do płaszczyzny β , to płaszczyzna β zawiera prostą prostopadłą do płaszczyzny α (można to pokazać na modelu z ekierką), zatem prawdziwe jest następujące twierdzenie, które podajemy bez dowodu.

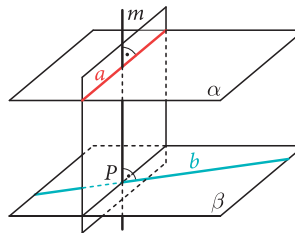
Twierdzenie

Jeżeli płaszczyzna α jest prostopadła do płaszczyzny β , to płaszczyzna β jest prostopadła do płaszczyzny α .

W przykładzie 10 płaszczyznami prostopadłymi są np.: pł. PAUS i pł. PSMN.

Zauważmy na koniec, że w przestrzeni dwie dowolne proste mają wspólną, przecinającą je, prostą prostopadłą. Dla prostych skośnych można ją wyznaczyć w następujący sposób:

Przez proste skośne a i b prowadzimy płaszczyzny równoległe α i β . Następnie przez jedną z prostych (na rysunku prostą a) prowadzimy płaszczyznę prostopadłą do β przecinającą prostą b w punkcie P . Szukana prosta m jest zawarta w tej płaszczyźnie, przechodzi przez punkt P i jest prostopadła do β , zatem przecina każdą z prostych a , b i jest do nich prostopadła.



Zadania

W każdym z zadań 1.1–1.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź.

Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1.1. Punkty P , Q , R , S nie leżą na jednej płaszczyźnie. Wskaż liczbę płaszczyzn wyznaczonych przez każde trzy spośród tych punktów.

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

1.2. Proste AB i CD są skośne. Jak są położone proste AC i BD ?

- A. Są równoległe. C. Są skośne.
B. Przecinają się. D. Jest za mało danych, żeby odpowiedzieć na to pytanie.

1.3. Dane są prosta k i punkt P nieleżący na tej prostej. Ile istnieje prostych, a ile płaszczyzn przechodzących przez punkt P i równoległych do prostej k ?

- A. Jedna prosta i jedna płaszczyzna.
B. Jedna prosta i nieskończenie wiele płaszczyzn.
C. Nieskończenie wiele prostych i jedna płaszczyzna.
D. Nieskończenie wiele prostych i nieskończenie wiele płaszczyzn.

Uwagi metodyczne

Podstawą rozwiązania prawie każdego zadania ze stereometrii jest poprawnie wykonany, duży, przejrzysty rysunek. Jeżeli w pracowni matematycznej brak gotowych zestawów wielościanów, a czas na to pozwoli, warto polecić uczniom wykonanie modeli różnych wielościanów.

Zachęcamy do rozwiązywania zadań z odpowiednim modelem ustawionym przed uczniem na ławce – można w tym celu używać klocków, pudełek itp. Użyteczną pomocą dydaktyczną są też ołówki z powodzeniem imitujące odcinki lub proste.

Odpowiedzi i rozwiązania

1.1. B

1.2. C

1.3. B

1.4. F, P, F

1.5. zbiór pusty, punkt, prosta

1.6. płaszczyzny: KOZ , KOA , OAZ , KAZ ; krawędzie: KO , KZ , KA , OZ , OA , ZA

1.7. BW , DW 1.8. BT , MO , MB

1.9. BC , AD , FG , EH , AE , BF , CG , DH

1.4. Dane są prosta k i płaszczyzna α .

Oceń prawdziwość podanych zdań.

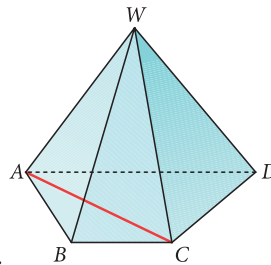
- A. Istnieje dokładnie jedna płaszczyzna zawierająca prostą k i prostopadła do płaszczyzny α .
 B. Istnieje co najmniej jedna płaszczyzna zawierająca prostą k i prostopadła do płaszczyzny α .
 C. Istnieje nieskończenie wiele płaszczyzn zawierających prostą k i prostopadłych do płaszczyzny α .

1.5. Jakim zbiorem może być zbiór punktów wspólnych trzech różnych płaszczyzn? Rozważ różne możliwości położenia płaszczyzn.

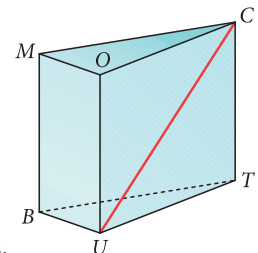
1.6. Punkty K , O , Z , A nie leżą na jednej płaszczyźnie. Wymień wszystkie płaszczyzny wyznaczone przez każde trzy spośród tych punktów. Podaj krawędzie przecięcia każdej pary płaszczyzn.

1.7. Na rysunku 1 przedstawiony jest wielościan $ABCDW$. Wypisz wszystkie jego krawędzie, które są zawarte w prostych skośnych do prostej AC .

1.8. Na rysunku 2 przedstawiono graniastosłup prosty $BUTMOC$ o podstawie trójkątnej. Wypisz wszystkie jego krawędzie, które są zawarte w prostych skośnych do prostej UC .

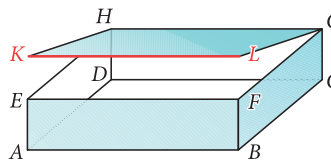


Rys. 1.



Rys. 2.

1.9. Na rysunku przedstawiono otwarte prostopadłościenne pudełko. Wszystkie jego narożniki oznaczono literami. Wypisz krawędzie zawarte w prostych skośnych do prostej KL .



1.10. Dane są dwie proste skośne k i l . Wykonaj rysunek (lub zbuduj model) płaszczyzny π równoległej do obydwu tych prostych i nieposiadającej z nimi punktów wspólnych.

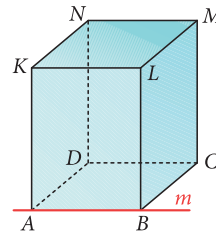
a) Ile jest takich płaszczyzn?

b) Czy przez każdy punkt przestrzeni nienależący do żadnej z tych prostych można poprowadzić taką płaszczyznę? Jeżeli tak, to ile jest takich płaszczyzn przechodzących przez dany punkt?

1.11. Dane są proste skośne k i l . Wykonaj rysunek (lub zbuduj model) prostej m przecinającej proste k oraz l i równoległej do danej prostej p . Czy dla każdej prostej p istnieje taka prosta m ?

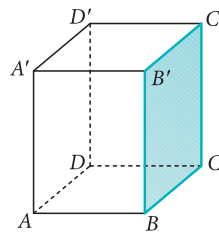
1.12. Na rysunku pokazano prostopadłościan z wyróżnioną krawędzią AB , wyznaczającą prostą m . Wypisz wszystkie

- krawędzie równoległe do m .
- krawędzie prostopadłe do m .
- krawędzie skośne do m .
- ściany równoległe do m .
- ściany prostopadłe do m .



1.13. Na rysunku przedstawiony jest prostopadłościan z wyróżnioną kolorem ścianą α . Wypisz wszystkie

- krawędzie prostopadłe do α .
- krawędzie równoległe do α .
- ściany równoległe do α .
- ściany prostopadłe do α .



1.14. Czy dwie proste prostopadłe do tej samej płaszczyzny mogą być skośne?

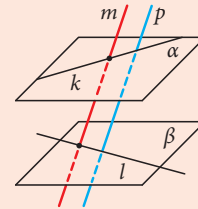
1.15. Czy dwie płaszczyzny prostopadłe do tej samej prostej mogą się przecinać?

1.16. Dana jest płaszczyzna π i punkt A nieleżący na niej. Ile jest płaszczyzn prostopadłych do π przechodzących przez punkt A ? Wykonaj rysunek (lub zbuduj model) płaszczyzny α prostopadłej do π , przechodzącej przez punkt A i równoległej do danej prostej k .

1.17. Dane są dwie proste skośne a i b . Wykonaj rysunek (lub zbuduj model) płaszczyzny równoległej do prostej a i zawierającej prostą b .

- 1.10. a)** nieskończenie wiele
b) tak, jedna

1.11. Jeśli prosta p jest równoległa do płaszczyzn α i β , to nie istnieje prosta m .



- 1.12. a)** AB, DC, KL, NM
b) $AK, BL, CM, DN, AD, BC, LM, KN$
c) KN, ND, ML, MC
d) $ABCD, DCMN, KLMN, ABLK$
e) $BCML, ADNK$

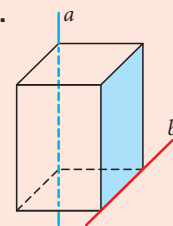
- 1.13. a)** $AB, DC, A'B', D'C'$
b) $BC, CC', C'B', B'B, AD, DD', D'A', A'A$
c) $BCC'B', ADD'A'$
d) $ABCD, ABB'A', A'B'C'D', DCC'D'$

1.14. Nie, są równoległe.

1.15. Nie, są równoległe.

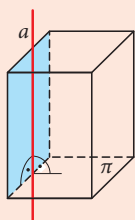
1.16. nieskończenie wiele

1.17.

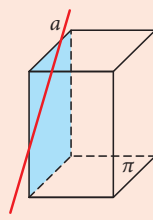


1.18.

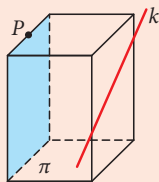
I przypadek



II przypadek



1.19. Jeżeli prosta k jest równoległa do płaszczyzny π , to nie istnieje taka płaszczyzna.



Prosto do matury

1. P, P, P

2. a) CB, FE

b) CF, BE, AD, AC, DF

c) DF, AD, DE

d) pł. ABC, pł. DEF, pł. CBEF

e) pł. ACFD

3. nieskończenie wiele, gdy $k \parallel$ pr. PQ;
jedna, gdy $k \nparallel$ pr. PQ

4. Wskazówka: Przez punkt P poprowadź prostą a' równoległą do prostej a i prostą b' równoległą do prostej b . Szukana płaszczyzna zawiera a' i b' .

5. Wskazówka: Poprowadź płaszczyznę przez dwie wybrane proste i zbadaj położenie trzeciej prostej względem tej płaszczyzny.

1.18. Wykonaj rysunek (lub zbuduj model) płaszczyzny zawierającej daną prostą a i prostopadłej do danej płaszczyzny π . Rozważ przypadki, gdy $a \perp \pi$ oraz gdy a nie jest prostopadła do π .

* 1.19. Wykonaj rysunek (lub zbuduj model) płaszczyzny przechodzącej przez dany punkt P , prostopadłej do danej płaszczyzny π i równoległej do danej prostej k .

1.20. Wykaż, że dla pary prostych skośnych a i b istnieje dokładnie jedna para płaszczyzn α i β takich, że a zawiera się w α , b zawiera się w β i $\alpha \parallel \beta$.

Prosto do matury



1. Różne proste a i b są prostopadłe do prostej k .

Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Proste a i b mogą być równoległe.

B. Proste a i b mogą być prostopadłe.

C. Proste a i b mogą być skośne.

2. Podstawą graniastosłupa prostego przedstawionego na rysunku jest trójkąt prostokątny. Prosta k zawiera przyprostokątną tego trójkąta. Wypisz wszystkie wyznaczone przez wierzchołki tego graniastosłupa

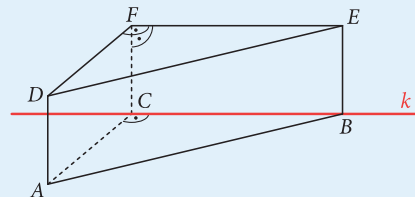
a) krawędzie równoległe do prostej k .

b) krawędzie prostopadłe do prostej k .

c) krawędzie skośne do prostej k .

d) płaszczyzny równoległe do prostej k .

e) płaszczyzny prostopadłe do prostej k .

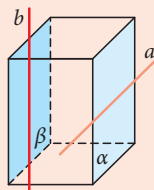


3. Dane są prosta k i różne punkty P, Q nieleżące na niej. Ile istnieje płaszczyzn zawierających punkty P i Q i równoległych do prostej k ? Rozważ różne położenia punktów względem prostej.

4. Dane są dwie proste skośne a i b oraz punkt P nienależący do żadnej z nich. Zbuduj model lub wykonaj rysunek płaszczyzny równoległej do prostej a i do prostej b oraz przechodzącej przez punkt P .

5. Trzy proste nie leżą w jednej płaszczyźnie, ale każde dwie spośród nich się przecinają. Wykaż, że proste te mają jeden punkt wspólny.

1.20. Przez prostą a prowadzimy dowolną płaszczyznę α . Skoro prosta b jest skośna do a , to istnieje tylko jedna płaszczyzna β zawierająca prostą b i równoległa do płaszczyzny α .



2. Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny

Umiejętności:

- rozpoznawanie w graniastoslupach i ostrosłupach kątów między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi), obliczanie miar tych kątów
- rozpoznawanie w graniastoslupach i ostrosłupach kątów między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), obliczanie miar tych kątów
- stosowanie trygonometrii do obliczania długości odcinków oraz miar kątów

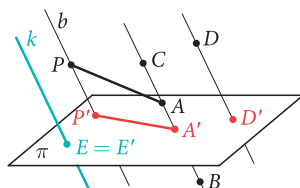
Rzut równoległy

Wiemy, że przez każdy punkt przestrzeni przechodzi dokładnie jedna prosta równoległa do danej prostej. Obserwację tę wykorzystamy do zdefiniowania przekształcenia, które dowolnemu punktowi przestrzeni przyporządkowuje punkt nazywany jego rzutem równoległym na ustaloną płaszczyznę.

Definicja

Niech będzie dana płaszczyzna π i prosta k przecinająca tę płaszczyznę. Przez punkt P przestrzeni prowadzimy prostą b równoległą do prostej k . Prosta b przecina płaszczyznę π w punkcie P' , który nazywamy **rzutem równoległym** punktu P na płaszczyznę π w kierunku k .

Na rysunku zaznaczone są rzuty równoległe kilku punktów na płaszczyznę π w kierunku prostej k .



Zauważmy, że:

- przekształcenie to różnym punktom przestrzeni może przyporządkować ten sam punkt płaszczyzny π , np. rzutem każdego z punktów A , B , C jest punkt A' ,
- rzutem punktu należącego do płaszczyzny π jest on sam (punkty płaszczyzny π są punktami stałymi w tym przekształceniu).

MKP

tematy 2.7, 2.8

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 1.2

Generator
testów i sprawdzianów

W rzucie równoległym:

- obrazem odcinka jest albo odcinek ($A'P'$ jest obrazem odcinka AP), albo – gdy rzutowany odcinek jest równoległy do kierunku rzutu – punkt (A' jest obrazem np. odcinka AB),
- obrazem prostej jest prosta albo – gdy rzutowana prosta jest równoległa do kierunku rzutu – punkt,
- obrazem przestrzeni jest płaszczyzna π .

Szczególnym przypadkiem rzutu równoległego jest rzut w kierunku prostej prostopadłej do płaszczyzny π . Nazywamy go wówczas **rzutem prostokątnym** (prostokątnym) na płaszczyznę π .

Rzut prostokątny prostej na płaszczyznę jest wygodnym narzędziem do sprawdzenia, które proste skośne są prostopadłe.

Twierdzenie

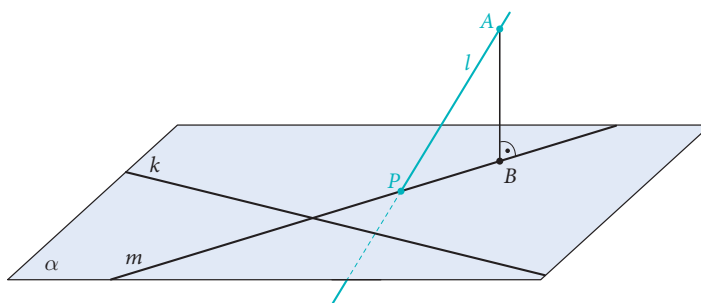
Twierdzenie o trzech prostopadłych

Dane są płaszczyzna α i prosta l , która nie jest do niej prostopadła. Prosta m jest rzutem prostokątnym prostej l na płaszczyznę α , a k jest dowolną prostą leżącą na płaszczyźnie α .

Prosta l jest prostopadła do k wtedy i tylko wtedy, gdy prosta m jest prostopadła do k .

Dowód

- Jeżeli l jest równoległa do płaszczyzny α , to teza twierdzenia jest oczywista (ponieważ wtedy $l \parallel m$).
- Załóżmy, że l przecina płaszczyznę α i przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku: P to punkt przecięcia prostej l z płaszczyzną α , A jest pewnym różnym od P punktem prostej l , B – rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę α .



Wtedy $\text{pr. } AB \perp \alpha$, zatem, zgodnie z definicją, prosta AB jest prostopadła do każdej prostej leżącej na płaszczyźnie α . W szczególności:

$$\text{pr. } AB \perp k$$

Aby wykazać, że $l \perp k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $k \perp m$, musimy udowodnić dwa twierdzenia:

I. jeżeli $l \perp k$, to $m \perp k$ oraz II. jeżeli $m \perp k$, to $l \perp k$.

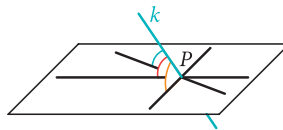
I. Załóżmy, że $l \perp k$. Oznacza to, że k jest prostopadła do dwóch przecinających się prostych: l oraz $\text{pr. } AB$. Jest więc prostopadła do płaszczyzny wyznaczonej przez te proste (zob. twierdzenie na s. 14), w szczególności do $\text{pr. } PB = m$, czyli $k \perp m$.

II. Załóżmy, że $m \perp k$. Zatem k jest prostopadła do dwóch przecinających się prostych: m oraz $\text{pr. } AB$. Jest więc prostopadła do płaszczyzny wyznaczonej przez te proste, w szczególności $k \perp l$.

Koniec dowodu

Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny

Jeżeli prosta k przecina w punkcie P płaszczyznę π , ale nie jest do niej prostopadła, to tworzy różne kąty z prostymi zawartymi w π i przechodzącymi przez P . Jeden z tych kątów ma szczególne znaczenie.



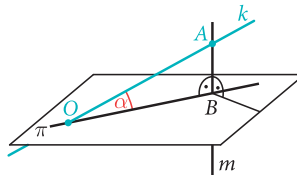
Definicja

Kątem nachylenia prostej do płaszczyzny, przy założeniu, że prosta nie jest do niej ani prostopadła, ani równoległa, nazywamy kąt ostry utworzony przez tę prostą i jej rzut prostokątny na płaszczyznę.

Kąt nachylenia prostej k do płaszczyzny π wyznaczamy w kolejnych krokach.

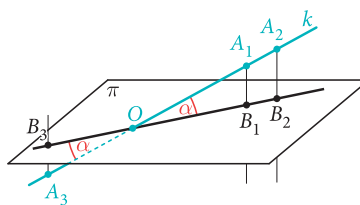
Krok 1: Na prostej k wybieramy punkt A różny od O – punktu przecięcia płaszczyzny.

Krok 2: Przez punkt A prowadzimy prostą m prostopadłą do płaszczyzny π i przecinającą ją w punkcie B (jest to rzut prostokątny punktu A na płaszczyznę π).



Krok 3: Prowadzimy prostą OB . Kąt AOB oznaczony na rysunku literą α jest szukany kąt nachylenia prostej k do płaszczyzny π .

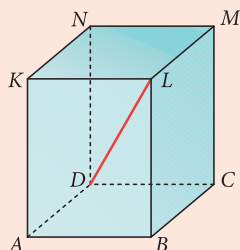
Miara kąta α nie zależy od tego, który z punktów prostej k wybierzemy jako punkt A .



Ponadto przyjmujemy, że prosta równoległa do płaszczyzny tworzy z nią kąt zerowy, czyli kąt o mierze 0° , a prosta prostopadła do płaszczyzny tworzy z nią kąt prosty, czyli kąt o mierze 90° .

Zauważmy, że jeżeli punkt B jest rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę π , a punkt $C \in \pi$ i $C \neq B$, to $|AB| < |AC|$. Inaczej mówiąc, punktem płaszczyzny π , który leży najbliżej punktu A , jest rzut prostokątny punktu A na tę płaszczyznę.

◀ 2.8. Przerysuj rzut prostopadłościanu $ABCDKLMN$.



Zaznacz na rysunku kąty nachylenia przekątnej DL do płaszczyzny

- podstawy $ABCD$.
- ściany bocznej $ADNK$.
- ściany bocznej $DCMN$.
- podstawy $KLMN$.

Odp.: Wskazówka: Szukanym kątem jest:

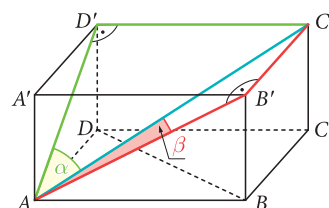
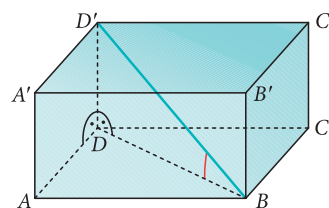
- $\sphericalangle LDB$,
- $\sphericalangle LDK$,
- $\sphericalangle LDM$,
- $\sphericalangle DLN$.

Przykład 1 ◀ zad. 2.8

W prostopadłościanie $ABCD A'B'C'D'$ prosta DD' jest prostopadła do płaszczyzny $ABCD$. Kąt $D'DB$ jest prosty, więc kąt $D'BD$ jest kątem nachylenia prostej BD' do płaszczyzny $ABCD$.

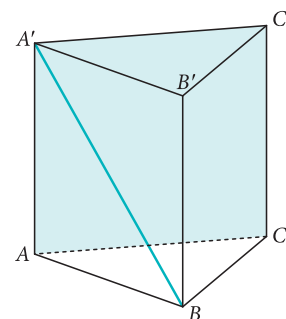
Na rysunku zaznaczone są kąty nachylenia przekątnej AC' prostopadłościanu:

- do płaszczyzny $ABB'A'$ – jest nim kąt β ,
- do płaszczyzny $AA'D'D$ – jest nim kąt α .

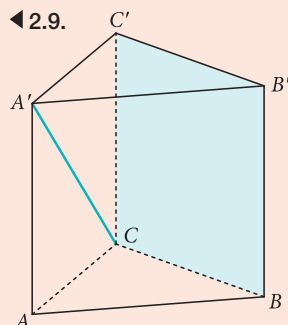


Przykład 2 ◀ zad. 2.9

Zaznaczmy kąt nachylenia prostej $A'B$ do płaszczyzny $ACC'A'$ w przedstawionym na rysunku graniastosłupie prostym, którego podstawą jest trójkąt ostrokątny.

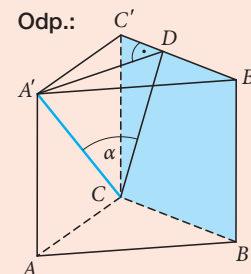


◀ 2.9.



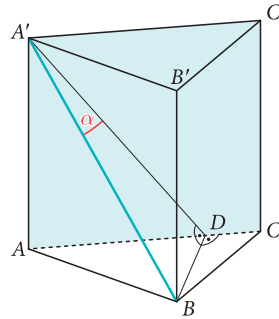
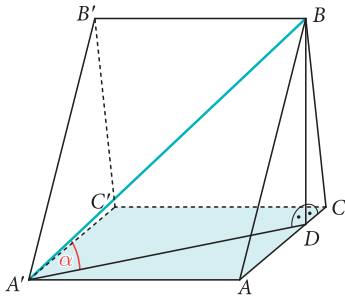
Przerysuj rzut graniastosłupa prostego $ABCA'B'C'$, którego podstawą jest ostrokątny trójkąt ABC (patrz rys.). Zaznacz na rysunku kąt nachylenia prostej $A'C$ do płaszczyzny $CBB'C'$.

Odp.:



Rozwiązanie

Dla ułatwienia ustawmy graniastosłup tak, jak na rysunku po lewej stronie. Ściana ABC jest prostopadła do płaszczyzny $ACC'A'$, zatem wysokość BD trójkąta ACB jest prostopadła do płaszczyzny $ACC'A'$. Rzutem prostokątnym punktu B na płaszczyznę $ACC'A'$ jest punkt D . Szukany kąt to $\angle DA'B$, oznaczony na rysunku literą α .



Na rysunku po prawej stronie przedstawiony jest graniastosłup w poprzednim położeniu z zaznaczonym kątem α .

Przykład 3 ◀ zad. 2.10

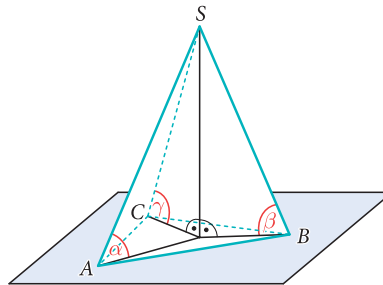
Zaznaczmy kąty nachylenia krawędzi bocznych danego ostrosłupa o podstawie trójkątnej do płaszczyzny podstawy.

Rozwiązanie

Najpierw należy znaleźć rzuty prostokątne krawędzi bocznych bryły. W tym celu najwygodniej jest zrzutować prostopadle wierzchołek ostrosłupa, czyli poprowadzić wysokość.

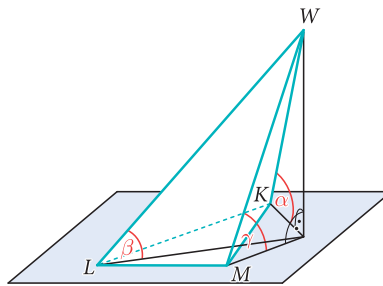
a) W ostrosłupie $ABCS$ rzut prostokątny wierzchołka należy do podstawy.

α, β, γ to odpowiednio kąty nachylenia krawędzi AS, BS i CS do płaszczyzny ABC .

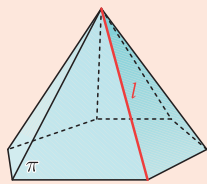
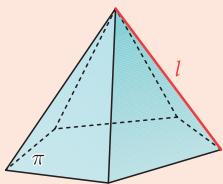


b) W ostrosłupie $KLMW$ rzut prostokątny wierzchołka nie należy do podstawy.

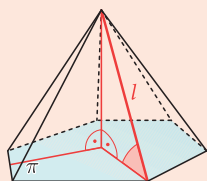
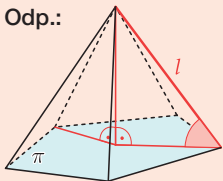
α, β, γ to odpowiednio kąty nachylenia krawędzi KW, LW i MW do płaszczyzny KLM .



◀ 2.10. Przerysuj rzuty ostrosłupów. Na każdym rysunku zaznacz kąt nachylenia prostej l do płaszczyzny podstawy π .



Odp.:



Odległość punktu od płaszczyzny

Definicja

Niech A_1 oznacza rzut prostokątny punktu A na płaszczyznę π . **Odległość punktu A od płaszczyzny π** jest równa: 0, gdy $A_1 = A$, oraz $|A_1A|$, gdy $A_1 \neq A$.

Za pomocą odległości punktu od płaszczyzny można zdefiniować:

- odległość między prostą l i płaszczyzną π do niej równoległą jako odległość dowolnego punktu prostej l od płaszczyzny π ,
- odległość między dwiema płaszczyznami równoległymi jako odległość dowolnego punktu jednej z tych płaszczyzn od drugiej płaszczyzny.

Przykład 4

◀ zad. 2.12

Odległość punktu A od płaszczyzny π jest równa 6 cm, odległość punktu B od płaszczyzny π jest równa 10 cm. Prosta AB jest nachylona do płaszczyzny π pod kątem 50° , a punkty A i B leżą po tej samej stronie płaszczyzny π . Obliczmy długość odcinka AB (z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku).

Rozwiązanie

Oznaczmy:

A_1 – rzut prostokątny punktu A na płaszczyznę π ,

B_1 – rzut prostokątny punktu B na płaszczyznę π ,

P – punkt przecięcia prostej AB z płaszczyzną π .

Punkty A i B leżą po tej samej stronie płaszczyzny π , jeżeli odcinek AB nie ma punktów wspólnych z płaszczyzną π .

Punkty A, B, P, A_1, B_1 leżą na jednej płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny π . Zgodnie z treścią zadania:

$$\sphericalangle BPB_1 = 50^\circ, |AA_1| = 6 \text{ cm}, |BB_1| = 10 \text{ cm}$$

Jeżeli przez punkt A poprowadzimy prostą równoległą do prostej PA_1 , to przetnie ona prostą BB_1 w pewnym punkcie. Oznaczmy go literą C .

Zatem w trójkącie ACB mamy:

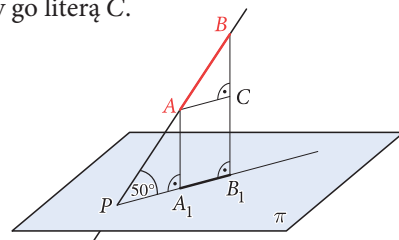
$$\sphericalangle ACB = 90^\circ, \sphericalangle BAC = 50^\circ$$

$$|BC| = |BB_1| - |CB_1| = 10 - 6 = 4 \text{ [cm]}$$

Długość boku AB obliczymy, korzystając z funkcji trygonometrycznych.

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \sin 50^\circ, \text{ stąd } |AB| = \frac{|BC|}{\sin 50^\circ} \approx \frac{4}{0,7660} \approx 5,22 \text{ [cm]}.$$

Odp.: $|AB| = 5,22 \text{ cm}$



◀ 2.12. Punkty A i B leżą po tej samej stronie płaszczyzny π . Punkty A_1, B_1 są odpowiednio ich rzutami prostokątnymi na płaszczyznę π . Punkty A, B, A_1, B_1 spełniają podane warunki. Oblicz długość odcinka AB .

a) $|A_1B_1| = 8, |AA_1| = 15, |BB_1| = 7$

b) $|A_1B_1| = 10, |AA_1| = 3, |BB_1| = 7$

Odp.: a) $8\sqrt{2}$

b) $2\sqrt{29}$

Zadania

W każdym z zadań 2.1–2.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

2.1. Punkty P i Q leżą po tej samej stronie płaszczyzny π . Punkty P' i Q' są odpowiednio ich rzutami prostokątnymi na płaszczyznę π . Punkty P , Q , P' , Q' spełniają warunki $|PQ| = 6$, $|QQ'| = 2\sqrt{3}$ i $|PP'| = 5\sqrt{3}$. Wskaż miarę kąta nachylenia prostej PQ do płaszczyzny π .

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 120°

2.2. Punkty P i Q leżą po tej samej stronie płaszczyzny π w odległościach od niej odpowiednio równych 8 cm i 3 cm. Odcinek PQ o długości 13 cm rzutowano prostopadłe na płaszczyznę π . Wskaż długość rzutu tego odcinka.

- A. $8\sqrt{3}$ cm B. $2\sqrt{13}$ cm C. 11 cm D. 12 cm

2.3. Rzut prostokątny odcinka AB o długości 24 cm na płaszczyznę π ma długość 10 cm. Wskaż obliczony z dokładnością do 1° kąt nachylenia prostej AB do płaszczyzny π .

- A. 30° B. 65° C. 67° D. 63°

2.4. Ustaw na stole ołówek tak, by był on nachylony do płaszczyzny stołu pod kątem

- a) 30° . b) 45° . c) 60° . d) 90° .

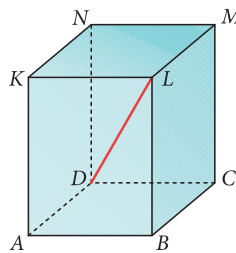
2.5. Jaka figura może być obrazem trójkąta w rzucie prostokątnym na daną płaszczyznę? Rozważ różne możliwości. Kiedy obrazem tego trójkąta jest trójkąt do niego przystający?

2.6. Dwie różne proste równoległe k i l rzutujemy prostopadłe na płaszczyznę π . Czy obrazy tych prostych mogą mieć punkty wspólne?

2.7. Dane są dwie przecinające się proste k i l oraz płaszczyzna π , która ich nie zawiera. W jakim kierunku należy rzutować te proste na płaszczyznę π , aby ich obrazem była jedna prosta? Kiedy nie można uzyskać takiego wyniku?

2.8. Przerysuj rzut prostopadłościannu $ABCDKLMN$. Zaznacz na rysunku kąty nachylenia przekątnej DL do płaszczyzny

- a) podstawy $ABCD$. c) ściany bocznej $DCMN$.
b) ściany bocznej $ADNK$. d) podstawy $KLMN$.



Odpowiedzi i rozwiązania

2.1. C

2.2. D

2.3. B

2.5. Trójkąt lub odcinek. Trójkąt i jego obraz są przystające, gdy leżą w płaszczyznach równoległych.

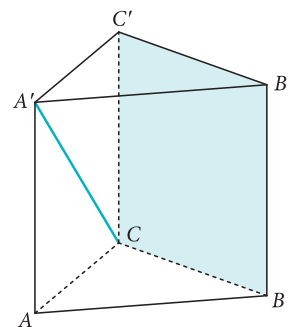
2.6. tak

2.7. W kierunku równoległym do płaszczyzny zawierającej proste przecinające się, ale nie równoległym do π . Takiego wyniku nie można uzyskać, gdy proste leżą na płaszczyźnie równoległej do π .

2.8. Wskazówka: Szukanym kątem jest: a) $\angle LDB$,
b) $\angle LDK$,
c) $\angle LDM$,
d) $\angle DLN$.

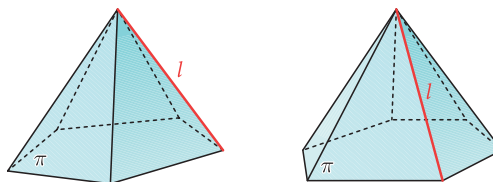
2.9. Patrz s. 24.

2.9. Przerysuj rzut graniastosłupa prostego $ABCA'B'C'$, którego podstawą jest ostrokątny trójkąt ABC . Zaznacz na rysunku kąt nachylenia prostej $A'C$ do płaszczyzny $CBB'C'$.



2.10. Patrz s. 25.

2.10. Przerysuj rzuty ostrosłupów. Na każdym rysunku zaznacz kąt nachylenia prostej l do płaszczyzny podstawy π .



2.11. a) 1 b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
d) $\frac{1}{2}$ e) 0

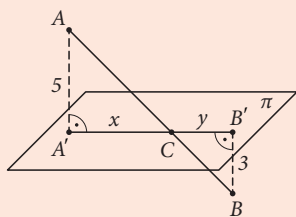
2.11. Odcinek AB ma długość 1. Oblicz długość rzutu prostokątnego tego odcinka na płaszczyznę, do której prosta AB jest nachylona pod danym kątem.

a) 0° b) 30° c) 45° d) 60° e) 90°

2.12. a) $8\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{29}$

2.12. Punkty A i B leżą po tej samej stronie płaszczyzny π . Punkty A_1, B_1 są odpowiednio ich rzutami prostokątnymi na płaszczyznę π . Punkty A, B, A_1, B_1 spełniają podane warunki. Oblicz długość odcinka AB .

a) $|A_1B_1| = 8, |AA_1| = 15, |BB_1| = 7$
b) $|A_1B_1| = 10, |AA_1| = 3, |BB_1| = 7$

2.13. $8\sqrt{2}$ 

Prostokątne trójkąty AA_1C i BB_1C są podobne, stąd $\frac{x}{5} = \frac{y}{3}$, ale $x + y = 8$, zatem $x = 5$ i $y = 3$. Odcinki AC oraz BC są więc przekątnymi kwadratów, czyli $|AB| = |AC| + |CB| = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

2.14. a) 4 b) $\frac{4\sqrt{3}}{3} \approx 2,31$
c) 2,01 d) 11,52

2.13. Punkty A i B leżą po przeciwnych stronach płaszczyzny π . Punkty A_1 i B_1 są odpowiednio ich rzutami prostokątnymi na płaszczyznę π . Ponadto wiadomo, że $|A_1B_1| = 8, |AA_1| = 5, |BB_1| = 3$. Oblicz długość odcinka AB .

