

Kombinatoryka i teoria prawdopodobieństwa

2

Umiejętności

Po klasie trzeciej szkoły ponadpodstawowej uczeń:

- oblicza prawdopodobieństwo w prostych sytuacjach z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa,
- zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych,
- stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania,
- wykonuje działania na zdarzeniach i stosuje własności prawdopodobieństwa.

Po tym dziale uczeń:

- wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych,
- wykorzystuje wzory na liczbę kombinacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych,
- stosuje podstawowe własności symbolu Newtona,
- stosuje podstawowe własności trójkąta Pascala,
- korzysta ze wzorów na $(a + b)^n$ i $(a - b)^n$,
- oblicza prawdopodobieństwo z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa,
- zlicza obiekty z wykorzystaniem wzorów kombinatorycznych,
- oblicza prawdopodobieństwo warunkowe,
- wykorzystuje w zadaniach twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym,
- wykorzystuje w zadaniach schemat Bernoulliego.

1. Permutacje i wariacje

Umiejętności:

- wykorzystanie wzorów na liczbę permutacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych

Korzystanie z klasycznej definicji prawdopodobieństwa wymaga precyzyjnego wyznaczenia liczby wszystkich zdarzeń elementarnych w danym doświadczeniu losowym oraz liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających interesującemu nas zdarzeniu losowemu.

Zanim przejdziemy do zagadnień poświęconych rachunkowi prawdopodobieństwa, zajmiemy się uporządkowaniem i rozszerzeniem teorii związanej ze zliczaniem liczby zdarzeń w danym doświadczeniu losowym, inaczej mówiąc – zagadnieniami **kombinatorycznymi**.

Nauka zajmująca się zliczaniem, na ile sposobów może zajść dane zdarzenie losowe, jest częścią działu nazywanego w matematyce **kombinatoryką**.

Przypomnijmy reguły, z których korzystaliśmy wcześniej.

Twierdzenie

Reguła mnożenia

Jeśli zbiór A ma m elementów, a zbiór B ma n elementów, to liczba par (x, y) takich, że $x \in A$ i $y \in B$, jest równa $m \cdot n$.

Regułę mnożenia można uogólnić na n ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$) zbiorów, z których każdy ma skończoną liczbę elementów.

Twierdzenie

Reguła dodawania

Jeżeli zbiory A i B są rozłączne, to $\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}$.

Przykład 1

- O godzinie 12⁰⁰ w karcie dań było 5 zup, 7 drugich dań i 3 desery. Na ile sposobów można było wybrać zestaw obiadowy składający się z zupy, drugiego dania i deseru?
- Po godzinie 13⁰⁰ do menu dodano 4 zupy, 3 drugie dania i 2 desery. Ile obecnie jest możliwości wyboru pełnych zestawów obiadowych?

MKP

tematy 1.1–1.4, 1.6

Multiteka

- Zdarzenie elementarne – rzut dwiema kostkami do gry

dlaNauczyciela.pl | Kartkówka 2.1

Generator
testów i sprawdzianów

Rozwiązanie

a) Korzystamy z reguły mnożenia. Wszystkich zestawów obiadowych było:

$$5 \cdot 7 \cdot 3 = 105$$

b) W tym przypadku możliwych zestawów jest:

$$(5 + 4) \cdot (7 + 3) \cdot (3 + 2) = 450 \quad \leftarrow \text{reguła mnożenia i reguła dodawania}$$

Odp.: a) 105 b) 450

Przypomnijmy dwa omówione w trzeciej klasie sposoby losowania.

Zakładamy, że w urnie mamy pewną liczbę ponumerowanych kul. Czynność wyjmowania kuli z urny można wielokrotnie powtarzać. Rozróżniamy dwa sposoby losowania – obydwa uwzględniające kolejność losowanych numerów.

1. Przed każdym losowaniem stan urny jest taki sam. Inaczej mówiąc, po wylosowaniu (i zanotowaniu wyniku) wyciągnięta kula wrzucana jest z powrotem do urny. W takiej sytuacji mówimy o **losowaniu ze zwracaniem**.
2. Raz wyjęta kula nie wraca do urny. Taki sposób losowania nazywamy **losowaniem bez zwracania**.

Permutacje

Szczególnym przypadkiem losowania kolejno elementów bez zwracania jest wybieranie **wszystkich** kul z urny. Oznacza to, że jeżeli mamy w niej n ponumerowanych kul, to losujemy n razy bez zwracania i interesuje nas kolejność wylosowanych kul.

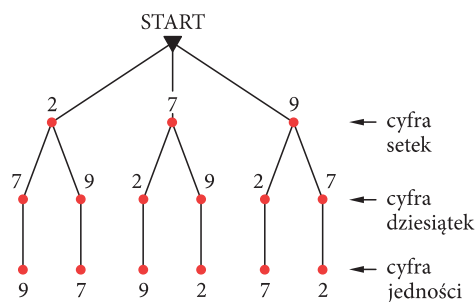
Przykład 2

Trzy klocki podpisane 2, 7, 9 ustawiamy tak, aby przedstawiały trzycyfrowe liczby. Ile jest możliwości takich ustawień?

Rozwiązanie

Możemy sobie wyobrazić, że klocki są w worku. Pierwszy wyciągnięty klocek postawimy na miejscu setek układanej liczby, drugi – na miejscu dziesiątek, trzeci – na miejscu jedności.

Na rysunku obok przedstawiono drzewko wszystkich możliwości.



◀1.5. Malutka Ola uczy się liczyć do pięciu na paluszkach, ale ciągle jeszcze myli kolejność. Na ile różnych sposobów może podać te liczby?

Odp.: 120

◀1.8. Ile jest permutacji zbioru wszystkich cyfr? Ile wśród tych permutacji jest takich, w których cyfry 1, 2, 3 występują obok siebie

- a) w porządku rosnącym?
- b) w porządku malejącym?
- c) w dowolnej kolejności?

Odp.: 10! a) 8! b) 8! c) 3! · 8!

Mamy więc $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ możliwych wyników. Zbudowane w ten sposób liczby to:
279, 297, 729, 792, 927, 972

Zapisane są za pomocą tych samych cyfr, tylko ustawionych w różnej kolejności.

Odp.: 6

Przykład 3 ◀ zad. 1.5

Ustawiamy pięć osób w szeregu. Na ile sposobów możemy to zrobić?

Rozwiązanie

Osobę, którą ustawimy w szeregu jako pierwszą, wybieramy spośród pięciu osób, drugą – spośród czterech itd. Wszystkich możliwych ustawień jest zatem:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Odp.: 120

Takie ustawianie wszystkich elementów skończonego zbioru w ciąg nazywamy permutowaniem zbioru, a każde konkretne ustawienie – **permutacją** jego elementów. Powiemy więc, że jest:

- 6 permutacji zbioru {2, 7, 9},
- 120 permutacji zbioru pięciu osób.

Wniosek

Liczba wszystkich permutacji zbioru n -elementowego jest równa:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Przykład 4 ◀ zad. 1.8

Ile jest takich permutacji zbioru {2, 3, 4, 5, 6}, w których 3 i 4 występują obok siebie w kolejności wzrastania?

Rozwiązanie

Dobrymi ustawieniami są np.: 23456, 34625, 52346.

Jak obliczyć wszystkie możliwości bez ich wypisywania? Wyobraźmy sobie taki przebieg losowania, w którym otrzymamy wyłącznie sprzyjające zdarzenia. Do urny wrzucamy klocki z cyframi 2, 3, 4, 5, 6, z tym, że te dwa oznaczone „3” i „4” sklejamy w odpowiedniej kolejności. Teraz, tak naprawdę, mamy w urnie 4 klocki. Możemy je kolejno ustawić na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ sposoby.

Odp.: 24

Silnia

Definicja

Dla liczby naturalnej $n > 1$ symbol $n!$ (n **silnia**) oznacza iloczyn wszystkich liczb naturalnych od 1 do n :

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

Przyjmujemy również, że $0! = 1$ i $1! = 1$.

Mamy więc:

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ itd.}$$

n	$n!$	n	$n!$
1	1	6	720
2	2	7	5 040
3	6	8	40 320
4	24	9	362 880
5	120	10	3 628 800

Wniosek

Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$: $n! = n \cdot (n-1)!$

Możemy teraz krótko zapisać, że liczba permutacji zbioru:

- 3-elementowego jest równa $3!$,
- 10-elementowego jest równa $10!$ itd.

Przykład 5 ◀ zad. 1.10

Obliczmy:

$$\text{a) } \frac{5!}{2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$$

$$\text{b) } \frac{3! \cdot 4!}{6!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{5}$$

$$\text{c) } \frac{8!}{7!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 8$$

$$\text{d) } \frac{114!}{113!} = \frac{113! \cdot 114}{113!} = 114$$

$$\text{e) } \frac{27!}{25!} = \frac{25! \cdot 26 \cdot 27}{25!} = 26 \cdot 27 = 702$$

$$\text{f) } \frac{4! \cdot 4! \cdot 8!}{3! \cdot 6!} = \frac{4 \cdot 4! \cdot 8!}{6!} = \frac{4 \cdot 4! \cdot 7 \cdot 8}{1} = 5376$$

Zauważmy, że:

- $2! \cdot 3! = 2 \cdot 6 = 12$, ale $(2 \cdot 3)! = 6! = 720$,
- $\frac{5!}{2!} = 60$, ale $\left(\frac{5}{2}\right)!$ nie jest określone.