2.14. Punkty A i B leżą po tej samej stronie płaszczyzny π . Punkty A_1 i B_1 są odpowiednio ich rzutami prostokątnymi na płaszczyznę π . Wiadomo, że $|AA_1| = 5, |BB_1| = 7$, a prosta AB jest nachylona do płaszczyzny π pod danym kątem. Oblicz długość odcinka AB (z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku).

a) 30° b) 60° c) 85° d) 10°

2.15. Punkty P i Q leżą po tej samej stronie płaszczyzny π . Punkty P' i Q' są odpowiednio ich rzutami prostokątnymi na płaszczyznę π . Punkty P, Q, P', Q' spełniają podane warunki. Wyznacz kąt nachylenia prostej PQ do płaszczyzny π .

- a) $|PP'| = 9, |QQ'| = 5, |P'Q'| = 4\sqrt{3}$
- b) $|P'Q'| = 3\sqrt{2}, |QQ'| = 2\sqrt{2}, |PP'| = 5\sqrt{2}$
- c) $|P'Q'| = 3, |PQ| = 6$
- d) $|PQ| = 6, |PP'| = 3, |QQ'| = 13$
- e) $|PQ| = 5\sqrt{2}, |P'Q'| = 10$

2.16. Punkty A i B leżą po tej samej stronie płaszczyzny π . Punkty A' i B' są odpowiednio ich rzutami prostokątnymi na płaszczyznę π . Wiadomo, że

- a) $|A'B'| = 6, |AA'| = 12, |AB| = 10$. Oblicz $|BB'|$.
- b) $|AA'| = 18, |BB'| = 10, |AB| = 4\sqrt{13}$. Oblicz $|A'B'|$.
- c) $|AA'| = 2, |BB'| = 10, |A'B'| = 6$. Oblicz $|AB|$.
- d) $|AB| = 20, |BB'| = 17, |A'B'| = 16$. Oblicz $|AA'|$.



2.17. Punkty M i N leżą po tej samej stronie płaszczyzny π . Punkty M' i N' są odpowiednio ich rzutami prostokątnymi na płaszczyznę π . Prosta MN jest nachylona do płaszczyzny π pod kątem α . Wiadomo, że

- a) $|M'M| = 12, |N'N| = 5, \alpha = 40^\circ$. Oblicz $|MN|$ z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.
- b) $|M'N'| = 5, |M'M| = 10, |N'N| = 4$. Oblicz α z dokładnością do 1° .
- c) $|M'N'| = 4, |MN| = 25$. Oblicz α z dokładnością do 1° .
- d) $|M'N'| = 5,4, \alpha = 72^\circ$. Oblicz $|MN|$ z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

2.18. Przez punkt M , odległy od płaszczyzny π o 13 cm, poprowadzono dwie proste przecinające płaszczyznę π w punktach K i L oraz nachylone do niej pod kątem 45° . Kąt KML ma miarę α . Wyznacz długość odcinka KL .

- a) $\alpha = 90^\circ$
- b) $\alpha = 60^\circ$

2.19. Z punktu A poprowadzono odcinki AK i AL o długościach odpowiednio równych 25 cm i 17 cm. Przez punkty K i L przechodzi taka płaszczyzna π , że prostokątne rzuty odcinków AK i AL na nią pozostają w stosunku 5:2. Wyznacz odległość punktu A od płaszczyzny π .

- 2.15.** a) 30° b) 45° c) 60°
 d) Taka sytuacja jest niemożliwa.
 e) Taka sytuacja jest niemożliwa.

- 2.16.** a) 20 lub 4 b) 12
 c) 10 d) 5 lub 29

- 2.17.** a) 10,9 b) 50°
 c) 81° d) 17,5

- 2.18.** a) 26 cm
 b) $13\sqrt{2}$ cm

- 2.19.** 15 cm

2.20. Każda z szukanych wielkości jest równa 2 m.

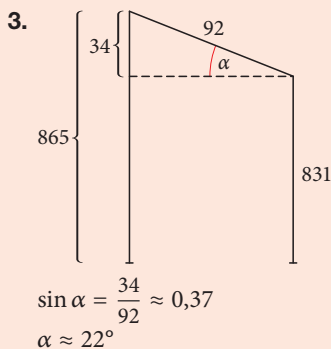
2.21. $25\sqrt{15} \text{ cm}^2$

2.22. Wskazówka: Z dowolnego punktu $M \in m$ różnego od punktów przecięcia prostej z płaszczyznami poprowadź prostą k prostopadłą do π_1 i π_2 , a następnie rozważ sytuację na płaszczyźnie wyznaczonej przez proste m i k .

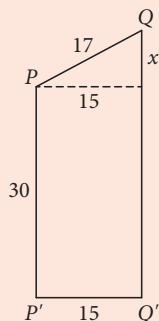
Prosto do matury

1. P, P, F

2. Patrz s. 31.

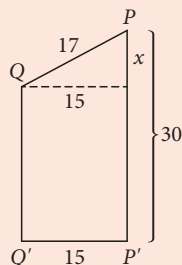


4. I przypadek



$$|QQ'| = 30 + 8 = 38 \text{ [cm]}$$

II przypadek



$$|QQ'| = 30 - 8 = 22 \text{ [cm]}$$

2.20. Zosia znalazła na strychu stary namiot i postanowiła sprawdzić, jak się go rozbija. Według instrukcji każdy z masztów o długości 1 m należy przymocować do podłoża za pomocą dwóch linek. Producent zaleca, aby kąt między linkami był równy 60° , zaś kąt między linkami a podłożem wynosił 30° . Jakiej długości powinny być linki i w jakiej odległości od siebie powinny być ich dolne końce?



2.21. Trójkąt ABC , w którym kąt C jest prosty, wyznacza płaszczyznę π . Przez punkt C poprowadzono prostą prostopadłą do płaszczyzny π i wyznaczono na niej punkt W oddalony od π o 10 cm. Ponadto wiadomo, że $|AW| = 15 \text{ cm}$ i $|BW| = 20 \text{ cm}$. Oblicz pole trójkąta ABC .

D * 2.22. Dane są dwie równoległe płaszczyzny π_1 i π_2 oraz nierównoległa do nich prosta m . Wykaż, że kąty nachylenia prostej m do płaszczyzn π_1 i π_2 są równe.

Prosto do matury



- Oceń prawdziwość podanych zdań. W rzucie równoległym na płaszczyznę
 - obrazem koła może być odcinek.
 - obrazem odcinka nie musi być odcinek.
 - obrazem okręgu może być punkt.

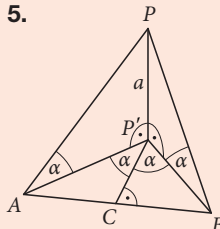
2. W graniastosłupie prostym o podstawie będącej trójkątem równobocznym poprowadzono prostą l przechodzącą przez wierzchołek podstawy dolnej i środek przeciwległej krawędzi podstawy górnej. Wykonaj rysunek ilustrujący tę sytuację. Zaznacz na nim kąty nachylenia prostej l do płaszczyzny podstawy oraz do płaszczyzny każdej ze ścian bocznych.

3. Belka startowa skoczni narciarskiej znajduje się na wysokości 865 m n.p.m., a próg tej skoczni na wysokości 831 m n.p.m. Długość najazdu jest równa 92 m. Oblicz kąt nachylenia skoczni (z dokładnością do 1°). Przyjmij, że najazd jest odcinkiem.

4. Odległość między punktami P i Q wynosi 17 cm, a rzut prostokątny odcinka PQ na płaszczyznę π ma długość 15 cm. Punkt P jest oddalony od płaszczyzny π o 30 cm. Oblicz odległość punktu Q od płaszczyzny π .

5. Odległość punktu P od płaszczyzny π wynosi a . Punkty A oraz B należą do π , a proste PA i PB tworzą z tą płaszczyzną kąty o mierze 60° . Rzuty prostokątne prostych PA i PB na płaszczyznę π tworzą kąt 120° . Oblicz długość odcinka AB .

5.



P' – rzut punktu P

$$|PP'| = a, \alpha = 60^\circ$$

W trójkątach $AP'P$, $BP'P$, $P'CA$, $P'CB$:

$$|P'A| = |P'B| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$|AC| = |P'A| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2}$$

$$|BC| = |P'B| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2}$$

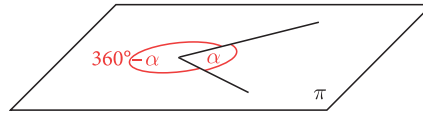
$$\text{Stąd } |AB| = |AC| + |BC| = a.$$

3. Kąt dwuścienny

Umiejętności:

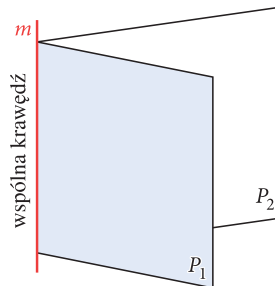
- rozpoznawanie w graniastosłupach i ostrosłupach kątów między ścianami

Przypomnijmy, że każdą z dwóch części płaszczyzny wyznaczonych przez dwie półproste o wspólnym początku, wraz z tymi półprostymi, nazywamy kątem płaskim. Podobnie definiuje się kąt przestrzenny.



Definicja

Dwie różne półpłaszczyzny P_1 , P_2 o wspólnej krawędzi m dzielą przestrzeń na dwie części. Każdą z nich wraz z tymi półpłaszczyznami nazywamy **kątem dwuściennym** o krawędzi m i ścianach P_1 i P_2 .

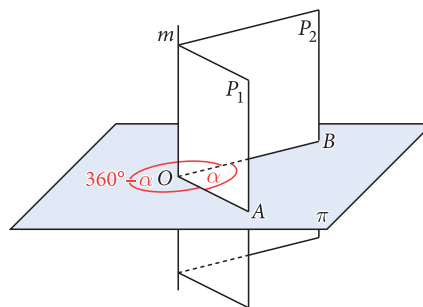


Miarą kąta dwuściennego nazywamy miarę kąta płaskiego będącego częścią wspólną kąta dwuściennego i płaszczyzny prostopadłej do jego krawędzi. W takim znaczeniu używać będziemy zwrotu „kąt dwuścienny $\alpha = 30^\circ$ ”.

Miarę kąta dwuściennego o krawędzi m i ścianach P_1 , P_2 wyznaczamy w kolejnych krokach.

Krok 1: Prowadzimy płaszczyznę π prostopadłą do prostej m .

Krok 2: Mierzmy kąt płaski, wypukły lub wklęsły, będący częścią wspólną kąta dwuściennego i płaszczyzny π . Jeden z kątów dwuściennych ma miarę α , a drugi $360^\circ - \alpha$.



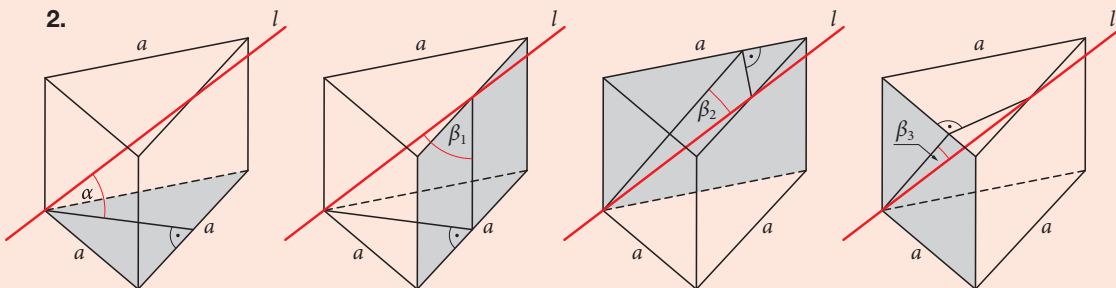
MKP

temat 2.9

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 1.3

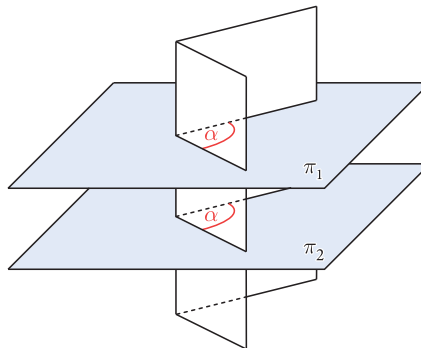
Generator
testów i sprawdzianów

2.



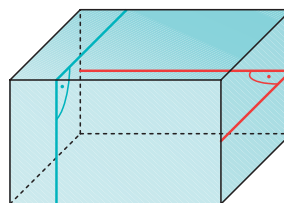
α – kąt nachylenia prostej l do płaszczyzny podstawy
 β_1 , β_2 , β_3 – kąty nachylenia prostej l do płaszczyzn bocznych

Miara kąta dwuściennego nie zależy od tego, przez który punkt prostej m poprowadzimy płaszczyznę prostopadłą do krawędzi tego kąta.



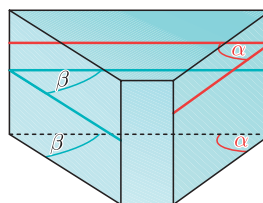
Przykład 1

Kąt dwuścienny wypukły między dwiema półpłaszczyznami prostopadłymi jest kątem prostym, czyli ma miarę 90° . Kąty takie są utworzone przez dowolne dwie przecinające się ściany prostopadłościanu.



Przykład 2

W graniastosłupie prostym kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi jest równy kątowi wyznaczonemu przez odpowiednie krawędzie podstawy.



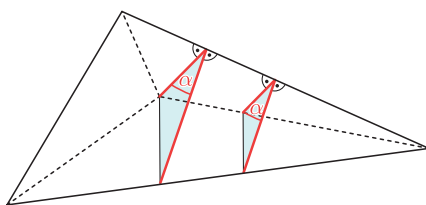
Kątem nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy jest kąt wypukły wyznaczony przez półpłaszczyznę zawierającą ścianę boczną oraz półpłaszczyznę zawierającą podstawę ostrosłupa. **Kąt dwuścienny między ścianami wielościanu** to kąt wypukły wyznaczony przez dwie półpłaszczyzny zawierające ściany wielościanu o wspólnej krawędzi.

Przykład 3 zad. 3.5

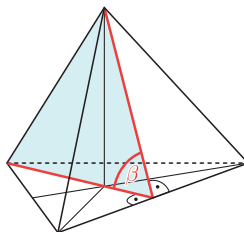
Zaznaczmy kąt dwuścienny w danym ostrosłupie.

Rozwiązanie

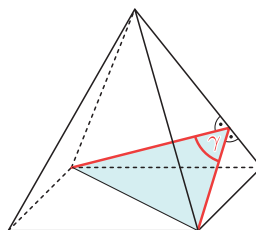
- a) α – kąt dwuścienny między ścianami bocznymi ostrosłupa



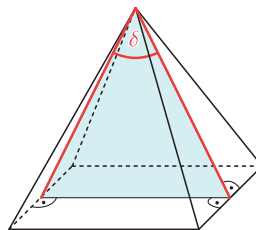
- b) β – kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy w ostrosłupie prawidłowym trójkątnym



- c) γ – kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego

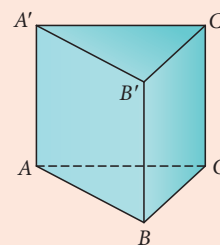


- d) δ – kąt między przeciwległymi ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego

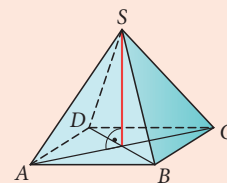


W przykładzie d) zauważmy, że przeciwległe ściany boczne ostrosłupa, będące przystającymi trójkątami równoramiennymi, mają wspólny tylko wierzchołek. Krawędź kąta dwuściennego δ jest równoległa do dwóch krawędzi podstawy ostrosłupa zawartych w ścianach kąta δ . Wysokości ścian bocznych poprowadzone z tego wierzchołka wyznaczają płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzn ścian bocznych. Zatem na płaszczyźnie tej możemy zaznaczyć nie tylko szukany kąt δ , lecz także kąty nachylenia ścian bocznych do płaszczyzny podstawy.

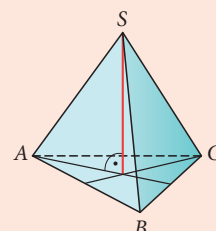
◀ 3.5. Przerysuj do zeszytu rzut wielościanu i zaznacz podany kąt dwuścienny.



- a) kąt między ścianami bocznymi $ABB'A'$ i $BCC'B'$ graniastosłupa prawidłowego trójkątnego (zob. rysunek powyżej)

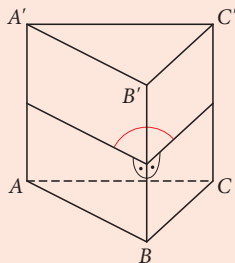


- b) kąt nachylenia ściany ABS ostrosłupa prawidłowego czworokątnego do płaszczyzny podstawy (zob. rysunek powyżej)

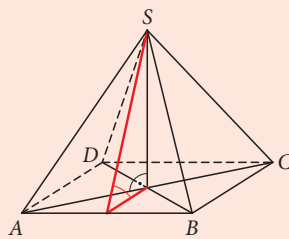


- c) kąt między ścianami bocznymi ABS i ACS ostrosłupa prawidłowego trójkątnego (zob. rysunek powyżej)

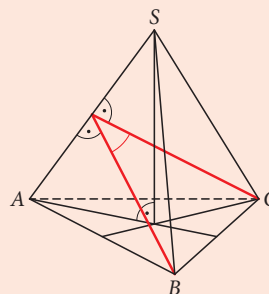
3.5. Odp.: a)



b)



c)



Zadania

W każdym z zadań 3.1–3.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

Odpowiedzi i rozwiązania

3.1. C

3.1. Wskaż miarę kąta dwuściennego między sąsiednimi ścianami bocznymi w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym.

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

3.2. D

3.2. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym podstawą jest kwadrat o boku długości 10 cm, a krawędzie boczne są równe 25 cm. Wskaż wyznaczoną z dokładnością do 1° miarę kąta dwuściennego między ścianą boczną a płaszczyzną podstawy tego ostrosłupa.

- A. 65° B. 82° C. 73° D. 78°

3.3. A

3.3. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 12, a wysokość tego ostrosłupa wynosi $2\sqrt{3}$. Wskaż miarę kąta między przeciwległymi ścianami bocznymi.

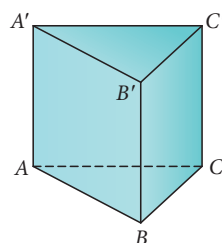
- A. 120° B. 140° C. 135° D. 150°

3.4. Ustaw książkę tak, aby jej okładki wyznaczyły kąt dwuścienny o podanej mierze.
a) 30° b) 45° c) 60° d) 90°

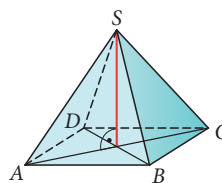
3.5. Patrz s. 33.

3.5. Przerysuj do zeszytu rzut wielościanu i zaznacz podany kąt dwuścienny.

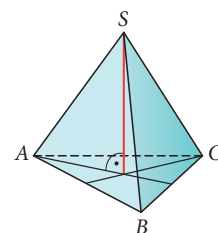
- a) kąt między ścianami bocznymi $ABB'A'$ i $BCC'B'$ graniastosłupa prawidłowego trójkątnego (rys. 1)
b) kąt nachylenia ściany ABS ostrosłupa prawidłowego czworokątnego do płaszczyzny podstawy (rys. 2)
c) kąt między ścianami bocznymi ABS i ACS ostrosłupa prawidłowego trójkątnego (rys. 3)



Rys. 1.



Rys. 2.



Rys. 3.

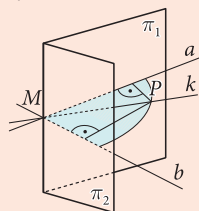
3.8. 51° lub 155° . Zadanie ma dwa rozwiązania (pokazano je na rysunkach).

Oznaczamy α szukany kąt dwuścienny i mamy

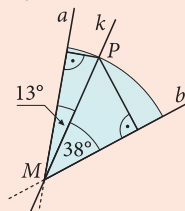
$\alpha = 13^\circ + 38^\circ = 51^\circ$ (rysunek I. oraz na rysunku II. – widok z góry) albo

$\alpha = 180^\circ - 38^\circ + 13^\circ = 155^\circ$ (rysunek III. – widok z góry).

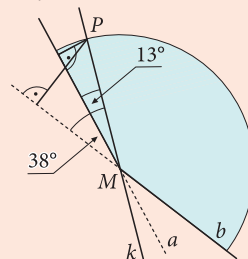
I.



II.

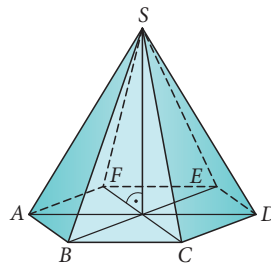


III.



3.6. Przerysuj do zeszytu rzut ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego i zaznacz podany kąt dwuścienny.

- kąt między ścianą boczną CDS a płaszczyzną podstawy
- kąt między ścianami bocznymi AFS i EFS
- kąt między ścianami bocznymi ABS i DES



3.7. Półpłaszczyzny π_1 i π_2 o wspólnej krawędzi k tworzą kąt dwuścienny o mierze α . Przez punkt A należący do tego kąta poprowadzono prostą l prostopadłą do prostej k i przecinającą ją w punkcie A' . Punkt B_1 jest rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę π_1 , a punkt B_2 jest rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę π_2 . Prosta l jest nachylona do płaszczyzny π_1 pod kątem β_1 , a do płaszczyzny π_2 pod kątem β_2 . Przerysuj tabelę do zeszytu. Zastąp $?$ odpowiednimi wielkościami.

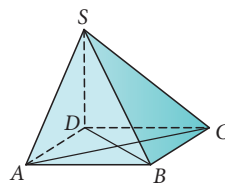
α	β_1	β_2	$ AA' $	$ AB_1 $	$ AB_2 $	$ B_1A' $	$ B_2A' $	$\sphericalangle B_1AB_2$
$?$	30°	60°	10	$?$	$?$	$?$	$?$	$?$
120°	30°	$?$	$?$	$?$	$?$	6	$?$	$?$
$?$	$?$	45°	$?$	8	$?$	$?$	$?$	100°

- * **3.8.** Z punktu P należącego do kąta dwuściennego utworzonego przez półpłaszczyzny π_1 i π_2 poprowadzono prostą k przecinającą krawędź tego kąta pod kątem prostym. Prosta k jest nachylona do płaszczyzny π_1 pod kątem 13° , a do płaszczyzny π_2 pod kątem 38° . Jaka jest miara kąta dwuściennego?

3.9. Co jest większe: miara kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego ściany boczne są trójkątami równobocznymi, czy miara kąta między ścianą boczną a podstawą tego ostrosłupa?

3.10. Dwa trójkąty równoramienne mają wspólną podstawę o długości 2. Półpłaszczyzny, w których zawierają się te trójkąty, tworzą kąt dwuścienny o mierze α . Odległość między wierzchołkami trójkątów jest równa 5, ramiona pierwszego trójkąta mają długość $\sqrt{10}$, a drugiego $\sqrt{17}$. Wyznacz kąt α .

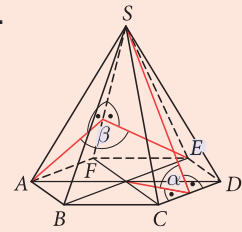
3.11. Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest prostokąt. Krawędź DS jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Przerysuj do zeszytu rzut tego ostrosłupa i zaznacz na nim kąty nachylenia ścian BCS i ABS do płaszczyzny podstawy.



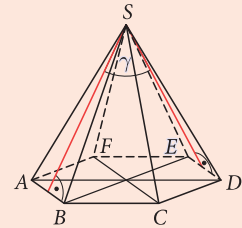
3.7.

α	β_1	β_2	$ AA' $	$ AB_1 $	$ AB_2 $	$ B_1A' $	$ B_2A' $	$\sphericalangle B_1AB_2$
90°	30°	60°	10	5	$5\sqrt{3}$	$5\sqrt{3}$	5	90°
120°	30°	90°	$4\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	$4\sqrt{3}$	6	0	60°
80°	35°	45°	13,95	8	9,86	11,43	9,86	100°

3.6.



- kąt α
- kąt β

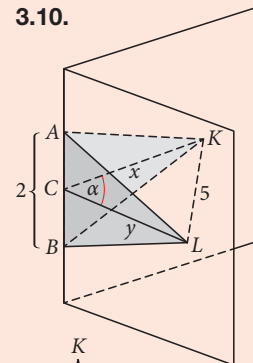


- kąt γ

3.8. Patrz s. 34.

3.9. Kąt między ścianami bocznymi jest rozwarty, więc jest większy.

3.10.



$$\begin{aligned} & \sqrt{17}^2 = x^2 + 1, \quad x = 4 \\ & x^2 = 17 - 1, \quad x = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{10}^2 = y^2 + 1, \quad y = 3 \\ & y^2 = 10 - 1, \quad y = 3 \end{aligned}$$

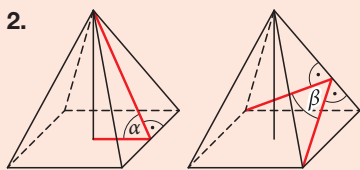
$$\begin{aligned} & 3^2 + 4^2 = 5^2 \\ & \alpha = 90^\circ \end{aligned}$$

3.11. Wskazówka: Są to kąty DCS i DAS .

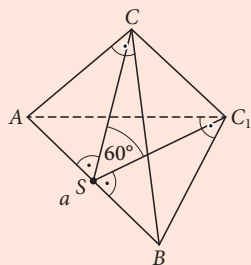
Prosto do matury

1. F, F, P

2.

3. $6\sqrt{3}$

4.



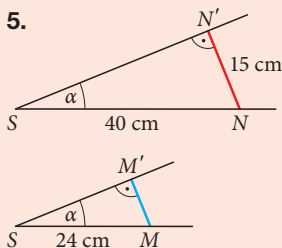
$$|AC| = |BC| = |AC_1| = |BC_1|$$

$$|CS| = |C_1S| = \frac{1}{2}a$$

$\triangle SCC_1$ jest równoboczny, zatem

$$|CC_1| = \frac{1}{2}a$$

5.



α – miara kąta dwuściennego

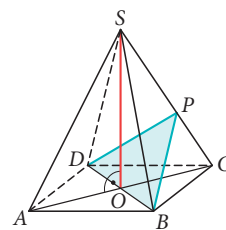
M', N' – rzuty punktów M i N na drugą ścianę

$\triangle SN'N \sim \triangle PM'M$ (cecha kkk),

$$\text{więc } \frac{|SN|}{|NN'|} = \frac{|PM|}{|MM'|}$$

$$|MM'| = \frac{15 \cdot 24}{40} = 9 \text{ [cm]}$$

- * **3.12.** W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCD$ krawędź boczna jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy. Kąt BPD jest kątem dwuściennym między ścianami BCS i CDS . Wyznacz cosinus kąta SOP .



Prosto do matury



1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. W dowolnym ostrosłupie kąty nachylenia ścian bocznych do płaszczyzny podstawy mają miarę mniejszą od 90° .
B. W każdym graniastosłupie prostym kąty między sąsiednimi ścianami bocznymi są proste.
C. W każdym prostopadłościanie kąty między sąsiednimi ścianami są proste.

2. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym zaznacz

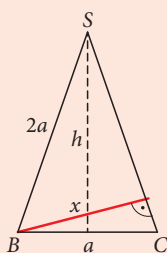
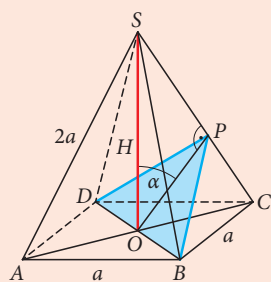
- a) kąt dwuścienny, który wyznacza ściana boczna z płaszczyzną podstawy.
b) kąt dwuścienny między sąsiednimi ścianami bocznymi.

3. Podstawą ostrosłupa prawidłowego jest trójkąt równoboczny o boku 5 cm. Wysokość ostrosłupa jest równa 15 cm. Oblicz tangens kąta dwuściennego między ścianą boczną i podstawą ostrosłupa.

4. Przeciwprostokątna AB o długości a jest wspólną podstawą trójkątów równoramiennych prostokątnych ABC i ABC_1 . Półpłaszczyzny, w których zawierają się te trójkąty, tworzą kąt dwuścienny o mierze 60° . Oblicz odległość między wierzchołkami C i C_1 .

5. Punkty M i N leżą na jednej ścianie kąta dwuściennego i są oddalone od jego krawędzi odpowiednio o 24 cm i 40 cm. Odległość punktu N od płaszczyzny drugiej ściany tego kąta dwuściennego jest równa 15 cm. Oblicz odległość punktu M od płaszczyzny tej ściany.

3.12. Zauważ, że kąt SPD jest prosty.



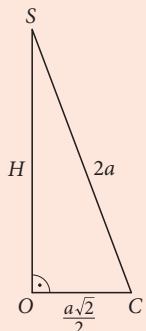
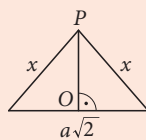
$$h^2 + \frac{1}{4}a^2 = 4a^2,$$

$$\text{stąd } h = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$

$$\frac{1}{2}a \cdot \frac{a\sqrt{15}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot x,$$

$$\text{zatem } x = \frac{a\sqrt{15}}{4}$$



$$|OP|^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{15}}{4}\right)^2,$$

$$\text{stąd } |OP| = \frac{a\sqrt{7}}{4}$$

$$H^2 = 4a^2 - \frac{1}{2}a^2,$$

$$\text{stąd } H = \sqrt{\frac{7}{2}}a,$$

$$\text{zatem } \cos \alpha = \frac{|OP|}{|OS|} = \frac{\frac{a\sqrt{7}}{4}}{\frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

4. Graniastosłupy

Umiejętności:

- rozpoznawanie w graniastosłupach kątów między: odcinkami, odcinkami i płaszczyznami, ścianami
- korzystanie z siatek graniastosłupów
- określanie, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa płaszczyzną

Przypomnimy i uporządkujemy najważniejsze wiadomości o **graniastosłupach** omawiane podczas nauki w szkole podstawowej.

Zacniemy jednak od wprowadzenia ogólniejszych pojęć.

Definicja

Figurę (zbiór punktów przestrzeni) nazywamy **wypukłą**, gdy cały odcinek łączący dwa dowolne punkty tej figury jest w niej zawarty.

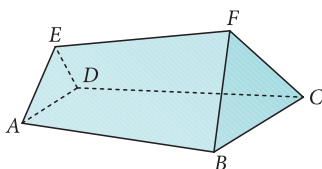
Definicja

Wielościanem wypukłym nazywamy taką figurę wypukłą, której powierzchnię stanowi skończona liczba wielokątów.

Przekątną wielościanu jest odcinek łączący dwa wierzchołki i niezawarty w żadnej ze ścian.

W wielościanie na rysunku poniżej:

- wierzchołkami są punkty: A, B, C, D, E, F ,
- krawędziami są odcinki: $AB, BC, CD, AD, BF, CF, DE, AE$ i EF ,
- ścianami są wielokąty: $ABCD, ABFE, DCFE, BCF, ADE$.



Zauważmy, że w podręczniku wszystkie bryły są narysowane w rzucie równoległym.

Ten wielościan nie ma żadnej przekątnej.

MKP

tematy 2.2, 2.3, 2.10

Multiteka

- Siatki graniastosłupów prostych

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 1.4

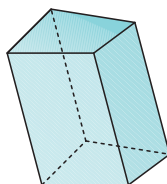
Generator
testów i sprawdzianów

Graniastosłupy

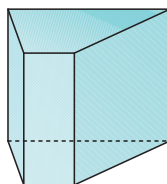
Definicja

Graniastosłupem wypukłym nazywamy wielościan wypukły, którego dwie ściany (zwane podstawami) są przystającymi wielokątami zawartymi w równoległych płaszczyznach, a pozostałe ściany (zwane bocznymi) są równoległobokami o wierzchołkach należących do podstaw.

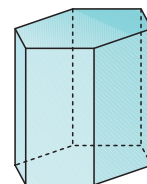
Przykłady graniastosłupów:



graniastosłup
czworokątne



graniastosłup
trójkątne

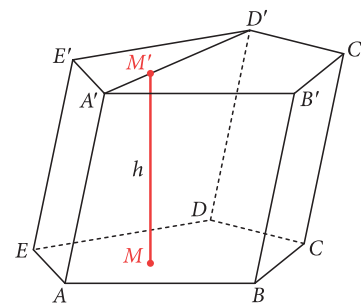


graniastosłup
sześciokątne

Przykład 1

W narysowanym graniastosłupie pięciokątnym (czyli takim, który ma w podstawie pięciokąt):

- wierzchołkami są punkty: $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$,
- podstawami są pięciokąty: $ABCDE, A'B'C'D'E'$,
- ścianami bocznymi są równoległoboki: $ABBA', BCC'B', DCC'D', EDD'E', EAA'E'$,
- krawędziami podstaw są odcinki: $AB, BC, CD, DE, EA, A'B', B'C', C'D', D'E', E'A'$,
- krawędziami bocznymi są odcinki: AA', BB', CC', DD', EE' ,
- wysokością h graniastosłupa jest odcinek łączący dowolny punkt M' płaszczyzny jednej z podstaw z jego rzutem prostokątnym M na płaszczyznę drugiej podstawy.

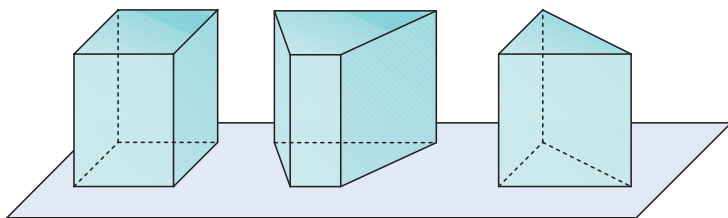


Zauważmy, że wszystkie krawędzie boczne są równoległe i mają tę samą długość:

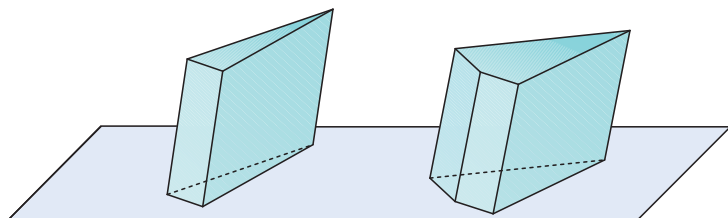
$$|AA'| = |BB'| = |CC'| = |DD'| = |EE'|$$

Definicja

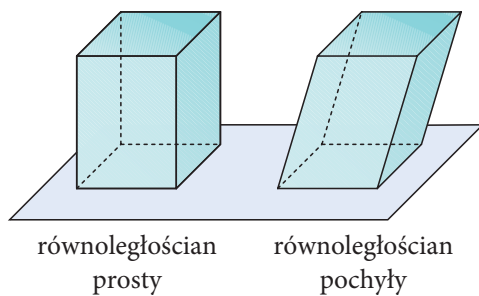
Graniastosłup nazywamy **prostym**, jeżeli jego krawędzie boczne są prostopadłe do płaszczyzn podstaw.



Pozostałe graniastosłupy nazywamy **pochyłymi**.

**Definicja**

Równoległoscian to graniastosłup, którego podstawą jest równoległobok.



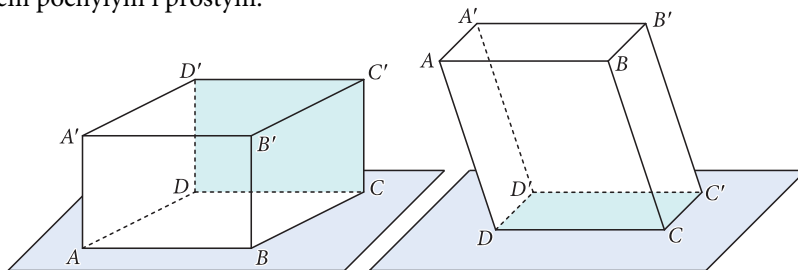
równoległoscian
prosty

równoległoscian
pochyły

Jeżeli podstawą rysowanego graniastosłupa jest równoległobok różny od prostokąta, to tę informację trzeba podać słownie, ponieważ na płaskim rysunku nie widać różnicy między tymi czworokątami.



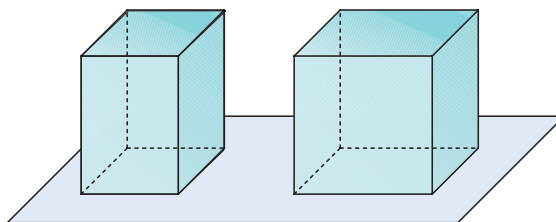
Zauważmy, że równoległościan ma trzy pary ścian równoległych (i przystających). Każda z nich może stanowić parę podstaw tego równoległościanu. Ten sam równoległościan, w zależności od wyboru podstaw, może więc być jednocześnie graniastosem pochyłym i prostym.



Definicja

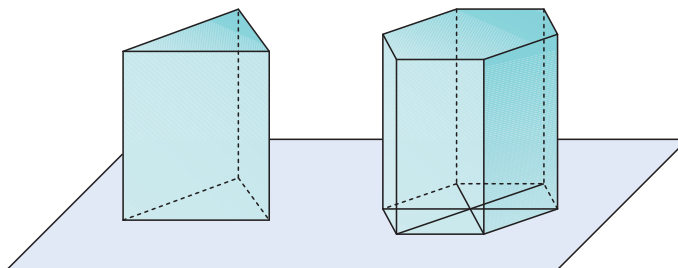
Prostopadłościan to graniastosem prosty, którego podstawą jest prostokąt. Prostopadłościan o wszystkich krawędziach równych nazywamy **sześcianem**.

Wszystkie ściany prostopadłościanu są prostokątami, a wszystkie ściany sześcianu są kwadratami.



Definicja

Graniastosem nazywamy **prawidłowym**, jeżeli jest prosty i ma w podstawie wielokąt foremny.



Siatki wielościanów

Jeżeli chcemy przedstawić wielościan, czyli figurę trójwymiarową, na płaskiej kartce, to możemy albo narysować jego rzut równoległy – tak postępowaliśmy dotychczas – albo narysować jego siatkę.

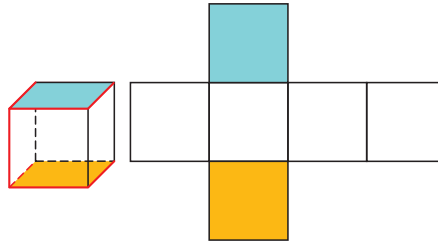
Siatką wielościanu nazywamy płaską figurę będącą sumą wielokątów stykających się bokami, a powstałą przez rozcięcie pewnej liczby krawędzi wielościanu tak, aby jego ściany dały się rozłożyć na płaszczyźnie.

Przykład 2 ◀ zad. 4.13

Narysujemy siatkę sześcianu.

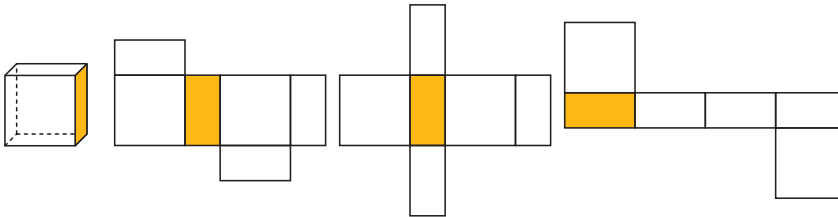
Kolorem czerwonym zaznaczone są te krawędzie sześcianu, wzdłuż których został on rozcięty.

Aby wykonać czynność odwrotną, tzn. z siatki otrzymać wielościan, trzeba pozaginać ją wzdłuż każdej krawędzi, odpowiednio złożyć i skleić.



Czasami zamiast nazwy „siatka wielościanu” używa się zwrotu „rozwiniecie powierzchni wielościanu na płaszczyźnie”.

Wielościany mogą mieć wiele różnych siatek. Poniżej prezentujemy trzy różne siatki tego samego prostopadłościanu.

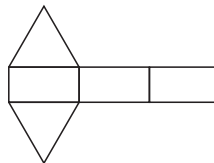
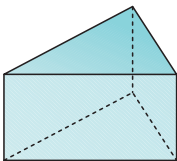


Przykład 3 ◀ zad. 4.14–4.16

Narysujemy siatki kilku graniastosłupów.

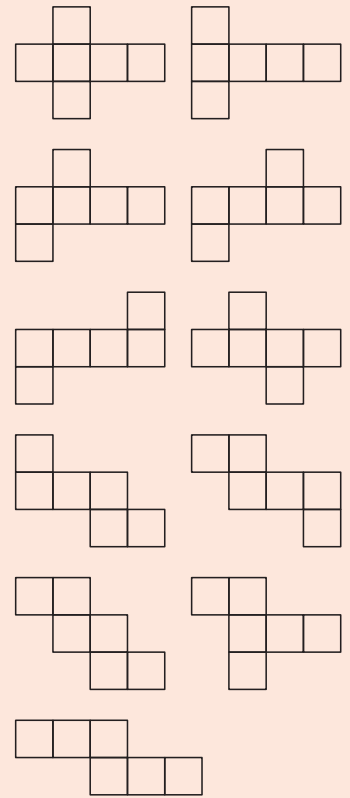
Rozwiązanie

- graniastosłup prawidłowy trójkątny



◀4.13. Narysuj trzy różne siatki sześcianu o krawędzi 1 cm.

Odp.: Mogą nimi być dowolne 3 siatki spośród 11 możliwych.



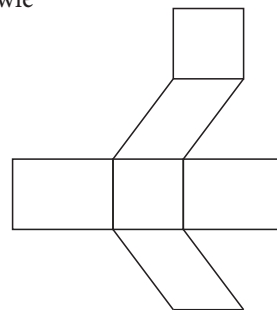
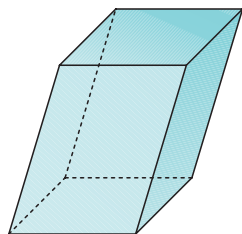
◀4.14. Narysuj siatkę graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wysokość jest równa

- podwojonej krawędzi podstawy.
- potrojonej wysokości podstawy.

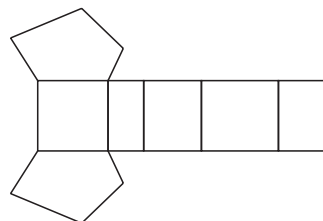
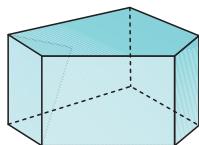
◀4.15. Narysuj siatkę graniastosłupa sześciokątnego prawidłowego o wszystkich krawędziach długości 2 cm.

◀4.16. Narysuj siatkę graniastosłupa prostego, którego krawędź boczna ma długość 5 cm, a podstawą jest romb o kącie ostrym 60° i boku 3 cm.

- graniastosłup pochyły z kwadratem w podstawie



- graniastosłup pięciokątny prosty

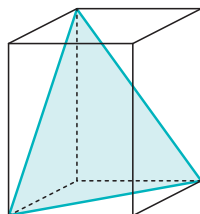


Uwaga: Wymiary siatek graniastosłupów zostały zmniejszone, aby rzuty graniastosłupów i ich siatki zmieściły się na stronie.

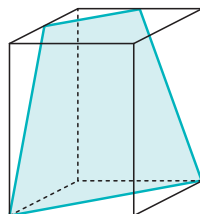
Przekroje wielościanów

Jeżeli wielościan przetniemy płaszczyzną w taki sposób, że żadna ze ścian wielościanu nie zawiera się w tej płaszczyźnie oraz do części wspólnej wielościanu i tej płaszczyzny należą co najmniej trzy niewspółliniowe punkty, to tę część wspólną nazywamy **przekrojem płaskim wielościanu**. Przekroje wielościanów są wielokątami o bokach wyznaczonych przez ściany wielościanu i płaszczyznę sieczną. Zastanówmy się, jakimi wielokątami są przekroje płaskie prostopadłościanów.

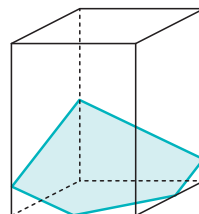
Każdy prostopadłościan ma sześć ścian, zatem maksymalną liczbą boków przekroju jest 6. Przekrojem o najmniejszej liczbie boków jest trójkąt. Na rysunku prezentujemy różne rodzaje wielokątów będących przekrojami płaskimi prostopadłościanów.



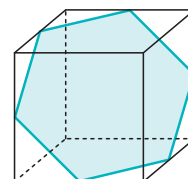
trójkąt



czworokąt (trapez)



pięciokąt

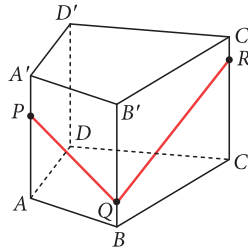
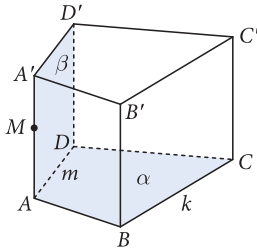


sześciokąt

Przykład 4 zad. 4.20

Dany jest graniastosłup czworokątny $ABCD A' B' C' D'$, którego podstawa nie jest trapezem. Narysujemy przekrój tego graniastosłupa płaszczyzną π

- a) wyznaczoną przez krawędź BC i punkt M należący do krawędzi AA' , jak na rysunku.
- b) wyznaczoną przez punkty P, Q, R należące do krawędzi AA', BB' i CC' , jak na rysunku.

**Rozwiązanie**

- a) Przyjmijmy oznaczenia jak na podanym rysunku.

α – płaszczyzna podstawy $ABCD$,
 β – płaszczyzna ściany $ADD'A'$,
 k – krawędź przecięcia płaszczyzny przekroju π z płaszczyzną α ,
 m – krawędź przecięcia płaszczyzny β z płaszczyzną α .

Dwoma bokami szukanego przekroju są odcinki BC i BM , a płaszczyznę π tego przekroju wyznaczają zawierające je proste.

Szukając kolejnych boków przekroju, wyjdziemy poza obszar graniastosłupa.

Na następnych rysunkach zostawiamy tylko niezbędne oznaczenia.

Zgodnie z założeniem zadania proste k i m nie są równoległe.

Oznaczmy punkt ich przecięcia literą L i zauważmy, że:

$$L \in \pi \quad \leftarrow k \subset \pi$$

$$M \in \pi$$

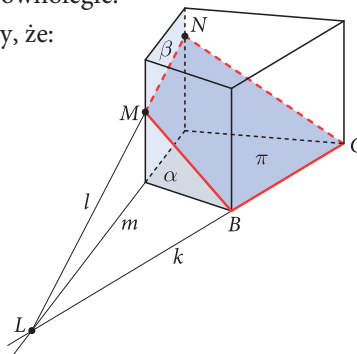
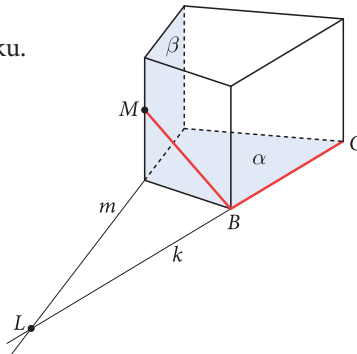
Zatem pr. $LM \subset \pi$.

Równocześnie:

$$L \in \beta \quad \leftarrow m \subset \beta$$

$$M \in \beta$$

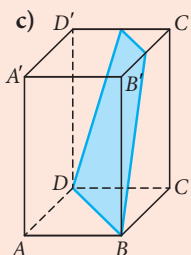
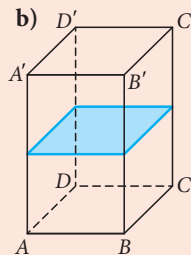
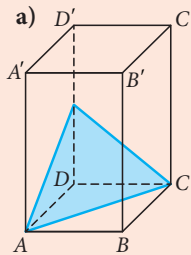
Zatem pr. $LM \subset \beta$.

**4.20.** Dany jest

prostokąt $ABCD A' B' C' D'$ o podstawie kwadratowej $ABCD$, niebędący sześcianem. Narysuj przekrój tego prostokąta płaszczyzną poprowadzoną przez

- a) wierzchołki A, C oraz środek krawędzi DD' .
b) środki trzech krawędzi bocznych.
c) wierzchołki D, B oraz środek krawędzi $B'C'$.

Odp.:

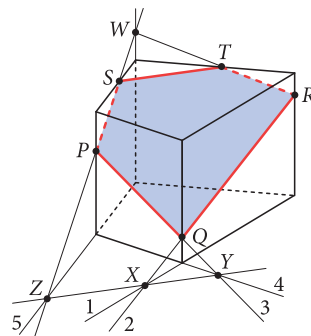


Prosta LM jest więc krawędzią przecięcia płaszczyzny π z płaszczyzną β , a ponieważ przecięła krawędź DD' graniastosłupa w punkcie oznaczonym N , tym samym otrzymaliśmy czwarty wierzchołek przekroju.

Odp.: Szukanym przekrojem płaskim graniastosłupa jest czworokąt $BCNM$.

b) Kolejno kreślimy (oznaczenia jak na rysunku):

- proste: 1 i 2 $\rightarrow$ otrzymujemy punkt X ,
- proste: 3 i 4 $\rightarrow$ otrzymujemy punkt Y ,
- prostą XY ,
- prostą 5 $\rightarrow$ otrzymujemy punkt Z w przecięciu z prostą XY ,
- prostą ZP , która przecina krawędź $A'D'$ graniastosłupa w punkcie S oraz przedłużenie krawędzi DD' w punkcie W ,
- prostą WR $\rightarrow$ otrzymujemy punkt T .



Odp.: Szukanym przekrojem płaskim graniastosłupa jest pięciokąt $PQRTS$.

4.22. Podstawę

prostopadłościanu stanowi kwadrat o boku 6 cm, a wysokość prostopadłościanu jest równa 9 cm. Prostopadłościan ten przecięto płaszczyzną zawierającą przekątną podstawy i przechodzącą przez jeden z wierzchołków drugiej podstawy. Oblicz pole otrzymanego przekroju. Rozważ wszystkie możliwości.

Odp.: Przekrój jest albo prostokątem o polu $54\sqrt{2} \text{ cm}^2$, albo trójkątem o polu $9\sqrt{22} \text{ cm}^2$.



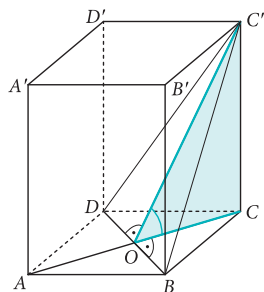
Przykład 5 zad. 4.22

Prostopadłościan $ABCD A'B'C'D'$ o podstawie kwadratowej przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołki B , D i C' .

- Zaznaczymy kąt α między otrzymanym przekrojem a płaszczyzną podstawy $ABCD$ prostopadłościanu.
- Przyjmujemy, że krawędź podstawy prostopadłościanu ma długość a , a jego wysokość jest równa h . Wyznamy $\tan \alpha$.

Rozwiązanie

- Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Przypomnijmy: Używamy w podręczniku zwrotów typu „bok a wielokąta” zamiast „bok wielokąta o długości a ”, podobnie „wysokość równa 3”, a nie „długość wysokości równa 3”, „przekątne są równe” zamiast „przekątne mają jednakową długość” itp.

Zauważmy, że:

- ściany boczne są przystającymi prostokątami,
- $|DC'| = |BC'|$, więc przekrojem jest równoramienny trójkąt DBC' .

Płaszczyzna przekroju przecina podstawę $ABCD$ wzdłuż prostej DB . Aby wyznaczyć szukany kąt, należy poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do tej prostej.

- W równoramiennym trójkącie DBC' prowadzimy wysokość $C'O$. Punkt O jest środkiem odcinka DB (przekątnej kwadratu $ABCD$).
- W kwadracie przekątne są równe i przecinają się pod kątem prostym w punkcie, który jest środkiem każdej z nich. Zatem odcinek OC – jako połowa przekątnej AC – również jest prostopadły do prostej DB .

Prosta DB jest prostopadła do dwóch przecinających się prostych – OC i OC' . Jest więc prostopadła do płaszczyzny wyznaczonej przez te proste. Szukanym kątem α jest zatem kąt $C'OC$.

b) $\alpha = \sphericalangle C'OC$, zatem $\operatorname{tg} \alpha$ wyznaczmy z trójkąta prostokątnego $C'OC$.

$$|OC| = \frac{1}{2}a\sqrt{2} \quad \leftarrow \text{połowa przekątnej kwadratu}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|C'C|}{|OC|} = \frac{2h}{a\sqrt{2}} = \frac{h\sqrt{2}}{a}$$

Odp.: a) $\alpha = \sphericalangle C'OC$ b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h\sqrt{2}}{a}$

Przykład 6

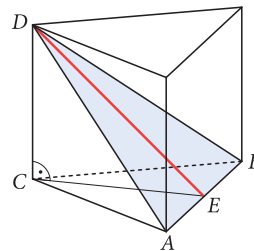
Graniastosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy równej 12 cm i wysokości 6 cm przecięto płaszczyzną zawierającą krawędź podstawy i jeden z wierzchołków drugiej podstawy. Obliczmy pole otrzymanego przekroju.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Podstawą graniastosłupa jest równoboczny trójkąt ABC , zatem ściany boczne graniastosłupa są przystającymi prostokątami. Stąd $|AD| = |BD|$.

Otrzymany przekrój jest więc trójkątem równoramiennym. Środek E krawędzi AB jest spodkiem wysokości w trójkącie ABD i spodkiem wysokości w trójkącie ABC .



Najpierw obliczamy wysokość podstawy graniastosłupa: $|EC| = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.

Następnie, na mocy twierdzenia Pitagorasa w trójkącie prostokątnym EDC , obliczamy $|ED|$: $|ED|^2 = (6\sqrt{3})^2 + 6^2 = 144$. Zatem $|ED| = 12$ cm.

Pole szukanego przekroju wynosi $\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |ED| = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 = 72$ [cm²].

Odp.: 72 cm²

Zadania

Odpowiedzi i rozwiązania

4.1. D

4.2. C

4.3. C

- 4.4. a) 6 ścian, 12 krawędzi, 8 wierzchołków
 b) 5 ścian, 9 krawędzi, 6 wierzchołków
 c) 7 ścian, 15 krawędzi, 10 wierzchołków
 d) 8 ścian, 18 krawędzi, 12 wierzchołków
 e) 9 ścian, 21 krawędzi, 14 wierzchołków

4.5. 27

- 4.6. a) 16 wierzchołków, 24 krawędzie
 b) 60 wierzchołków, 90 krawędzi
 c) 208 wierzchołków, 312 krawędzi

4.7. graniastosłup siedmiokątny

4.8. 4

4.9. a) 10 b) 18

4.10. b) $a\sqrt{3}$ cm

W każdym z zadań 4.1–4.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

4.1. Pewien graniastosłup ma 2040 krawędzi. Wskaż liczbę wierzchołków tego graniastosłupa.

- A. 680 B. 682 C. 1020 D. 1360

4.2. Wskaż długość przekątnej prostopadłościanu o wymiarach $3 \times 6 \times 8$.

- A. 12 B. $4\sqrt{6}$ C. $\sqrt{109}$ D. 10,1

4.3. Sześciian $ABCD A'B'C'D'$ przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną BD i wierzchołek C' . Wskaż podaną z dokładnością do 1° miarę kąta nachylenia otrzymanego przekroju do płaszczyzny $ABCD$.

- A. 35° B. 45° C. 55° D. 60°

4.4. Podaj liczbę ścian, krawędzi i wierzchołków

- a) sześciianu.
 b) graniastosłupa trójkątnego.
 c) graniastosłupa pięciokątnego.
 d) graniastosłupa sześciokątnego.
 e) graniastosłupa siedmiokątnego.

4.5. Pewien graniastosłup ma 11 ścian. Ile ma krawędzi?

4.6. Określ liczbę wierzchołków i krawędzi graniastosłupa, który ma

- a) 10 ścian. b) 32 ściany. c) 106 ścian.

4.7. Suma liczb ścian, krawędzi i wierzchołków pewnego graniastosłupa wynosi 44. Co to za graniastosłup?

4.8. Narysuj prostopadłościan i wszystkie jego przekątne. Ile ich jest?

4.9. Ile przekątnych ma graniastosłup o podstawie

- a) pięciokątnej? b) sześciokątnej?

4.10. Narysuj sześciian, a w nim jedną z jego przekątnych.

- a) Zaznacz kąt nachylenia tej przekątnej do płaszczyzny podstawy.
 b) Oblicz długość przekątnej sześciianu o krawędzi a cm.

4.11. Wyznacz kąt, jaki tworzy przekątna sześcianu z wychodzącą z tego samego wierzchołka przekątną ściany bocznej.

4.12. Oblicz długości wszystkich przekątnych równoległoscianu prostego, w którym każda krawędź ma długość 10 cm i jeden z kątów podstawy ma miarę 60° .

4.13. Narysuj trzy różne siatki sześcianu o krawędzi 1 cm.

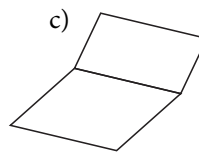
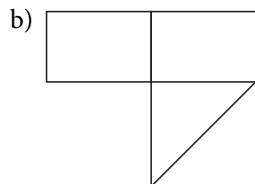
4.14. Narysuj siatkę graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wysokość jest równa

a) podwojonej krawędzi podstawy. b) potrojonej wysokości podstawy.

4.15. Narysuj siatkę graniastosłupa sześciokątnego prawidłowego o wszystkich krawędziach długości 2 cm.

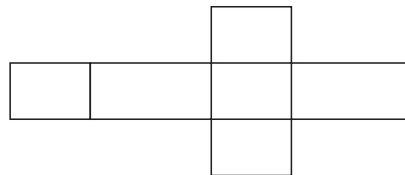
4.16. Narysuj siatkę graniastosłupa prostego, którego krawędź boczna ma długość 5 cm, a podstawą jest romb o kącie ostrym 60° i boku 3 cm.

4.17. Przerysuj figurę i uzupełnij ją tak, aby otrzymać siatkę graniastosłupa.



D

4.18. Czy narysowana figura jest siatką graniastosłupa? Odpowiedź uzasadnij.



4.19. Wysokość graniastosłupa sześciokątnego prawidłowego jest równa 8. Promień okręgu opisanego na podstawie wynosi 6. Oblicz długości przekątnych tego graniastosłupa.

4.20. Dany jest prostopadłościan $ABCD A'B'C'D'$ o podstawie kwadratowej $ABCD$, niebędący sześcianem. Narysuj przekrój tego prostopadłościanu płaszczyzną poprowadzoną przez

a) wierzchołki A, C oraz środek krawędzi DD' .

b) środki trzech krawędzi bocznych.

c) wierzchołki D, B oraz środek krawędzi $B'C'$.

4.11. ok. 35°

4.12. dwie o długości $10\sqrt{2}$ cm, dwie o długości 20 cm

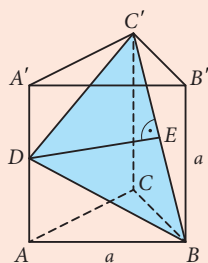
4.13. Patrz s. 41.

4.18. Nie. Odcinki, które po złożeniu siatki stają się jedną krawędzią, muszą być równej długości.

4.19. $4\sqrt{13}, 2\sqrt{43}$

4.20. Patrz s. 43.

4.21.

 D – środek krawędzi AA' E – środek przekątnej BC'

$$|DC'| = |BD| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$|BC'| = \sqrt{2}, |BE| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Punkt E jest spodkiem wysokości trójkąta $BC'D$.

$$|DE| = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$P_{BC'D} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

4.22. Przekrój jest albo prostokątem o polu $54\sqrt{2} \text{ cm}^2$, albo trójkątem o polu $9\sqrt{22} \text{ cm}^2$.

4.23. Jeżeli $0 < \text{tg } \alpha \leq \sqrt{2}$,to $P = \frac{1}{2 \cos \alpha}$. Jeżeli $\text{tg } \alpha > \sqrt{2}$ lub $\alpha = 90^\circ$,to $P = \frac{\sqrt{2} \sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$.**Prosto do matury**

1. F, P, P

2. 2340

3. $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{13}}{13}$ 4. $\cos \alpha = \frac{3}{5}$

4.21. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym każda krawędź ma długość równą 1. Przez przekątną ściany bocznej i środek przeciwległej krawędzi bocznej poprowadzono płaszczyznę. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

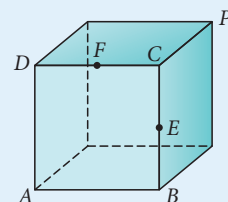
4.22. Podstawę prostopadłościanu stanowi kwadrat o boku 6 cm, a wysokość prostopadłościanu jest równa 9 cm. Prostopadłościan ten przecięto płaszczyzną zawierającą przekątną podstawy i przechodzącą przez jeden z wierzchołków drugiej podstawy. Oblicz pole otrzymanego przekroju. Rozważ wszystkie możliwości.

4.23. Sześcian o krawędzi 1 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy. Kąt nachylenia otrzymanego przekroju do płaszczyzny podstawy wynosi α . Oblicz pole P przekroju. Rozważ wszystkie możliwości.

Prosto do matury

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Punkty E i F są środkami krawędzi BC i CD sześcianu przedstawionego na rysunku. Najkrótszą drogę po powierzchni sześcianu z wierzchołka A do wierzchołka P przedstawia linia będąca sumą odcinków

A. AC i CP .B. AE i EP .C. AF i FP .

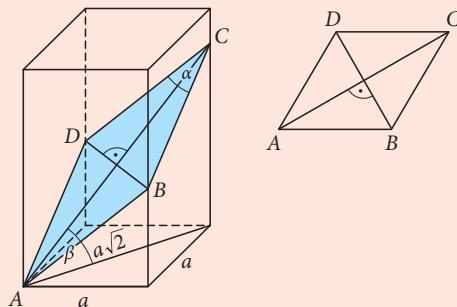
2. Pewien graniastosłup ma 1560 wierzchołków. Ile ma krawędzi?

3. Wysokość graniastosłupa sześciokątnego prawidłowego jest równa 8. Promień okręgu wpisanego w jego podstawę wynosi 6. Wyznacz cosinusy kątów nachylenia przekątnych tego graniastosłupa do płaszczyzny podstawy.

4. Prostopadłościan $ABCD A'B'C'D'$ o podstawie kwadratowej przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołki B, D i C' . Krawędź podstawy prostopadłościanu ma długość $12\sqrt{2}$, jego wysokość jest równa 16, a α jest kątem między otrzymanym przekrojem a płaszczyzną podstawy $ABCD$. Wyznacz $\cos \alpha$.

5. Prostopadłościan o podstawie kwadratowej przecięto płaszczyzną przechodzącą przez jeden z wierzchołków podstawy. W przekroju otrzymano romb o kącie ostrym α . Wyznacz cosinus kąta β nachylenia płaszczyzny przekroju do płaszczyzny podstawy prostopadłościanu.

5.



$$|BD| = a\sqrt{2}, \quad \text{tg } \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}|AC|} = \frac{a\sqrt{2}}{|AC|}, \quad |AC| = \frac{a\sqrt{2}}{\text{tg } \frac{\alpha}{2}}, \quad \cos \beta = \frac{a\sqrt{2}}{|AC|} = \frac{a\sqrt{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{\text{tg } \frac{\alpha}{2}}} = \text{tg } \frac{\alpha}{2}$$

5. Ostrosłupy

Umiejętności:

- rozpoznawanie w ostrosłupach kątów między: odcinkami, odcinkami i płaszczyznami, ścianami; obliczanie miar tych kątów
- stosowanie trygonometrii do obliczania: długości odcinków, miar kątów oraz pól powierzchni

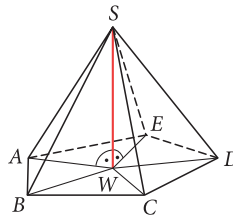
Przypomnimy i uporządkujemy najważniejsze wiadomości o **ostrosłupach** omawiane podczas nauki w szkole podstawowej.

Definicja

Ostrosłupem nazywamy wielościan, którego jedną ścianą (zwaną podstawą) jest dowolny wielokąt wypukły, a pozostałe ściany (zwane bocznymi) są trójkątami o wspólnym wierzchołku.

W narysowanym obok ostrosłupie:

- pięciokąt $ABCDE$ jest podstawą,
- AB, BC, CD, DE, EA są krawędziami podstawy,
- ABS, BCS, CDS, DES, EAS są ścianami bocznymi,
- AS, BS, CS, DS, ES są krawędziami bocznymi,
- A, B, C, D, E, S są wierzchołkami,
- kąty ASB, BSC, CSD, DSE, ESA są kątami płaskimi przy wierzchołku ostrosłupa.

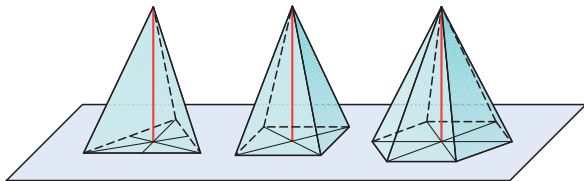


Punkt W jest rzutem prostokątnym wierzchołka S na płaszczyznę podstawy. Odcinek SW nazywamy wysokością ostrosłupa, a punkt W – **spodkiem wysokości**.

Definicja

Ostrosłup prawidłowy to ostrosłup, którego podstawą jest wielokąt foremny i którego spodek wysokości jest środkiem okręgu opisanego na podstawie.

Przykłady ostrosłupów prawidłowych o podstawach: trójkątnej, czworokątnej i sześciokątnej.



Ostrosłup o podstawie trójkątnej ma cztery ściany – dlatego nazywamy go **czworościanem**.



MKP

tematy 2.5, 2.11

Multiteka

- Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 1.5

Generator
testów i sprawdzianów

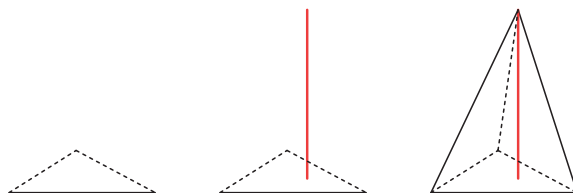
Rysowanie ostrosłupów

Podczas omawiania problemów dotyczących wielościanów istotna jest umiejętność zrobienia czytelnego rysunku wielościanu i poprawnego zaznaczenia jego własności.

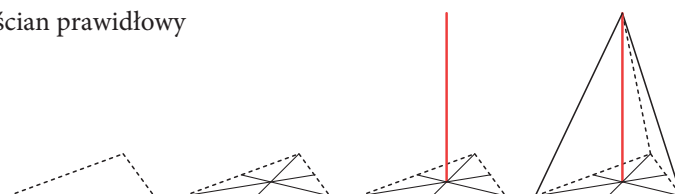
Przykład 1

Przyjrzyjmy się sposobom rysowania najczęściej spotykanych ostrosłupów.

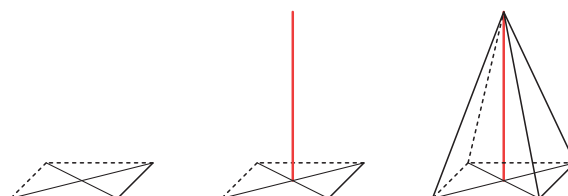
- czworoscian



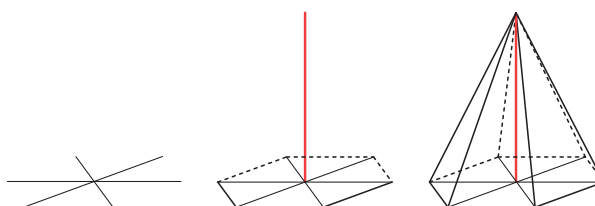
- czworoscian prawidłowy



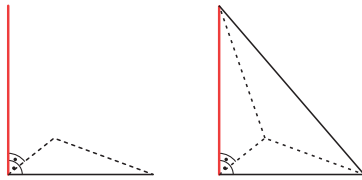
- ostrosłup prawidłowy o podstawie czworokątnej



- ostrosłup prawidłowy o podstawie sześciokątnej



- ostrosłup o podstawie trójkątnej, którego jedna krawędź boczna jest prostopadła do płaszczyzny podstawy

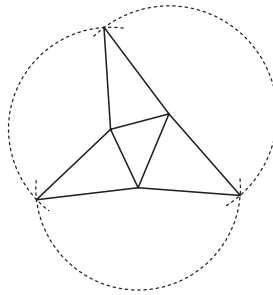
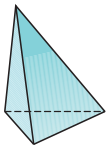


Przykład 2 ◀ zad. 5.12–5.14

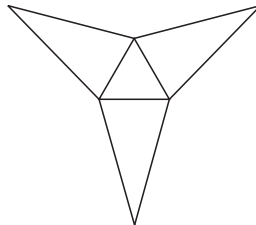
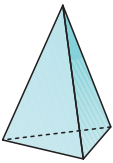
Podobnie jak w wypadku graniastosłupów, możemy sporządzić siatki ostrosłupów.

Rozwiązanie

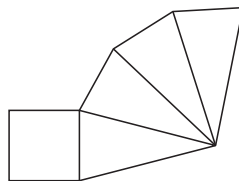
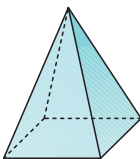
- czworościan



- czworościan prawidłowy

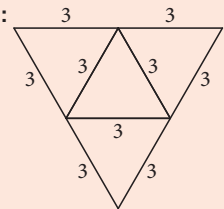


- ostrosłup prawidłowy czworokątny



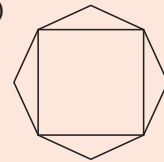
◀5.12. Narysuj siatkę czworościanu foremnego o krawędzi 3 cm.

Odp.:

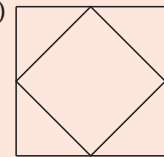


◀5.13. Wyjaśnij, dlaczego podana figura nie jest siatką ostrosłupa czworokątnego.

a)

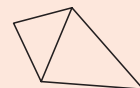


b)



Odp.: Wskazówka: Zastanów się, jakie wartości może przyjmować suma kątów ścian bocznych przy wierzchołku ostrosłupa.

◀5.14.



Przerysuj figurę przedstawioną na rysunku obok i uzupełnij ją tak, aby otrzymać siatkę ostrosłupa.

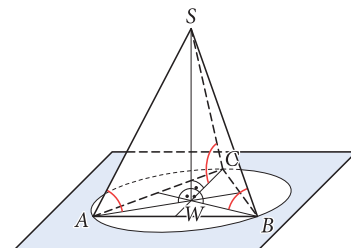
Własności ostrosłupów

Przyjmijmy, że $ABCS$ jest czworościanem prawidłowym.

I. Zgodnie z definicją punkt W – spodek wysokości – jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie równobocznym ABC . Trójkąty AWS , BWS i CWS są przystającymi trójkątami prostokątnymi (cecha bkb).

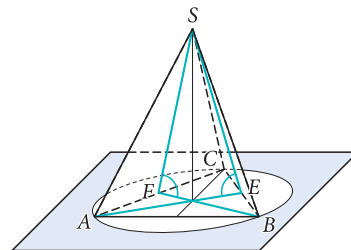
Z tego faktu wynika, że:

- $|AS| = |BS| = |CS|$,
- $\sphericalangle WAS = \sphericalangle WBS = \sphericalangle WCS$, czyli kąty nachylenia krawędzi bocznych do płaszczyzny podstawy są równe,
- ściany boczne ostrosłupa są przystającymi trójkątami równoramiennymi (cecha bbb).

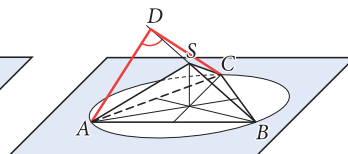
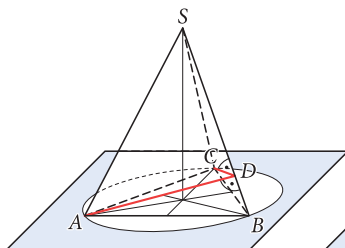


II. Jeżeli punkt E jest środkiem boku BC , to $SE \perp BC$ (SE jest wysokością w równoramiennym trójkącie BCS) oraz $AE \perp BC$ (AE jest wysokością w równobocznym trójkącie ABC). Zatem kąt AES jest kątem nachylenia ściany bocznej BCS do płaszczyzny podstawy.

Jeśli F jest środkiem boku AC , to kąt BFS jest kątem nachylenia ściany bocznej ACS do płaszczyzny podstawy. Trójkąty AES i BFS są przystające (bbb), zatem $\sphericalangle AES = \sphericalangle BFS$. Inaczej mówiąc, **kąty nachylenia ścian bocznych do płaszczyzny podstawy są równe**.