◀ 1.10. Oblicz.

$$\text{a) } \frac{6!}{4!}, \frac{10!}{8!}, \frac{7!}{4! \cdot 3!}, \frac{5!}{0! \cdot 2!}$$

$$\text{b) } \frac{10!}{6! \cdot 4!}, \frac{7! \cdot 3!}{10!}, \frac{9!}{1! \cdot 8!}, \frac{12!}{10! \cdot 2!}$$

Odpo.: a) 30, 90, 35, 60

$$\text{b) } 210, \frac{1}{120}, 9, 66$$

a) LALKA
b) EUZEBIUSZ
c) ABRAKADABRA

$$\text{b) } \frac{9!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 45\,360$$

$$\text{c) } \frac{11!}{5! \cdot 2! \cdot 2!} = 83\,160$$

◀ zad. 1.11

Ile różnych wyrazów można ułożyć z liter słowa

- a) ANAGRAM? b) NIANIA?

a) Przykładami ułożonych wyrazów są:

Do dyspozycji mamy 7 liter, które możemy permutować na $7!$ sposobów. Jednak niektóre spośród permutacji dadzą identyczne wyrazy, gdyż przestawienie w nich liter A niczego nie zmienia. Zatem liczba wszystkich możliwości jest $3!$ razy mniejsza, bo na tyle sposobów możemy w jednym wyrazie permutować litery A.

b) Litery słowa NIANIA możemy permutować na $6!$ sposobów. Wyrazów otrzymamy $2! \cdot 2! \cdot 2!$ razy mniej, gdyż trzy litery: N, I oraz A, powtarzają się po dwa razy.

Odp.: a) 840 b) 90

7

Sylwia pożyczyła od koleżanki 5 płyt z filmami – dwie komedie oraz trzy horrory. Komedie są oznaczone literami *a*, *b*, natomiast horrory numerami 2, 7 i 9. Sylwia może obejrzeć filmy (oczywiście po kolei) na 5! sposobów. Jeżeli jednak będzie chciała rozdzielić gatunki, czyli zacząć od horroru, potem zobaczyć komedię i dalej na zmianę, to ma $3! \cdot 2! = 12$ możliwości takiego ustawienia repertuaru, ponieważ:

1. horrory może ustawić na $3! = 6$ sposobów: 279, 297, 729, 792, 927, 972,
2. komedie może ustawić na $2! = 2$ sposoby: *ab*, *ba*,
3. po połączeniu układu horrorów z układem komedii (zgodnie z regułą mnożenia) może ułożyć dwa razy więcej pełnych zestawów filmów:

$2b7a9, 2b9a7, 7b2a9, 7b9a2, 9b2a7, 9b7a2.$

Spójrzmy na poniższe przykłady.

- Losujemy siedem razy ze zwracaniem jedną cyfrę ze zbioru wszystkich cyfr. Utworzony w ten sposób siedmiocyfrowy kod 2237351 różni się od kodu 2133752.

- Losujemy cztery razy bez zwracania jedną cyfrę ze zbioru wszystkich cyfr. Utworzony w ten sposób PIN 8253 różni się od PIN-u 8235.
- Losujemy dziesięć razy bez zwracania jedną cyfrę ze zbioru wszystkich cyfr. Utworzony w ten sposób numer banknotu 2014538796 różni się od numeru 8725413069.

Każde z powyższych zdarzeń elementarnych zapisywaliśmy w postaci jakiegoś ciągu. W opisywanych sytuacjach interesuje nas odpowiedź na pytanie, **ile jest wszystkich ciągów** zbudowanych według określonych reguł.

Aby wyróżnić ciągi rozważane w kombinatoryce i rachunku prawdopodobieństwa, zamiast słowa „ciąg” wprowadzono pojęcie „wariacja”.

W powyższych przykładach powiemy więc, że:

- 2237351 jest siedmioelementową **wariacją z powtórzeniami** utworzoną z elementów zbioru dziesięcioelementowego,
- 8253 jest czteroelementową **wariacją bez powtórzeń** utworzoną z elementów zbioru dziesięcioelementowego,
- 2014538796 jest dziesięcioelementową wariacją bez powtórzeń utworzoną z elementów zbioru dziesięcioelementowego – w takiej sytuacji częściej używamy nazwy **permutacja**.

Wprowadzimy od razu wygodne uproszczenie. Zamiast mówić: „zdarzenia elementarne możemy zapisać w postaci k -elementowych wariacji bez powtórzeń utworzonych z elementów zbioru n -elementowego”, powiemy krócej: „zdarzeniami elementarnymi są k -elementowe wariacje bez powtórzeń ze zbioru n -elementowego”.

Liczbę wszystkich wariacji bez powtórzeń możemy zapisać za pomocą symbolu silni.

Przykład 8

- a) Jeżeli ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ losujemy kolejno bez zwracania trzy razy po jednej cyfrze, to liczba wszystkich wyników – trzelementowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru siedmioelementowego – jest równa $7 \cdot 6 \cdot 5$. Po losowaniu zostały 4 niewybrane elementy.

Liczbę $7 \cdot 6 \cdot 5$ możemy zapisać w postaci $7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{7!}{4!}$.

- b) Jeżeli ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ losujemy kolejno bez zwracania pięć razy po jednej cyfrze, to liczba wszystkich wyników – pięcioelementowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru siedmioelementowego – jest równa $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ lub inaczej $\frac{7!}{2!}$. Tym razem 2 elementy zostały niewykorzystane.

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb naturalnych n i k takich, że $k \leq n$, zachodzi równość:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Dowód wzoru powyżej pozostawiamy do samodzielnego przeprowadzenia.

Podsumujmy w tabeli dotychczasowe rozważania.

Doświadczenie losowe	Drzewko	Nazwa zdarzenia elementarnego	Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych
losujemy kolejno ze zwracaniem k elementów ze zbioru n -elementowego		k -elementowa wariacja z powtórzeniami ze zbioru n -elementowego	n^k
losujemy kolejno bez zwracania k elementów ze zbioru n -elementowego, $0 < k \leq n$		k -elementowa wariacja bez powtórzeń ze zbioru n -elementowego	$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$
ustawiamy w ciągu wszystkie elementy zbioru n -elementowego		n -elementowa permutacja	$n!$

Przykład 9

Walizki firmy Tobolek mają instalowane w zamkach czterocyfrowe kody szyfrowe. Ile walizek musi wyprodukować firma, aby co najmniej dwóm walizkom trzeba było nadać identyczny kod?

Rozwiązanie

Obliczymy najpierw, ile różnych czterocyfrowych kodów można utworzyć z 10 cyfr. Modelem sytuacji jest losowanie cztery razy kolejno ze zwracaniem po jednej kuli z urny zawierającej 10 ponumerowanych kul.

Zdarzenia elementarne są czteroelementowymi wariacjami z powtórzeniami ze zbioru 10-elementowego. Jest ich zatem 10^4 .

Jeżeli firma Tobolek wyprodukuje 10 001 walizek, to przynajmniej dwie będą musiały mieć identyczne kody.

Odp.: 10 001

Przykład 10

Właściciel firmy Tobolek otrzymał (w ramach promocji) 30 darmowych biletów na seans filmowy do kina. Na ile różnych sposobów może rozdzielić bilety, jeżeli firma zatrudnia 27 pracowników i każdy z nich otrzyma jeden bilet?

Rozwiązanie

Biletów jest o 3 za dużo. Modelem w tej sytuacji będzie losowanie kolejno bez zwracania 27 razy po jednym elemencie ze zbioru 30-elementowego, a zdarzeniami elementarnymi są 27-elementowe wariacje bez powtórzeń. Wszystkich możliwości jest

więc $\frac{30!}{(30-27)!} = \frac{30!}{3!}$.

Odp.: $\frac{30!}{3!}$

Przykład 11

Każdy z 27 pracowników firmy Tobolek musi podpisać regulamin pracy. Na ile sposobów mogą ustawić się w kolejkę do złożenia podpisu?

Rozwiązanie

Modelem jest tu losowanie kolejno bez zwracania wszystkich elementów ze zbioru 27-elementowego lub krócej – permutowanie tego zbioru.

Wszystkich permutacji jest $27!$.

Odp.: $27!$

◀1.14. Pani ustawiła w rzędzie sześcioro przedszkolaków: Anię, Basię, Czarkę, Dorotkę, Ewę i Filipa. Ile jest takich ustawień, w których

- najpierw stoją dziewczynki, a potem chłopcy?
- Basia stoi bezpośrednio za Anią?
- Czarek stoi za Filipem (niekoniecznie bezpośrednio)?
- między Czarkiem a Filipem stoją co najmniej dwie dziewczynki?

Odp.: a) 48 b) 120
c) 360 d) 288

◀1.17. Ze zbioru $\{1, 3, 5, 7\}$ losujemy pięć razy po jednej cyfrze ze zwracaniem. Wylosowane cyfry w kolejności losowania tworzą liczbę pięciocyfrową. Na ile sposobów możemy wylosować w ten sposób liczbę

- podzielną przez 5?
- większą od 30 000?
- mniejszą od 55 000?

Odp.: a) 4^4 b) $2 \cdot 4^4$
c) $2 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^3$

Przykład 12 ◀ zad. 1.14

Grupa przyjaciół – 5 chłopców i 4 dziewczyny – wybiera się na wycieczkę górskim szlakiem, po którym należy wędrować gęsiego. Chcą iść na zmianę: chłopak, dziewczyna, chłopak, dziewczyna itd. Na ile sposobów mogą się ustawić w takim szyku?

Rozwiązanie

Jeśli oznaczymy chłopców c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 , a dziewczęta d_1, d_2, d_3, d_4 , to przykładem ustawienia spełniającego założenia zadania jest ciąg:

$$c_1, d_1, c_2, d_2, c_3, d_3, c_4, d_4, c_5$$

Powstał on w ten sposób, że do ustawienia c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 chłopców dopisane zostały kolejno elementy d_1, d_2, d_3, d_4 ustawienia dziewcząt.

Do tego samego ustawienia c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 chłopców można dopisać każdą z $4!$ permutacji zbioru dziewcząt.

Jest $5!$ permutacji zbioru chłopców. Dla każdej z nich jest $4!$ ustawień całego szyku wycieczki. Zatem wszystkich możliwości jest $5! \cdot 4! = 2880$.

Zauważmy na koniec, że:

- liczba ustawień będzie identyczna, gdy założymy, że np. dziewczęta prowadzą, a chłopcy idą za nimi (lub na odwrót),
- rozwiązanie zadania można było sprowadzić do zastosowania reguły mnożenia, czyli podobnie jak w przykładzie 7 (s. 118), istotne było zliczenie permutacji dwóch rozłącznych zbiorów i pomnożenie otrzymanych wyników.

Odp.: 2880

Przykład 13 ◀ zad. 1.17

Rozważamy liczby sześciocyfrowe o różnych cyfrach.

- Ile jest takich liczb?
- Ile wśród nich jest liczb parzystych?
- Ile wśród nich jest liczb mniejszych od 475 000?