III. Aby wyznaczyć kąt dwuścienny między sąsiednimi ścianami bocznymi, np. ABS i BCS , trzeba poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do krawędzi BS . Mogą ją wyznaczyć wysokości poprowadzone z wierzchołków A (w trójkącie ABS) i C (w trójkącie BCS). Trójkąty ABS i BCS są przystające, więc obydwie wysokości „trafią” w ten sam punkt (na rysunku po lewej stronie oznaczony D). Można udowodnić, że w ostrosłupie prawidłowym **kąty dwuścienne między sąsiednimi ścianami są równe**.



Zauważmy, że punkt D nie musi należeć do odcinka BS – jak na rysunku po prawej stronie.



Powyższe rozumowanie przeprowadziliśmy dla czworoscianu prawidłowego. Można je uogólnić dla dowolnego ostrosłupa prawidłowego.

Twierdzenie

W ostrosłupie prawidłowym:

- wszystkie krawędzie boczne są równe i nachylone do płaszczyzny podstawy pod takim samym kątem,
- ściany boczne są przystającymi trójkątami równoramiennymi,
- kąty nachylenia ścian bocznych do płaszczyzny podstawy są równe,
- kąty dwusienne między sąsiednimi ścianami bocznymi są równe.

Prawdziwe są również poniższe twierdzenia.

Twierdzenie

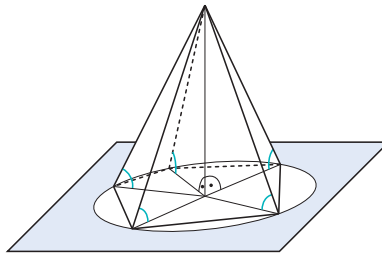
Jeżeli podstawą ostrosłupa jest wielokąt foremny i wszystkie krawędzie boczne są równe, to ostrosłup ten jest prawidłowy.

Twierdzenie

Jeżeli podstawą ostrosłupa jest wielokąt foremny i wszystkie krawędzie boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem, to ostrosłup ten jest prawidłowy.

Charakterystyczną grupę ostrosłupów tworzą te z nich, które co prawda nie mają w podstawie wielokąta foremnego, ale taki, na którym można opisać okrąg, a ponadto środek tego okręgu jest spodkiem wysokości ostrosłupa. Można wykazać, że równoważne są następujące trzy warunki (tzn. jeżeli spełniony jest jeden z nich, to spełnione są również dwa pozostałe):

- wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa są równe,
- wszystkie krawędzie boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem,
- na podstawie ostrosłupa można opisać okrąg, którego środkiem jest spodek wysokości ostrosłupa.



◀5.21. W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym promień okręgu opisanego na podstawie wynosi 10 cm, a wysokość 30 cm. Wyznacz (z dokładnością do 1°)

- a) kąt α nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy.
b) kąt β nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.

Odp.: a) $\alpha = 72^\circ$

b) $\beta = 74^\circ$

◀5.23. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędzie boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° , a wysokość jest równa 20. Oblicz pole podstawy tego ostrosłupa oraz wyznacz tangens kąta α nachylenia jego ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.

Odp.: $P_p = \frac{800}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{6}$

Przykład 3 ◀ zad. 5.21

Wyznamy z dokładnością do 1° miarę kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym, w którym krawędź podstawy ma długość 6, a wysokość ostrosłupa jest równa 10.

Rozwiązanie

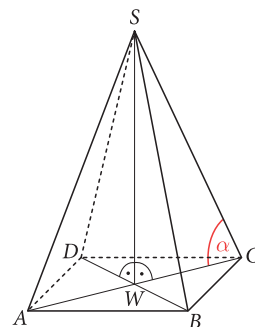
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Podstawą ostrosłupa jest kwadrat o boku 6. Szukany kąt α jest kątem ostrym w trójkącie prostokątnym WCS , w którym połowa przekątnej kwadratu $|WC| = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$, a bok WS jest wysokością ostrosłupa. Kąt α wyznaczymy za pomocą funkcji trygonometrycznej.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|WS|}{|WC|} = \frac{10}{3\sqrt{2}} \approx 2,357$$

Z tablic odczytujemy, że $\alpha \approx 67^\circ$.

Odp.: 67°



Przykład 4 ◀ zad. 5.23

Kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy trójkątnego ostrosłupa prawidłowego jest równy 70° . Wysokość ostrosłupa jest równa 12. Obliczymy pole P podstawy tego ostrosłupa z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

Rozwiązanie

Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny, więc do obliczenia pola wystarczy znaleźć bok tego trójkąta.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Spodek wysokości ostrosłupa jest punktem przecięcia środkowych podstawy.

Zatem:

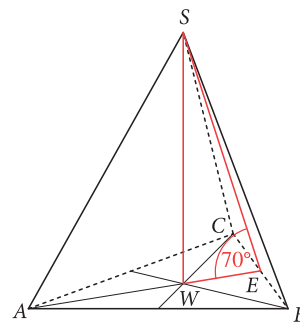
$$|WE| = \frac{1}{3} \cdot |AE| = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

gdzie a oznacza długość boku podstawy.

Długość odcinka WE obliczymy za pomocą funkcji trygonometrycznej.

$$\operatorname{tg} 70^\circ = \frac{|WS|}{|WE|}$$

$$|WE| = \frac{|WS|}{\operatorname{tg} 70^\circ} \approx \frac{12}{2,7475} \approx 4,3676$$



Mamy więc $\frac{a\sqrt{3}}{6} \approx 4,3676$.

$$a \approx \frac{4,3676 \cdot 6}{\sqrt{3}}$$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \approx \frac{(4,3676 \cdot 6)^2 \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot 4} \approx 99,1$$

Odp.: $P = 99,1$

W **trójkącie równobocznym** wysokości są równocześnie środkowymi boków. Jeżeli bok trójkąta oznaczmy a , wysokość h , pole P , to

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

W **dowolnym trójkącie** środkowe przecinają się w jednym punkcie (środku ciężkości), który dzieli je w stosunku $2:1$, licząc od wierzchołka.

Przykład 5

Jolka ma wykonać z drutu szkielet ostrosłupa o następujących własnościach:

- podstawą jest prostokątny trójkąt równoramienny o przeciwprostokątnej 16 cm ,
 - krawędź boczna, której koniec stanowi wierzchołek kąta prostego podstawy, jest prostopadła do płaszczyzny podstawy,
 - pozostałe dwie krawędzie są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° .
- Obliczymy, jaką długość powinien mieć drut potrzebny do wykonania zadania.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Kąt CAB jest prosty. Mamy obliczyć sumę długości wszystkich krawędzi ostrosłupa.

Zauważmy, że:

1. prostokątny trójkąt równoramienny ABC (podstawa ostrosłupa) jest połową kwadratu o przekątnej $|BC| = 16$, zatem:

$$16 = |AC| \cdot \sqrt{2}$$

$$\text{czyli } |AC| = |AB| = 8\sqrt{2} \text{ [cm]},$$

2. ściana boczna ACS jest połową trójkąta równobocznego, ponieważ $\angle SAC = 90^\circ$ i $\angle ACS = 60^\circ$ (to samo można powiedzieć o ścianie ABS), stąd:

$$|CS| = 2 \cdot |AC| = 16\sqrt{2} \text{ [cm]}$$

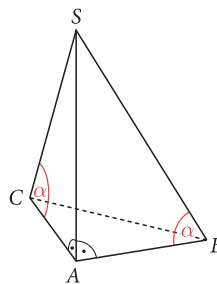
$$|AS| = |AC| \cdot \sqrt{3} = 8\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 8\sqrt{6} \text{ [cm]}$$

Suma długości wszystkich krawędzi jest więc równa:

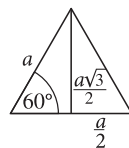
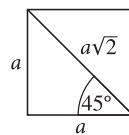
$$16 + 2 \cdot 8\sqrt{2} + 2 \cdot 16\sqrt{2} + 8\sqrt{6} \approx 103,5 \text{ [cm]}$$

Zauważmy, że do wykonania takiego szkieletu trzeba przynajmniej jedną krawędź odciąć – pozostałe boki można pozaginać z jednego kawałka drutu.

Odp.: Potrzebny kawałek drutu powinien mieć prawie 104 cm długości.

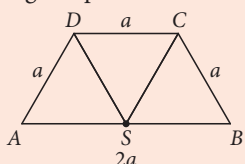


Przypomnijmy:

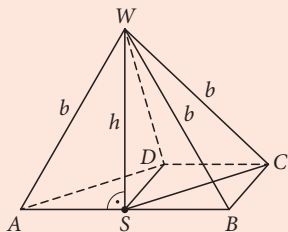


◀ 5.25. Podstawą ostrosłupa jest trapez równoramienny, którego dłuższa podstawa ma długość $2a$, a krótsza podstawa i ramiona mają długość a . Wszystkie krawędzie boczne mają długość b . Wyznacz cosinusy kątów nachylenia krawędzi bocznych do płaszczyzny podstawy.

Odp.: Ostrosłup ma krawędzie boczne równej długości, zatem spodek wysokości to punkt S równo oddalony od wierzchołków tego trapezu.

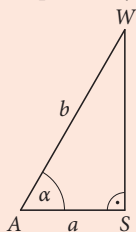


Ściana boczna ABW jest prostopadła do podstawy.



$$\cos \alpha = \frac{a}{b}$$

Wszystkie krawędzie są nachylone do podstawy pod kątem α .



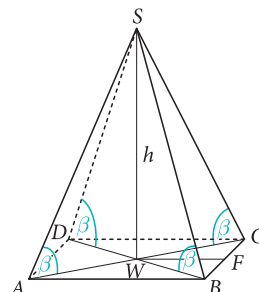
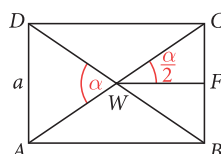
Przykład 6 ◀ zad. 5.25

Podstawą ostrosłupa jest prostokąt, w którym krótszy bok ma długość a , a przekątne przecinają się pod kątem ostrym α . Wysokość ostrosłupa jest równa h , a spodek wysokości jest punktem przecięcia przekątnych podstawy. Wyznamy kąty nachylenia krawędzi bocznych do płaszczyzny podstawy.

Rozwiązanie

Jeżeli podstawa jest prostokątem, to można na niej opisać okrąg (na każdym prostokącie można opisać okrąg). Ponadto jeśli spodek wysokości jest punktem przecięcia przekątnych prostokąta (czyli środkiem okręgu opisanego na tym prostokącie), to krawędzie boczne ostrosłupa są równej długości i tworzą równe kąty z płaszczyzną podstawy.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunkach.



Dane są trzy wielkości: α , a , h . Za ich pomocą mamy wyznaczyć kąt β .

W prostokątnym trójkącie SWC długość boku WS jest dana, więc wystarczy, że wyznaczmy długość jeszcze jednego boku.

Trójkąt BCW jest równoramienny ($|BW| = |CW|$). Jeżeli poprowadzimy w nim wysokość WF , to:

$$|FC| = \frac{a}{2}, \quad \angle FWC = \frac{\alpha}{2}, \quad \sin \angle FWC = \frac{|FC|}{|WC|}$$

Zatem:

$$|WC| = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

Możemy teraz wyznaczyć tangens kąta β w trójkącie SWC :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|WS|}{|WC|} = \frac{2h \sin \frac{\alpha}{2}}{a}$$

Odp.: Krawędzie boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod takim kątem β ,

$$\text{ze } \operatorname{tg} \beta = \frac{2h \sin \frac{\alpha}{2}}{a}.$$

Wyznaczenie kąta ostrego najczęściej polega na wyznaczeniu wartości jednej z funkcji trygonometrycznych tego kąta.



Przykład 7 ◀ zad. 5.26

W czworokątnym ostrosłupie prawidłowym kąty płaskie przy wierzchołku są równe α . Przez krawędź podstawy i środek wysokości ostrosłupa poprowadzono płaszczyznę. Wyznamy kąt nachylenia płaszczyzny przekroju do płaszczyzny podstawy ostrosłupa.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Punkty E i F są środkami krawędzi odpowiednio AD i BC , punkt S jest spodkiem wysokości ostrosłupa.

Zauważmy, że przekrój ostrosłupa jest trapezem równoramiennym. Zauważmy też, że $KF \perp BC$ i $FE \perp BC$, więc szukany kąt φ to kąt SFK .

Oznaczmy $|EF| = 2|SF| = 2a$ oraz $|SW| = 2|SK| = 2h$.

Wyznamy kąt φ nachylenia płaszczyzny przekroju do płaszczyzny podstawy ostrosłupa w zależności od danego kąta α . Wykorzystamy trzy zależności w różnych trójkątach:

$$1. \operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{a} \quad \leftarrow \text{w } \triangle KSF$$

$$2. 4h^2 + a^2 = |WF|^2 \quad \leftarrow \text{w } \triangle WSF$$

$$3. \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{|WF|} \quad \leftarrow \text{w } \triangle WBF$$

Z równości 3 wyznaczamy $|WF|$ i podstawiamy do równości 2.

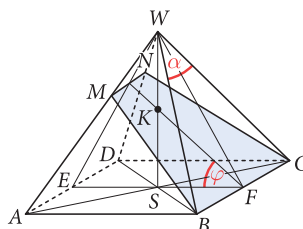
$$|WF| = \frac{a}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}, \text{ czyli } |WF|^2 = \frac{a^2}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \text{ więc } 4h^2 + a^2 = \frac{a^2}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$4h^2 = a^2 \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} - 1 \right)$$

$$\frac{h^2}{a^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} - 1 \right) = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \alpha}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \quad \leftarrow \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

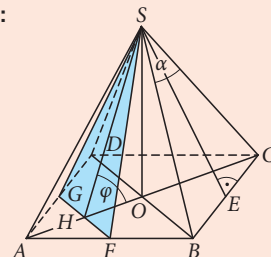
$$\text{Zatem } \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{\cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \text{ i zgodnie z równością 1 mamy } \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{\cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{Odp.: Szukanym kątem jest kąt } \varphi \text{ taki, że } \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{\cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$



◀ 5.26. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąty płaskie przy wierzchołku są równe α . Przez środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy i wierzchołek ostrosłupa poprowadzono płaszczyznę. Wyznam tangens kąta φ nachylenia tej płaszczyzny do płaszczyzny podstawy ostrosłupa.

Odp.:



F, G – środki krawędzi AB, AD
Niech $a = |AB|$.

$$|OH| = \frac{1}{2} |AO| = \frac{1}{4} |AC| = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{|BE|}{|BS|}, \text{ więc } |BS| = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$|OB| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$|OS| = \sqrt{\left(\frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2} = \frac{a\sqrt{\cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|OS|}{|OH|} = \frac{2\sqrt{\cos \alpha}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

Przykład 8

Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny, w którym krawędź podstawy ma długość a , zaś krawędź boczna jest od niej dwa razy dłuższa.

- Obliczymy cosinus kąta α między krawędzią boczną i krawędzią podstawy ostrosłupa.
- Narysujemy przekrój ostrosłupa płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i środek przeciwległej krawędzi bocznej oraz wyznaczmy pole P tego przekroju.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunkach. Punkt O jest spodkiem wysokości ostrosłupa.

Zgodnie z danymi w zadaniu mamy:

$$|AB| = |BC| = |AC| = a$$

$$|AS| = |BS| = |CS| = 2a$$

- Ostrosłup jest prawidłowy, zatem D jest środkiem krawędzi BC , a odcinek SD jest wysokością równoramiennego trójkąta BCS .

$$\cos \alpha = \frac{|DC|}{|SC|} = \frac{\frac{1}{2}a}{2a} = \frac{1}{4}$$

- Jeżeli poprowadzimy przekrój ostrosłupa płaszczyzną przechodzącą przez krawędź AB podstawy, to szukany przekrojem jest równoramienny trójkąt ABF , gdzie F jest środkiem krawędzi CS . Do obliczenia pola tego trójkąta zastosujemy wzór $P = \frac{1}{2}a \cdot |EF|$.

Długość $|EF|$ wyznaczymy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta EBF . Najpierw na podstawie twierdzenia cosinusów w trójkącie BCF wyznaczamy $|BF|^2$.

$$\begin{aligned} |BF|^2 &= |BC|^2 + |CF|^2 - 2 \cdot |BC| \cdot |CF| \cdot \cos \alpha = \\ &= a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}a^2 \end{aligned}$$

← twierdzenie cosinusów w $\triangle BCF$

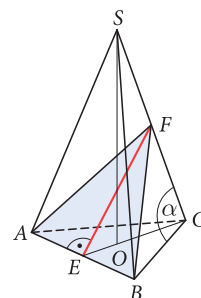
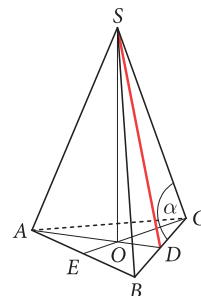
$$|EF|^2 = |BF|^2 - |EB|^2 = \frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{5}{4}a^2$$

← twierdzenie Pitagorasa w $\triangle EBF$

$$|EF| = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$P = \frac{1}{2}a \cdot |EF| = \frac{a^2\sqrt{5}}{4}$$

$$\text{Odp.: a) } \cos \alpha = \frac{1}{4} \quad \text{b) } P = \frac{a^2\sqrt{5}}{4}$$

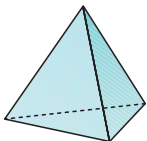
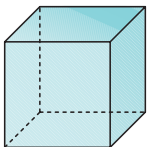
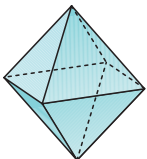
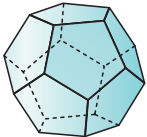


Wielościany foremne

Bardzo ciekawą grupę wielościanów stanowią wielościany foremne. Istnieje ich tylko pięć.

Definicja

Wielościanem foremnym nazywamy wielościan wypukły, w którym wszystkie ściany są wielokątami foremnymi o tej samej liczbie boków i w którego wierzchołkach zbiega się taka sama liczba krawędzi.

Wielościany foremne		
nazwa	rysunek	ściany
czworościan foremny		trójkąty równoboczne
sześcian		kwadraty
ośmiościan foremny		trójkąty równoboczne
dwunastościan foremny		pięciokąty foremne
dwudziestościan foremny		trójkąty równoboczne

W wielościanie foremny wszystkie wypukłe kąty dwuścienne utworzone przez sąsiednie ściany mają równe miary.

Wielościany foremne nazywane są bryłami platońskimi. Według Platona (428–347 p.n.e.) cały materialny świat zbudowany jest z czterech składników – żywiołów, z których każdy ma swój (foremny) odpowiednik matematyczny: ogień – czworościan, powietrze – ośmiościan, ziemia – sześćścian, woda – dwudziestościan. Piąty wielościan foremny – dwunastościan – odkryty przez ucznia Platona, Teajtetosa, został przypisany duchowi (według innych źródeł – wszechświatowi).



Na koniec podajemy wzór, który sformułował i udowodnił Leonhard Euler (1707–1783) – szwajcarski matematyk, fizyk i astronom.

Twierdzenie

W wielościanie wypukłym liczba wierzchołków w , liczba ścian s i liczba krawędzi k spełniają równość (**wzór Eulera**):

$$w + s = k + 2$$

◀ 5.28. Oblicz liczbę krawędzi k i wierzchołków w dwunastościanu foremnego.

Odp.: $k = 30$, $w = 20$

Przykład 9 ◀ zad. 5.28

Obliczymy, ile krawędzi i wierzchołków ma dwudziestościan foremny.

Rozwiązanie

Każda z dwudziestu ścian ma trzy krawędzie, ale każda krawędź jest częścią wspólną dwóch ścian. Zatem liczba krawędzi jest równa:

$$\frac{20 \cdot 3}{2} = 30$$

Podobną metodą możemy wyznaczyć liczbę wierzchołków. Możemy również skorzystać ze wzoru Eulera.

$$w = k + 2 - s$$

$$w = 30 + 2 - 20$$

$$w = 12$$

Odp.: $k = 30$, $w = 12$

Zadania

W każdym z zadań 5.1–5.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

5.1. W pewnym ostrosłupie liczba ścian jest o 6 mniejsza od liczby krawędzi. Wskaż liczbę wierzchołków tego ostrosłupa.

A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

Odpowiedzi i rozwiązania

5.1. C

5.2. Wysokość czworościanu foremnego jest równa $4\sqrt{6}$. Wskaż długość krawędzi tego czworościanu.

- A. 10 B. 12 C. $6\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{2}$

5.3. Ile ścian ma ostrosłup o podstawie n -kątnej?

- A. $2n$ B. $n - 1$ C. $n + 1$ D. $n + 2$

5.4. Podaj liczbę ścian s , krawędzi k i wierzchołków w

- a) czworościanu.
b) ostrosłupa, którego podstawą jest trapez.
c) ostrosłupa siedmiokątnego.

5.5. Jaki wielokąt jest podstawą ostrosłupa, który ma

- a) 31 wierzchołków? b) 14 ścian? c) 24 krawędzie?

5.6. Jaki ostrosłup ma

- a) 101 ścian? b) 42 krawędzie? c) 18 wierzchołków?

5.7. Ile ścian ma ostrosłup o 10 krawędziach?

5.8. Iloczyn liczby ścian i liczby krawędzi pewnego ostrosłupa jest równy 84. Ile wierzchołków ma ten ostrosłup?

5.9. Narysuj ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego wszystkie krawędzie mają jednakową długość a .

- a) Zaznacz kąt α nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy.
b) Oblicz wysokość h tego ostrosłupa dla $a = 4$ cm.
c) Jaką miarę ma kąt α ?

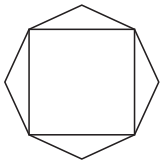
5.10. Narysuj ostrosłup prawidłowy trójkątny i zaznacz kąt nachylenia wysokości ostrosłupa do ściany bocznej.

5.11. Narysuj czworościan foremny i zaznacz kąt między jego ścianami.

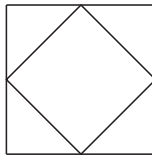
5.12. Narysuj siatkę czworościanu foremnego o krawędzi 3 cm.

5.13. Wyjaśnij, dlaczego podana figura nie jest siatką ostrosłupa czworokątnego.

a)



b)



5.2. B

5.3. C

5.4. a) $s = 4$, $k = 6$, $w = 4$

b) $s = 5$, $k = 8$, $w = 5$

c) $s = 8$, $k = 14$, $w = 8$

5.5. a) trzydziestokąt

b) trzynastokąt

c) dwunastokąt

5.6. a) stukątny

b) 21-kątny

c) siedemnastokątny

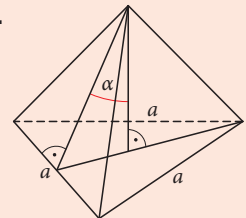
5.7. 6

5.8. 7

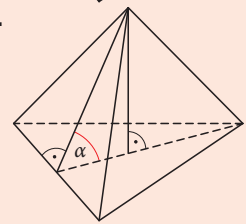
5.9. b) $h = 2\sqrt{2}$ cm

c) $\alpha = 45^\circ$

5.10.



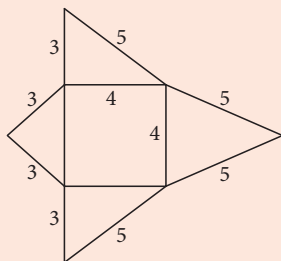
5.11.



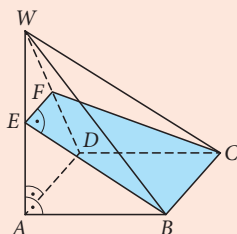
5.12. Patrz s. 51.

5.13. Wskazówka: Zastanów się, jakie wartości może przyjmować suma kątów ścian bocznych przy wierzchołku ostrosłupa.

5.15.



5.16.



E – środek krawędzi AW
 $BC \parallel$ pł. ADW , więc $EF \parallel BC$.
 Przekrój jest trapezem prostokątnym.

5.17. 25 cm

5.18. 10 cm

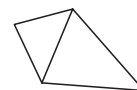
5.19. $2\sqrt{6}$ cm

5.20. krawędź podstawy: 24 cm,
 krawędź boczna: $12\sqrt{3}$ cm

5.21. a) $\alpha = 72^\circ$ b) $\beta = 74^\circ$ 5.22. 74°

5.23. $P_p = \frac{800}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{6}$

5.14. Przerysuj figurę przedstawioną na rysunku obok i uzupełnij ją tak, aby otrzymać siatkę ostrosłupa.



5.15. Dany jest ostrosłup czworokątny, którego podstawą jest kwadrat o boku długości 4 cm. Jedna ze ścian bocznych, będąca trójkątem równoramiennym o ramieniu równym 3 cm, jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Narysuj siatkę tego ostrosłupa.

5.16. Dany jest ostrosłup czworokątny $ABCDW$ o kwadratowej podstawie $ABCD$ i krawędzi AW prostopadłej do płaszczyzny podstawy. Wyznacz przekrój tego ostrosłupa płaszczyzną przechodzącą przez bok BC i środek krawędzi AW . Jakim wielokątem jest ten przekrój?

5.17. Wysokość ostrosłupa prawidłowego n -kątnego jest równa 24 cm, a promień okręgu wpisanego w podstawę jest równy 7 cm. Oblicz wysokość ściany bocznej opuszczoną z wierzchołka tego ostrosłupa.

5.18. Wysokość ostrosłupa prawidłowego n -kątnego jest równa 8 cm, a promień okręgu opisanego na podstawie jest równy 6 cm. Oblicz długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa.

5.19. Oblicz wysokość czworościanu foremnego o krawędzi 6 cm.

5.20. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o wysokości 12 cm ściana boczna jest nachylona do podstawy pod kątem 45° . Oblicz długości krawędzi tego ostrosłupa.

5.21. W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym promień okręgu opisanego na podstawie wynosi 10 cm, a wysokość 30 cm. Wyznacz (z dokładnością do 1°)

a) kąt α nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy.

b) kąt β nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.

5.22. Wysokość ostrosłupa prawidłowego 100-kątnego jest równa 24 cm, a promień okręgu wpisanego w podstawę jest równy 7 cm. Wyznacz kąt nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny podstawy z dokładnością do 1° .

5.23. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędzie boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° , a wysokość jest równa 20. Oblicz pole podstawy tego ostrosłupa oraz wyznacz tangens kąta α nachylenia jego ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.

5.24. Pan Karol postanowił zbudować dom w kształcie piramidy o podstawie kwadratowej. Słyszał, że najlepiej mieszka się w piramidach, w których kąt nachylenia ścian bocznych do płaszczyzny podłogi jest równy 60° . Przez pomyłkę zbudował jednak dom, w którym to nie ściany, lecz krawędzie ścian były nachylone do podłogi pod kątem 60° . Oblicz (z dokładnością do 1°), jaki kąt nachylenia ścian do płaszczyzny podstawy uzyskał w wyniku tej pomyłki.



5.25. Podstawą ostrosłupa jest trapez równoramienny, którego dłuższa podstawa ma długość $2a$, a krótsza podstawa i ramiona mają długość a . Wszystkie krawędzie boczne mają długość b . Wyznacz cosinusy kątów nachylenia krawędzi bocznych do płaszczyzny podstawy.

5.26. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąty płaskie przy wierzchołku są równe α . Przez środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy i wierzchołek ostrosłupa poprowadzono płaszczyznę. Wyznacz tangens kąta φ nachylenia tej płaszczyzny do płaszczyzny podstawy ostrosłupa.

5.27. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem β , a krawędź podstawy ostrosłupa ma długość a . Ostrosłup przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy, nachyloną do niej pod kątem α . Wyznacz pole otrzymanego przekroju.

5.28. Oblicz liczbę krawędzi k i wierzchołków w dwunastościanu foremnego.



5.29. Na dziedzińcu paryskiego Luwru, jednego z najsłynniejszych muzeów świata, stoi piramida w kształcie prawidłowego ostrosłupa czworokątnego. Jej budowę zakończono w 1989 roku. Ściany piramidy zbudowane są z 603 szklanych tafli w kształcie rombu i 70 tafli trójkątnych. Piramida ma 21,65 m wysokości, a długość boku jej podstawy wynosi 35,42 m. Wyznacz

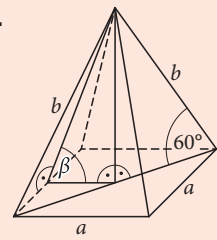


- długość krawędzi bocznej (wynik zaokrąglaj do drugiego miejsca po przecinku).
- kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy (z dokładnością do 1°).

5.28. $k = 30$, $w = 20$

5.29. a) 33,11 m b) 41°

5.24.



$$d = a\sqrt{2} = b$$

$$h = \frac{a\sqrt{2} \cdot \sqrt{13}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

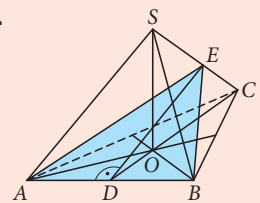
$$\tan \beta = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{\frac{1}{2}a} = \sqrt{6}$$

$$\beta \approx 68^\circ$$

5.25. Patrz s. 56.

5.26. Patrz s. 57.

5.27.



D – środek krawędzi AB
 $\beta = \sphericalangle DCS$, $\alpha = \sphericalangle EDC$, $|AB| = a$

$$|DC| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$\sphericalangle DEC = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, więc
 $\sin \sphericalangle DEC = \sin(\alpha + \beta)$

Z twierdzenia sinusów dla trójkąta DCE :

$$\frac{|DE|}{\sin \sphericalangle DCE} = \frac{|DC|}{\sin \sphericalangle DEC}$$

$$|DE| = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$P_{ABE} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |DE| = \frac{a^2 \sqrt{3} \sin \beta}{4 \sin(\alpha + \beta)}$$

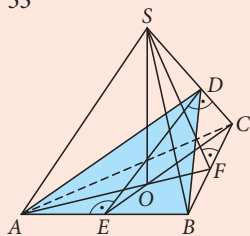
Prosto do matury



1. P, F, P

2. 53°

3.



$$|AB| = |BC| = |AC| = a,$$

$$|AS| = |BS| = |CS| = 2a$$

$$CS \perp BD$$

$$|SF| = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}a$$

$$P_{BCS} = \frac{1}{2}|BC| \cdot |SF| = \frac{1}{2}|CS| \cdot |BD|,$$

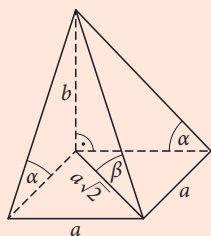
$$\text{stąd } |BD| = \frac{\sqrt{15}}{4}a$$

$$|DE| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{15}}{4}a\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{11}}{4}a$$

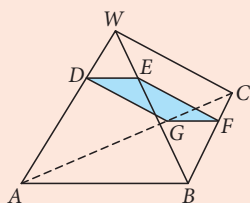
$$P_{ABD} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{11}}{4}a = \frac{a^2\sqrt{11}}{8}$$

4.



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a\sqrt{2}} = \frac{b\sqrt{2}}{2a}$$

5.



pł. $DEFG \parallel CW$, więc $EF \parallel CW$ i $DG \parallel CW$.

$$|AD| = 2|DW|, \quad |BE| = 2|EW|$$

$DEFG$ – rozważany przekrój

Zatem:

$$\frac{|EF|}{|CW|} = \frac{|BE|}{|BW|} = \frac{2|EW|}{2|EW| + |EW|} = \frac{2}{3}$$

$$|EF| = \frac{2}{3}|CW|$$

$$\frac{|DG|}{|CW|} = \frac{|AD|}{|AW|} = \frac{2|DW|}{2|DW| + |DW|} = \frac{2}{3}$$

$$|DG| = \frac{2}{3}|CW|$$

Ponieważ $EF \parallel CW$ i $DG \parallel CW$, więc $EF \parallel DG$.

Ponadto $|EF| = |DG|$.

Stąd wynika, że czworokąt $DEFG$ jest równoległobokiem.

1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

W ostrosłupie $ABCDW$ o podstawie $ABCD$

A. prosta DB jest skośna do prostej AW .

B. prosta DB jest skośna do prostej AC .

C. prosta DB jest skośna do prostej CW .

2. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego 100-kątnego ma długość 10 cm, a promień okręgu opisanego na podstawie jest równy 6 cm. Wyznacz kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa (z dokładnością do 1°).

3. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy, której długość wynosi a . Oblicz pole przekroju tego ostrosłupa płaszczyzną, która przechodzi przez krawędź podstawy i jest prostopadła do krawędzi bocznej.

4. Dany jest ostrosłup czworokątny prawidłowy o krawędzi podstawy a . Jedna z krawędzi bocznych ma długość b i jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Wyznacz tangensy kątów nachylenia pozostałych krawędzi bocznych ostrosłupa do płaszczyzny podstawy.

D

5. Przez punkty D i E leżące na krawędziach odpowiednio AW i BW czworościanu $ABCW$ poprowadzono płaszczyznę równoległą do krawędzi CW . Wiadomo, że $|AD| = 2|DW|$ i $|BE| = 2|EW|$. Wykaż, że otrzymany przekrój czworościanu jest równoległobokiem.

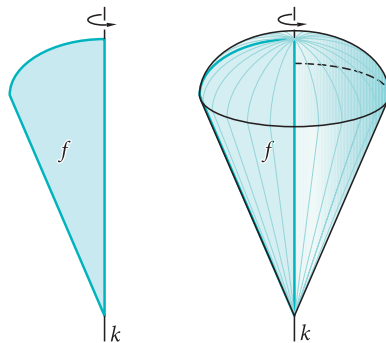
6. Bryły obrotowe

Umiejętności:

- rozpoznawanie w walcach i w stożkach kąta między odcinkami oraz kąta między odcinkami i płaszczyznami (np. kąta rozwarcia stożka, kąta między tworzącą a podstawą), obliczanie miar tych kątów
- stosowanie trygonometrii do obliczania długości odcinków oraz miar kątów

W tym temacie uporządkujemy wiadomości o bryłach obrotowych.

Jeżeli figurę płaską f obracamy w przestrzeni o kąt pełny wokół prostej k zawartej w płaszczyźnie figury f , to otrzymaną w ten sposób figurę przestrzenną nazywamy **bryłą obrotową**, a prostą k – **osią obrotu**.



Jeżeli bryłę przetniemy jakąś płaszczyzną, to część wspólną tych figur nazywamy **przekrojem płaskim**. W tym podręczniku będziemy się zajmować następującymi rodzajami przekrojów brył obrotowych:

- przekrojem osiowym**, czyli częścią wspólną tej bryły z płaszczyzną zawierającą oś obrotu,
- przekrojem poprzecznym**, czyli częścią wspólną tej bryły z płaszczyzną prostopadłą do osi obrotu.

Omówimy teraz najważniejsze własności brył obrotowych – walca, stożka i kuli.

Walec

Definicja

Walcem nazywamy bryłę obrotową powstałą przez obrót prostokąta dookoła prostej zawierającej jeden z jego boków.

MKP

tematy 3.1–3.3, 3.5–3.7

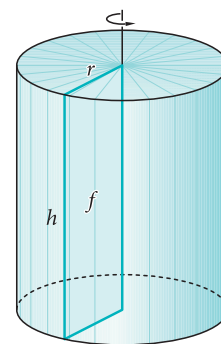
Multiteka

- Walec – konstrukcja, elementy i siatka
- Stożek – konstrukcja, elementy i siatka
- Przekroje brył obrotowych

dlaNauczyciela.pl | Kartkówka 1.6

Dwa koła powstałe przez obrót prostokątów do osi obrotu boków prostokąta nazywamy **podstawami** walca.

Bok prostokąta równoległy do osi obrotu i niemający z nią punktów wspólnych nazywamy **tworzącą** walca, a drugi bok – **promieniem** r podstawy walca. **Wysokością** h walca jest każdy odcinek łączący punkt płaszczyzny jednej podstawy z jego rzutem prostokątnym na płaszczyznę drugiej podstawy (każda tworząca to również wysokość walca). Suma wszystkich tworzących walca stanowi jego **powierzchnię boczną**.