Rozwiązanie

a) Obliczamy, ile jest możliwości wyboru kolejnych cyfr.

Pierwsza cyfra nie może być zerem – wybieramy ją więc spośród 9 cyfr (wszystkie cyfry oprócz 0).



Cyfry tej liczby mają być różne, więc pozostałe 5 cyfr otrzymamy, losując ze zbioru jeszcze niewybranych pięć razy bez zwracania po jednej cyfrze (tym razem uwzględniamy 0). Tych możliwości jest $\frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!}$. Szukanych liczb sześciocyfrowych jest więc $9 \cdot \frac{9!}{4!}$.

b) O parzystości liczby decyduje jej cyfra jedności. Wygodnie jest rozważyć dwa przypadki.

- Jeżeli cyfrą jedności jest 0, to na pozostałych pięciu miejscach możemy rozmieścić dowolnie pozostałe cyfry. Wszystkich możliwości jest $\frac{9!}{4!}$.
- Jeżeli cyfrą jedności jest 2, 4, 6 lub 8, to pierwszą cyfrą może być jedna z ośmiu cyfr, a na pozostałych czterech miejscach możemy rozmieścić dowolnie pozostałe cyfry. Wszystkich możliwości jest $8 \cdot \frac{8!}{4!} \cdot 4$.

Razem (zgodnie z regułą dodawania) otrzymujemy:

$$\frac{9!}{4!} + 8 \cdot \frac{8!}{4!} \cdot 4 = \frac{9 \cdot 8! + 4 \cdot 8 \cdot 8!}{4!} = \frac{41 \cdot 8!}{4!} \text{ liczb.}$$

c) Rozpatrzmy trzy przypadki.

- Jeżeli pierwszą cyfrą jest 1, 2 lub 3, to pozostałe cyfry mogą być dowolne. Wszystkich możliwości jest:

$$\begin{array}{ccc} & 3 \cdot \frac{9!}{4!} & \\ \text{wybór} \nearrow & & \nwarrow \text{wybór pozostałych pięciu cyfr} \\ \text{pierwszej cyfry} & & \end{array}$$

- Jeżeli pierwszą cyfrą jest 4, a drugą 0, 1, 2, 3, 5 lub 6, to pozostałe cyfry mogą być dowolne. Wszystkich możliwości jest $6 \cdot \frac{8!}{4!}$.
- Jeśli dwiema pierwszymi cyframi są 4 i 7, to trzecią może być 0, 1, 2 lub 3, a pozostałe cyfry mogą być dowolne. Wszystkich możliwości jest $4 \cdot \frac{7!}{4!}$.

Razem (zgodnie z regułą dodawania) otrzymujemy:

$$3 \cdot \frac{9!}{4!} + 6 \cdot \frac{8!}{4!} + 4 \cdot \frac{7!}{4!} = \frac{(3 \cdot 9 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 1) \cdot 4 \cdot 7!}{4!} = \frac{67 \cdot 7!}{3!} \text{ liczb.}$$

Odp.: a) $9 \cdot \frac{9!}{4!}$ b) $\frac{41 \cdot 8!}{4!}$ c) $\frac{67 \cdot 7!}{3!}$

Zadania

Odpowiedzi i rozwiązania

1.1. D

1.2. C

1.3. C

1.4. wariacje z powtórzeniami:

a) 3^{10} , b) 6^5 , d) 5^{27} , f) 12^{35} ;

wariacje bez powtórzeń:

c) $\frac{20!}{8!} = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \dots \cdot 10 \cdot 9$,g) $\frac{35!}{18!} = 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot \dots \cdot 20 \cdot 19$;permutacje: e) $8!$

1.5. 120

W każdym z zadań 1.1–1.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź.

Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

1.1. Liczb trzycyfrowych, w których nie powtarza się żadna cyfra, jest

- A. $10 \cdot 9 \cdot 8$. B. 1000. C. $9 \cdot 8 \cdot 7$. D. 648.

1.2. W urnie jest 5 kul podpisanych cyframi 2, 2, 3, 7 i 8. Losujemy kolejno bez zwracania 5 razy po jednej kuli i zapisujemy wynik. Ile jest możliwości utworzenia w ten sposób różnych liczb pięciocyfrowych? Wskaż odpowiedź fałszywą.

- A. $3 \cdot 4 \cdot 5$ B. 60 C. $5!$ D. $\frac{5!}{2!}$

1.3. Ile można utworzyć różnych sześciocyfrowych numerów telefonicznych, w których pierwszą cyfrą jest 5, 6 lub 7?

- A. $3! \cdot 10^5$ B. $3 \cdot 5^{10}$ C. $3 \cdot 10^5$ D. $3^3 \cdot 10^5$

1.4. Określ, czy w opisanym doświadczeniu zdarzenia elementarne są wariacjami z powtórzeniami, wariacjami bez powtórzeń czy permutacjami. Podaj liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych w tym doświadczeniu.

- Marcin typuje wyniki 10 rozgrywek piłkarskich, wypełniając losowo kupon totalizatora literami: w – wygrana gospodarzy, p – przegrana gospodarzy, r – remis.
- Kuba rzuca 5 razy kostką do gry.
- Pelagia ma do dyspozycji 20 wolnych autokarów i przydziela je losowo dwunastu grupom wycieczkowym.
- Pielęgniarka losuje dla każdego z 27 uczniów klasy 4d dzień tygodnia (powszedni) na zgłoszenie się do przeglądu dentystycznego.
- Nowa pani przedszkolanka próbuje usadzić w rzędzie grupę 8 rozbitych maluchów.
- Pewien statystyk rejestruje miesiąc urodzenia każdego ucznia z losowo wybranej 35-osobowej grupy.
- Każdy z 17 robotników ekipy budowlanej losuje jeden dzień wolny z zaplanowanych 35 dni pracy, z uwzględnieniem zasady, że każdego dnia tylko jeden pracownik może być nieobecny.

1.5. Malutka Ola uczy się liczyć do pięciu na paluszkach, ale ciągle jeszcze myli kolejność. Na ile różnych sposobów może podać te liczby?

1.6. Tata Oli kupił dziecku kolejkę złożoną z elektrowozu oraz sześciu różnych wagoników i bardzo lubi sam się nią bawić. Ile czasu zajmie mu przetestowanie wszystkich układów pociągu (jadącego w pełnym składzie), jeżeli jeden przejazd trwa 2 minuty? Pomijamy czas potrzebny do ustawienia wagoników.

1.7. Ile permutacji można zbudować z liter słowa PAJĄCZEK? Ile spośród tych permutacji zaczyna się od litery A? Ile zaczyna się od liter PA?

1.8. Ile jest permutacji zbioru wszystkich cyfr? Ile wśród tych permutacji jest takich, w których cyfry 1, 2, 3 występują obok siebie

- a) w porządku rosnącym?
- b) w porządku malejącym?
- c) w dowolnej kolejności?

1.9. Zapisz w prostszej postaci.

- a) $4! \cdot 5$, $6! \cdot 7 \cdot 8$, $10! \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13$
- b) $\frac{10!}{10}$, $\frac{8!}{7 \cdot 8}$, $\frac{9!}{7 \cdot 8 \cdot 9}$, $\frac{17 \cdot 16!}{15!}$
- c) $n! \cdot (n+1)$, $(n-1)! \cdot n \cdot (n+1)$, $(n+2)!(n+3)$
- d) $\frac{n!}{n}$, $\frac{n!}{(n-1)!}$, $\frac{(n+1)!}{n!}$, $\frac{(n-2)!}{(n-3)!}$
- e) $\frac{n!}{(n+1)!}$, $\frac{(n-2)!}{(n-1)!}$, $\frac{(n-1)!}{(n+1)!}$

1.10. Oblicz.

- a) $\frac{6!}{4!}$, $\frac{10!}{8!}$, $\frac{7!}{4! \cdot 3!}$, $\frac{5!}{0! \cdot 2!}$
- b) $\frac{10!}{6! \cdot 4!}$, $\frac{7! \cdot 3!}{10!}$, $\frac{9!}{1! \cdot 8!}$, $\frac{12!}{10! \cdot 2!}$

1.11. Ile różnych wyrazów można ułożyć z liter podanego słowa?

- a) LALKA
- b) EUZEBIUSZ
- c) ABRAKADABRA

1.12. Ile jest liczb siedmiocyfrowych, w których występują trzy jedynki, dwie dwójki i dwie trójki?

1.13. Na ile sposobów można ułożyć w rzędzie 5 klocków zielonych, 4 czerwone i 3 żółte?

1.6. 24 godziny

1.7. 8!, 7!, 6!

1.8. 10! a) 8! b) 8! c) 3! · 8!

1.9. a) 5!, 8!, 13!

b) 9!, 6!, 6!, 17 · 16

c) $(n+1)!$, $(n+1)!$, $(n+3)!$

d) $(n-1)!$, n , $n+1$, $n-2$

e) $\frac{1}{n+1}$, $\frac{1}{n-1}$, $\frac{1}{n(n+1)}$

1.10. a) 30, 90, 35, 60

b) 210, $\frac{1}{120}$, 9, 66

1.11. a) $\frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$

b) $\frac{9!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 45\,360$

c) $\frac{11!}{5! \cdot 2! \cdot 2!} = 83\,160$

1.12. $\frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!}$

1.13. $\frac{12!}{5! \cdot 4! \cdot 3!}$

- 1.14.** a) 48 b) 120
c) 360 d) 288

- 1.15.** a) $10 \cdot 2 \cdot 8!$
b) $10 \cdot 4 \cdot 7!$
c) $10 \cdot 3! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5!$

- 1.16.** a) 5^4 b) 5 c) 5

- 1.17.** a) 4^4
b) $2 \cdot 4^4$
c) $2 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^3$

- 1.18.** a) $\frac{41 \cdot 8!}{3!}$
b) $\frac{17 \cdot 8!}{3!}$
c) $\frac{22 \cdot 7!}{3!}$

- 1.19.** 90

- 1.14.** Pani ustawiła w rzędzie sześcioro przedszkolaków: Anię, Basię, Czarkę, Dorotkę, Ewę i Filipa. Ile jest takich ustawień, w których
- najpierw stoją dziewczynki, a potem chłopcy?
 - Basia stoi bezpośrednio za Anią?
 - Czarek stoi za Filipem (niekoniecznie bezpośrednio)?
 - między Czarkiem a Filipem stoją co najmniej dwie dziewczynki?