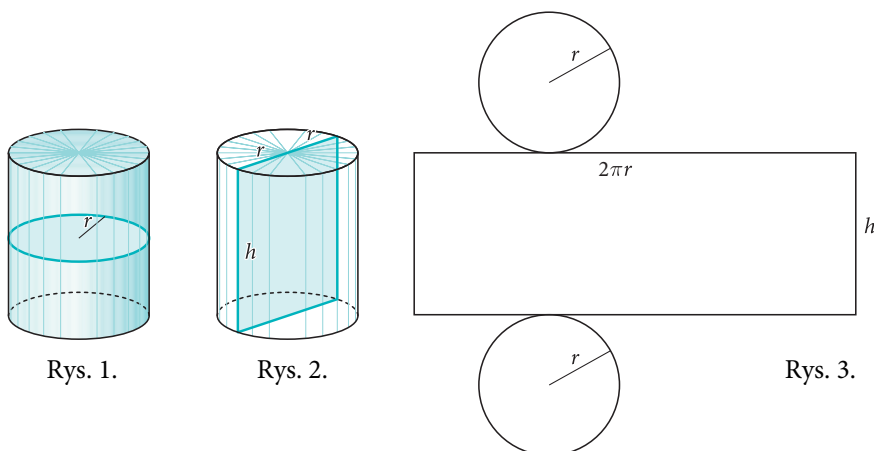


Pojęcia „promień” (podobnie jak pojęcia „wysokość”) używać będziemy w dwóch znaczeniach – również zamiast „długość promienia”. Nie powinno być z tym kłopotu, bo z kontekstu na ogół jasno wynika, czy „promień” oznacza odcinek czy liczbę.

Przekrojem poprzecznym walca jest koło o promieniu r (rys. 1).

Przekrojem osiowym walca jest prostokąt o bokach h i $2r$ (rys. 2).

Na rysunku 3 przedstawiona jest siatka walca.



Graniastosłupem wpisanym w walec nazywamy graniastosłup, którego podstawy są wielokątami wpisanymi w podstawy walca.

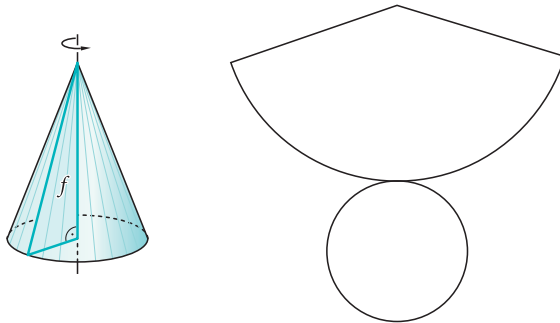
Graniastosłupem opisanym na walcu nazywamy graniastosłup, którego podstawy są wielokątami opisanymi na podstawach walca.

Stożek

Definicja

Stożkiem nazywamy bryłę obrotową powstałą przez obrót trójkąta prostokątnego dookoła prostej zawierającej jedną z jego przyprostokątnych.

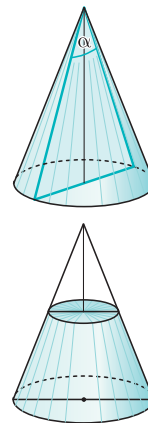
Koło powstałe w wyniku obrotu drugiej przyprostokątnej nazywamy **podstawą** stożka, a ten wierzchołek trójkąta, który nie należy do podstawy – **wierzchołkiem** stożka. Powierzchnia otrzymana w wyniku obrotu przeciwprostokątnej stanowi **powierzchnię boczną** stożka. Każdy odcinek łączący wierzchołek stożka z podstawą i zawarty w powierzchni bocznej nazywamy **tworzącą** stożka.



Rzutem prostokątnym wierzchołka stożka na płaszczyznę podstawy jest środek podstawy. **Wysokością** stożka nazywamy odcinek łączący wierzchołek ze środkiem podstawy. Tak samo nazywamy również długość tego odcinka.

Przekrój osiowy stożka to trójkąt równoramienny. Kąt α między ramionami tego trójkąta nazywamy **kątem rozwarcia stożka**. Przekroje osiowe stożka są trójkątami przystającymi.

Przekrojem poprzecznym stożka jest koło. Część stożka zawartą między jego podstawą a przekrojem poprzecznym nazywamy **stożkiem ściętym**. Przekrojem osiowym stożka ściętego jest trapez równoramienny. Wysokością stożka ściętego nazywamy wysokość tego trapezu.



Ostrosłupem wpisanym w stożek nazywamy ostrosłup, którego podstawa jest wielokątem wpisanym w podstawę stożka, a wysokość pokrywa się z wysokością stożka.

Ostrosłupem opisanym na stożku nazywamy ostrosłup, którego podstawa jest wielokątem opisanym na podstawie stożka, a wysokość pokrywa się z wysokością stożka.

Kula

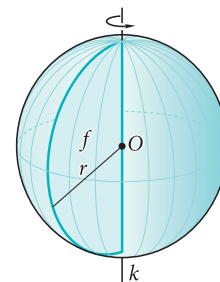
Definicja

Kulą nazywamy bryłę obrotową powstałą przez obrót półkola dookoła prostej zawierającej jego średnicę.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:

O – środek kuli,
 r – promień kuli,
 k – oś obrotu.

Zatem O jest środkiem średnicy obracanego półkola.
 Średnica ta ma długość $2r$.



Bezpośrednio z definicji wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Kula o środku O i promieniu r jest zbiorem punktów przestrzeni oddalonych od punktu O co najwyżej o r .

Powierzchnię kuli, którą tworzą punkty oddalone od środka o r , nazywamy **sferą**. Sfera powstaje przez obrót półokręgu dookoła prostej zawierającej średnicę tego półokręgu.

Prawdziwe jest poniższe twierdzenie, które podajemy bez dowodu.

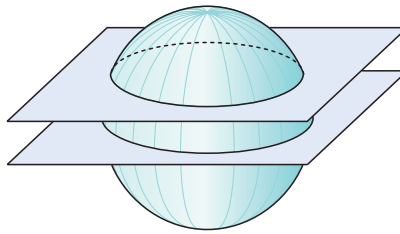
Twierdzenie

Sfery nie da się tak rozciąć, aby można ją było rozłożyć na płaszczyźnie. Dlatego nie istnieje siatka kuli.

Każdy odcinek łączący dwa punkty sfery nazywamy **cięciwą** kuli, a cięciwę przechodzącą przez środek kuli – jej **średnicą**. Każda średnica kuli ma długość równą $2r$, a odległość między dwoma dowolnymi punktami kuli nie jest większa od długości jej średnicy.

Jeżeli płaszczyzna i kula mają punkty wspólne, to częścią wspólną tej płaszczyzny i kuli jest albo koło, albo punkt.

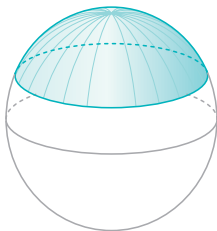
Każdy przekrój kuli przechodzący przez jej środek nazywamy **kołem wielkim**.



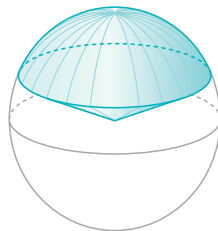
Każdą z dwóch części kuli, na które dzieli ją koło będące jej przekrojem, nazywamy **odcinkiem kuli**. Płaszczyzna przekroju dzieli sferę na dwie części. Są to **cząstki**.

Wycinek kuli to część kuli ograniczona sferą i powierzchnią boczną stożka o wierzchołku w środku tej kuli i tworzącej o długości r .

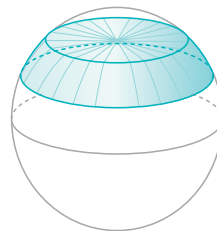
Warstwą kuli nazywamy część kuli zawartą między dwiema równoległymi, przecinającymi kulę płaszczyznami.



odcinek kuli



wycinek kuli



warstwa kuli

Definicja

Bryły wpisane w kulę

- Wielościan jest wpisany w kulę wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego wierzchołki należą do sfery tej kuli.
- Walec jest wpisany w kulę wtedy i tylko wtedy, gdy okręgi jego podstaw są zawarte w sferze tej kuli.
- Stożek jest wpisany w kulę wtedy i tylko wtedy, gdy okrąg jego podstawy jest zawarty w sferze i wierzchołek należy do sfery tej kuli.

Bryły opisane na kuli

- Wielościan jest opisany na kuli wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego ściany są styczne do kuli.
- Walec jest opisany na kuli wtedy i tylko wtedy, gdy jego podstawy i tworzące są styczne do kuli.
- Stożek jest opisany na kuli wtedy i tylko wtedy, gdy jego podstawa i tworzące są styczne do kuli.

Przyjmijmy bez dowodu następujące twierdzenie.

Twierdzenie

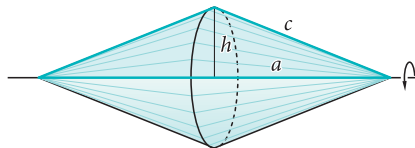
- Na każdym ostrosłupie prawidłowym można opisać kulę.
- W każdy ostrosłup prawidłowy można wpisać kulę.
- Środki kul: opisaney na ostrosłupie prawidłowym i wpisanej w ostrosłup prawidłowy należą do prostej zawierającej wysokość ostrosłupa.

Przykład 1

Narysujemy bryłę, która powstaje w wyniku obrotu danej figury wokół danej prostej.

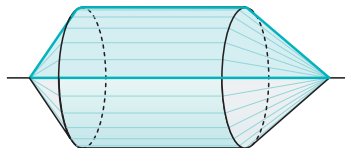
Rozwiązanie

a) Trójkąt równoramienny obraca się dookoła prostej zawierającej podstawę.



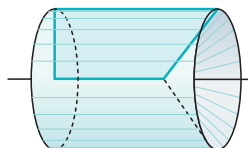
Otrzymana bryła to dwa przystające, sklejone podstawami stożki, w których h (wysokość trójkąta) jest promieniem podstawy, a (połowa podstawy trójkąta) to wysokość stożka, a c (ramię trójkąta) jest jego tworzącą.

b) Trapez, który przy dłuższej podstawie ma kąty ostre, obraca się dookoła prostej zawierającej dłuższą podstawę.



Otrzymujemy bryłę złożoną z dwóch stożków i walca.

c) Trapez prostokątny obraca się dookoła prostej zawierającej krótszą podstawę.



Otrzymujemy walec z wydrążonym stożkiem.

Przykład 2 ◀ zad. 6.5

Przekątna przekroju osiowego walca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = 75^\circ$. Promień podstawy walca jest równy 3. Obliczmy wysokość walca (z dokładnością do jednego miejsca po przecinku).

Rozwiązanie

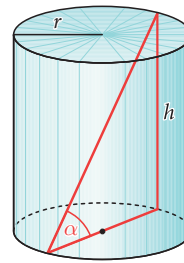
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Mamy:

$$\frac{h}{2r} = \operatorname{tg} 75^\circ$$

$$h = 2r \cdot \operatorname{tg} 75^\circ \approx 6 \cdot 3,7321 \approx 22,4$$

Odp.: $h = 22,4$

**Przykład 3** ◀ zad. 6.6

Kąt rozwarcia stożka o promieniu podstawy 4 jest równy 70° . Obliczmy długość tworzącej i wysokość tego stożka (z dokładnością do jednego miejsca po przecinku).

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt równoramienny, w którym kąt przy wierzchołku jest równy 70° . Zatem w prostokątnym trójkącie ASW mamy:

$$\sphericalangle AWS = 35^\circ \text{ i } |AS| = 4$$

Szukane wielkości wyznaczamy, korzystając z funkcji trygonometrycznych.

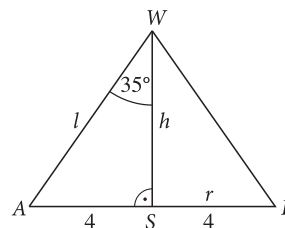
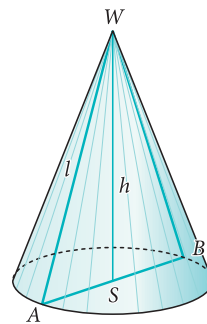
$$\frac{4}{l} = \sin 35^\circ$$

$$l = \frac{4}{\sin 35^\circ} \approx \frac{4}{0,5736} \approx 6,97350 \approx 7,0$$

$$\frac{4}{h} = \operatorname{tg} 35^\circ$$

$$h = \frac{4}{\operatorname{tg} 35^\circ} \approx \frac{4}{0,7002} \approx 5,7$$

Odp.: $l = 7,0$, $h = 5,7$



◀6.5. Tworząca walca tworzy z przekątną jego przekroju osiowego dany kąt α . Długość przekątnej przekroju osiowego wynosi 10. Oblicz promień r i wysokość h walca.

a) $\alpha = 30^\circ$

b) $\alpha = 45^\circ$

c) $\alpha = 27^\circ$ (wyniki podaj z dokładnością do 0,01)

Odp.: a) $r = \frac{5}{2}$, $h = 5\sqrt{3}$

b) $r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $h = 5\sqrt{2}$

c) $r \approx 2,27$, $h \approx 8,91$

◀6.6. Kąt rozwarcia stożka ma miarę α , a wysokość stożka jest równa h . Oblicz promień r i tworzącą l stożka.

a) $\alpha = 60^\circ$, $h = 12\sqrt{3}$

b) $\alpha = 120^\circ$, $h = 7$

c) $\alpha = 90^\circ$, $h = 10$

d) $\alpha = 80^\circ$, $h = 12$ (wyniki podaj z dokładnością do jednego miejsca po przecinku)

e) $\alpha = 30^\circ$, $h = 18$ (wyniki podaj z dokładnością do jednego miejsca po przecinku)

Odp.: a) $r = 12$, $l = 24$

b) $r = 7\sqrt{3}$, $l = 14$

c) $r = 10$, $l = 10\sqrt{2}$

d) $r = 10,1$, $l = 15,7$

e) $r = 4,8$, $l = 18,6$

◀6.7. Oblicz promień podstawy r i wysokość h stożka, którego tworząca o długości 24 cm jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod danym kątem.

a) 60°

b) 45°

Odp.: a) $r = 12$ cm, $h = 12\sqrt{3}$ cm

b) $r = 12\sqrt{2}$ cm, $h = 12\sqrt{2}$ cm

◀6.19. Oblicz promień kuli opisanej na ostrosłupie prawidłowym czworokątnym, w którym krawędź podstawy ma długość 8, a krawędź boczna ma długość 9.

Odp.: $\frac{81}{14}$

Przykład 4 ◀ zad. 6.7

Tworząca stożka ma 24 cm i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30° . Obliczmy promień podstawy r i wysokość h tego stożka.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

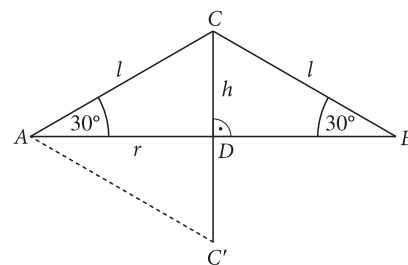
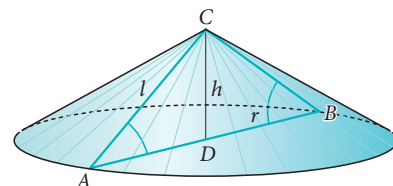
Zatem $l = |AC| = |BC| = 24$ cm. Kąt nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy jest kątem DAC przy podstawie przekroju osiowego stożka.

Trójkąt ADC jest połową trójkąta równobocznego $AC'C$ o boku $l = 24$ cm (rys. obok). Promień podstawy stożka jest w tym trójkącie wysokością, czyli:

$$r = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{24\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3} \text{ [cm]}$$

Wysokość stożka to połowa boku trójkąta $AC'C$. Zatem $h = \frac{l}{2} = 12$ [cm].

Odp.: $r = 12\sqrt{3}$ cm, $h = 12$ cm



Przykład 5 ◀ zad. 6.19

Obliczmy promień R kuli opisanej na ostrosłupie prawidłowym czworokątnym, w którym krawędź podstawy i krawędź boczna mają długość 6.

Rozwiązanie

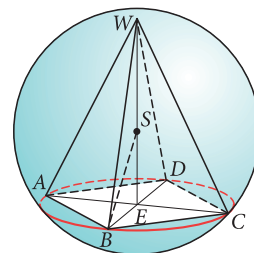
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Środek S kuli należy do prostej EW , gdzie E jest spodkiem wysokości ostrosłupa. Zauważmy, że:

$$\triangle BCD \equiv \triangle BWD \quad \leftarrow \text{cecha bbb}$$

Zatem $\sphericalangle BWD = 90^\circ$ i środek okręgu opisanego na trójkącie BWD , czyli tym samym środkiem kuli, jest środkiem przeciwprostokątnej BD – czyli punktem E (jak widać, rozpatrywany rysunek nie odpowiada założeniom zadania). Promień kuli jest więc równy połowie przekątnej kwadratu $ABCD$.

Odp.: $R = 3\sqrt{2}$



Zadania

W każdym z zadań 6.1–6.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

6.1. Tworząca stożka o promieniu podstawy 1 ma długość 2. Wskaż miarę kąta rozwarcia stożka.

- A. 90° B. 60° C. 45° D. 30°

6.2. Jaką bryłę otrzymamy w wyniku obrotu trapezu prostokątnego (niebędącego prostokątem) wokół krótszego ramienia?

- A. sumę dwóch stożków C. kulę z wydrążonym stożkiem
B. sumę walca i stożka D. stożek ścięty

6.3. Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu jest półkolem. Wskaż miarę kąta rozwarcia stożka.

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

6.4. Przekrojem osiowym walca jest prostokąt o wymiarach 10×6 . Oblicz kąt α nachylenia przekątnej tego przekroju do płaszczyzny podstawy walca (z dokładnością do 1°).

6.5. Tworząca walca tworzy z przekątną jego przekroju osiowego dany kąt α . Długość przekątnej przekroju osiowego wynosi 10. Oblicz promień r i wysokość h walca.

- a) $\alpha = 30^\circ$ b) $\alpha = 45^\circ$ c) $\alpha = 27^\circ$ (wyniki podaj z dokładnością do 0,01)

6.6. Kąt rozwarcia stożka ma miarę α , a wysokość stożka jest równa h . Oblicz promień r i tworzącą l stożka.

- a) $\alpha = 60^\circ$, $h = 12\sqrt{3}$
b) $\alpha = 120^\circ$, $h = 7$
c) $\alpha = 90^\circ$, $h = 10$
d) $\alpha = 80^\circ$, $h = 12$ (wyniki podaj z dokładnością do jednego miejsca po przecinku)
e) $\alpha = 30^\circ$, $h = 18$ (wyniki podaj z dokładnością do jednego miejsca po przecinku)

6.7. Oblicz promień podstawy r i wysokość h stożka, którego tworząca o długości 24 cm jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod danym kątem.

- a) 60° b) 45°

6.8. Podstawa stożka jest kołem o obwodzie 16π . Wysokość tego stożka jest równa 20. Oblicz kąt rozwarcia stożka oraz kąt nachylenia tworzącej do płaszczyzny podstawy (z dokładnością do 1°).

Odpowiedzi i rozwiązania

6.1. B

6.2. D

6.3. C

6.4. 31° lub 59°

6.5. a) $r = \frac{5}{2}$, $h = 5\sqrt{3}$

b) $r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $h = 5\sqrt{2}$

c) $r \approx 2,27$, $h \approx 8,91$

6.6. a) $r = 12$, $l = 24$

b) $r = 7\sqrt{3}$, $l = 14$

c) $r = 10$, $l = 10\sqrt{2}$

d) $r = 10,1$, $l = 15,7$

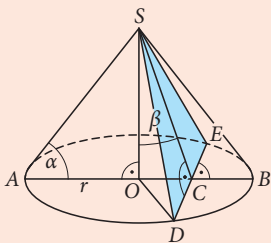
e) $r = 4,8$, $l = 18,6$

6.7. a) $r = 12$ cm, $h = 12\sqrt{3}$ cm

b) $r = 12\sqrt{2}$ cm, $h = 12\sqrt{2}$ cm

6.8. kąt rozwarcia: 44° ,
kąt nachylenia tworzącej: 68°

6.17.



$$\alpha \in (0^\circ; 90^\circ), \beta \in (0^\circ; 90^\circ - \alpha)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|OS|}{|OA|}, \text{ więc } |OS| = r \operatorname{tg} \alpha$$

$$\cos \beta = \frac{|OS|}{|CS|}, \text{ więc } |CS| = \frac{r \operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta} \text{ (także dla } \beta = 0^\circ)$$

$$\frac{|OC|}{|OS|} = \operatorname{tg} \beta, \text{ więc } |OC| = r \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$$

$$|CD| = \sqrt{r^2 - (r \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)^2} = r \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta} \text{ (także dla } \beta = 0^\circ)$$

$$P_{DES} = \frac{1}{2} |DE| \cdot |CS| = |CD| \cdot |CS| = \frac{r^2 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta}}{\cos \beta}$$

6.9. Otrzymano sumę dwóch stożków o wspólnej podstawie; przekrój jest rombem o kątach 60° i 120° .

6.10. a) 4 cm b) 4,8 cm

6.11. $49\sqrt{3}\pi \text{ dm}^2$, $7\sqrt[4]{27} \text{ dm}$

6.12. $9\sqrt{3} \text{ cm}$, 60°

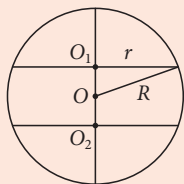
6.13. Wskazówka: Jest to suma stożka i walca z wydrążonym stożkiem; stożki te są przystające.

6.14. Wskazówka: a) Jest to suma walca i stożka.

b) Jest to suma stożka o tworzącej równej dłuższej podstawie trapezu i stożka ściętego o tworzącej równej krótszemu ramieniu, z wydrążonym stożkiem o tworzącej równej krótszej podstawie trapezu.

6.15. a) 10 b) 6

6.16.



$$R = 3 \text{ cm}$$

$$|O_1O| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2R = 1 \text{ [cm]}$$

$$r^2 = 3^2 - 1^2 = 8$$

Pole każdego z przekrojów jest równe $\pi r^2 = 8\pi \text{ [cm}^2\text{]}$.

6.17. Patrz s. 73.

6.18. Droga przez szczyt zajmie ok. 1 h 25 min, a obejście góry ok. 1 h 35 min.

6.9. Trójkąt równoboczny obrócono wokół jednego z jego boków. Jaką bryłę otrzymano? Jaka figura jest przekrojem osiowym tej bryły?

6.10. Trójkąt równoramienny o podstawie długości 6 cm i ramionach długości 5 cm obrócono dookoła

a) podstawy.

b) ramienia.

Oblicz promień wspólnej podstawy otrzymanych w ten sposób stożków.

6.11. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o polu 147 dm^2 . Oblicz pole podstawy i wysokość stożka.

6.12. Półkole o promieniu 18 cm zwinięto w stożek. Oblicz wysokość i kąt rozwarcia stożka.

6.13. Narysuj bryłę powstałą w wyniku obrotu rombu (niebędącego kwadratem) dookoła prostej zawierającej bok tego rombu.

6.14. Narysuj i opisz bryłę, którą otrzymamy w wyniku obrotu trapezu prostokątnego (niebędącego prostokątem) dookoła prostej zawierającej

a) dłuższą podstawę.

b) dłuższe ramię.

6.15. W wyniku obrotu półkola dookoła prostej zawierającej jego średnicę otrzymano kulę. Oblicz promień tej kuli, wiedząc, że obwód półkola wynosi

a) $10(\pi + 2)$.

b) $12 + 6\pi$.

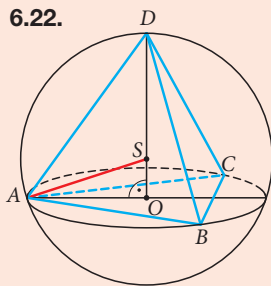
6.16. Kulę o promieniu 3 cm przecięto dwiema równoległymi płaszczyznami w taki sposób, że podzieliły one średnicę kuli prostopadłą do tych płaszczyzn na trzy równe odcinki. Oblicz pole każdego z otrzymanych przekrojów.

* **6.17.** Promień podstawy stożka jest równy r , a tworząca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α . Przez wierzchołek stożka poprowadzono płaszczyznę, która tworzy z osią symetrii stożka kąt β . Oblicz pole P otrzymanego przekroju.

6.18. Pan Jacenty stoi u podnóża góry w kształcie niemal idealnego stożka i pragnie jak najszybciej znaleźć się dokładnie po jej przeciwnej stronie. Góra wznosi się na wysokość 300 m, a promień jej podstawy ma 2 km. Pan Jacenty po płaskim terenie porusza się z prędkością 4 km/h, wchodzi pod górę z prędkością 2 km/h, a schodzi z prędkością 5 km/h. Sprawdź, czy powinien wejść na szczyt prostą drogą i zejść, czy obejść górę dookoła.



6.22.



a – długość krawędzi czworościanu, $a = R + C$

R – promień kuli opisanej, $|AO| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $R = |SA| = |SD|$

$$|OD| = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AOS:

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{3} - R\right)^2 = R^2$$

$$R = \frac{\sqrt{6}}{4}a, \quad a = \frac{4}{\sqrt{6}}R = \frac{2\sqrt{6}}{3}R, \quad \frac{2\sqrt{6}}{3}R = R + C$$

$$R = \frac{C}{\frac{2\sqrt{6}}{3} - 1} = \frac{2\sqrt{6} + 3}{5}C$$

- 6.19.** Oblicz promień kuli opisanej na ostrosłupie prawidłowym czworokątnym, w którym krawędź podstawy ma długość 8, a krawędź boczna ma długość 9.
- * **6.20.** Oblicz promień kuli opisanej na ostrosłupie prawidłowym trójkątnym, w którym krawędź podstawy ma długość 12, a krawędź boczna ma długość $6\sqrt{2}$.
- 6.21.** Oblicz promień kuli wpisanej w ostrosłup prawidłowy czworokątny, w którym wszystkie krawędzie mają długość równą 8 cm.
- * **6.22.** Krawędź boczna czworościanu foremnego jest dłuższa o c od promienia kuli opisanej na tym czworościanie. Wyznacz promień tej kuli.
- 6.23.** Wyznacz promień kuli opisanej na graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym, którego wszystkie krawędzie są równe a .

Prosto do matury



2. Oblicz wysokość stożka, którego tworząca ma długość 17 cm, a podstawą jest koło o polu $200,96 \text{ cm}^2$. W obliczeniach przyjmij $\pi \approx 3,14$.



3. Wysokość stożka wynosi 12 cm, a jego kąt rozwarcia jest równy 78° . Oblicz promień podstawy i tworzącą stożka (z dokładnością do 1 mm).

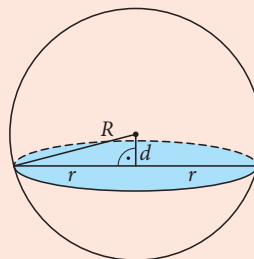
4. Kulę o promieniu 12 cm przecięto płaszczyzną odległą od środka kuli o 3 cm. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

5. Siatkę stożka stanowi ćwiartka koła o promieniu R i koło o promieniu r . Wyznacz $\frac{R}{r}$.

Prosto do matury

1. P, P, F
2. 15 cm
3. promień: 9,7 cm, tworząca: 15,4 cm
5. 4

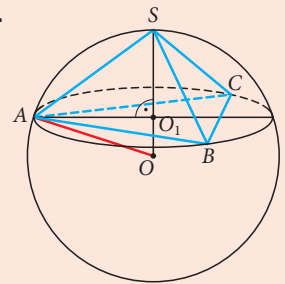
4.



$$\begin{aligned}
 R &= 12 \text{ cm}, \quad d = 3 \text{ cm} \\
 r &\text{ – promień przekroju} \\
 r^2 &= 12^2 - 3^2 = 135 \\
 P &= \pi r^2 = 135\pi \text{ [cm}^2\text{]}
 \end{aligned}$$

$$6.19. \frac{81}{14}$$

6.20.



$$|AB| = 12, \quad |AS| = 6\sqrt{2}$$

$$|AO_1| = |AB| \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$$

– promień koła opisanego na podstawie ABC

$$|O_1S| = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 - (4\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{6}$$

$|O_1S| < |AO_1|$, więc O_1 należy do odcinka OS.

R – promień kuli opisanej na ostrosłupie

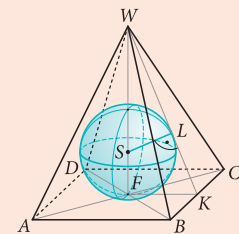
$$R = |OA| = |OS|$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AO_1O :

$$(4\sqrt{3})^2 + (R - 2\sqrt{6})^2 = R^2$$

$$R = 3\sqrt{6}$$

$$6.21. (2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}) \text{ cm.}$$



Wskazówka: Przyjmij oznaczenia jak na rysunku. Zauważ, że płaszczyzna przechodząca przez wysokość WF i środki krawędzi AD oraz BC jest prostopadła do ścian ADW i BCW , a punktem styczności kuli ze ścianą BCW jest punkt należący do wysokości tej ściany – oznaczony na rysunku literą L . Wykorzystaj podobieństwo trójkątów FKW oraz LSW .

6.22. Patrz s. 74.

$$6.23. \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

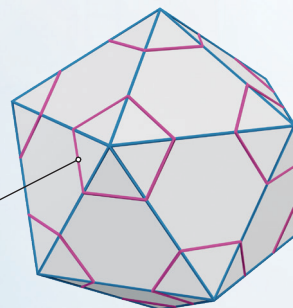
Jak zrobić kulę

Siatka kuli nie istnieje, co sprawia, że przy produkcji kulistych przedmiotów, takich jak piłki, pojawia się problem – w jaki sposób pociąć materiał, by stworzyć warstwę okrywającą kulę? Bardzo pomocne okazują się wielościany.

Od dwudziestościanu do piłki nożnej

Dwudziestościan foremny to bryła, której powierzchnię tworzy 20 przystających trójkątów równobocznych. Ma 12 wierzchołków i 30 krawędzi. Obcinamy wszystkie naroża tej bryły.

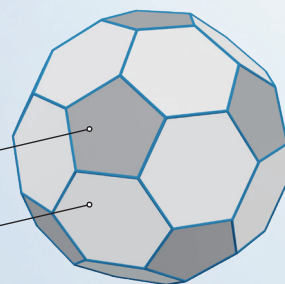
Linie cięcia prowadzimy tak, by przecinały krawędzie w $\frac{1}{3}$ ich długości od najbliższego wierzchołka.



W ten sposób otrzymujemy **dwudziestościan ścięty**: bryłę, której ściany to 20 sześciokątów foremnych i 12 pięciokątów foremnych.

Pięciokąty powstają po obcięciu naroży.

Sześciokąty to pozostałe części ścian dwudziestościanu foremnego.



Siatkę dwudziestościanu ściętego wykorzystuje się jako szablon do uszycia tradycyjnej **piłki do gry w piłkę nożną**. Zewnętrzna warstwa takiej piłki składa się z białych i czarnych paneli (latek): pierwsze to sześciokąty, drugie – pięciokąty. Po nadmuchaniu piłki panele się wybrzuszą, dzięki czemu piłka jest kulista, co ją odróżnia od modelu dwudziestościanu ściętego.

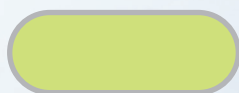


siatka
dwudziestościanu
ściętego



Inne szablony

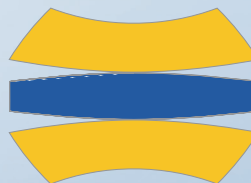
Wierzchnie warstwy piłek wycina się z różnych szablonów. Niektóre ich kształty pokazano na ilustracji.



Piłka tenisowa jest pokryta dwoma kawałkami filcu.



Piłkę baseballową obszywa się dwoma kawałkami skóry.



Szablon piłki do siatkówki to sześć paneli złożonych z trzech kawałków skóry.

Kopuła geodezyjna

Kopuła geodezyjna to wielościan przypominający kształtem kulę. Ścianami takiego wielościanu są trójkąty równoramienne, układające się w pięciokąty i sześciokąty. Im większa ich liczba, tym bardziej taki wielościan przypomina powierzchnię kuli. Kopuły geodezyjne wykorzystuje się w architekturze – konstrukcje tego typu są niezwykle wytrzymałe i stabilne, a dodatkowo nie wymagają wewnętrznych podpór.

Stacja badawcza wybudowana w 1974 r. na biegunie południowym.



7. Pola powierzchni i objętości brył

Umiejętności:

- stosowanie własności podobieństwa do obliczania długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości
- stosowanie trygonometrii do obliczania długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości

Podobieństwo w przestrzeni

Podobieństwo w przestrzeni definiuje się jak podobieństwo na płaszczyźnie.

Definicja

- **Podobieństwo** w skali k ($k > 0$) jest przekształceniem przestrzeni o tej własności, że dla dowolnych punktów A, B i ich obrazów A', B' zachodzi równość $|A'B'| = k \cdot |AB|$.
- Figura (bryła) F jest podobna do figury (bryły) F' , co zapisujemy symbolicznie $F \sim F'$, gdy istnieje takie podobieństwo P przestrzeni, w którym $P(F) = F'$.

Mówiąc poglądowo, podobieństwo proporcjonalnie zwiększa lub zmniejsza figury w przestrzeni.

Bryły podobne w skali $k = 1$ są przystające.

Oto najważniejsze własności podobieństwa w przestrzeni. Podajemy je bez dowodów.

- Podobieństwo zachowuje współliniowość punktów, czyli przekształca prostą na prostą.
- Podobieństwo nie zmienia kątów, zatem odpowiednie kąty (płaskie oraz dwuścienne) w bryłach podobnych są równe.
- W podobieństwie obrazem prostych równoległych są proste równoległe, tzn. jeżeli proste a i b są równoległe, a ich obrazami są proste a_1 i b_1 , to $a_1 \parallel b_1$ (ale niekoniecznie $a_1 \parallel a$).
- Jeżeli figura (bryła) F jest podobna do figury (bryły) F' w skali k , to figura (bryła) F' jest podobna do figury (bryły) F w skali $\frac{1}{k}$.

MKP

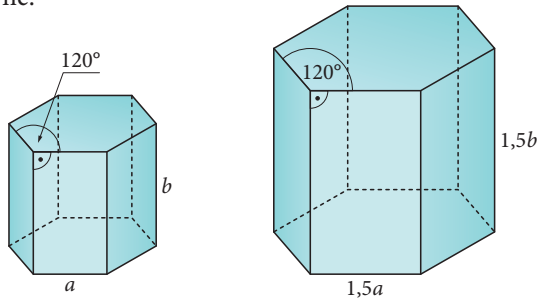
tematy 2.4, 2.6, 3.1–3.4

Multiteka

- Objętość ostrosłupa
- Pole powierzchni całkowitej walca
- Objętość walca – praktyczne zastosowania
- Pole powierzchni bocznej stożka
- Objętość stożka
- Pole powierzchni kuli
- Wyprowadzenie wzoru na objętość kuli

dlaNauczyciela.pl | Kartkówka 1.7

- Jeżeli $F \sim F'$ i $F' \sim F''$, to $F \sim F''$.
- Dwa wielościany są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy w obu wielościanach odpowiednie krawędzie są proporcjonalne oraz odpowiednie kąty płaskie i kąty dwuścienne są równe.



Przykład 1

Podamy przykłady figur podobnych oraz skale ich podobieństwa.

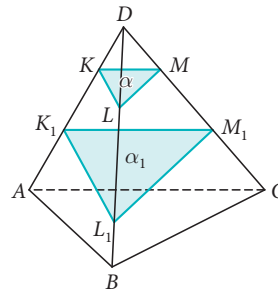
Figury	Skala podobieństwa
dwa odcinki w przestrzeni	stosunek długości tych odcinków
dwa sześciany	stosunek długości krawędzi tych sześcianów
dwa wielościany foremne o tej samej liczbie ścian	stosunek długości krawędzi tych wielościanów
dwie kule	stosunek promieni tych kul
dwa stożki o takim samym kącie rozwarcia	stosunek promieni podstaw tych stożków

- Zauważmy, że skalą podobieństwa stożków o takim samym kącie rozwarcia jest również stosunek ich wysokości lub stosunek długości ich tworzących.
- Jeżeli przekształcimy przez podobieństwo o skali 2 prostopadłościan o wymiarach $3 \times 4 \times 10$, to otrzymamy prostopadłościan o wymiarach $6 \times 8 \times 20$.