- 1.15.** Przy okrągłym stole o dziesięciu numerowanymi miejscami rozmieszczamy dziesięć osób. Na ile sposobów można to zrobić tak, aby

- Agata i Bożena siedziały obok siebie, w dowolnej kolejności?
- Grzegorz i Igor siedzieli naprzeciwko siebie, a Helena siedziała obok jednego z nich?
- Celina, Danuta i Elżbieta siedziały obok siebie w dowolnej kolejności, natomiast ani Franciszek, ani Jacek nie sąsiedowali z żadną z nich?



- 1.16.** Dane są zbiory: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$.

- Ile jest wszystkich funkcji, których dziedziną jest zbiór A , a wartościami są elementami zbioru B ?
- Ile jest wszystkich funkcji rosnących, których dziedziną jest zbiór A , a wartościami są elementami zbioru B ?
- Ile jest wszystkich funkcji niemalejących, których dziedziną jest zbiór A , a wartościami są elementami zbioru $\{5, 6\}$?

- 1.17.** Ze zbioru $\{1, 3, 5, 7\}$ losujemy pięć razy po jednej cyfrze ze zwracaniem. Wylosowane cyfry w kolejności losowania tworzą liczbę pięciocyfrową. Na ile sposobów możemy wylosować w ten sposób liczbę

- podzielną przez 5?
- większą od 30 000?
- mniejszą od 55 000?

- 1.18.** Rozważamy liczby siedmiocyfrowe o różnych cyfrach.

- Ile wśród nich jest liczb parzystych?
- Ile wśród nich jest liczb podzielnych przez 5?
- Ile wśród nich jest liczb podzielnych przez 25?

- 1.19.** Ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ losujemy kolejno bez zwracania dwie liczby. Oznaczamy je w kolejności losowania n i k . Ile jest takich wyników losowania, w których $n + k = 111$?

1.20. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 50\}$ losujemy kolejno ze zwracaniem dwie liczby. Oznaczamy je w kolejności losowania n i k . Ile jest takich wyników losowania, w których $|n - k| \leq 2$?

1.21. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ losujemy kolejno bez zwracania trzy liczby. Oznaczamy je w kolejności losowania a, b, c . Ile jest takich wyników losowania, w których $a + b + c = 21$?

* **1.22.** W grze sudoku trzeba wypełnić diagram 9×9 w taki sposób, aby w każdym wierszu, w każdej kolumnie i w każdym z 9 wyróżnionych kwadratów znalazła się każda z cyfr od 1 do 9. Na ile sposobów można, zgodnie z podanymi zasadami, rozmieścić w pustym diagramie dziewięć jedynek?

4	5	1	2	9	6	3	7	8
3	2	9	8	5	7	4	6	1
8	6	7	1	4	3	5	9	2
7	4	5	3	2	9	8	1	6
6	9	8	5	1	4	7	2	3
2	1	3	7	6	8	9	5	4
5	3	6	4	7	1	2	8	9
9	7	4	6	8	2	1	3	5
1	8	2	9	3	5	6	4	7

Prosto do matury



1. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Liczba wszystkich sposobów ustawienia 12 osób w kolejce

- A. jest podzielna przez 120.
- B. jest podzielna przez 144.
- C. jest podzielna przez 39.

2. Ile jest takich permutacji zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 13, 14\}$, w których

- a) liczby są ustawione w kolejności rosnącej lub malejącej?
- b) najpierw ustawione są wszystkie liczby parzyste?
- c) liczby parzyste nie sąsiadują ze sobą?

D 3. Wykaż, że liczba $\frac{18!}{13! \cdot 7!}$ jest liczbą naturalną.

4. Ile jest liczb ośmiocyfrowych mniejszych od $57 \cdot 10^6$, których wszystkie cyfry są nieparzyste?

5. Ile jest podzielnych przez 4 liczb sześciocyfrowych o różnych cyfrach?

$$3. \frac{18!}{13! \cdot 7!} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{18}{3 \cdot 6} \cdot \frac{16}{2 \cdot 4} \cdot \frac{15}{5} \cdot \frac{14}{7} \cdot 17 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 17,$$

czyli jest to liczba naturalna.

1.20. 244

1.21. 42

1.22.

W 1. wierszu wybieramy jeden z dziewięciu kwadratów, potem w 2. wierszu jeden z 6 kwadratów, w 3. wierszu jeden z 3 kwadratów, w 4. wierszu jeden z 6 kwadratów, w 5. wierszu jeden z 4 kwadratów, w 6. wierszu jeden z 2 kwadratów, w 7. wierszu jeden z 3 kwadratów i w 8. wierszu jeden z dwóch kwadratów. Zostaje ostatnie miejsce do wpisania cyfry 9. Zatem liczba sposobów jest równa $9 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 6^6 = 46\,656$.

Prosto do matury

1. P, P, F

2. a) 2

b) $7! \cdot 7!$

c) $8 \cdot 7! \cdot 7!$

4. $13 \cdot 5^6$

5. $\frac{160 \cdot 7!}{4!}$

2. Kombinacje

Umiejętności:

- wykorzystanie wzorów na liczbę kombinacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych

Dotychczas zajmowaliśmy się takimi doświadczeniami losowymi, które uwzględniały kolejność losowanych elementów. Łatwo jednak podać przykłady z życia codziennego odbiegające od tego schematu. Na przykład wiele osób śledzi przebieg losowania gry w lotto – nie ma znaczenia, w jakiej kolejności maszyna losująca wybierze szczęśliwe numery. Podobnie jest z rozdawaniem kart – w większości gier ważne są kolory, wartości kart i układy karciane, a nie kolejność, w jakiej karty trafiają do ręki grającego. Poszukamy teraz odpowiedzi na pytanie o liczbę wszystkich możliwych wyników również w takich doświadczeniach.

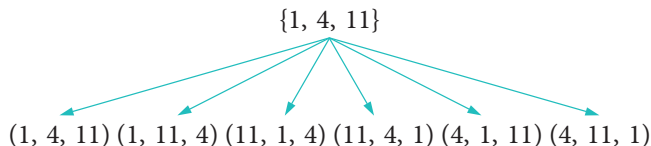
Przykład 1

W koszu jest 13 piłek tenisowych. Tenisista wyciąga z kosza 3 piłki. Na ile sposobów może to zrobić?

Rozwiązanie

Jeżeli uwzględnialibyśmy kolejność wyciąganych piłek, to odpowiedź byłaby oczywista: $13 \cdot 12 \cdot 11$. Tyle jest bowiem trzejelementowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru 13-elementowego.

Założmy, że piłki w koszu są oznaczone liczbami 1, 2, 3, ..., 13. Wtedy trzy konkretne piłki, np. 1, 4 i 11, możemy wyciągnąć na 3! sposobów:



Jeżeli więc oznaczymy przez x liczbę wszystkich takich zestawów $\{a, b, c\}$ trzech piłek, z których były tworzone wariacje, to zachodzi równość:

$$x \cdot 3! = 13 \cdot 12 \cdot 11$$

$$\text{Stąd } x = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3!}, \text{ czyli } x = 286.$$

Tenisista nie jest zainteresowany kolejnością wyciąganych piłek (praktycznie może je wyjąć z kosza wszystkie na raz) – ma zatem do dyspozycji 286 różnych zestawów trzech piłek.

MKP

temat 1.5

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.2

 **Generator**
testów i sprawdzianów

Jeśli – jak w tym przykładzie – w doświadczeniu nie interesuje nas kolejność losowanych elementów, zapisujemy zdarzenia elementarne w nawiasach klamrowych, jako podzbiory zbioru wszystkich elementów:

$$\Omega = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \dots, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \dots, \{11, 12, 13\}\}$$

$$\overline{\Omega} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3!}$$

Odp.: 286

Przykład 2

Ile różnych zestawów kart może otrzymać brydżysta?

Rozwiązanie

Talia liczy 52 karty, a brydżysta dostaje do ręki 13 spośród nich. Pytamy więc, ile różnych 13-elementowych podzbiorów możemy wybrać ze zbioru 52 elementów.

Ponownie rozwiążemy zadanie od końca, tzn. najpierw uwzględnimy kolejność losowanych kart. Tworzymy zatem 13-elementowe wariacje bez powtórzeń. Ich liczba jest równa:

$$\frac{52!}{39!}$$

Brydżysta z jednego zestawu kart trzymanego w ręku może ułożyć $13!$ permutacji, zatem liczba wszystkich zestawów jest $13!$ razy mniejsza od $\frac{52!}{39!}$. Innymi słowy, zachodzi równość:

$$\frac{52!}{39!} = x \cdot 13!$$

gdzie x oznacza liczbę wszystkich 13-elementowych podzbiorów zbioru 52-elementowego. Stąd:

$$x = \frac{52!}{39! \cdot 13!} \approx 635 \text{ miliardów}$$

Odp.: $\frac{52!}{39! \cdot 13!}$

Twierdzenie

Jeżeli ze zbioru n -elementowego losujemy k elementów ($k \leq n$) bez uwzględniania kolejności, to liczba wszystkich możliwych wyników losowania jest równa $\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$.

Inaczej mówiąc, liczba wszystkich k -elementowych podzbiorów zbioru n -elementowego ($k \leq n$) jest równa $\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$.

Podobnie jak słowo „wariacja” zastępuje w kombinatoryce słowo „ciąg”, tak określeniem „kombinacja” zastępujemy słowo „podzbiór”. W powyższych przykładach powiemy zatem:

- liczba wszystkich trzelementowych kombinacji ze zbioru 13-elementowego jest równa $\frac{13!}{10! \cdot 3!}$,
- liczba wszystkich 13-elementowych kombinacji ze zbioru 52-elementowego jest równa $\frac{52!}{39! \cdot 13!}$.

I ogólnie:

- liczba wszystkich k -elementowych kombinacji ze zbioru n -elementowego ($k \leq n$) jest równa $\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$.

Symbol Newtona

Definicja

Jeżeli $n, k \in \mathbf{N}$ i $k \leq n$, to wyrażenie $\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ nazywamy **symbolem Newtona** i oznaczamy $\binom{n}{k}$ (czytamy: „ n po k ”).

Ze sposobu wprowadzenia symbolu Newtona można wywnioskować, że jego wartość jest zawsze liczbą naturalną.

Przykład 3 ◀ zad. 2.5

- a) $\binom{5}{3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 2 \cdot 5 = 10$
- b) $\binom{6}{2} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6}{4! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 5 \cdot 3 = 15$
- c) $\binom{27}{24} = \frac{27!}{3! \cdot 24!} = \frac{24! \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 24!} = 25 \cdot 13 \cdot 9 = 2925$
- d) $\binom{14}{3} = \frac{14!}{11! \cdot 3!} = \frac{11! \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{11! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 2 \cdot 13 \cdot 14 = 364$

Z definicji symbolu Newtona wynika, że liczba wszystkich k -elementowych kombinacji ze zbioru n -elementowego wynosi $\binom{n}{k}$.

◀ 2.5. Zapisz w postaci iloczynu liczb.

a) $\binom{24}{20}$ c) $\binom{13}{5}$

b) $\binom{100}{97}$ d) $\binom{26}{13}$

Odp.: a) np. $21 \cdot 22 \cdot 23$

b) np. $50 \cdot 33 \cdot 98$

c) np. $9 \cdot 11 \cdot 13$

d) np. $4 \cdot 14 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 25$

Zauważmy, że tworzenie np. 5-elementowych kombinacji ze zbioru 17-elementowego można interpretować dwojako. Z jednej strony – z urny z 17 kulami wyciągamy zbiór 5-elementowy. Z drugiej strony – w urnie zostaje zbiór 12-elementowy. Można powiedzieć, że tworzenie kombinacji 5-elementowych jest czynnością symetryczną do tworzenia kombinacji 12-elementowych. Wartości symboli Newtona muszą być w obydwu przypadkach równe. Istotnie:

$$\binom{17}{5} = \frac{17!}{12! \cdot 5!}, \quad \binom{17}{12} = \frac{17!}{5! \cdot 12!}, \quad \text{czyli} \quad \binom{17}{5} = \binom{17}{12}.$$

Takie samo rozumowanie możemy przeprowadzić dla ogólnych danych. Zatem:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Wniosek

Dla dowolnych liczb naturalnych n i k ($k \leq n$):

- $\binom{n}{k}$ jest liczbą naturalną,
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Przykład 4

Rozpatrzmy charakterystyczne przypadki losowania k -elementowych podzbiorów kul z urny zawierającej n kul, czyli dla

- a) $k = 0$. b) $k = 1$. c) $k = n$.

Rozwiązanie

- a) Istnieje tylko jedna kombinacja zeroelementowa – jest nią zbiór pusty. Potwierdzimy ten wynik, jeżeli zastosujemy symbol Newtona:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1$$

Zgodnie z definicją silni:

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ 1! &= 1 \end{aligned}$$

- b) Kombinacje jednoelementowe są podzbiorami utworzonymi z pojedynczych kul. Jest ich więc n . Oczywiście również:

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = \frac{(n-1)! \cdot n}{(n-1)!} = n$$

- c) Istnieje tylko jedna kombinacja n -elementowa. Jest nią cały zbiór:

$$\binom{n}{n} = 1$$

◀2.7. W przechowalni bagażu jest 13 wolnych schowków. Euzebiusz Pajaczek musi zająć trzy z nich. Ile ma możliwości wyboru schowków?

Odp.: 286

◀2.11. W skład układanki wchodzi elementy w różnych kształtach: 4 kwadraty, 7 trójkątów i 5 kółek. Elementy o jednakowym kształcie różnią się kolorami. Ala chce ułożyć na podłodze figurę złożoną z jednego kółka, trzech trójkątów i dwóch kwadratów. Ile ma możliwości wybrania odpowiedniego zestawu?

Odp.: $\binom{5}{1} \binom{7}{3} \binom{4}{2} = 1050$

◀2.16. W grze w tysiąca (wariant dla 3 osób) każdy z graczy otrzymuje zestaw 7 kart z 24-elementowej talii (zawierającej cztery kolory od dziewiątki do asa).

- Ile jest różnych układów kart dla jednego gracza?
- Ile zestawów jest złożonych wyłącznie z kierów i pików?
- Ile zestawów jest złożonych z 3 asów, 2 króli i 2 dam?

Odp.: a) $\binom{24}{7} = 346\,104$

b) $\binom{12}{7} = 792$

c) $\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} = 144$

Przykład 5 ◀ zad. 2.7

Na kuponie do gry lotto jest 49 liczb od 1 do 49. Grający wybiera 6 liczb. Obliczmy, ile jest możliwych wyników losowania.

Rozwiązanie

Liczyby wybrane przez grającego stanowią 6-elementową kombinację ze zbioru 49-elementowego. Liczba wszystkich możliwości jest więc równa:

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{43! \cdot 6!} = \frac{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 11 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 47 \cdot 8 \cdot 49 = 13\,983\,816$$

Jedyną szczęśliwą szóstkę liczb wybiera maszyna, która losuje 6 spośród 49 ponumerowanych kulek. Aby wygrać główną nagrodę, grający w lotto musi zatem trafić w jedną kombinację spośród prawie 14 milionów.

Odp.: 13 983 816

Przykład 6 ◀ zad. 2.11

W siedmioosobowej grupie przedszkolaków jest czterech chłopców. Pani ma wybrać czteroosobową delegację złożoną z dwóch chłopców i dwóch dziewczynek. Ile jest różnych czwórek utworzonych zgodnie z taką regułą?

Rozwiązanie

Zbudujmy model doświadczenia, w wyniku którego wychowawczyni otrzyma zamierzony skład delegacji. Do jednej urny wkładamy cztery losy z imionami chłopców, a do drugiej – trzy z imionami dziewcząt. Z pierwszej urny wychowawczyni może

wylosować $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ par chłopców, a z drugiej urny $\binom{3}{2} = 3$ pary dziewczynek. Do każdej pary chłopców może teraz dołączyć dowolną parę dziewczynek.

Liczba wszystkich zdarzeń sprzyjających jest zatem równa $\binom{4}{2} \cdot \binom{3}{2} = 6 \cdot 3 = 18$.

Odp.: 18

Przykład 7 ◀ zad. 2.16

Z talii 52 kart losujemy 13 kart. Ile jest możliwości wylosowania

- 13 kierów?
- 13 kart czerwonych?
- 10 kart czerwonych i 3 kart czarnych?
- 8 pików i 5 kierów?
- 10 kart jednego koloru (kolory w kartach to: trefl, karo, kier, pik)?
- 8 pików, 3 kierów i 2 trefli?

Rozwiązanie

- W talii jest dokładnie 13 kierów, więc jest tylko 1 zdarzenie sprzyjające.

- b) W talii jest 26 kart czerwonych. Losujemy spośród nich 13 kart. Liczba możliwości jest więc równa $\binom{26}{13}$.
- c) Rozdzielamy talię na dwa podzbiory: same czerwone i same czarne. Z czerwonych losujemy 10 kart, z czarnych – 3 karty, po czym łączymy je w jeden zestaw. Mamy więc $\binom{26}{10} \cdot \binom{26}{3}$ możliwości.
- d) Wyciągamy z talii wszystkie piki (13 kart) oraz wszystkie kiery (również 13). Ze zbioru pików losujemy 8 kart na $\binom{13}{8}$ sposobów, a ze zbioru kierów 5 kart na $\binom{13}{5}$ sposobów. Sprzyjających układów jest więc $\binom{13}{8} \cdot \binom{13}{5}$.
- e) Po pierwsze, mamy 4 możliwości ustalenia koloru. Sprzyjające układy to:
- 10 pików i 3 karty inne niż piki,
 - 10 kar i 3 karty inne niż kara,
 - 10 kierów i 3 karty inne niż kiery,
 - 10 trefli i 3 karty inne niż trefle.
- Każdy z nich uzyskamy, jeżeli rozdzielimy talię na dany kolor (13 kart) i pozostałe kolory (39 kart). Po drugie, dobre układy otrzymamy, jeśli wylosujemy 10 kart z danego koloru i 3 z pozostałych kolorów. Liczba możliwości jest więc równa $4 \cdot \binom{13}{10} \cdot \binom{39}{3}$.
- f) $\binom{13}{8} \cdot \binom{13}{3} \cdot \binom{13}{2}$

Przykład 8 ◀ zad. 2.22

Ile prostokątów znajduje się na rysunku obok?

Rozwiązanie

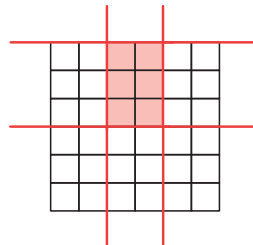
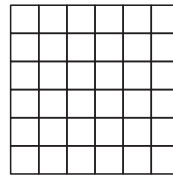
Bezpośrednie liczenie wszystkich prostokątów, nawet odpowiednio pogrupowanych, byłoby bardzo kłopotliwe. Zauważmy jednak, że każdy prostokąt jest jednoznacznie wyznaczony przez dwie proste poziome i dwie proste pionowe, które go ograniczają.

Na rysunku obok prezentujemy przykładowy prostokąt i wyznaczające go proste.

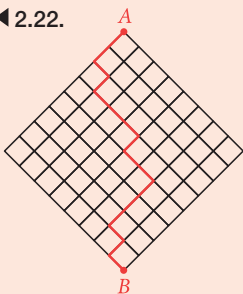
Dwie proste poziome możemy poprowadzić na

$\binom{7}{2} = 21$ sposobów. Tyle samo jest też par prostych pionowych. Wszystkich prostokątów jest więc $\binom{7}{2}^2 = 441$.

Odp.: 441



◀ 2.22.



Na rysunku pokazano przykładową drogę z punktu A do punktu B, która prowadzi zawsze w dół (w prawo lub w lewo) po zaznaczonych kratkach. Ile takich dróg można narysować?