Przykład 2

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Płaszczyzny α i α_1 przecinają ostrosłup $ABCD$ i są równoległe. Zatem przekroje, czyli trójkąty KLM oraz $K_1L_1M_1$, są podobne.



Pola powierzchni i objętości brył

W szkole podstawowej wprowadzone zostały wzory na obliczanie pól powierzchni i objętości podstawowych wielościanów. Zbierzemy je w tabeli i uzupełnimy o analogiczne wzory dotyczące brył obrotowych. Wyprowadzenie większości tych wzorów wymaga bardziej zaawansowanej wiedzy matematycznej, dlatego podajemy je bez dowodów.

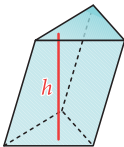
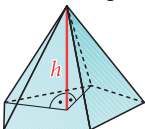
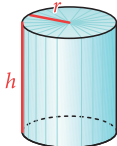
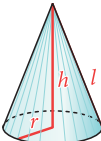
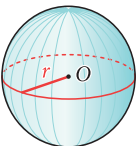
Przypomnijmy najczęściej spotykane oznaczenia:

P_p – pole podstawy,	r – promień podstawy (promień kuli),
P_b – pole powierzchni bocznej,	h – wysokość graniastosłupa, ostrosłupa,
P_c – pole powierzchni całkowitej,	walca, stożka,
V – objętość,	l – tworząca walca, stożka.

W poprzednich tematach rysowaliśmy siatki różnych figur przestrzennych. Warto na nie spojrzeć, aby przyswoić sobie następujące uwagi.

- W każdym **graniastosłupie** ściany boczne są równoległobokami. Suma pól tych ścian jest polem P_b powierzchni bocznej. Pole wielokąta leżącego w podstawie graniastosłupa jest polem podstawy P_p . Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa jest równe $P_c = P_b + 2P_p$.
- W każdym **ostrosłupie** ściany boczne są trójkątami. Pole P_b powierzchni bocznej jest sumą pól tych trójkątów. Podstawę ostrosłupa może tworzyć dowolny wielokąt. Jego pole jest polem podstawy P_p . Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest równe $P_c = P_b + P_p$.
- Jeżeli rozetniemy powierzchnię boczną **walca** wzdłuż jego tworzącej i rozplaszczymy ją, to otrzymamy prostokąt. Jeden z boków tego prostokąta ma długość równą wysokości walca, a drugi ma długość równą obwodowi podstawy walca. Pole powierzchni bocznej walca jest równe $P_b = 2\pi r \cdot h$, pole podstawy walca jest równe $P_p = \pi r^2$. Pole powierzchni całkowitej walca jest równe $P_c = 2\pi r h + 2\pi r^2$ albo krócej: $P_c = 2\pi r(h + r)$.
- Powierzchnią boczną **stożka** jest wycinek koła o promieniu l . Długość łuku tego wycinka jest równa obwodowi podstawy stożka, czyli $2\pi r$. Pole powierzchni bocznej stożka jest równe $P_b = \pi r l$, pole podstawy stożka jest równe $P_p = \pi r^2$. Pole powierzchni całkowitej stożka jest równe $P_c = \pi r l + \pi r^2$ lub inaczej $P_c = \pi r(l + r)$.

Pole powierzchni **kuli**, czyli pole sfery, jest równe $P = 4\pi r^2$, a objętość kuli jest równa $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Bryła	Pole powierzchni całkowitej	Objętość
graniastosłup 	$P_c = P_b + 2P_p$	$V = P_p \cdot h$
ostrosłup 	$P_c = P_b + P_p$	$V = \frac{1}{3}P_p \cdot h$
walec 	$P_b = 2\pi r h$ $P_p = \pi r^2$ $P_c = 2\pi r(r + h)$	$V = \pi r^2 \cdot h$
stożek 	$P_b = \pi r l$ $P_p = \pi r^2$ $P_c = \pi r(r + l)$	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$
kula 	$P_c = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Jeżeli bryła F' jest podobna w skali k do bryły F o polu powierzchni P_F i objętości równej V_F , to:

- pole powierzchni bryły F' jest równe $P_{F'} = k^2 \cdot P_F$; mówimy – stosunek pól powierzchni brył podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa tych brył,
- objętość bryły F' jest równa $V_{F'} = k^3 \cdot V_F$; mówimy – stosunek objętości brył podobnych jest równy sześcianowi skali podobieństwa tych brył.

Na przykład jeśli zbudujemy model pomnika warszawskiej Syrenki w skali 1 : 10, to pochłonie on 1000 razy mniej materiału niż oryginał.

◀ 7.6. Krawędź boczna graniastopuła prawidłowego trójkątnego jest równa krawędzi podstawy. Objętość tego graniastopuła wynosi $16\sqrt{3} \text{ cm}^3$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastopuła.

Odp.: $8(6 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$

◀ 7.8. Oblicz objętość i pole powierzchni graniastopuła prawidłowego sześciokątnego, w którym wysokość jest równa 5, a okrąg wpisany w podstawę ma promień 3.

Odp.: $V = 90\sqrt{3}$, $P_c = 96\sqrt{3}$

Przykład 3 ◀ zad. 7.6

Obliczymy pole powierzchni całkowitej i objętość graniastopuła prawidłowego trójkątnego o wysokości $h = 5$ i krawędzi podstawy $a = 3$.

Rozwiązanie

Podstawą graniastopuła jest trójkąt równoboczny o boku $a = 3$.

Pole podstawy jest równe:

$$P_p = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

Powierzchnia boczna składa się z trzech identycznych prostokątów o wymiarach 3×5 , zatem:

$$P_b = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 45$$

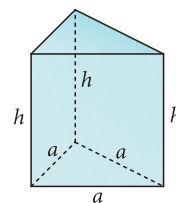
Pole powierzchni całkowitej jest równe:

$$P_c = 2P_p + P_b = 2 \cdot \frac{9\sqrt{3}}{4} + 45 = \frac{9\sqrt{3}}{2} + 45$$

Wysokość graniastopuła $h = 5$, więc jego objętość jest równa:

$$V = P_p \cdot h = \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot 5 = \frac{45\sqrt{3}}{4}$$

Odp.: $P_c = 45 + \frac{9\sqrt{3}}{2}$, $V = \frac{45\sqrt{3}}{4}$



Przykład 4 ◀ zad. 7.8

Obliczymy objętość i pole powierzchni graniastopuła prawidłowego sześciokątnego, w którym wysokość $h = 7$, a okrąg opisany na podstawie ma promień $r = 4$.

Rozwiązanie

Podstawą graniastopuła jest sześciokąt foremny.

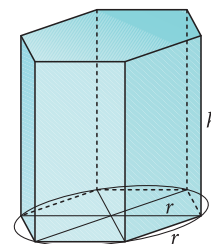
Bok sześciokąta foremnego wpisanego w okrąg jest równy promieniowi okręgu. Taki sześciokąt jest sumą sześciu trójkątów równobocznych.

$$P_p = 6 \cdot \frac{r^2 \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} = 24\sqrt{3}$$

$$V = P_p \cdot h = 24\sqrt{3} \cdot 7 = 168\sqrt{3}$$

$$P_c = 6 \cdot rh + 2P_p = 6 \cdot 4 \cdot 7 + 2 \cdot 24\sqrt{3} = 24(7 + 2\sqrt{3})$$

Odp.: $V = 168\sqrt{3}$, $P_c = 24(7 + 2\sqrt{3})$



**Przykład 5** ◀ zad. 7.10

Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat. Przekątna tego prostopadłościanu ma długość $8\sqrt{2}$ i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Obliczmy pole powierzchni całkowitej i objętość prostopadłościanu.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

$ABCD$ jest kwadratem.

$$|AM| = 8\sqrt{2}, \quad \angle MAC = 60^\circ$$

Dla prostopadłościanu o podstawie kwadratowej:

$$P_c = 2a^2 + 4ah$$

$$V = a^2h$$

Do obliczenia objętości i pola powierzchni całkowitej potrzebne są więc:

a – długość krawędzi podstawy (bok kwadratu $ABCD$),

h – wysokość prostopadłościanu.

Zauważmy, że:

- AC jest przekątną kwadratu $ABCD$, czyli $|AC| = a\sqrt{2}$,
- trójkąt ACM jest połową trójkąta równobocznego o boku $|AM| = 8\sqrt{2}$.

W trójkącie ACM :

$$|AC| = \frac{1}{2}|AM| = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$h = \frac{|AM|\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{6}$$

Do obliczenia długości a wykorzystamy związek $|AC| = a\sqrt{2}$:

$$4\sqrt{2} = a\sqrt{2}$$

$$a = 4$$

Podstawiamy wyznaczone wielkości do wzorów.

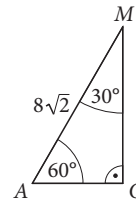
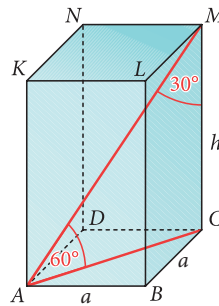
$$P_p = a^2 = 16$$

$$P_b = 4ah = 4 \cdot 4 \cdot 4\sqrt{6} = 64\sqrt{6}$$

$$P_c = P_b + 2P_p = 64\sqrt{6} + 32 = 32(1 + 2\sqrt{6})$$

$$V = P_p \cdot h = 16 \cdot 4\sqrt{6} = 64\sqrt{6}$$

Odp.: $P_c = 32(1 + 2\sqrt{6})$, $V = 64\sqrt{6}$



◀7.10. Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat. Przekątna tego prostopadłościanu ma długość 12 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30° . Oblicz objętość tego prostopadłościanu.

Odp.: 324

Przykład 6

Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o kącie ostrym 60° . Dłuższa przekątna graniastosłupa, o długości 4, tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 30° . Obliczmy objętość i pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

$ABCD$ jest rombem o kącie ostrym 60° .

$$|AC'| = 4, \quad \angle C'AC = 30^\circ$$

Do obliczenia objętości i pola powierzchni całkowitej potrzebne są: długość boku rombu, np. $|AB|$, oraz wysokość prostopadłościanu, np. $|CC'|$.

Zauważmy, że:

- trójkąt ACC' jest połową trójkąta równobocznego (kąty 90° , 30° i 60°) o boku $|AC'| = 4$, czyli:

$$|CC'| = \frac{1}{2} |AC'| = 2 \quad \leftarrow \text{połowa boku}$$

$$|AC| = \frac{|AC'| \sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \quad \leftarrow \text{wysokość trójkąta równobocznego}$$

- trójkąty ADB i DBC są równoboczne, czyli:

$$|AS| = \frac{1}{2} |AC| = \sqrt{3} \quad \text{i} \quad |AS| = \frac{|AB| \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Zatem } |AB| = \frac{2|AS|}{\sqrt{3}} = 2.$$

Pole podstawy graniastosłupa jest równe:

$$P_p = 2 \cdot \frac{|AB|^2 \sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}$$

W graniastosłupie mamy wysokość CC' równą 2. Zatem objętość jest równa:

$$V = P_p \cdot |CC'| = 2\sqrt{3} \cdot 2 = 4\sqrt{3}$$

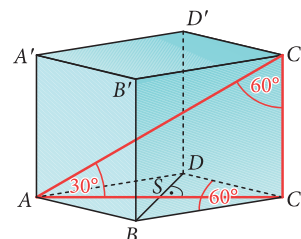
Ścianami bocznymi graniastosłupa są kwadraty o wymiarach 2×2 , czyli:

$$P_b = 4 \cdot 2^2 = 16$$

a pole powierzchni całkowitej jest równe:

$$P_c = 16 + 2 \cdot 2\sqrt{3} = 16 + 4\sqrt{3} = 4(4 + \sqrt{3})$$

$$\text{Odp.: } V = 4\sqrt{3}, \quad P_c = 4(4 + \sqrt{3})$$



Przykład 7 ◀ zad. 7.15

Obliczmy objętość i pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy $a = 6$ i wysokości $h = 4$.

Rozwiązanie

Podstawą tego ostrosłupa jest kwadrat o boku $a = 6$.

$$P_p = a^2 = 36$$

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4 = 48$$

Powierzchnię boczną tworzą cztery identyczne trójkąty równoramienne o podstawie $a = 6$ i nieznannej wysokości. Aby wyznaczyć tę wysokość, oznaczoną na rysunku literą H , skorzystamy z własności trójkąta prostokątnego ABC , którego wierzchołek B jest środkiem krawędzi podstawy.

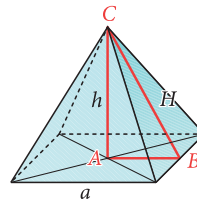
$$|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2 \quad \leftarrow \text{na mocy twierdzenia Pitagorasa}$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = H^2, \quad 3^2 + 4^2 = H^2, \quad \text{czyli } H = 5.$$

Pole jednej ściany bocznej jest równe $\frac{1}{2} a \cdot H = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 15$.

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa: $P_c = 4 \cdot 15 + 36 = 96$

Odp.: $V = 48$, $P_c = 96$



◀7.15. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy 12 i wysokości 2.

Odp.: $V = 24\sqrt{3}$, $P_c = 36(2 + \sqrt{3})$

**Przykład 8** ◀ zad. 7.16

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna podstawy ma długość d , a krawędź boczna ostrosłupa jest 5 razy dłuższa od krawędzi podstawy. Obliczmy pole powierzchni bocznej i objętość tego ostrosłupa.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Podstawą ostrosłupa jest kwadrat $ABCD$ o boku a , ścianami bocznymi są cztery przystające trójkąty równoramienne. Punkt E jest środkiem krawędzi podstawy.

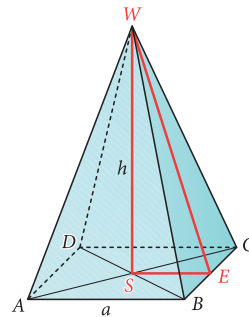
$$P_b = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot |WE| = 2a \cdot |WE|$$

$$V = \frac{1}{3} a^2 \cdot h$$

Do obliczenia pola powierzchni bocznej i objętości potrzebne są więc trzy wielkości: a , h i $|WE|$. Wyznamy je w kolejnych krokach.

Krok 1: Wyznamy a .

Odcinek AC o długości d jest przekątną kwadratu, więc $d = a\sqrt{2}$, czyli $a = \frac{d}{\sqrt{2}}$.



◀7.16. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość a , a krawędź boczna ostrosłupa jest 2 razy dłuższa od krawędzi podstawy. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

$$\text{Odp.: } V = \frac{\sqrt{11}}{12} a^3,$$

$$P_c = \frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{15}}{4} a^2$$

Krok 2: Wyznaczamy h .

Krawędź boczna ostrosłupa jest 5 razy dłuższa od a . Zatem $|BW| = \frac{5d}{\sqrt{2}}$.

W trójkącie prostokątnym WSB :

$$h^2 = |BW|^2 - |SB|^2 = \frac{25d^2}{2} - \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$h^2 = \frac{49}{4}d^2$$

$$h = \frac{7}{2}d$$

Krok 3: Wyznaczamy wysokość $|WE|$ ściany bocznej.

W trójkącie prostokątnym WSE :

$$|WE|^2 = h^2 + |SE|^2$$

$$|WE|^2 = \frac{49}{4}d^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}d^2 + \frac{d^2}{8} = \frac{99}{8}d^2$$

$$|WE| = \sqrt{\frac{99}{8}}d = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{11}{2}}d$$

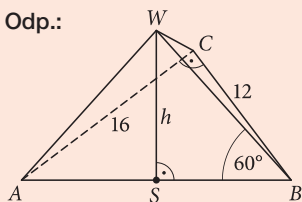
Teraz możemy obliczyć objętość ostrosłupa: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{d^2}{2} \cdot \frac{7}{2}d = \frac{7}{12}d^3$

oraz jego pole powierzchni bocznej: $P_b = 2 \cdot \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}}d = \frac{3\sqrt{11}}{2}d^2$.

Odp.: $P_b = \frac{3\sqrt{11}}{2}d^2$, $V = \frac{7}{12}d^3$

◀ 7.21. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 16 i 12. Każda krawędź boczna ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Oblicz objętość ostrosłupa.

Odp.:



Spodek wysokości to punkt równoodległy od wierzchołków trójkąta w podstawie. Zatem jest to środek okręgu opisanego na tym trójkącie. Skoro trójkąt jest prostokątny, to spodek leży na środku przeciwprostokątnej.

$$|AB|^2 = 12^2 + 16^2, \quad |AB| = 20$$

$$h = \frac{20\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 \cdot 10\sqrt{3} = 320\sqrt{3}$$

Przykład 9 ◀ zad. 7.21

Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt równoramienny o ramionach długości $|AB| = |AC| = b$ i kącie ostrym między nimi o mierze 2α . Spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na podstawie. Ściana boczna o krawędzi BC jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem β .

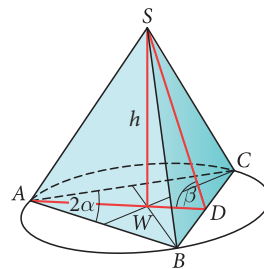
Wyznaczmy objętość ostrosłupa.

Rozwiązanie

Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoramienny, w którym kąt pomiędzy ramionami jest ostry, więc środek okręgu opisanego na tym trójkącie leży wewnątrz trójkąta.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Zauważmy, że:



1.	$ AS = BS = CS $	← spodek W wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na podstawie
2.	wysokość trójkąta BCS poprowadzona z wierzchołka S dzieli bok BC na połowy	← $ BS = CS $
3.	wysokość trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka A dzieli bok BC na połowy	← $ AB = AC $ (z założenia)
4.	punkt D jest spodem dwóch wysokości: AD w trójkącie ABC i SD w trójkącie BSC	← z punktów 2 i 3 powyżej

Zatem proste DS i AD są prostopadłe do krawędzi BC i wyznaczają kąt β nachylenia ściany bocznej BCS do płaszczyzny podstawy.

Objętość ostrosłupa jest równa $V = \frac{1}{3}P_p \cdot h$.

Pole podstawy możemy wyznaczyć z danych

w zadaniu: $P_p = \frac{1}{2}b^2 \sin 2\alpha$.

Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu jego boków pomnożonego przez sinus kąta zawartego między tymi bokami.



Aby wyznaczyć objętość, musimy więc znaleźć jeszcze wysokość h ostrosłupa, czyli długość odcinka WS . Wykonamy to w kolejnych krokach.

Krok 1: Wyznaczamy $|WD|$.

Popatrzymy na podstawę ostrosłupa i opisany na niej okrąg.

Zauważmy, że w prostokątnym trójkącie ABD :

$$\frac{|BD|}{b} = \sin \alpha, \text{ stąd } |BD| = b \sin \alpha.$$

Ponadto kąt BWC jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku co kąt wpisany BAC . Zatem $\sphericalangle BWC = 4\alpha$,

a $\sphericalangle BWD = \frac{1}{2} \cdot 4\alpha = 2\alpha$. W prostokątnym trójkącie BDW :

$$\frac{|BD|}{|WD|} = \operatorname{tg} 2\alpha, \text{ stąd } |WD| = \frac{|BD|}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha}.$$

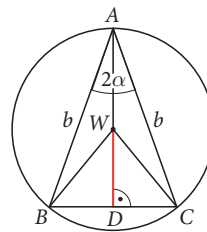
Krok 2: Wyznaczamy h . W prostokątnym trójkącie SWD :

$$\frac{h}{|WD|} = \operatorname{tg} \beta, \text{ stąd } h = |WD| \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} 2\alpha}.$$

Teraz możemy obliczyć objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot b^2 \sin 2\alpha \cdot \frac{b \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}}$$

$$\text{Odp.: } V = \frac{1}{6} \cdot b^3 \cdot \sin \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \beta$$



◀ 7.26. Wysokość walca jest równa 7. Przekątna przekroju osiowego walca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 68° . Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość walca. Wyniki zaokrąglaj do pierwszego miejsca po przecinku.

Odp.: $P_c = 74,8$, $V = 44,0$

◀ 7.31. Objętość stożka jest równa $240\pi \text{ cm}^3$, a pole jego przekroju osiowego wynosi 180 cm^2 . Oblicz pole powierzchni całkowitej stożka (z dokładnością do 1 cm^2).

Odp.: 618 cm^2

◀ 7.36. Trapez prostokątny o wysokości 2 cm, dłuższej podstawie równej 5 cm i kącie ostrym o mierze 45° obraca się dookoła prostej zawierającej krótszą podstawę. Oblicz objętość otrzymanej w ten sposób bryły.

Odp.: $17\frac{1}{3}\pi \text{ cm}^3$

Przykład 10 ◀ zad. 7.26

Obwód podstawy walca jest równy 12π . Przekątna przekroju osiowego walca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 40° . Obliczmy pole powierzchni całkowitej i objętość walca. Wyniki zaokrąglimy do pierwszego miejsca po przecinku.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Obwód podstawy walca jest równy $2\pi r = 12\pi$. Zatem $r = 6$, a średnica AB ma długość 12.

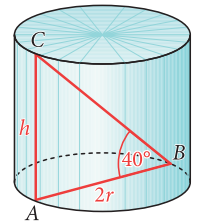
W prostokątnym trójkącie ABC mamy więc $\frac{|AC|}{|AB|} = \operatorname{tg} 40^\circ$, czyli:

$$h = |AC| = |AB| \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \approx 12 \cdot 0,8391 = 10,0692$$

$$P_c = 2\pi r(r + h) \approx 12\pi(6 + 10,0692) \approx 605,8$$

$$V = \pi r^2 h \approx \pi \cdot 36 \cdot 10,0692 \approx 1138,8$$

Odp.: $P_c \approx 605,8$, $V \approx 1138,8$



Przykład 11 ◀ zad. 7.31

Półkole o promieniu 12 cm zwinięto w stożek. Obliczmy objętość i kąt rozwarcia tego stożka.

Rozwiązanie

Promień półkola jest tworzącą stożka, a obwód podstawy jest długością łuku półkola.

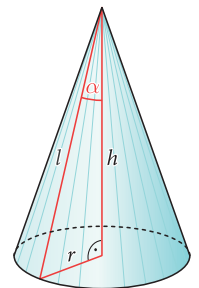
Jeżeli oznaczymy literą r promień podstawy stożka (w cm), a literą l – jego tworzącą (w cm), to $l = 12$ oraz $2\pi r = \pi \cdot 12$. Zatem:

$$r = 6, \quad h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3} \cdot 36 \cdot 6\sqrt{3} = 72\sqrt{3}\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$

$l = 2r$, więc przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym i kąt rozwarcia stożka $2\alpha = 60^\circ$.

Odp.: $V = 72\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$, kąt rozwarcia stożka jest równy 60° .



Przykład 12 ◀ zad. 7.36

Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 15 i 20 obraca się dookoła przeciwprostokątnej. Obliczmy objętość i pole powierzchni całkowitej powstałej bryły.

Rozwiązanie

Otrzymana bryła jest sumą dwóch stożków sklejoných podstawami. Zauważmy, że w obracającym trójkącie:

- przeciwprostokątna AB jest sumą $h_1 + h_2$ wysokości obydwu stożków,
- wysokość CD poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest promieniem r wspólnej podstawy,
- przyprostokątne są tworzącymi l_1, l_2 .

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC :

$$|AB| = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$$

Z porównania pola trójkąta ABC obliczanego na dwa sposoby mamy:

$$\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot |CD|$$

Zatem $|CD| = 12 = r$.

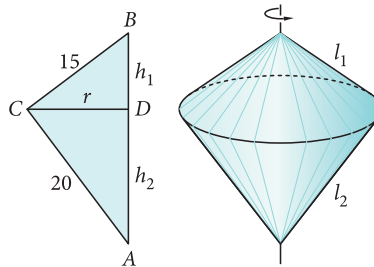
Objętość V bryły jest sumą objętości obydwu stożków:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 (h_1 + h_2) = \frac{1}{3}\pi \cdot 144 \cdot 25 = 1200\pi$$

Pole powierzchni całkowitej P_c bryły jest sumą pól powierzchni bocznych obydwu stożków:

$$P_c = \pi r l_1 + \pi r l_2 = \pi r (l_1 + l_2) = 12\pi \cdot 35 = 420\pi$$

Odp.: $V = 1200\pi$, $P_c = 420\pi$

**Przykład 13** ◀ zad. 7.42

Promień podstawy stożka jest równy r , a kąt rozwarcia tego stożka wynosi 2α . Wyznamy objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego opisanego na tym stożku.

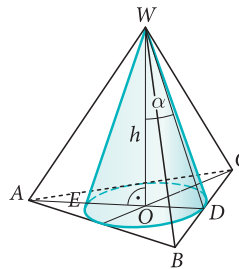
Rozwiązanie

Objętość ostrosłupa wyraża się wzorem:

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot h$$

gdzie P_p oznacza pole podstawy tego ostrosłupa, a h – jego wysokość.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



◀7.42. Na ostrosłupie prawidłowym czworokątnym, w którym krawędź podstawy jest równa a i kąt płaski przy wierzchołku ostrosłupa ma miarę α , opisano stożek. Wyznacz objętość tego stożka.

$$\text{Odp.: } \frac{\pi a^3 \sqrt{\cos \alpha}}{12 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny ABC o boku a , opisany na kole, którego promień jest równy r i które jest podstawą stożka.

$$r = \frac{1}{3}a \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a = 2r\sqrt{3}$$

$$P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3r^2\sqrt{3}$$

Wysokość ostrosłupa jest równa wysokości stożka. W przekroju osiowym stożka znamy r i α , zatem:

$$\frac{r}{h} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ czyli } h = \frac{r}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Po podstawieniu do wzoru na objętość mamy:

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot h = \frac{r^3\sqrt{3}}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\text{Odp.: } V = \frac{r^3\sqrt{3}}{\operatorname{tg} \alpha}$$

◀7.43. W kulę o promieniu R wpisano stożek o tworzącej długości a . Wyznacz pole powierzchni bocznej stożka.

$$\text{Odp.: } \frac{\pi a^2}{2R} \sqrt{4R^2 - a^2}, \quad 0 < a < 2R$$

Przykład 14 ◀ zad. 7.43

W kulę o promieniu R wpisano stożek. Ze środka tej kuli widać tworzącą stożka pod kątem α . Wyznamy objętość i pole powierzchni całkowitej stożka.

Jeżeli dany jest odcinek AB i punkt M nienależący do prostej zawierającej ten odcinek, to kąt wypukły AMB nazywamy kątem, pod którym widać odcinek AB z punktu M .

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Objętość stożka wyraża się wzorem $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$,
a jego pole powierzchni całkowitej: $P_c = \pi r(r + l)$.

Do rozwiązania zadania potrzebne są trzy wielkości:

$$r = |SB|, \quad h = |SW| \quad \text{ i } \quad l = |BW|.$$

$$\frac{r}{R} = \sin(180^\circ - \alpha)$$

← w $\triangle OSB$

$$r = R \sin \alpha$$

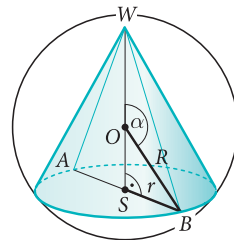
← $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

Zauważmy, że trójkąt WOB jest równoramienny, zatem:

$$\sphericalangle OWB = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{r}{h} = \operatorname{tg} \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)$$

← w $\triangle WSB$



$$h = \frac{r}{\operatorname{tg}\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{R \sin \alpha}{\operatorname{tg}\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} \quad \leftarrow r = R \sin \alpha$$

$$\frac{r}{l} = \sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \quad \leftarrow \text{w } \triangle WSB$$

$$l = \frac{R \sin \alpha}{\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

Upraszczamy wyznaczoną wartość tworzącej l – stosujemy dwa wzory trygonometryczne: redukcyjny $\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos \frac{\alpha}{2}$ oraz wzór na sinus kąta podwojonego w postaci $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$. Po przekształceniach otrzymujemy:

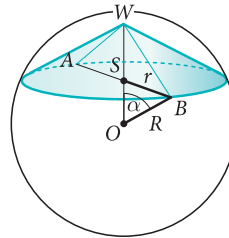
$$l = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$$

Po podstawieniu wyznaczonych wielkości r , h i l do wzorów na objętość i pole powierzchni całkowitej stożka otrzymujemy:

$$V = \frac{\pi R^3 \sin^3 \alpha}{3 \operatorname{tg}\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$P_c = \pi R^2 \sin \alpha \left(\sin \alpha + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

W powyższym rozwiązaniu korzystaliśmy z zależności geometrycznych związanych ze szczególnym położeniem stożka w kuli – gdy środek kuli należy do wysokości stożka. Proponujemy samodzielne wykazanie, że w innych położeniach stożka (np. jak na rysunku obok) rozwiązanie będzie identyczne.



$$\text{Odp.: } V = \frac{\pi R^3 \sin^3 \alpha}{3 \operatorname{tg}\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}, \quad P_c = \pi R^2 \sin \alpha \left(\sin \alpha + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

Zadania

W każdym z zadań 7.1–7.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź.

Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

7.1. Objętość walca otrzymanego w wyniku obrotu prostokąta o bokach a i $2a$ wokół krótszego boku jest równa V_1 , a objętość walca otrzymanego w wyniku obrotu tego samego prostokąta wokół dłuższego boku jest równa V_2 . Wskaż stosunek $\frac{V_1}{V_2}$.

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. 4

Odpowiedzi i rozwiązania

7.1. C

7.2. A



7.2. Kula o promieniu 5 cm i stożek o promieniu podstawy 10 cm mają takie same objętości. Wskaż wysokość stożka.

- A. 5 cm B. 10 cm C. $\frac{25}{\pi}$ cm D. 2 cm

7.3. C

7.3. Stosunek objętości dwóch sześcianów jest równy 3. Wskaż stosunek długości krawędzi tych sześcianów.

- A. $\frac{1}{3}$ B. $3\sqrt{3}$ C. $\sqrt[3]{3}$ D. 27

7.4. 300

7.4. Dwie krawędzie prostopadłościanu mają długości $a = 3$ i $b = 20$. Pole powierzchni całkowitej bryły jest równe 350. Oblicz objętość tego prostopadłościanu.

7.5. 5 dm

7.5. Do zbiornika w kształcie graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o wysokości 6 dm wlewo 100 litrów wody, która wypełniła $\frac{2}{3}$ pojemności zbiornika. Oblicz długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa.

7.6. $8(6 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$

7.6. Krawędź boczna graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa krawędzi podstawy. Objętość tego graniastosłupa wynosi $16\sqrt{3} \text{ cm}^3$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

7.7. $P_c = (192 + 112\sqrt{3}) \text{ cm}^2$,
 $V = 96(1 + \sqrt{3}) \text{ cm}^3$

7.7. Podstawa graniastosłupa jest trójkątem prostokątnym, w którym przeciwprostokątna ma długość 8 cm, a jeden z kątów ostrych ma 30° . Powierzchnia boczna tego graniastosłupa po rozwinięciu na płaszczyznę jest kwadratem. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa.

7.8. $V = 90\sqrt{3}$, $P_c = 96\sqrt{3}$

7.8. Oblicz objętość i pole powierzchni graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, w którym wysokość jest równa 5, a okrąg wpisany w podstawę ma promień 3.

7.9. 486 cm^2

7.9. Oblicz pole powierzchni całkowitej sześcianu S, wiedząc, że sześcian o krawędzi krótszej o 5 cm ma objętość mniejszą o 665 cm^3 niż sześcian S.

7.10. 324

7.10. Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat. Przekątna tego prostopadłościanu ma długość 12 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30° . Oblicz objętość tego prostopadłościanu.

7.11. $\sqrt{3} \text{ dm}^3$

7.11. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość $\sqrt{2} \text{ dm}$. Przekątna ściany bocznej tworzy z płaszczyzną sąsiedniej ściany bocznej kąt 30° . Oblicz objętość tego graniastosłupa.

7.12. Podstawa graniastosłupa sześciokątnego prawidłowego jest wpisana w koło o promieniu $2\sqrt{3}$. Najdłuższa przekątna tego graniastosłupa tworzy z płaszczyzną podstawy kąt o mierze 70° . Oblicz objętość graniastosłupa (z dokładnością do całości).

7.13. Wysokość prostopadłościanu jest równa 20, a jego podstawą jest kwadrat o boku długości $5\sqrt{2}$. Prostopadłościan przecięto płaszczyzną wyznaczoną przez wychodzące z jednego wierzchołka przekątną podstawy i przekątną ściany bocznej.

- Wyznacz z dokładnością do 1° kąt nachylenia otrzymanego przekroju do płaszczyzny podstawy.
- Oblicz pole otrzymanego przekroju.
- Oblicz objętości brył, na które płaszczyzna sieczna podzieliła prostopadłościan.

7.14. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym przekrój zawierający krawędź boczną graniastosłupa i wysokość jego podstawy jest kwadratem o polu 36 cm^2 . Oblicz objętość tego graniastosłupa.

7.15. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy 12 i wysokości 2.

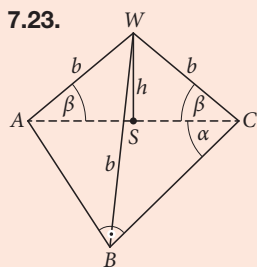
7.16. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość a , a krawędź boczna ostrosłupa jest 2 razy dłuższa od krawędzi podstawy. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

7.17. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna podstawy jest równa $10\sqrt{6}$, a kąt między poprowadzonymi z wierzchołka ostrosłupa wysokościami przeciwległych ścian bocznych ma miarę 120° . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

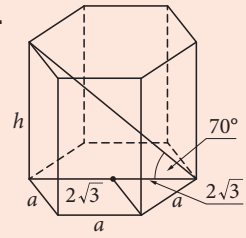
7.18. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym miara kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy jest równa 60° . Wysokość ostrosłupa ma $6\sqrt{3} \text{ cm}$. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

7.19. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 24 cm, a miara kąta między krawędzią boczną i wysokością ostrosłupa jest równa 30° . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

7.20. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 20, a kąt płaski ściany bocznej przy wierzchołku ostrosłupa ma miarę 64° . Oblicz objętość tego ostrosłupa (z dokładnością do całości).



7.12.



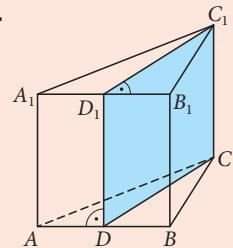
$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 70^\circ &= \frac{h}{4\sqrt{3}} \\ h &= 4\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 70^\circ \\ a &= 2\sqrt{3} \\ P_p &= 6 \cdot \frac{(2\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = 18\sqrt{3} \\ V &= 18\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 70^\circ = \\ &= 216 \cdot \operatorname{tg} 70^\circ \approx 593 \end{aligned}$$

7.13. a) 76°

b) $25\sqrt{17}$

c) $166\frac{2}{3}, 833\frac{1}{3}$

7.14.



D, D_1 – środki krawędzi CC_1
 CDD_1C_1 – kwadrat o boku a
 $a^2 = 36, a = 6 \text{ [cm]}$

$$\begin{aligned} a &= |AB| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ |AB| &= 4\sqrt{3} \text{ [cm]} \\ P_p &= (4\sqrt{3})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]} \\ V &= P_p \cdot a = 12\sqrt{3} \cdot 6 = 72\sqrt{3} \text{ [cm}^3\text{]} \end{aligned}$$

7.15. $V = 24\sqrt{3}, P_c = 36(2 + \sqrt{3})$

7.16. $V = \frac{\sqrt{11}}{12} a^3,$

$$P_c = \frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{15}}{4} a^2$$

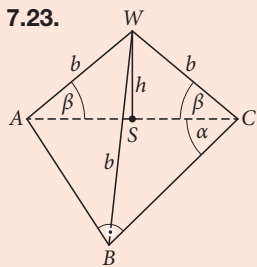
7.17. $100(3 + 2\sqrt{3})$

7.18. $V = 648 \text{ cm}^3,$
 $P = 216\sqrt{3} \text{ cm}^2$

7.19. $V = 1296 \text{ cm}^3,$
 $P_c = 108\sqrt{3}(1 + \sqrt{13}) \text{ cm}^2$

7.20. 1666

7.23.