Odp.: Każda droga składa się z 8 fragmentów prowadzących w lewo i 8 fragmentów prowadzących w prawo. Wszystkich dróg jest:

$$\binom{16}{8} = \frac{16!}{8! \cdot 8!} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 13 = 12\,870$$

Zadania

W każdym z zadań 2.1–2.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

Odpowiedzi i rozwiązania

2.1. B

2.2. B

2.3. A

2.4. 28, 45, 66, 197, 37

- 2.5. a) np. $21 \cdot 22 \cdot 23$
 b) np. $50 \cdot 33 \cdot 98$
 c) np. $9 \cdot 11 \cdot 13$
 d) np. $4 \cdot 14 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 25$

- 2.6. a) $n = 7$
 b) $n = 3$ lub $n = 6$
 c) $n = 3$ lub $n = 14$
 d) $n = 1$
 e) $n = 7$
 f) $n = 5$

2.7. 286

2.8. $\binom{1000}{30}$ 2.9. $\binom{3000}{500}$ 2.1. Wskaż wartość wyrażenia $\binom{15}{14}$.

- A. 1 B. 15 C. $15 \cdot 14$ D. $1 \frac{1}{14}$

2.2. Z talii 52 kart losowano dwie bez zwracania i uwzględniania kolejności. Ile różnych zestawów mogło w ten sposób powstać? Wskaż odpowiedź fałszywą.

- A. $\binom{52}{50}$ B. $2 \cdot \binom{50}{2}$ C. $\frac{52!}{2! \cdot 50!}$ D. $51 \cdot 26$

2.3. Dwie siostry dzielą losowo między siebie 9 cukierków, każdy o innym smaku. Na ile sposobów mogą to zrobić, jeśli starsza ma dostać 5, a młodsza 4?

- A. $\binom{9}{5}$ B. $\binom{9}{5} \cdot \binom{9}{4}$ C. 180 D. $\binom{9}{5} \cdot 4$

2.4. Oblicz: $\binom{8}{2}$, $\binom{10}{8}$, $\binom{12}{10}$, $\binom{197}{1}$, $\binom{37}{36}$.

2.5. Zapisz w postaci iloczynu liczb.

- a) $\binom{24}{20}$ b) $\binom{100}{97}$ c) $\binom{13}{5}$ d) $\binom{26}{13}$

2.6. Wyznacz n .

- a) $\binom{n}{3} - \binom{n}{4} = 0$ d) $\binom{3n}{2} + 3 \cdot \binom{4n}{2} = 21$
 b) $\frac{1}{3} \binom{n-1}{n-3} + 2 \frac{2}{3} = n$ e) $\binom{n}{3} - \binom{n}{2} = 14$
 c) $5 \cdot \binom{n}{3} = \binom{n+2}{4}$ f) $\binom{n}{2} \cdot \binom{2n}{2} = 450$

2.7. W przechowalni bagażu jest 13 wolnych schowków. Euzebiusz Pajęczek musi zająć trzy z nich. Ile ma możliwości wyboru schowków?

2.8. Rysiek wybiera 30 egzemplarzy ze swojej kolekcji 1000 guzików. Ile ma możliwości wyboru takiego zbioru?

2.9. Martyna ma w słoju kolekcję jednogroszówek wartą dokładnie 30 zł. Ile jest różnych zestawów monet z tego słoja o wartości 5 zł?

2.10. Na płaszczyźnie zaznaczonych jest 7 punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe. Ile jest prostych przechodzących przez dowolne dwa z tych siedmiu punktów?

2.11. W skład układanki wchodzi elementy w różnych kształtach: 4 kwadraty, 7 trójkątów i 5 kółek. Elementy o jednakowym kształcie różnią się kolorami. Ala chce ułożyć na podłodze figurę złożoną z jednego kółka, trzech trójkątów i dwóch kwadratów. Ile ma możliwości wybrania odpowiedniego zestawu?

2.12. Trener ma w zespole 3 bramkarzy, 8 obrońców, 8 pomocników i 6 napastników. Na ile sposobów może wybrać skład zestawiony z bramkarza, 3 obrońców, 4 pomocników i 3 napastników?

2.13. W urnie jest 10 kul zielonych i 8 żółtych. Losujemy jednocześnie 5 kul. Na ile sposobów możemy losowo wyjąć

- a) 3 kule zielone i 2 żółte?
- b) 5 kul zielonych?
- c) 5 kul jednego koloru?
- d) co najmniej 4 kule żółte?

2.14. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ losujemy jednocześnie trzy liczby. Ile jest możliwości wyboru takich liczb, aby

- a) ich iloczyn był nieparzysty?
- b) ich suma była nieparzysta?
- c) ich suma była podzielna przez 3?
- * d) suma ich kwadratów była podzielna przez 3?

2.15. Na ile sposobów możemy rozmieścić 10 osób w trzech pokojach: 5-osobowym, 3-osobowym i 2-osobowym?

2.16. W grze w tysiąca (wariant dla 3 osób) każdy z graczy otrzymuje zestaw 7 kart z 24-elementowej talii (zawierającej cztery kolory od dziewiątki do asa).

- a) Ile jest różnych układów kart dla jednego gracza?
- b) Ile zestawów jest złożonych wyłącznie z kierów i pików?
- c) Ile zestawów jest złożonych z 3 asów, 2 króli i 2 dam?

2.17. Do gry w scrabble wykorzystuje się 100 płytek z literami, w tym: siedem z literą E, cztery z R, trzy z P, po dwie z literami B, J, U i jedną z literą Ó.

- a) Na ile sposobów gracz może wyciągnąć z woreczka 7 płytek?
- b) Ile takich układów pozwala na ułożenie słowa PRÓBUJE?

2.14. a) 20 b) 110 c) 76

d) Kwadrat liczby daje z dzielenia przez 3 resztę 0 lub 1, więc wszystkie wylosowane liczby powinny być podzielne przez 3 albo żadna z nich nie powinna dzielić się przez 3.

Liczba sposobów:

$$\binom{4}{3} + \binom{8}{3} = 4 + \frac{8!}{3!5!} = 4 + \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 4 + 56 = 60$$

2.10. 21

$$\mathbf{2.11.} \quad \binom{5}{1} \binom{7}{3} \binom{4}{2} = 1050$$

$$\mathbf{2.12.} \quad \binom{3}{1} \binom{8}{3} \binom{8}{4} \binom{6}{3} = 235\,200$$

2.13. a) 3360 b) 252 c) 308

$$\mathbf{d)} \quad \binom{8}{4} \binom{10}{1} + \binom{8}{5} = 756$$

$$\mathbf{2.15.} \quad \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{3} = 2520$$

$$\mathbf{2.16. a)} \quad \binom{24}{7} = 346\,104$$

$$\mathbf{b)} \quad \binom{12}{7} = 792$$

$$\mathbf{c)} \quad \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} = 144$$

$$\mathbf{2.17. a)} \quad \binom{100}{7} \quad \mathbf{b) 672}$$

2.18. $\binom{30}{3} = 4060$. Nie, potrzeba 203 strony.

2.19. 22

2.20. 720

2.21. $\binom{8}{2} + 2 \cdot 8 + 1$

2.22. Patrz s. 133.

Prosto do matury

1. P, P, P

2. $\binom{45}{3}$

3. $n = 7$

4. $n = 7$

5. 78

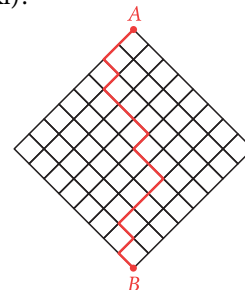
2.18. W książce *Szatan z siódmej klasy* Adam Cisowski musi odgadnąć nazwiska trzech uczniów 30-osobowej klasy, którzy mają być pytani na lekcji historii. Ile jest wszystkich możliwości? Czy do ich zapisania wystarczyłby zeszyt 100-kartkowy, gdyby Adam na każdej stronie umieścił 20 zestawów nazwisk?

2.19. Ile jest liczb sześciocyfrowych podzielnych przez 3, do których zapisania można użyć tylko cyfr 1 i 2?

2.20. Z talii 24 kart (od dziewiątki do asa w każdym z 4 kolorów) losujemy 5 kart. Na ile sposobów możemy tak wylosować karty, by znalazły się wśród nich 3 karty tej samej wartości i 2 karty innej wartości (np. 3 asy i 2 dziesiątki)?

2.21. Ile jest liczb dziewięciocyfrowych, których suma cyfr jest równa 3?

* **2.22.** Na rysunku pokazano przykładową drogę z punktu A do punktu B, która prowadzi zawsze w dół (w prawo lub w lewo) po zaznaczonych kratkach. Ile takich dróg można narysować?



Prosto do matury

1. W urnie jest 5 kul białych, 3 czarne i 2 niebieskie. Losujemy jednocześnie 3 kule. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Liczba sposobów, na które możemy wylosować 3 kule różnych kolorów, jest równa 30.
- B. Liczba sposobów, na które możemy wylosować zestaw zawierający co najmniej 2 kule białe, jest równa 60.
- C. Liczba sposobów, na które możemy wylosować zestaw zawierający dokładnie 2 kule białe, jest równa 50.

2. Ze zbioru liczb dwucyfrowych losujemy jednocześnie trzy liczby. Na ile sposobów możemy wylosować takie liczby, których iloczyn jest nieparzysty?

3. Wyznacz liczbę naturalną n spełniającą równanie $\binom{n}{2} + \binom{2n}{2} = 112$.

4. Na płaszczyźnie zaznaczono n punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe. Liczba wszystkich trójkątów, których wierzchołkami mogą być te punkty, jest równa 35. Wyznacz n .

5. Ile jest liczb dwunastocyfrowych, których suma cyfr wynosi 3?

3. Trójkąt Pascala i dwumian Newtona

Umiejętności:

- stosowanie podstawowych własności symbolu Newtona
- stosowanie podstawowych własności trójkąta Pascala
- korzystanie ze wzorów na $(a + b)^n$ i $(a - b)^n$

Wprowadzimy teraz kolejną własność symbolu Newtona.