Spodek wysokości to środek przeciwprostokątnej (patrz zad. 7.21.)

$$\alpha = 20^\circ, b = 3 \text{ dm}, \beta = 46^\circ$$

$$\frac{h}{3} = \sin 46^\circ, h = 3 \sin 46^\circ, h^2 + |SC|^2 = 3^2$$

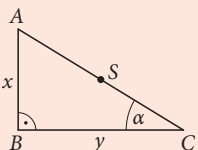
$$|SC|^2 \approx 4,33, |SC| = 2,08$$

$$|AC| = 4,16 \approx 4$$

$$\frac{x}{4} = \sin 20^\circ, x = 4 \cdot \sin 20^\circ \approx 1,4$$

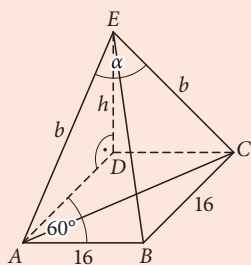
$$y = 4 \cdot \cos 20^\circ \approx 3,8$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,4 \cdot 3,8 \cdot 2 \approx 1,77 \approx 2 \text{ dm}^3$$



7.21. Patrz s. 86.

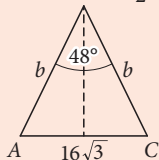
7.22.



$$\alpha = 48^\circ$$

$$P_p = 16^2 \sin 60^\circ = 16^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 128\sqrt{3}$$

$$|AC| = 2 \cdot \frac{16\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$$



$$\sin 24^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{b}$$

$$b \approx 34$$

$$h^2 + 16^2 = b^2, \quad h^2 = 34^2 - 16^2$$

$$h^2 = 900, \quad h = 30$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 128\sqrt{3} \cdot 30 = 1280\sqrt{3} \approx 2223$$

7.23. Patrz s. 93.

7.24. $99\sqrt{11} \text{ cm}^3$

7.26. $P_c = 74,8, V = 44,0$

7.27. 38 cm^3

7.28. $2400\pi \text{ cm}^2$

7.29. 2

7.30. 628

7.21. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 16 i 12. Każda krawędź boczna ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Oblicz objętość ostrosłupa.

7.22. Podstawą ostrosłupa jest romb o boku 16 i kącie ostrym 60° . Jedna z krawędzi bocznych ostrosłupa przechodzących przez wierzchołek kąta rozwartego rombu jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Krawędzie boczne ostrosłupa przechodzące przez wierzchołki kątów ostrych rombu tworzą kąt 48° . Oblicz objętość ostrosłupa (z dokładnością do całości).

7.23. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny o kącie ostrym α . Każda krawędź boczna ostrosłupa ma długość b i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem β . Oblicz objętość ostrosłupa (z dokładnością do całości) dla $\alpha = 20^\circ$, $b = 3 \text{ dm}$, $\beta = 46^\circ$.

7.24. Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez prostokątny, którego podstawy mają długości 3 cm i 8 cm. Krótsza przekątna graniastosłupa jest równa 12 cm i tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 30° . Oblicz objętość tego graniastosłupa.

7.25. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość a . Płaszczyzna przechodząca przez krawędź podstawy i środek wysokości tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α . Wyznacz objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

7.26. Wysokość walca jest równa 7. Przekątna przekroju osiowego walca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 68° . Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość walca. Wyniki zaokrąglaj do pierwszego miejsca po przecinku.

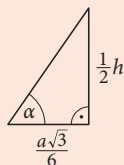
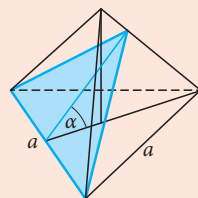
7.27. Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu jest prostokątem, w którym przekątna o długości 12,4 cm tworzy z bokiem równym wysokości walca kąt 33° . Oblicz objętość walca (z dokładnością do 1 cm^3).

7.28. Prostokąt o polu równym 800 cm^2 obraca się dookoła jednego z boków. Objętość otrzymanej bryły jest równa $16000\pi \text{ cm}^3$. Oblicz pole powierzchni całkowitej bryły.

7.29. Stosunek pola powierzchni bocznej walca do jego pola powierzchni całkowitej jest równy $2 : 3$. Wyznacz stosunek wysokości tego walca do promienia jego podstawy.

7.30. Tworząca stożka ma długość 12 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 25° . Oblicz objętość stożka (z dokładnością do całości).

7.25.



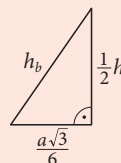
$$\frac{\frac{1}{2}h}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = \tan \alpha, \quad h = \frac{a\sqrt{3}}{3} \tan \alpha$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \tan \alpha$$

$$h_b^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} \tan \alpha \right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6} \right)^2$$

$$h_b^2 = \frac{4a^2 \tan^2 \alpha + a^2}{12}, \quad h_b = \frac{a\sqrt{12 \tan^2 \alpha + 3}}{6}$$

$$P_b = 3 \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{a\sqrt{12 \tan^2 \alpha + 3}}{6} = \frac{a^2 \sqrt{3} \cdot \sqrt{4 \tan^2 \alpha + 1}}{4}$$





7.31. Objętość stożka jest równa $240\pi \text{ cm}^3$, a pole jego przekroju osiowego wynosi 180 cm^2 . Oblicz pole powierzchni całkowitej stożka (z dokładnością do 1 cm^2).

* **7.32.** Dwa równe koła rozcięto w następujący sposób: pierwsze na cztery, a drugie – na trzy przystające wycinki. Wszystkie wycinki zwinięto w stożki. Przy którym podziale suma objętości stożków jest większa?

7.33. Kula i stożek mają równe objętości. Promień kuli jest równy 5 cm , a promień podstawy stożka jest równy 8 cm . Oblicz wysokość stożka.

7.34. Chociaż spadło niewiele śniegu, Maciek postanowił ulepić bałwana. Według niego idealny bałwan powinien składać się z trzech kul o średnicach w stosunku $5 : 4 : 3$ oraz mieć wysokość $1,2 \text{ m}$. Oblicz, z ilu m^2 ogródka musi pochodzić śnieg potrzebny na bałwana. Przyjmij, że warstwa śniegu możliwego do wykorzystania ma grubość 1 cm .



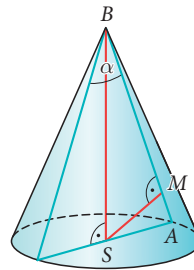
7.35. Stopiono 1000 mosiężnych kulek o promieniu 1 cm każda i z otrzymanego stopu wykonano stożek o wysokości 10 cm . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.

7.36. Trapez prostokątny o wysokości 2 cm , dłuższej podstawie równej 5 cm i kącie ostrym o mierze 45° obraca się dookoła prostej zawierającej krótszą podstawę. Oblicz objętość otrzymanej w ten sposób bryły.



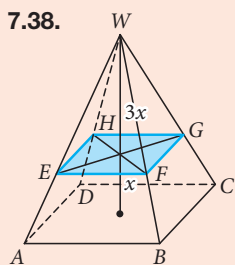
7.37. Wykaż, że stosunek objętości stożka o promieniu SM i wysokości MB do objętości stożka przedstawionego na rysunku jest równy $\cos^3 \frac{\alpha}{2}$.

7.38. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym poprowadzono płaszczyznę równoległą do podstawy. Płaszczyzna ta dzieli wysokość ostrosłupa w stosunku $3 : 1$, licząc od wierzchołka. Oblicz stosunek objętości brył, na które ta płaszczyzna podzieliła ostrosłup.



* **7.39.** Ostrosłup pięciokątny o polu podstawy S podzielono płaszczyzną równoległą do podstawy na dwie części o jednakowych objętościach. Wyznacz pole tej części płaszczyzny, która jest zawarta wewnątrz ostrosłupa.

* **7.40.** Stożek o wysokości H podzielono dwiema płaszczyznami równoległymi do podstawy na trzy części o jednakowych objętościach. Wyznacz wysokość środkowej z tych części.



$3x + x = H$
 V – objętość $ABCDW$
 V_1 – objętość $EFGHW$
 V_2 – objętość $ABCDEFHG$
 $V_2 = V - V_1$

Ostrosłup $ABCDW$ jest podobny do $EFGHW$ w skali $k = \frac{3}{4}$.

Sposób I

$$\begin{aligned} |AB| &= 4a \\ |EF| &= 3a \\ V &= \frac{1}{3} \cdot (4a)^2 \cdot 4x = \frac{64}{3} a^2 x \\ V_1 &= \frac{1}{3} \cdot (3a)^2 \cdot 3x = 9a^2 x \\ V_2 &= \frac{64}{3} a^2 x - 9a^2 x = \frac{37}{3} a^2 x \\ \frac{V_1}{V_2} &= \frac{9a^2 x}{\frac{37}{3} a^2 x} = \frac{27}{37} \end{aligned}$$

Sposób II

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{V} &= \left(\frac{3}{4}\right)^3 \\ V_1 &= \frac{27}{64} V \\ \frac{V_1}{V - V_1} &= \frac{\frac{27}{64} V}{V - \frac{27}{64} V} = \frac{\frac{27}{64} V}{\frac{37}{64} V} = \frac{27}{37} \end{aligned}$$

7.31. 618 cm^2

7.32. l – promień każdego z kół (tworząca każdego stożka)
 r_1, r_2 – promienie podstaw stożków
 h_1, h_2 – wysokości stożków

$$2\pi r_1 = \frac{1}{4} \cdot 2\pi l, \text{ więc } r_1 = \frac{1}{4} l$$

$$2\pi r_2 = \frac{1}{3} \cdot 2\pi l, \text{ więc } r_2 = \frac{1}{3} l$$

$$h_1 = \sqrt{l^2 - \left(\frac{1}{4} l\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4} l$$

$$h_2 = \sqrt{l^2 - \left(\frac{1}{3} l\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} l$$

V_1, V_2 – sumy objętości stożków

$$V_1 = 4 \cdot \frac{1}{3} \pi r_1^2 h_1 = \frac{\sqrt{15}}{16} \cdot \frac{\pi l^3}{3}$$

$$V_2 = 3 \cdot \frac{1}{3} \pi r_2^2 h_2 = \frac{\sqrt{8}}{9} \cdot \frac{\pi l^3}{3}$$

$$\frac{\sqrt{15}}{16} < \frac{\sqrt{16}}{16} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\sqrt{8}}{9} > \frac{\sqrt{\frac{1}{4}}}{9} = \frac{2,5}{9} > \frac{2,25}{9} = \frac{1}{4}$$

Zatem $V_1 < V_2$, czyli suma objętości stożków jest większa przy drugim przedziale (na 3 części).

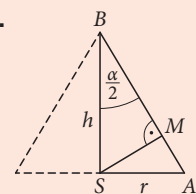
7.33. $\frac{125}{16} \text{ cm}$

7.34. ok. 11 m^2

7.35. $200\pi(2 + \sqrt{5}) \text{ cm}^2$

7.36. $17\frac{1}{3} \pi \text{ cm}^3$

7.37.



$\triangle ASB \sim \triangle SMB$

$$\frac{|BM|}{h} = \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$|BM| = |SB| \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{|SM|^2}{|SA|^2} \cdot \frac{|BM|}{|SB|} =$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{|SB| \cos \frac{\alpha}{2}}{|SB|} = \cos^3 \frac{\alpha}{2}$$

7.39. Patrz s. 96.

7.40. Patrz s. 96.

7.41. 17 dm

7.42. $\frac{\pi a^3 \sqrt{\cos \alpha}}{12 \sin \frac{\alpha}{2}}$

7.43. $\frac{\pi a^2}{2R} \sqrt{4R^2 - a^2}$, $0 < a < 2R$

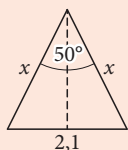
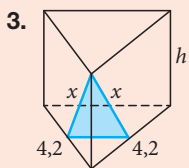
7.44. $\frac{\pi h^2 r^2}{3(h-2r)}$, $0 < r < \frac{h}{2}$

7.45. $4R^2 \sin 2\alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

7.46. $\frac{24r^2}{\sin \alpha}$. Wskazówka: Zauważ, że wysokość graniastosłupa jest równa $2r$.

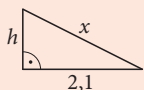
Prosto do matury

1. P, P, P

2. $P_c = 422$, $V = 513$ 

$$\frac{1,05}{x} = \sin 25^\circ$$

$$x = \frac{1,05}{0,4226} = 2,48$$



$$h^2 = (2,48)^2 - (2,1)^2$$

$$h \approx 1,32$$

$$V = \frac{(4,2)^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 1,32 \approx 10 \text{ dm}^3$$

$$P = 2 \cdot \frac{(4,2)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 4,2 \cdot 1,32 \approx 32 \text{ dm}^2$$

4. $\frac{P}{2} \cdot \sqrt{\frac{Z-P}{2\pi}}$

5. $V = abc \sin \alpha \sin \beta$

7.41. W kulę wpisano walec. Promień podstawy walca jest mniejszy od promienia kuli o 2 dm, a wysokość walca jest mniejsza od promienia kuli o 1 dm. Oblicz promień kuli.

7.42. Na ostrosłupie prawidłowym czworokątnym, w którym krawędź podstawy jest równa a i kąt płaski przy wierzchołku ostrosłupa ma miarę α , opisano stożek. Wyznacz objętość tego stożka.

7.43. W kulę o promieniu R wpisano stożek o tworzącej długości a . Wyznacz pole powierzchni bocznej stożka.

7.44. W stożek o wysokości h wpisano kulę o promieniu r . Wyznacz objętość stożka.

7.45. W kulę o promieniu R wpisano ostrosłup prawidłowy czworokątny. Kąt płaski przy wierzchołku tego ostrosłupa ma miarę α . Wyznacz pole powierzchni bocznej ostrosłupa.

7.46. W graniastosłup prosty, którego podstawą jest trapez równoramienny o kącie ostrym α , wpisano kulę o promieniu r . Wyznacz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa.

Prosto do matury



1. Oceń prawdziwość podanych zdań. Istnieje kula, której objętość wyraża się liczbą
A. mniejszą niż jej pole. B. równą jej polu. C. większą niż jej pole.



2. Oblicz z dokładnością do całości pole powierzchni całkowitej i objętość stożka, w którym kąt rozwarcia ma 70° , a wysokość jest równa 10.

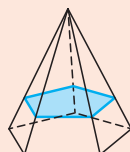


3. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 4,2 dm. Wierzchołek górnej podstawy połączono ze środkami krawędzi dolnej podstawy odcinkami zawartymi w sąsiednich ścianach bocznych. Odcinki te tworzą kąt 50° . Oblicz objętość (z dokładnością do 1 dm^3) i pole powierzchni całkowitej (z dokładnością do 1 dm^2) tego graniastosłupa.

4. Pole powierzchni bocznej walca jest równe P , a jego pole powierzchni całkowitej wynosi Z . Wyznacz objętość tego walca.

5. Podstawą graniastosłupa jest równoległobok o bokach długości a i b oraz kącie α między nimi. Krawędź boczna graniastosłupa ma długość c i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem β . Wyznacz objętość V graniastosłupa.

7.39.



V – objętość całego ostrosłupa

V_1 – objętość mniejszego ostrosłupa

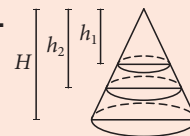
$$V_2 = V - V_1, \quad V_1 = V_2 = \frac{1}{2}V$$

$$\frac{V_1}{V} = \frac{1}{2} = k^3, \quad k = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

S_1 – pole podstawy mniejszego ostrosłupa

$$S_1 = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 \cdot S = \frac{S}{\sqrt[3]{4}}$$

7.40.



$1 : 2 : 3$

W wyniku podziału otrzymujemy 3 stożki podobne

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{V_1}{V_3} = \frac{1}{3}, \quad \frac{V_2}{V_3} = \frac{2}{3}$$

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}H, \quad h_2 = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}H$$

Wysokość h środkowej części

$$h = h_2 - h_1 = \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)H = \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt[3]{3}} \cdot H$$

8. Zadania optymalizacyjne

Umiejętności:

- stosowanie pochodnych do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych

Zadania optymalizacyjne rozwiązywaliśmy już wcześniej. Początkowo sprowadzały się one do tego, że w określonym przedziale dziedziny znajdowaliśmy wartość największą lub najmniejszą funkcji kwadratowej. W trzeciej klasie, dzięki zastosowaniu własności pochodnej, można już było poszerzyć zakres badań o bardziej skomplikowane funkcje.

Teraz wykorzystamy pochodne do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych z geometrii przestrzeni.

Prześledźmy to na przykładach.

Przykład 1 ◀ zad. 8.4

Obwód trójkąta równoramiennego wynosi 24 cm. Jakie długości powinny mieć boki tego trójkąta, aby objętość bryły powstałej z jego obrotu dookoła prostej zawierającej podstawę była największa?

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Otrzymana bryła jest sumą dwóch przystających stożków o wspólnej podstawie otrzymanej w wyniku obrotu wysokości DC trójkąta ABC . Zatem:

$|DC| = b$ – promień podstawy każdego z dwóch stożków,
 $|DB| = a$ – wysokość każdego z dwóch stożków.

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi b^2 \cdot a = \frac{2}{3} \cdot \pi b^2 a$$

Skorzystamy z danych w zadaniu, aby wyrazić objętość za pomocą tylko jednej zmiennej:

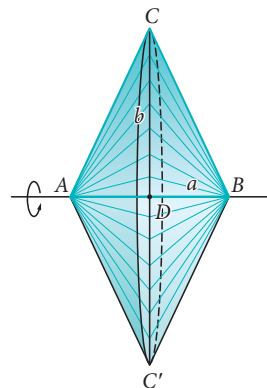
$$2|BC| + 2a = 24$$

$$|BC| = 12 - a$$

$$b^2 + a^2 = (12 - a)^2$$

$$b^2 = 144 - 24a = 24(6 - a)$$

$$V(a) = \frac{2}{3} \cdot \pi a \cdot 24(6 - a) = 16\pi \cdot (6 - a)a$$



← twierdzenie Pitagorasa w $\triangle DBC$

◀8.4. Romb o boku długości a obraca się wokół jednej z przekątnych. Wyznacz długości przekątnych tego rombu tak, aby objętość powstałej bryły była jak największa.

Od.: $\frac{2\sqrt{6}}{3}a, \frac{2\sqrt{3}}{3}a$

MKP

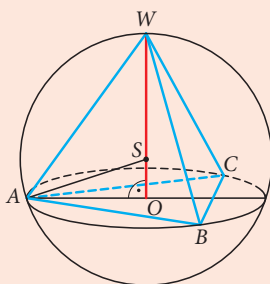
temat 3.8

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 1.8

Generator
testów i sprawdzianów

◀8.13. W kulę o promieniu 3 wpisano ostrosłup prawidłowy trójkątny o największej objętości. Jaka jest wysokość tego ostrosłupa?

Od.:



$$\begin{aligned} |SA| &= |SW| = 3, \quad |OS| = x, \quad h = |OW| \\ \text{Możemy przyjąć, że } h &\in \langle 3; 6 \rangle, \text{ bo jeżeli } h \in (0; 3), \text{ to } 6 - h > h \text{ i ostrosłupy} \\ &\text{o wysokościach } h \text{ i } 6 - h \text{ mają przystające} \\ &\text{podstawy.} \\ |OA|^2 &= 3^2 - x^2 = 9 - x^2 \\ |OA| &= |AB| \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ więc } |AB| = \sqrt{3}|OA| \\ P_{ABC} &= \frac{|AB|^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}|OA|^2}{4} \\ h &= 3 + x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} P_{ABC} \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{4} (27 + 9x - 3x^2 - x^3), \\ x &\in \langle 0; 3 \rangle \\ V'(x) &= \frac{\sqrt{3}}{4} (9 - 6x - 3x^2) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} (x-1)(x+3) \\ V'(x) &= 0 \text{ dla } x = 1 \\ V'(x) &> 0 \text{ dla } x \in (0; 1), \\ V'(x) &< 0 \text{ dla } x \in (1; 3) \\ \text{Zatem } V &\text{ rośnie w przedziale } \langle 0; 1 \rangle \text{ i maleje} \\ &\text{w } \langle 1; 3 \rangle, \text{ więc największą wartość} \\ &\text{przyjmuje dla } x = 1. \\ \text{Wtedy } h &= 3 + 1 = 4 \end{aligned}$$

I sposób

Korzystamy z własności funkcji kwadratowej.

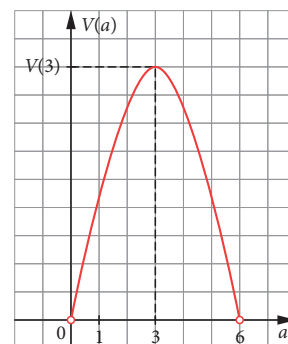
$$V(a) = 16\pi(6 - a)a$$

Współczynnik przy a^2 jest ujemny, czyli ramiona paraboli są skierowane do dołu. Funkcja $V(a)$ przyjmuje więc wartość największą dla a_w , które jest średnią arytmetyczną miejsc zerowych, czyli dla $a = 3$.

Funkcję $V(a)$ rozpatrujemy w przedziale $(0; 6)$, ponieważ tylko dla argumentów z tego przedziału jej wartości odpowiadają objętości opisanej bryły. Zatem największa objętość wynosi:

$$V(3) = 144\pi \approx 452,16 \text{ [cm}^3\text{]}$$

Dla $a = 3$ boki trójkąta ABC mają odpowiednio długości: podstawa $|AB| = 6 \text{ cm}$ i ramiona $|BC| = |AC| = 6 \text{ cm}$.

II sposób

Korzystamy z własności pochodnej funkcji różniczkowalnej.

$$V(a) = 16\pi \cdot (6a - a^2)$$

$$V'(a) = 16\pi \cdot (6 - 2a)$$

$$D_V = D_{V'} = (0; 6)$$

$$V'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 3$$

$$V'(a) > 0 \Leftrightarrow a \in (0; 3)$$

$$V'(a) < 0 \Leftrightarrow a \in (3; 6)$$

Dana jest funkcja f określona i różniczkowalna w przedziale $(a; b)$.

- Jeżeli $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in (a; b)$, to funkcja f jest w tym przedziale **rosnąca**.
- Jeżeli $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in (a; b)$, to funkcja f jest w tym przedziale **malejąca**.

Zebrane informacje zestawiamy w tabeli.

a	$(0; 3)$	3	$(3; 6)$
$V'(a)$	+	0	-
$V(a)$	↗	$V(3) = 144\pi$ maks.	↘

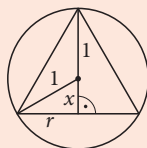
W punkcie, w którym funkcja różniczkowalna ma ekstremum, pochodna tej funkcji **zmienia znak**.

Funkcja $V(a)$ przyjmuje największą wartość dla $a = 3 \text{ cm}$. Zatem wszystkie boki trójkąta powinny mieć tę samą długość, równą 6 cm .

Odp.: $|AB| = |BC| = |AC| = 6 \text{ cm}$

◀ 8.14. Wyznacz największą objętość stożka wpisanego w kulę o promieniu 1.

Odp.:



r – promień podstawy stożka

$h = 1 + x$ – wysokość stożka, $x \in \langle 0; 1 \rangle$

Możemy przyjąć, że $h \in \langle 1; 2 \rangle$.

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(1 + x - x^2 - x^3),$$

$$x \in \langle 0; 1 \rangle$$

$$V'(x) = \frac{1}{3}\pi(1 - 2x - 3x^2) =$$

$$= -\frac{\pi}{3}(x + 1)(3x - 1)$$

$$V'(x) = 0 \text{ dla } x = \frac{1}{3}$$

$$V'(x) > 0 \text{ dla } x \in \left(0; \frac{1}{3}\right),$$

$$V'(x) < 0 \text{ dla } x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$$

V rośnie w przedziale $\left\langle 0; \frac{1}{3} \right\rangle$, maleje

w $\left\langle \frac{1}{3}; 1 \right\rangle$, więc największa objętość stożka to:

$$V\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{32}{81}\pi$$

Przykład 2 ◀ zad. 8.8

W stożek o promieniu podstawy R i wysokości H wpisano walec o największej objętości. Wyznaczmy wymiary tego walca.

Rozwiązanie

Przekrojem osiowym stożka z wpisanym walcem jest trójkąt równoramienny z wpisanym w niego prostokątem.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:

r jest promieniem podstawy walca,

h – wysokością tego walca.

Objętość walca wyraża się wzorem $V = \pi r^2 h$ – jest zależna od dwóch zmiennych.

Zauważmy, że $\triangle SBW \sim \triangle MBC$, zatem $\frac{|WS|}{|SB|} = \frac{|CM|}{|MB|}$,

czyli:

$$\frac{H}{R} = \frac{h}{R-r}$$

$$h = \frac{H(R-r)}{R}$$

Objętość V walca możemy teraz wyrazić za pomocą jednej zmiennej r :

$$V(r) = \pi r^2 \cdot \frac{H(R-r)}{R} \quad \leftarrow H \text{ oraz } R \text{ są wielkościami danymi}$$

$$V(r) = \frac{H\pi}{R}(R-r)r^2$$

$$D_V = D_{V'} = (0; R)$$

Do wyznaczenia pochodnej wygodniej jest zapisać funkcję w postaci uporządkowanego wielomianu ze stałą wyłączoną przed nawias.

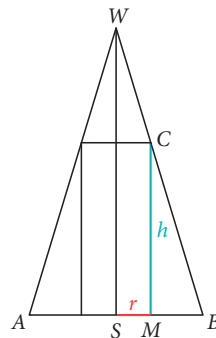
$$V(r) = \frac{H\pi}{R}(-r^3 + Rr^2)$$

$$V'(r) = \frac{H\pi}{R} \cdot (-3r^2 + 2Rr) = \frac{-H\pi}{R} \cdot r(3r - 2R)$$

$$V'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \frac{2}{3}R$$

$$V'(r) > 0 \Leftrightarrow r \in \left(0; \frac{2}{3}R\right)$$

$$V'(r) < 0 \Leftrightarrow r \in \left(\frac{2}{3}R; R\right)$$

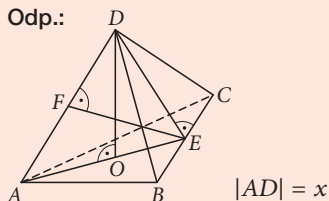


◀8.8. W stożek o wysokości 8 i polu powierzchni bocznej 60π wpisano walec o największej objętości. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.

ⓓp.: $53\frac{1}{3}\pi$

◀8.15. Jedna z krawędzi ostrosłupa trójkątnego ma długość x , a pozostałe krawędzie mają długość 1. Dla jakiej wartości x objętość ostrosłupa jest największa?

ⓓp.:



$|AB| = |BC| = |AC| = |BD| = |CD| = 1$
 $|AE| = |DE| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ – wysokość trójkąta równobocznego o boku 1

F – środek krawędzi AD i $EF \perp AD$
 (bo $|AE| = |DE|$)

$$|EF| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3 \cdot x^2}$$

$$P_{AED} = \frac{1}{2}|AE| \cdot |OD| = \frac{1}{2}|AD| \cdot |EF|$$

$$|OD| = \frac{|AD| \cdot |EF|}{|AE|} = \frac{x\sqrt{3 \cdot x^2}}{\sqrt{3}}$$

$$V(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{|AB|^2 \sqrt{3}}{4} \cdot |OD| = \frac{\sqrt{3}x^2 - x^4}{12}$$

$$x < |AE| + |ED| = \sqrt{3}, \text{ czyli } x \in (0; \sqrt{3})$$

Funkcja $V(x)$ przyjmuje największą wartość, gdy funkcja $f(x) = 3x^2 - x^4$ osiąga największą wartość.

$$f'(x) = 2x(3 - 2x^2)$$

$$f'(x) = 0, \text{ gdy } x = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$f'(x) > 0 \text{ dla } x \in \left(0; \frac{\sqrt{6}}{2}\right),$$

$$f'(x) < 0 \text{ dla } x \in \left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \sqrt{3}\right),$$

zatem największą wartość osiąga dla $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

r	$\left(0; \frac{2}{3}R\right)$	$\frac{2}{3}R$	$\left(\frac{2}{3}R; R\right)$
$V'(r)$	+	0	-
$V(r)$	$\nearrow$	maks.	$\searrow$

Walec o największej objętości ma więc promień $r = \frac{2}{3}R$.

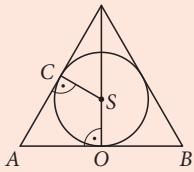
Wyznaczamy teraz wysokość tego walca.

$$h = \frac{H\left(R - \frac{2}{3}R\right)}{R} = \frac{H}{3}$$

Odp.: Walec o największej objętości ma promień $r = \frac{2}{3}R$ i wysokość $h = \frac{1}{3}H$.

◀8.11. Na kuli opisano ostrosłup prawidłowy czworokątny o najmniejszej objętości. Oblicz stosunek objętości ostrosłupa do objętości kuli.

Odp.:



$r = |SO| = |SC|$ – promień kuli
 O – środek podstawy ostrosłupa
 C – punkt styczności ze ścianą boczną

$a = |AB|$ – długość krawędzi podstawy
 $h = |OW|$ – wysokość ostrosłupa
 $\triangle AOW \sim \triangle SCW$

$$\frac{\frac{1}{2}a}{r} = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + h^2}}{h - r}$$

$$a^2 = \frac{4r^2h}{h - 2r}$$

$$V = \frac{1}{3}a^2h = \frac{4r^2}{3} \cdot \frac{h^2}{h - 2r},$$

$$h \in (2r; \infty)$$

$$V'(h) = \frac{4r^2}{3} \cdot \frac{h(h - 4r)}{(h - 2r)^2}$$

$$V'(h) = 0 \text{ dla } h = 4r$$

$$V'(h) < 0 \text{ dla } h \in (2r; 4r)$$

$$V'(h) > 0 \text{ dla } h \in (4r; \infty)$$

V maleje w przedziale $(2r; 4r)$
i rośnie w przedziale $(4r; \infty)$, więc najmniejsza objętość ostrosłupa to:

$$V(4r) = \frac{4r^2}{3} \cdot \frac{(4r)^2}{4r - 2r} = \frac{32r^2}{3}$$

Stosunek objętości tego ostrosłupa

$$\text{i kuli wynosi: } \frac{\frac{32r^3}{3}}{\frac{4\pi r^3}{3}} = \frac{8}{\pi}.$$

Przykład 3 ◀ zad. 8.11

Na kuli o promieniu r i środku S można opisać stożek. Jaka powinna być wysokość tego stożka, aby jego objętość była jak najmniejsza?

Rozwiązanie

Narysujmy przekrój osiowy stożka opisanego na kuli i przyjmijmy oznaczenia takie jak na rysunku. Otrzymamy trójkąt równoramienny ABC opisany na okręgu o promieniu r .

Do wyznaczenia objętości stożka potrzebna jest jego wysokość $|CP| = h$ oraz promień podstawy $|PB|$. Obie te wielkości oraz dany promień r kuli są wzajemnie powiązane. Znajdziemy te zależności, korzystając z podobieństwa trójkątów CPB i CQS oraz z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta CPB .

$$\frac{|PB|}{|QS|} = \frac{|CB|}{|CS|} \quad \leftarrow \triangle CPB \sim \triangle CQS$$

$$\frac{|PB|}{r} = \frac{|CB|}{h - r}$$

$$|CB| = \frac{|PB|(h - r)}{r} = |PB|\left(\frac{h}{r} - 1\right)$$

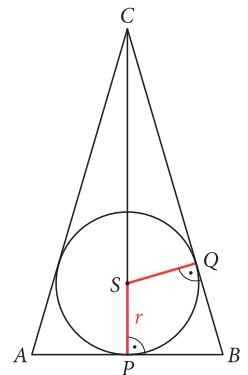
Na mocy twierdzenia Pitagorasa w trójkącie CPB otrzymujemy drugie równanie.

$$h^2 + |PB|^2 = |CB|^2$$

$$h^2 + |PB|^2 = |PB|^2 \left(\frac{h^2}{r^2} - 2\frac{h}{r} + 1 \right) \quad \leftarrow \text{obie strony równania mnożymy przez } r^2$$

$$h^2r^2 + |PB|^2r^2 = |PB|^2h^2 - 2|PB|^2hr + |PB|^2r^2$$

$$h^2r^2 = |PB|^2h^2 - 2|PB|^2hr \quad \leftarrow \text{obie strony równania dzielimy przez } h$$



$$hr^2 = |PB|^2 h - 2|PB|^2 r$$

$$|PB|^2(h - 2r) = hr^2$$

← obie strony równania dzielimy przez $h - 2r$

$$|PB|^2 = \frac{hr^2}{h - 2r}$$

Możemy teraz wyznaczyć objętość stożka w zależności od danego promienia r kuli oraz zmiennej wysokości h stożka:

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi|PB|^2 h = \frac{\pi h^2 r^2}{3(h - 2r)} = \frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{h^2}{h - 2r}$$

Z warunków zadania wynika, że $h > 2r$, zatem dziedziną wyznaczonej funkcji jest $D = (2r; \infty)$.

Szukamy takiego argumentu h funkcji $V(h)$, dla którego ta funkcja przyjmuje najmniejszą wartość.

Zwróćmy uwagę, że r jest w tym wypadku wielkością daną, więc przy obliczaniu pochodnej traktujemy ją jako stałą.

$$V'(h) = \frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{2h(h - 2r) - h^2}{(h - 2r)^2} = \frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{h^2 - 4rh}{(h - 2r)^2} = \frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{h(h - 4r)}{(h - 2r)^2}, \quad D' = (2r; \infty)$$

$$V'(h) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{h(h - 4r)}{(h - 2r)^2} = 0 \text{ i } h \in D' \Leftrightarrow h = 4r$$

$$V'(h) > 0 \Leftrightarrow h \in (4r; \infty)$$

$$V'(h) < 0 \Leftrightarrow h \in (2r; 4r)$$

h	$(2r; 4r)$	$4r$	$(4r; \infty)$
$V'(h)$	–	0	+
$V(h)$	$\searrow$	min.	$\nearrow$

W punkcie $h = 4r$ funkcja ma minimum. Jest ono jednocześnie najmniejszą wartością funkcji w całej dziedzinie.

Odp.: Wysokość stożka o najmniejszej objętości jest równa $4r$.

Zadania

W każdym z zadań 8.1–8.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź.

Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

8.1. Objętości pewnych brył są liczone według wzoru $V(x) = 3\pi(9 - x)x$ dla $x \in (0; 9)$. Największą objętość ma bryła, dla której x jest

A. równe 4,5. B. równe 6. C. równe 3. D. różne od 4, 5, 6 i 3.

Odpowiedzi i rozwiązania

8.1. A

8.2. D

8.3. D

8.4. $\frac{2\sqrt{6}}{3}a, \frac{2\sqrt{3}}{3}a$

8.5. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

8.6. promień podstawy: $\frac{1}{3}a$,
wysokość: $\frac{1}{3}H$, $V = \frac{\pi a^2 H}{27}$

8.7. promień podstawy: $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$,
wysokość: $\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$

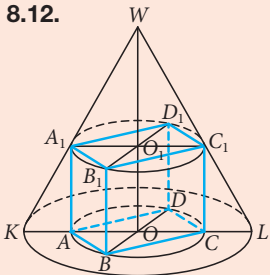
8.8. $53\frac{1}{3}\pi$

8.9. $d\sqrt{3}$

8.10. $\frac{4\pi R^3 \sqrt{3}}{9}$

8.11. Patrz s. 100.

8.12.



$$H = |OW|, R = |OK|, h = |AA'|, x = |BC|$$

$$\frac{|AB|}{|BC|} = 2, \text{ więc } |AB| = 2x,$$

$$|AC| = \sqrt{(2x)^2 + x^2} = x\sqrt{5}, \quad |OA| = x\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\triangle KOW \sim \triangle KAA' \text{ (cecha kkk)}$$

$$\frac{R}{H} = \frac{R - \frac{x\sqrt{5}}{2}}{h}, \quad h = \frac{\left(R - \frac{x\sqrt{5}}{2}\right)H}{R}, \quad \frac{x\sqrt{5}}{2} < R,$$

$$\text{czyli } x < \frac{2\sqrt{5}}{5}R$$

8.2. Objętości pewnych brył są liczone według wzoru $V(x) = \pi(6-x)x^2$ dla $x \in (0; 6)$. Największa objętość wynosi

A. 36π .B. 16π .C. 12π .D. 32π .

8.3. Funkcja $P_c(h)$ opisuje pole powierzchni całkowitej stożka opisanego na kuli o promieniu 6 w zależności od jego wysokości. Dziedziną tej funkcji jest zbiór

A. $(0; 6)$.B. $(0; 12)$.C. $(6; \infty)$.D. $(12; \infty)$.

8.4. Romb o boku długości a obraca się wokół jednej z przekątnych. Wyznacz długości przekątnych tego rombu tak, aby objętość powstałej bryły była jak największa.