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb naturalnych n i k ($k \leq n$) prawdziwy jest wzór:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Dowód

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-(k+1))!} = \\ &= \frac{(k+1) \cdot n!}{(k+1)k! \cdot (n-k)!} + \frac{n! \cdot (n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k-1)! \cdot (n-k)} = \quad \leftarrow \text{doprowadzamy oba} \\ &= \frac{n! \cdot (k+1+n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \frac{n! \cdot (n+1)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \binom{n+1}{k+1} \quad \text{składniki do takich samych} \\ &\quad \text{mianowników} \end{aligned}$$

Koniec dowodu

Podany wzór można zinterpretować następująco.

Jeżeli w pojemniku znajduje się 1 kula czarna i n białych, to liczba wszystkich kombinacji $(k+1)$ -elementowych tego $(n+1)$ -elementowego zbioru kul jest równa:

$$\binom{n+1}{k+1}$$

Wśród nich jest $\binom{n}{k+1}$ kombinacji składających się wyłącznie z kul białych oraz

$\binom{n}{k}$ kombinacji zawierających kulę czarną i k kul białych. Liczba wszystkich kombinacji jest sumą liczb w obu wymienionych przypadkach, stąd:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

MKP

tematy 1.5, 1.6

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 2.3

 **Generator**
testów i sprawdzianów

◀ 3.4. Zapisz podane liczby i wyrażenia w postaci jednego symbolu Newtona.

a) $\binom{56}{17} + \binom{56}{18}$

b) $\binom{100}{32} + \binom{100}{67}$

c) $\binom{47}{13} + \binom{47}{14} + \binom{47}{32} + \binom{47}{33}$

d) $\binom{3n+2}{2n-1} + \binom{3n+2}{n+2}$

Odp.: a) $\binom{57}{18}$ b) $\binom{101}{33}$

c) $\binom{49}{15}$ d) $\binom{3n+3}{n+3}$

Przykład 1 ◀ zad. 3.4

Zapiszemy podane liczby i wyrażenia w postaci jednego symbolu Newtona.

a) $\binom{15}{4} + \binom{15}{5} + \binom{16}{10}$

b) $\binom{2n}{n-1} + 2\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1}$

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \text{a) } \binom{15}{4} + \binom{15}{5} + \binom{16}{10} &= \binom{16}{5} + \binom{16}{10} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \\ &= \binom{16}{5} + \binom{16}{6} = \binom{17}{6} \end{aligned} \quad \leftarrow \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \binom{2n}{n-1} + 2\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1} &= \\ &= \left(\binom{2n}{n-1} + \binom{2n}{n} \right) + \left(\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1} \right) = \\ &= \binom{2n+1}{n} + \binom{2n+1}{n+1} = \binom{2n+2}{n+1} \end{aligned}$$

Odp.: a) $\binom{17}{6}$ b) $\binom{2n+2}{n+1}$

Trójkąt Pascala

Zestawmy teraz w kolejnych wierszach współczynniki symbolu Newtona dla kolejnych n i k .

$$\begin{array}{ccc} \binom{0}{0} & \leftarrow n=0 \\ \binom{1}{0} \binom{1}{1} & \leftarrow n=1 \\ \binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2} & \leftarrow n=2 \\ \binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3} & \leftarrow n=3 \\ \binom{4}{0} \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4} & \leftarrow n=4 \end{array}$$

Zgodnie z udowodnionym poprzednio wzorem, suma dwóch współczynników znajdujących się w jednym wierszu obok siebie równa jest współczynnikowi znajdującemu się bezpośrednio pod nimi.

Łatwo to sprawdzić, obliczając wartości liczbowe podanych współczynników.

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
		1	4		6		4		1	
		1	5	10		10	5		1	
		1	6	15	20		15	6		1
		1	7	21	35	35	21	7		1
		1	8	28	56	70	56	28	8	1
	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Otrzymaliśmy w ten sposób **trójkąt Pascala**.

Każda liczba w tym trójkącie jest sumą dwóch znajdujących się nad nią. Na miejscach skrajnych znajdują się zawsze jedynki, bo $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ dla każdej liczby naturalnej n .

Zauważmy, że z samej zasady budowy trójkąta Pascala wynika jego symetria. Jest to potwierdzenie wzoru $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Obliczmy sumę wszystkich liczb znajdujących się w jednym wierszu tego trójkąta.

Proste rachunki pokazują, że sumy liczb w kolejnych początkowych wierszach wynoszą odpowiednio 1, 2, 4, 8, 16 itd.

Twierdzenie

Dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

Dowód

Rozważmy n -elementowy zbiór A . Wiadomo, że $\binom{n}{k}$ (gdzie $k \leq n$) jest liczbą k -elementowych podzbiorów zbioru A . Zatem:

- $\binom{n}{0}$ jest liczbą 0-elementowych podzbiorów zbioru A ,
- $\binom{n}{1}$ jest liczbą 1-elementowych podzbiorów zbioru A ,
- $\binom{n}{2}$ jest liczbą 2-elementowych podzbiorów zbioru A itd.

Liczba elementów dowolnego podzbioru zbioru A może być równa:

$$0, 1, 2, \dots, n-1, n$$

Zatem liczba wszystkich podzbiorów zbioru A jest równa:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Aby udowodnić twierdzenie, wystarczy więc wykazać, że liczba wszystkich podzbiorów zbioru A wynosi 2^n .

Ustawiamy wszystkie elementy zbioru A w pewnej kolejności. Następnie rozpatrujemy wszystkie n -wyrazowe ciągi o wyrazach ze zbioru $\{0, 1\}$. Zauważmy, że każdemu z takich ciągów możemy jednoznacznie przyporządkować pewien podzbiór zbioru A , na przykład:

- ciąg $(0, 0, 0, \dots, 0)$ przyporządkowujemy podzbiorowi będącemu zbiorem pustym,
- ciąg $(1, 0, 0, \dots, 0)$ przyporządkowujemy podzbiorowi, do którego należy tylko pierwszy element zbioru A ,
- ...
- ciąg $(0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0)$ przyporządkowujemy podzbiorowi, do którego należy tylko czwarty element zbioru A ,
- ...
- ciąg $(1, 0, 1, 0, 0, \dots, 0)$ przyporządkowujemy podzbiorowi, do którego należą tylko pierwszy i trzeci element zbioru A ,
- ...
- ciąg $(1, 1, 1, \dots, 1, 0)$ przyporządkowujemy podzbiorowi, do którego należą wszystkie elementy zbioru A z wyjątkiem ostatniego,
- ciąg $(1, 1, 1, \dots, 1)$ przyporządkowujemy podzbiorowi, do którego należą wszystkie elementy zbioru A .

Wiadomo, że liczba n -wyrazowych ciągów o wyrazach ze zbioru $\{0, 1\}$ jest równa 2^n . Zatem liczba wszystkich podzbiorów zbioru A jest równa 2^n .

Koniec dowodu

Wniosek

Liczba wszystkich podzbiorów zbioru n -elementowego jest równa 2^n .

Przykład 2 ◀ zad. 3.7

Obliczmy liczbę wszystkich naturalnych dzielników liczby 210.

Rozwiązanie

$$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Jeśli wybierzemy dowolny podzbiór zbioru $\{2, 3, 5, 7\}$, to po pomnożeniu jego elementów otrzymamy pewien dzielnik liczby 210, przy czym wybór zbioru pustego oznacza otrzymanie dzielnika równego 1. Zatem dzielników liczby 210 jest tyle, ile wszystkich podzbiorów zbioru $\{2, 3, 5, 7\}$, czyli $2^4 = 16$.

Odp.: 16

Dwumian Newtona

Przyjrzyjmy się teraz współczynnikom występującym we wzorach skróconego mnożenia stopnia drugiego i trzeciego. Uzupełnimy je o oczywiste przypadki w stopniach niższych i zapiszemy w jednolity sposób.

$$\begin{aligned}(a+b)^0 &= 1a^0b^0 \\ (a+b)^1 &= 1a^1b^0 + 1a^0b^1 \\ (a+b)^2 &= 1a^2b^0 + 2a^1b^1 + 1a^0b^2 \\ (a+b)^3 &= 1a^3b^0 + 3a^1b^2 + 3a^2b^1 + 1a^0b^3\end{aligned}$$

Jak widać, poszczególne współczynniki występujące w rozwinięciu $(a+b)^n$ pokrywają się z liczbami w kolejnych wierszach trójkąta Pascala. Ta prawidłowość jest zachowana również dla wyższych potęg.

Przykład 3

Przeanalizujemy sposób, w jaki wyznaczane są współczynniki w rozwinięciu potęgi dwumianu dla $n = 5$.

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)^2(a+b)^3 = \\ &= (a^2 + 2ab + b^2)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) \quad \leftarrow \text{wzory skróconego mnożenia}\end{aligned}$$

Teraz należy pomnożyć każdy wyraz sumy znajdującej się w pierwszym nawiasie przez każdy wyraz sumy znajdującej się w drugim nawiasie, a następnie zredukować wyrazy podobne. Te przekształcenia zostawiamy do samodzielnego wykonania.

Końcowy wynik, po uporządkowaniu wyrazów, możemy zapisać w postaci:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \quad (*)$$

Zastanówmy się, w jaki sposób powstał w powyższym rozwinięciu składnik $10a^3b^2$.

◀3.7. Znajdź liczbę wszystkich naturalnych dzielników podanej liczby.

- a) 66
b) 209
c) 2310
d) 5005

Odp.: a) 8 b) 4 c) 32 d) 16

Wróćmy do początkowego zapisu potęgi w postaci iloczynu pięciu czynników.

$$(a+b)^5 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

Zgodnie z prawami arytmetyki, aby otrzymać końcowy wynik, należy każdy element z każdego czynnika pomnożyć przez każdy element z pozostałych czynników.

Wyrazy (przed redukcją) postaci a^3b^2 otrzymamy wtedy, gdy z wybranych trzech czynników, np. pierwszego, trzeciego i czwartego, pomnożymy element a , a następnie a^3 pomnożymy przez b wzięte z pozostałych dwóch – drugiego i piątego czynnika.

Mamy 5 czynników. Wyboru trzech z nich możemy dokonać na $\binom{5}{3} = 10$ sposobów. Zatem po zredukowaniu wyrazów podobnych otrzymamy 10 składników postaci a^3b^2 . W analogiczny sposób uzasadniamy otrzymanie każdego spośród pozostałych pięciu składników sumy we wzorze (*).