8.5. Wyznacz wysokość tego ze stożków o tworzącej a , którego objętość jest największa.

8.6. W ostrosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy a i wysokości H wpisano walec w ten sposób, że dolna podstawa walca jest zawarta w podstawie ostrosłupa, a górna podstawa jest styczna do czterech ścian bocznych ostrosłupa. Wyznacz wymiary walca o największej objętości oraz oblicz tę objętość.

8.7. Jakie wymiary powinna mieć puszka do konserw w kształcie walca o objętości V , aby na jej wykonanie trzeba było zużyć jak najmniej blachy o ustalonej grubości?

8.8. W stożek o wysokości 8 i polu powierzchni bocznej 60π wpisano walec o największej objętości. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.

8.9. Rozpatrujemy ostrosłupy prawidłowe czworokątne, w których odległość środka podstawy od krawędzi bocznej jest równa d . Wyznacz wysokość takiego ostrosłupa, którego objętość jest najmniejsza.

8.10. Wyznacz największą objętość walca wpisanego w kulę o promieniu R .

* 8.11. Na kuli opisano ostrosłup prawidłowy czworokątny o najmniejszej objętości. Oblicz stosunek objętości ostrosłupa do objętości kuli.

* 8.12. W stożek o promieniu podstawy R i wysokości H wpisano prostopadłościan, w którym stosunek krawędzi podstawy jest równy 2. Wyznacz wymiary prostopadłościanu o największej objętości.

$V(x)$ – objętość prostopadłościanu

$$V(x) = 2x \cdot x \cdot \frac{\left(R - \frac{x\sqrt{5}}{2}\right)H}{R} = \frac{H}{R} (2x^2 R - x^3 \sqrt{5}), \quad x \in \left(0; \frac{2\sqrt{5}}{5}R\right)$$

$$V'(x) = \frac{H}{R} (4xR - 3x^2 \sqrt{5}) = \frac{H}{R} x (4R - 3x\sqrt{5})$$

$$V'(x) = 0 \text{ dla } x = \frac{4R}{3\sqrt{5}} = \frac{4R\sqrt{5}}{15}$$

$$V'(x) > 0 \text{ dla } x \in \left(0; \frac{4R\sqrt{5}}{15}\right), \quad V'(x) < 0 \text{ dla } x \in \left(\frac{4R\sqrt{5}}{15}; \frac{2R\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$\text{Zatem } V(x) \text{ jest największe dla } x = \frac{4R\sqrt{5}}{15}. \text{ Wtedy } 2x = \frac{8R\sqrt{5}}{15},$$

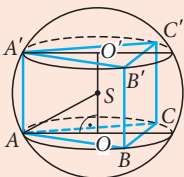
$$h = \left(R - \frac{4R\sqrt{5}}{15} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \frac{H}{R} = \frac{1}{3}H. \text{ Odpowiedź: } \frac{4R\sqrt{5}}{15}, \frac{8R\sqrt{5}}{15}, \frac{H}{3}$$

- * **8.13.** W kulę o promieniu 3 wpisano ostrosłup prawidłowy trójkątny o największej objętości. Jaka jest wysokość tego ostrosłupa?
- * **8.14.** Wyznacz największą objętość stożka wpisanego w kulę o promieniu 1.
- * **8.15.** Jedna z krawędzi ostrosłupa trójkątnego ma długość x , a pozostałe krawędzie mają długość 1. Dla jakiej wartości x objętość ostrosłupa jest największa?

Prosto do matury



- 1.** Obwód przekroju osiowego walca jest równy 4. Funkcja $V(r)$ opisuje objętość tego walca w zależności od promienia r jego podstawy. Oceń prawdziwość podanych zdań.
- A. Wysokość tego walca jest równa $2 - 2r$.
- B. Funkcję $V(r)$ można opisać wzorem $V(r) = -2\pi r^3 + 2\pi r^2$.
- C. Dziedziną funkcji $V(r)$ jest zbiór $(0; 2)$.
- 2.** Wyznacz największe pole powierzchni bocznej stożka, którego przekrój osiowy ma obwód równy 12.
- 3.** Suma długości wszystkich krawędzi podstawy i wysokości ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 36. Wyznacz długość krawędzi podstawy ostrosłupa, którego objętość jest największa, i oblicz tę objętość.
- D 4.** Wykaż, że objętość bryły otrzymanej w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego wokół przeciwprostokątnej jest największa, jeśli ten trójkąt jest równoramienny.
- 5.** Wyznacz największą objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego wpisanego w kulę o promieniu R .



$|SA| = R$, $h = |OO'|$ – wysokość graniastosłupa
 $|OA| = r$ – promień kuli opisanej na podstawie graniastosłupa

$$r = |AB| \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ więc } |AB| = r\sqrt{3}$$

$$P_p = \frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$$

$$\text{W trójkącie AOS: } r^2 = R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

8.13. Patrz s. 97.

8.14. Patrz s. 98.

8.15. Patrz s. 99.

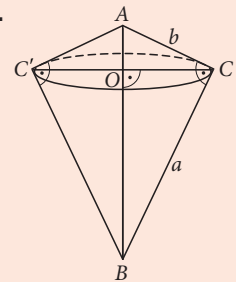
Prosto do matury

1. P, P, F

2. 9π

3. długość krawędzi: 8, $V = 64\sqrt{3}$

4.



Niech $|AB| = c$.

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |OC| = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BC|$$

$$|OC| = \frac{ab}{c}, \quad b^2 = c^2 - a^2$$

$$V(a) = \frac{1}{3}\pi|OC|^2(|OA| + |OB|) =$$

$$= \frac{\pi}{3c}(a^2c^2 - a^4), \quad a \in (0; c)$$

$$V'(a) = \frac{\pi}{3c}(2ac^2 - 4a^3) =$$

$$\frac{2\pi}{3c}a(c^2 - 2a^2)$$

$$V'(a) = 0, \text{ gdy } a^2 = \frac{c^2}{2},$$

$$a = \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{c\sqrt{2}}{2}$$

$$V'(a) > 0 \text{ dla } a \in \left(0; \frac{c\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$V'(a) < 0 \text{ dla } a \in \left(\frac{c\sqrt{2}}{2}; c\right)$$

Zatem V jest największe, gdy

$a = \frac{c\sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{c\sqrt{2}}{2}$, czyli trójkąt jest równoramienny.

$V(h)$ – objętość graniastosłupa

$$V(h) = P_p \cdot h = \frac{3\sqrt{3}r^2}{4} \cdot h = \frac{3\sqrt{3}}{4} \left(R^2h - \frac{h^3}{4}\right), \quad h \in (0; 2R)$$

$$V'(h) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \left(R^2 - \frac{3h^2}{4}\right), \quad V'(h) = 0, \text{ gdy } \frac{3h^2}{4} = R^2, \quad h = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$$

$$V'(h) > 0 \text{ dla } h \in \left(0; \frac{2\sqrt{3}}{3}R\right), \quad V'(h) < 0 \text{ dla } h \in \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}R; 2R\right)$$

Zatem V rośnie w przedziale $\left(0; \frac{2\sqrt{3}}{3}R\right)$ i maleje

w przedziale $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}R; 2R\right)$, więc największą wartością jest

$$V\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}R\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \left(R^2 - \frac{R^2}{3}\right) \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}R = R^3.$$

9. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–19 jest tylko jedna poprawna odpowiedź.

Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

Odpowiedzi i rozwiązania

1. B
 2. D
 3. C
 4. C
 5. B
 6. B
 7. B
1. Ile jest płaszczyzn przechodzących przez punkt A i prostopadłych do danej prostej k takiej, że $A \notin k$?
A. zero B. jedna C. dwie D. nieskończenie wiele
 2. Proste PA i PB są prostopadłe i nachylone do płaszczyzny π pod kątem 45° . Punkt P jest oddalony od płaszczyzny π o 3 cm. Odległość między punktami A i B leżącymi na płaszczyźnie π jest równa
A. $3\sqrt{2}$ cm. B. 4 cm. C. $6\sqrt{2}$ cm. D. 6 cm.
 3. Krysia przesyłał piasek z wypełnionej foremki sześcienniej o krawędzi 5 cm do foremki w kształcie stożka o wysokości i promieniu podstawy równych 5 cm. Jaką część stożkowej foremki wypełnił przesypany piasek?
A. $\frac{1}{3}$ B. 1 C. $\frac{3}{\pi}$ D. Piasku było za dużo, więc się wysypał.
 4. W pewnym gospodarstwie stoi zbiornik na deszczówkę. Zbiornik ma kształt prostopadłościanu o wysokości 0,5 m. Ile czasu musi padać deszcz dający 20 mm opadu na godzinę, aby zbiornik całkowicie się zapełnił?
A. 7 godzin B. 5 godzin C. 25 godzin D. 50 godzin
 5. Objętość sześcianu jest równa 343 cm^3 . Wskaż pole powierzchni tego sześcianu.
A. 126 cm^2 B. 294 cm^2 C. $343\sqrt{2} \text{ cm}^2$ D. 360 cm^2
 6. Dzieci mają w ogrodzie plastikowy basen. Podłogą basenu jest koło o średnicy 2 m, a jego ściany są prostopadłe do podłogi. Wodę do tego basenu trzeba nalewać dziesięciolitrowym wiadrem. Jaka będzie wysokość słupa wody po wlaniu 20 wiader? Wybierz najlepsze przybliżenie wyniku.
A. 64 cm B. 6,4 cm C. 10 cm D. 12 cm
 7. Przyjmijmy, że pomarańcza jest kulą o średnicy 7 cm. Wyciśnięty sok stanowi 60% objętości owocu. Ile pomarańczy trzeba zużyć, aby otrzymać 0,5 litra soku?
A. 4 C. 6
B. 5 D. 7



Multiteka

- Moc Słońca
- Matematyka w sklepie modelarskim
- Zatankować raketę
- Lot nad Pacyfikiem
- Gdzie jest najbliższa kawiarnia?

dlanauczyciela.pl | Klasówka 1

Generator
testów i sprawdzianów

8. Które z podanych zdań jest fałszywe?
- A. Ostrosłup trójkątny jest czworościanem.
 B. Czworościan foremny jest ostrosłupem prawidłowym trójkątnym.
 C. Czworościan, który ma wszystkie krawędzie równe, jest foremny.
 D. Ostrosłup prawidłowy trójkątny jest czworościanem foremnym.
9. V_1 jest objętością kuli o promieniu r_1 , V_2 jest objętością kuli o promieniu r_2 i $V_2 = 3V_1$. Zatem
- A. $\frac{r_2}{r_1} = \sqrt[3]{3}$. B. $r_2 = 3r_1\sqrt[3]{3}$. C. $r_2^3 - r_1^3 = 3r_1^3$. D. $r_2 = r_1\sqrt{3}$.
10. Suma odległości dowolnego punktu sześcianu o krawędzi 5 cm od wszystkich ścian sześcianu jest równa
- A. 15 cm. B. 20 cm. C. 25 cm. D. 30 cm.
11. Wskaż liczbę przekątnych graniastosłupa o podstawie pięciokątnej.
- A. 5 B. 10 C. 15 D. 20
12. Wskaż liczbę krawędzi graniastosłupa o 12 ścianach.
- A. 24 B. 30 C. 32 D. 36
13. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna o długości a tworzy z podstawą kąt 60° . Wskaż objętość tego ostrosłupa.
- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ C. $\frac{1}{3}a^3$ D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$
14. Cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej czworościanu foremnego do płaszczyzny podstawy jest równy
- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
15. Czworościan ma pięć krawędzi o długości l cm, a szóstą o długości 10 cm. Zatem l jest
- A. równe 5. C. równe $2\sqrt{3}$.
 B. mniejsze od 5. D. większe od 5.
16. Kąt rozwarcia stożka, którego powierzchnia boczna po rozwinięciu jest półkołem, jest równy
- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .
17. V_a oznacza objętość sześcianu o krawędzi a , zaś V_{3a} – objętość sześcianu o krawędzi $3a$. Zatem
- A. $V_{3a} = 3V_a$. B. $V_{3a} = 9V_a$. C. $V_a = \frac{1}{18}V_{3a}$. D. $V_{3a} = 27V_a$.

8. D

9. A

10. A

11. B

12. B

13. B

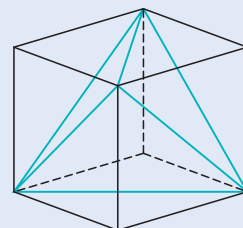
14. D

15. D

16. C

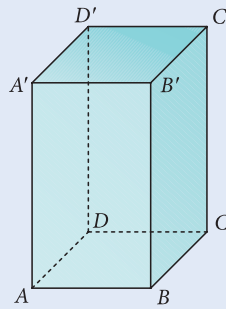
17. D

- 18. B**
- 18.** Krawędzie czworoscianu są przekątnymi ścian pewnego sześcianu o krawędzi a . Zatem wysokość tego czworoscianu wynosi
- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}a$. B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}a$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. D. $3\sqrt{3}a$.
- 19. B**
- 19.** Stosunek pól powierzchni dwóch ośmiościanów foremnych jest równy $1 : 4$. Stosunek objętości tych ośmiościanów jest równy
- A. $1 : 2$. B. $1 : 8$. C. $1 : 16$. D. $1 : 64$.
- W zadaniach 20–32 oceń prawdziwość podanych zdań.**
- 20. F, P, F**
- 20.** Płaszczyzna jest wyznaczona jednoznacznie przez
- A. dwie różne proste. B. trzy niewspółliniowe punkty. C. prostą i punkt.
- 21. F, P, P**
- 21.** Punkty A , B , C i D nie leżą w jednej płaszczyźnie. Skośne są zatem proste
- A. AB i CA . B. BC i AD . C. AC i BD .
- 22. P, F, P**
- 22.** Każdy wielościan wypukły ma mniej
- A. wierzchołków niż krawędzi.
B. ścian niż wierzchołków.
C. ścian niż krawędzi.
- 23. P, F, P**
- 23.** Cztery wierzchołki sześcianu o krawędzi 1 cm łączymy nitką każdy z każdym, jak na rysunku, i otrzymujemy szkielet pewnego wielościanu T .
- A. Wielościan T jest czworoscianem foremnym.
B. Objętość wielościanu T jest równa $\frac{1}{4}\text{ cm}^3$.
C. Pole powierzchni wielościanu T jest równe $2\sqrt{3}\text{ cm}^2$.
- 24. P, P, P**
- 24.** Drewnianą, pomalowaną kostkę sześcienną rozpiłowano na 125 przystających sześcianników. Wśród nich
- A. 27 jest niepomalowanych.
B. 36 ma pomalowane dokładnie dwie ściany.
C. 81 ma pomalowaną co najwyżej jedną ścianę.
- 25. P, P, P**
- 25.** Dany jest graniastosłup prosty prawidłowy o podstawie dziesięciokątnej. Przekrojem płaskim tego graniastosłupa
- A. może być wielokąt foremny.
B. może być prostokąt.
C. jest wielokąt o co najwyżej dwudziestu bokach.



26. Na rysunku przedstawiono prostopadłościan $ABCD A' B' C' D'$.

- A. Prosta DC' jest prostopadła do płaszczyzny $ABCD$.
- B. Prosta DC jest prostopadła do płaszczyzny $ADD'A'$.
- C. Prosta DC' jest równoległa do płaszczyzny $ABB'A'$.



26. F, P, P

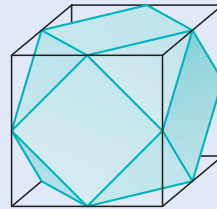
27. W pewnym czworościanie cztery krawędzie mają długość a i dwie długość b , gdzie $a \neq b$.

- A. Każda ze ścian tego czworościanu jest trójkątem równoramiennym.
- B. Co najwyżej jedna ze ścian tego czworościanu jest trójkątem równobocznym.
- C. Każda ze ścian tego czworościanu może być trójkątem nierównobocznym.

27. P, P, P

28. Z kostki sześciennej odcięto we wszystkich narożach takie same ostrosłupy jak na rysunku. Otrzymany w ten sposób wielościan ma

- A. 12 wierzchołków.
- B. 24 krawędzie.
- C. 14 ścian.



28. P, P, P

29. Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny.

- A. Kąt dwuścienny między sąsiednimi ścianami bocznymi tego graniastosłupa ma miarę 120° .
- B. Przekrój, do którego należą środki okręgów opisanych na podstawach tego graniastosłupa, jest prostokątem.
- C. Kąt nachylenia przekątnej tego graniastosłupa do płaszczyzny podstawy jest nie większy niż 60° .

29. P, P, F

30. Istnieje ostrosłup prawidłowy sześciokątny o polu powierzchni całkowitej 1514, który ma

- A. objętość mniejszą niż $\frac{1}{1514}$.
- B. pole powierzchni bocznej równe 514.
- C. pole podstawy równe 514.

30. P, F, P

31. F, P, F

32. F, P, F

33. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. *Wskazówka:* Zauważ, że pole powierzchni nie ma wpływu na wynik rozwiązania.

34. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

35. $2\sqrt{7}$

36. $36\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\right)$

37. 45°

38. a) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$
b) 55°
c) 45°

39. $4\sqrt{17}\pi$

31. Dany jest n -kątny ostrosłup prawidłowy ($n > 3$).

- A. Spodek wysokości tego ostrosłupa może być jednym z wierzchołków podstawy.
- B. Wszystkie krawędzie boczne tego ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod takim samym kątem.
- C. Ściany boczne tego ostrosłupa są trójkątami równobocznymi.

32. Punkt O jest spodkiem wysokości ostrosłupa trójkątnego, w którym wszystkie krawędzie boczne tworzą z płaszczyzną podstawy kąty o równych miarach.

- A. Punkt O jest punktem przecięcia środkowych trójkąta w podstawie.
- B. Wszystkie krawędzie boczne tego ostrosłupa są tej samej długości.
- C. Punkt O jest środkiem okręgu wpisanego w podstawę.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

33. Pole powierzchni sześcianu jest równe 150. Oblicz stosunek długości krawędzi sześcianu do długości jego przekątnej.

34. Oblicz cosinus kąta między przekątną sześcianu a płaszczyzną jego podstawy.

35. Wymiary prostopadłościanu są w stosunku $1 : 2 : 3$. Najkrótsza krawędź ma długość $\sqrt{2}$. Oblicz długość przekątnej tego prostopadłościanu.

36. Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, którego każda krawędź ma długość 6.

37. Przekątna podstawy prostopadłościanu o podstawie kwadratowej jest dwa razy dłuższa od wysokości tego prostopadłościanu. Wyznacz kąt, który tworzy płaszczyzna przechodząca przez przekątną podstawy i jeden wierzchołek prostopadłościanu z płaszczyzną podstawy tego prostopadłościanu.

38. Podstawą ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest kwadrat o boku a . Wszystkie ściany boczne tego ostrosłupa są trójkątami równobocznymi. W tym ostrosłupie wyznacz

- a) jego wysokość.
- b) kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy (z dokładnością do 1°).
- c) kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy.

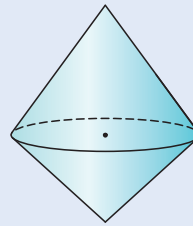
39. Promień kuli i promień podstawy stożka są równe 2. Objętości tych brył są równe. Oblicz pole powierzchni bocznej stożka.

40. Objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym krawędź podstawy jest cztery razy krótsza od wysokości, jest równa 256. Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.

41. Oblicz pole powierzchni całkowitej stożka o kącie rozwarcia 90° i średnicy podstawy równej 18.

42. Średnica podstawy stożka jest trzy razy dłuższa od jego wysokości. Objętość bryły jest równa 144π . Oblicz pole powierzchni bocznej tego stożka.

43. Stosunek długości tworzących stożków połączonych wspólną podstawą (zob. rysunek) jest równy $3:5$, a pole powierzchni bocznej mniejszego stożka wynosi 18. Oblicz pole powierzchni całej bryły.



44. Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt równoboczny o boku a . Objętość i pole powierzchni bocznej tego stożka wyrażają się taką samą liczbą. Oblicz wartość a .

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi



45. W prostopadłościennie przekątne ścian bocznych wychodzące z tego samego wierzchołka tworzą kąt 50° . Każda z tych przekątnych ma długość 5 dm. Oblicz pole powierzchni bocznej i objętość prostopadłościennika (z dokładnością do całości).

46. Do prostopadłościennego naczynia z wodą wpadła metalowa kostka sześcienna o krawędzi długości 2 cm. O ile milimetrów podniósł się poziom wody, jeśli z naczynia nie wylała się ani kropla, a podstawa naczynia ma wymiary $10 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$?

47. W graniastosłupie czworokątnym prawidłowym przekątna o długości d jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α takim, że $\sin \alpha = 0,4$. Wyznacz objętość tego graniastosłupa.

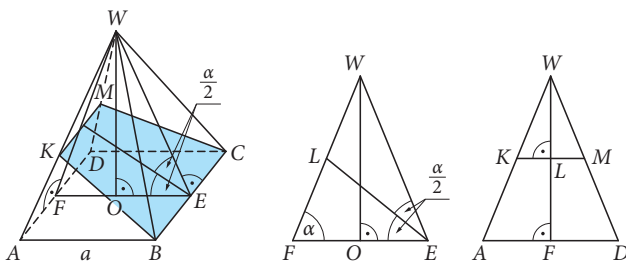


48. Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego tworzy z krawędzią podstawy o długości 12 kąt o mierze 61° . Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa (z dokładnością do całości).

49. Sześcian $ABCD A'B'C'D'$ o krawędzi $5\sqrt{2}$ przecięto płaszczyzną wyznaczoną przez punkty A , C i środek krawędzi $A'D'$. Oblicz pole przekroju.

57. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym przez krawędź podstawy o długości a poprowadzono płaszczyznę, która dzieli kąt dwuścienny α między ścianą boczną a płaszczyzną podstawy ostrosłupa na połowy. Wyznacz pole otrzymanego przekroju.

Odp.:



Z twierdzenia sinusów dla trójkąta FEL :

$$\frac{|EL|}{\sin \alpha} = \frac{|FE|}{\sin \left(180^\circ - \alpha - \frac{\alpha}{2}\right)}, \quad |EL| = \frac{a \sin \alpha}{\sin \frac{3}{2}\alpha}$$

$$\frac{|OF|}{|FW|} = \cos \alpha, \text{ więc } |EW| = |FW| = \frac{|OF|}{\cos \alpha} = \frac{a}{2 \cos \alpha}$$

Z twierdzenia o dwusiecznej mamy:

$$\frac{|FL|}{|LW|} = \frac{|EF|}{|EW|} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2 \cos \alpha}} = 2 \cos \alpha$$

$$\text{Zatem: } \frac{|FW|}{|LW|} = \frac{|FL| + |LW|}{|LW|} = \frac{|FL|}{|LW|} + 1 = 2 \cos \alpha + 1$$

$\triangle ADW \sim \triangle KMW$ (cecha kkk),

$$\text{więc } \frac{|AD|}{|KM|} = \frac{|FW|}{|LW|}, \quad |KM| = \frac{a}{1 + 2 \cos \alpha}$$

$$P_{BCKM} = \frac{|BC| + |KM|}{2} \cdot |EL| = \frac{a + \frac{a}{1 + 2 \cos \alpha}}{2} \cdot \frac{a \sin \alpha}{\sin \frac{3}{2}\alpha} = \frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha}{(1 + 2 \cos \alpha) \cdot \sin \frac{3}{2}\alpha} \cdot a^2$$

40. 256

41. $81\pi(1 + \sqrt{2})$

42. $12\pi\sqrt{13} \cdot \sqrt[3]{9}$

43. 48

44. $a = 4\sqrt{3}$

45. $P_b = 48 \text{ dm}^2$, $V = 36 \text{ dm}^3$

46. o 0,4 mm

47. $0,168d^3$

48. $V = 1350$, $P = 779$

49. 56,25

50. 108

$$51. P_c = 8(24 + 25\sqrt{5}) \text{ cm}^2, \\ V = 480\sqrt{5} \text{ cm}^3$$

$$52. \text{ szerokość wału: } 11 \text{ m}; \\ 41\,569 \text{ m}^3$$

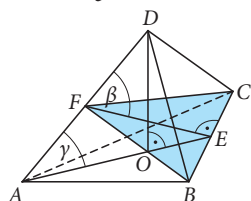
$$53. V = 245, P = 264$$

$$54. 2\sqrt[3]{3}$$

$$56. \text{ a) } V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}, P_c = a^2\sqrt{3}$$

$$\text{ b) } \cos \alpha = \frac{1}{3}, \alpha \approx 71^\circ$$

c)



$$\sin \gamma = \frac{|OD|}{|AD|} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\sin \sphericalangle AFE = \sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta$$

Z twierdzenia sinusów
dla trójkąta AEF:

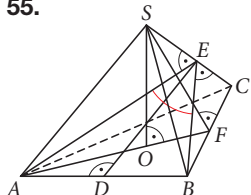
$$\frac{|EF|}{\sin \gamma} = \frac{|AE|}{\sin \beta}$$

$$|EF| = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}}{\sin \beta} = \frac{a\sqrt{2}}{2 \sin \beta}$$

$$S = P_{BCF} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2 \sin \beta} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4 \sin \beta}$$

57. Patrz s. 109.

55.



$$\sphericalangle AEB = 2\alpha, \sphericalangle BED = \alpha$$

$$\frac{|DB|}{|BE|} = \sin \alpha, \text{ więc } |BE| = \frac{a}{2 \sin \alpha}$$

$$|BE| < |BC|, \text{ czyli } \frac{a}{2 \sin \alpha} < a,$$

$$\sin \alpha > \frac{1}{2}, \alpha > 30^\circ$$

$$\triangle SFC \sim \triangle BEC \text{ (cecha kkk)}$$

$$\frac{|SF|}{|FC|} = \frac{|BE|}{|EC|}, |EC| = \sqrt{|BC|^2 - |BE|^2}$$

50. Krótsza przekątna graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość $4\sqrt{3}$ i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30° . Oblicz objętość tego graniastosłupa.

51. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa prostego, w którym podstawa jest rombem o przekątnych długości 12 cm i 16 cm, a przekątna ściany bocznej ma długość 15 cm.



52. Pionowy przekrój poprzeczny wału ochronnego ma kształt trapezu równoramiennego, którego górna podstawa jest równa 5 m, a ramiona o długości 6 m są nachylone do poziomu pod kątem 60° . Oblicz dolną szerokość wału. Ile metrów sześciennych ziemi potrzeba do usypania takiego wału o długości 1 km (z dokładnością do 1 m^3)?



53. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość ściany bocznej opuszczona z wierzchołka ostrosłupa jest równa 10, a kąt nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy ma miarę 63° . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa (z dokładnością do całości).

54. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego o objętości $2\sqrt{26}$ jest trzy razy dłuższa od krawędzi podstawy. Oblicz krawędź podstawy.

* 55. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość a . Ściany boczne są trójkątami ostrokątnymi. Miara kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi jest równa 2α . Wyznacz objętość tego ostrosłupa. Podaj warunek, który musi spełniać kąt α .

56. Dany jest czworościan foremny o krawędzi długości a .

a) Wyznacz objętość V i pole P_c powierzchni całkowitej czworościanu.

b) Wyznacz cosinus kąta α między sąsiednimi ścianami tego czworościanu. Podaj miarę tego kąta z dokładnością do 1° .

c) Wyznacz pole S przekroju czworościanu płaszczyzną poprowadzoną przez wybraną krawędź i przecinającą przeciwległą krawędź pod danym kątem β .

* 57. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym przez krawędź podstawy o długości a poprowadzono płaszczyznę, która dzieli kąt dwuścienny α między ścianą boczną a płaszczyzną podstawy ostrosłupa na połowy. Wyznacz pole otrzymanego przekroju.

$$|SF| = \frac{|FC| \cdot |BE|}{|EC|} = \frac{\frac{1}{2}a \cdot \frac{a}{2 \sin \alpha}}{\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2 \sin \alpha}\right)^2}} = \frac{a}{2\sqrt{4 \sin^2 \alpha - 1}}$$

$$\sphericalangle BSC < 90^\circ, \text{ więc } \sphericalangle FSC < 45^\circ, \cos \sphericalangle FSC > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \sphericalangle FSC = \cos \sphericalangle EBC = \frac{|BE|}{|BC|} = \frac{1}{2 \sin \alpha}$$

$$\text{Zatem: } \frac{1}{2 \sin \alpha} > \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}, \alpha < 45^\circ$$

$$|OS|^2 = |SF|^2 - |OF|^2 = \frac{a^2}{4\sqrt{4 \sin^2 \alpha - 1}} - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{a^2 \cos^2 \alpha}{3(4 \sin^2 \alpha - 1)}$$

$$\alpha \text{ jest kątem ostrym, więc } \sqrt{\cos^2 \alpha} = \cos \alpha.$$

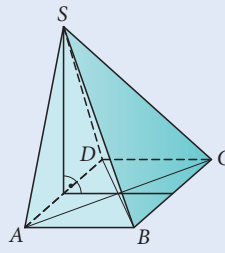
$$|OS| = \frac{a \cos \alpha}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{4 \sin^2 \alpha - 1}}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot |OS| =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a \cos \alpha}{\sqrt{3} \sqrt{4 \sin^2 \alpha - 1}} =$$

$$= \frac{a^3 \cos \alpha}{12 \sqrt{4 \sin^2 \alpha - 1}}, \alpha \in (30^\circ; 45^\circ)$$

58. Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest prostokąt. Ściana ADS jest prostopadła do płaszczyzny podstawy, $|AB| = 4$, $|BC| = 6$, $|AS| = |DS| = 2\sqrt{21}$. Wyznacz kąt nachylenia krawędzi CS do płaszczyzny podstawy.



59. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny równoramienny o przeciwprostokątnej c . Wszystkie krawędzie boczne mają długość b . Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

60. Podstawą ostrosłupa jest trapez prostokątny o podstawach 12 i 6. Wszystkie ściany boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

61. Obracając prostokąt dookoła jednego boku, otrzymujemy walec o objętości V_1 , a obracając go dookoła drugiego boku, otrzymujemy walec o objętości V_2 . Wyznacz pole tego prostokąta. Wykonaj obliczenia dla $V_1 = 1,44\pi$ i $V_2 = 1,2\pi$.

62. Promień podstawy walca jest równy r , a przekątna przekroju osiowego jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α . Wyznacz objętość i pole powierzchni całkowitej tego walca.

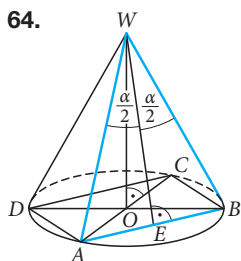
63. Wyznacz objętość i pole powierzchni bocznej stożka o kącie rozwarcia 2α i promieniu podstawy równym r .

64. W podstawę stożka wpisano kwadrat o boku a . Płaszczyzna przechodząca przez wierzchołek stożka i zawierająca jeden z boków tego kwadratu tworzy w przecięciu z powierzchnią stożka trójkąt, w którym kąt przy wierzchołku jest równy α . Wyznacz objętość stożka. Jaki warunek musi spełniać kąt α , aby zadanie miało rozwiązanie?

65. Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 6 i 8 obrócono najpierw wokół krótszej, a następnie wokół dłuższej przyprostokątnej. Oblicz stosunek pól powierzchni i stosunek objętości powstałych stożków.

66. Wyznacz stosunek pól powierzchni kuli i sześcianu mających równe objętości.

67. Poprowadzono płaszczyznę równoległą do podstawy stożka, dzielącą wysokość tego stożka w stosunku $2:3$, licząc od wierzchołka. W ten sposób otrzymano dwie bryły. Wyznacz stosunek objętości tych brył.



$$\begin{aligned}
 |AB| &= a - \text{długość boku kwadratu} \\
 \frac{|AE|}{|AW|} &= \sin \frac{\alpha}{2}, \text{ więc } |AW| = \frac{|AE|}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \\
 |OA| &= \frac{a\sqrt{2}}{2} \\
 |OW| &= \sqrt{\left(\frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{\cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \\
 V &= \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{a\sqrt{\cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi a^3 \sqrt{\cos \alpha}}{12 \sin \frac{\alpha}{2}} \\
 \alpha &< \angle AOB, \text{ czyli } \alpha < 90^\circ
 \end{aligned}$$

58. 60°

$$\mathbf{59.} \quad \frac{c^2 \sqrt{4b^2 - c^2}}{24}$$

$$\mathbf{60.} \quad 96\sqrt{3}$$

$$\mathbf{61.} \quad \sqrt[3]{\frac{V_1 \cdot V_2}{\pi^2}}, 1,2$$

$$\mathbf{62.} \quad V = 2\pi r^3 \operatorname{tg} \alpha, \\ P_c = 2\pi r^2 (1 + 2 \operatorname{tg} \alpha)$$

$$\mathbf{63.} \quad V = \frac{\pi r^3}{3 \operatorname{tg} \alpha}, \quad P_b = \frac{\pi r^2}{\sin \alpha}$$

$$\mathbf{65.} \quad \text{stosunek pól: } \frac{3}{2}, \quad \text{stosunek} \\ \text{objętości: } \frac{4}{3}$$

66. a – długość boku sześcianu
 r – promień kuli

$$\begin{aligned}
 V_k &= \frac{4}{3}\pi r^3, \quad V_{sz} = a^3 \\
 a^3 &= \frac{4}{3}\pi r^3, \quad a = r \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}} \\
 \frac{P_k}{P_{sz}} &= \frac{4\pi r^2}{6a^2} = \frac{4\pi r^2}{6 \cdot r^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{16\pi^2}{9}}} = \\
 &= \frac{2\pi}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{16\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{8\pi^3}{27} \cdot \frac{9}{16\pi^2}} = \\
 &= \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} \approx \frac{4}{5}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{67.} \quad 8:117$$

$$68. \frac{\pi r^3}{3 \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$69. \frac{16}{9}R$$

$$70. \frac{\pi \sqrt{3} a^3 \operatorname{tg} \alpha}{216}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$71. V = \pi h^3, \quad \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$72. \frac{\pi a^3 \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{24 \cos^3 \frac{\alpha}{2}}$$

$$73. \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$74. 2\sqrt{6}$$

$$75. \frac{\sqrt{2} S^3}{24}$$

68. Promień kuli wpisanej w stożek wynosi r , a kąt rozwarcia stożka ma miarę 2α . Wyznacz objętość stożka.

69. Na stożku, którego pole powierzchni bocznej jest trzykrotnie większe od pola podstawy, opisano kulę o promieniu R . Wyznacz wysokość stożka.

70. Podstawą ostrosłupa prawidłowego jest trójkąt o boku a . Ściana boczna tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α . Wyznacz objętość stożka wpisanego w ten ostrosłup.

71. Stożek wpisano w walec o wysokości h . Podstawa stożka jest podstawą walca, a wierzchołek stożka leży w środku górnej podstawy walca. Pola powierzchni bocznych stożka i walca są równe. Wyznacz objętość stożka oraz kąt α , który tworzy wysokość stożka z jego tworzącą.

72. W ostrosłupie $ABCS$ wpisanym w stożek podstawa ABC jest trójkątem równoramiennym, w którym $|AC| = |AB| = a$ i $\sphericalangle BAC = \alpha$. Ściana boczna BCS ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem β . Wyznacz objętość stożka.

73. W stożek, którego przekrojem osiowym jest trójkąt równoboczny, wpisano walec o największej objętości. Wyznacz stosunek wysokości walca do promienia podstawy stożka.

74. Wyznacz długość krawędzi podstawy takiego ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego opisanego na kuli o promieniu 3, którego objętość jest jak najmniejsza.

75. Wyznacz największą objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o polu powierzchni całkowitej S .