Zauważmy, że:

- każdy składnik sumy we wzorze (*) jest jednomianem stopnia piątego, co zrozumiałe, skoro mnożymy przez siebie 5 czynników stopnia pierwszego.
- otrzymaliśmy wszystkie możliwe układy potęg $a^n b^k$, dla których $n+k=5$.

Zatem już bez wyprowadzania napiszemy wzór dla $(a+b)^6$:

$$(a+b)^6 = \binom{6}{0}a^6b^0 + \binom{6}{1}a^5b^1 + \binom{6}{2}a^4b^2 + \binom{6}{3}a^3b^3 + \binom{6}{4}a^2b^4 + \binom{6}{5}a^1b^5 + \binom{6}{6}a^0b^6$$

i po podstawieniu odpowiednich wartości współczynników Newtona mamy ostatecznie:

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Jeżeli powtórzymy powyższe rozważania dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, otrzymamy wzór na rozwinięcie dwumianu $(a+b)^n$, nazywany **wzorem dwumianowym Newtona** lub krótko **dwumianem Newtona**.

Twierdzenie

Dwumian Newtona

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0b^n$$

Dowód

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b) \cdot \dots \cdot (a+b)}_{n \text{ czynników}}$$

◀3.11. Wyznacz ten wyraz rozwinięcia dwumianu $(x^2 + \sqrt[4]{x})^{24}$, w którym występuje x^{13} .

Odp.: $10\,626x^{13}$

Przykład 5 ◀ zad. 3.11

Wyznamy ten wyraz rozwinięcia dwumianu $(x^3 - \frac{2}{x})^{18}$, w którym występuje x^{10} .

Rozwiązanie

Każdy z wyrazów rozwinięcia dwumianu $(x^3 - \frac{2}{x})^{18}$ ma postać:

$$\binom{18}{k} (x^3)^{18-k} \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^k = \binom{18}{k} x^{54-3k} \cdot (-2)^k \cdot x^{-k} = (-2)^k \binom{18}{k} x^{54-4k}$$

Aby wyznaczyć wyraz, w którym występuje x^{10} , wystarczy rozwiązać równanie:

$$54 - 4k = 10$$

Otrzymujemy $k = 11$. Zatem szukany wyraz jest równy $-2^{11} \binom{18}{11} x^{10}$.

Odp.: $-2^{11} \binom{18}{11} x^{10}$

D Przykład 6 ◀ zad. 3.12

Wykorzystamy wzór dwumianowy Newtona, aby udowodnić, że:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

Dowód

Wystarczy podstawić do wzoru rozwinięcia $(a+b)^n$ wartości $a = b = 1$.

Otrzymujemy wówczas:

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} \cdot 1^n \cdot 1 + \binom{n}{1} \cdot 1^{n-1} \cdot 1 + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot 1 \cdot 1^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot 1 \cdot 1^n$$

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Koniec dowodu

Zadania

W każdym z zadań 3.1–3.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź.

Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

3.1. Na podstawie podanego fragmentu trójkąta Pascala podaj wartość liczby x .

$$\begin{array}{ccccc} & & 495 & & x \\ & & 715 & 1287 & 1716 \end{array}$$

A. 429

B. 792

C. 924

D. 1067

◀3.12. Wykaż, że $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \cdot \binom{n}{n} = 0$.

$$\text{Odp.: } \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \cdot \binom{n}{n} =$$

$$= \binom{n}{0} \cdot 1^n \cdot (-1)^0 + \binom{n}{1} \cdot 1^{n-1} \cdot (-1)^1 + \dots + \binom{n}{n} \cdot (-1)^n = [1 + (-1)]^n = 0^n = 0$$

Odpowiedzi i rozwiązania

3.1. B

3.2. Wskaż wynik działania $\binom{2n}{n-3} + \binom{2n}{n+2}$.

- A. $\binom{2n}{2n+1}$ B. $\binom{2n+1}{n-2}$ C. $\binom{2n+1}{n+1}$ D. $\binom{4n}{2n-1}$

3.3. Wskaż liczbę podzbiorów zbioru dziesięcioelementowego.

- A. $\binom{10}{10}$ B. 45 C. 1024 D. 10!

3.4. Zapisz podane liczby i wyrażenia w postaci jednego symbolu Newtona.

- a) $\binom{56}{17} + \binom{56}{18}$
 b) $\binom{100}{32} + \binom{100}{67}$
 c) $\binom{47}{13} + \binom{47}{14} + \binom{47}{32} + \binom{47}{33}$
 d) $\binom{3n+2}{2n-1} + \binom{3n+2}{n+2}$

3.5. Skorzystaj z fragmentu jednego z wierszy trójkąta Pascala i oblicz $\binom{14}{4}$.

1 12 66 220 495

3.6. W klasie 4a jest 30 uczniów. Wychowawca poprosił, aby co najmniej jeden z uczniów został po lekcji i posprzątał pracownię. Na ile sposobów uczniowie mogą wypełnić to polecenie?

3.7. Znajdź liczbę wszystkich naturalnych dzielników podanej liczby.

- a) 66 b) 209 c) 2310 d) 5005

3.8. Zapisz wyrażenie w postaci uporządkowanej sumy.

- a) $(a-b)^4$ c) $\left(x^3 + \frac{2}{x}\right)^5$
 b) $(2c^2 + 3)^4$ d) $\left(\frac{m}{t^2} - \frac{t^3}{m}\right)^6$

3.9. Zapisz wyrażenie w postaci uporządkowanej sumy.

- a) $(1 + \sqrt{2})^4$ c) $(1 + \sqrt{2})^5$
 b) $(\sqrt[3]{3} - \sqrt{3})^4$ d) $(2 - \sqrt{2})^6$

3.2. B

3.3. C

- 3.4.** a) $\binom{57}{18}$ b) $\binom{101}{33}$
 c) $\binom{49}{15}$ d) $\binom{3n+3}{n+3}$

3.5. 1001

3.6. $2^{30} - 1$

3.7. a) 8 b) 4 c) 32 d) 16

- 3.8.** a) $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$
 b) $16c^8 + 96c^6 + 216c^4 + 216c^2 + 81$
 c) $x^{15} + 10x^{11} + 40x^7 + 80x^3 + \frac{80}{x} + \frac{32}{x^5}$
 d) $\frac{m^6}{t^{12}} - \frac{6m^4}{t^7} + \frac{15m^2}{t^2} - 20t^3 + \frac{15t^8}{m^2} - \frac{6t^{13}}{m^4} + \frac{t^{18}}{m^6}$

- 3.9.** a) $17 + 12\sqrt{2}$
 b) $9 - 12\sqrt{3} + 3\sqrt[3]{3} + 18\sqrt[3]{9} - 12\sqrt[6]{243}$
 c) $41 + 29\sqrt{2}$
 d) $792 - 560\sqrt{2}$

3.10. 60

3.11. $10\,626x^{13}$

3.12. Patrz s. 144.

Prosto do matury

1. P, F, P

2. 968

3. $1792x^4$ 4. $362 - 209\sqrt{3}$

3.10. Wyznacz ten składnik sumy będącej rozwinięciem $(\sqrt{3} + \sqrt[3]{2})^5$, który jest liczbą naturalną.

3.11. Wyznacz ten wyraz rozwinięcia dwumianu $(x^2 + \sqrt[4]{x})^{24}$, w którym występuje x^{13} .

D * 3.12. Wykaż, że $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \cdot \binom{n}{n} = 0$.

D * 3.13. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n liczba:

$$\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 4\binom{n}{2} + \dots + 2^n \binom{n}{n}$$

jest potęgą liczby naturalnej.

Prosto do matury



1. Wielomian $W(x) = (2x + 1)^6$ zapisano w postaci uporządkowanej sumy. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Współczynnik przy x jest równy 12.

B. Współczynnik przy x^4 jest równy 30.

C. Suma wszystkich współczynników wielomianu $W(x)$ jest równa 3^6 .

2. Dany jest zbiór A składający się z 10 punktów leżących na jednym okręgu. Ile jest wszystkich wielokątów o wierzchołkach w punktach należących do zbioru A ?

3. Wyznacz ten wyraz rozwinięcia dwumianu $(x^3 + \frac{2}{x})^8$, w którym występuje x^4 .

4. Zapisz w postaci uporządkowanej sumy wyrażenie $(2 - \sqrt{3})^5$.

D 5. Wykaż, że:

$$\binom{10}{0} \cdot 4^{10} - \binom{10}{1} \cdot 4^9 \cdot 3 + \binom{10}{2} \cdot 4^8 \cdot 3^2 - \dots - \binom{10}{9} \cdot 4 \cdot 3^9 + \binom{10}{10} \cdot 3^{10} = 1$$

$$3.13. \binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 4\binom{n}{2} + \dots + 2^n \binom{n}{n} =$$

$$= \binom{n}{0} \cdot 1^n \cdot 2^0 + \binom{n}{1} \cdot 1^{n-1} \cdot 2^1 + \binom{n}{2} \cdot 1^{n-2} \cdot 2^2 + \dots + \binom{n}{n} \cdot 1^0 \cdot 2^n = (1 + 2)^n = 3^n$$

Zatem jest to potęga liczby naturalnej.

$$5. \binom{10}{0} \cdot 4^{10} - \binom{10}{1} \cdot 4^9 \cdot 3 + \binom{10}{2} \cdot 4^8 \cdot 3^2 - \dots + \binom{10}{10} \cdot 3^{10} =$$

$$= \binom{10}{0} \cdot 4^{10} \cdot (-3)^0 + \binom{10}{1} \cdot 4^9 \cdot (-3)^1 + \binom{10}{2} \cdot 4^8 \cdot (-3)^2 + \dots + \binom{10}{10} \cdot 4^0 \cdot (-3)^{10} =$$

$$= [4 + (-3)]^{10} = 1^{10} = 1$$

4. Warto powtórzyć – prawdopodobieństwo i jego własności

Definicja

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Zakładamy, że Ω jest skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych jednakowo prawdopodobnych w danym doświadczeniu losowym.

Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A w tym doświadczeniu jest równe stosunkowi liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia A do liczby wszystkich zdarzeń elementarnych.

$$P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}}$$

Przykład 1

Rzucamy 2 razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że suma liczb oczek w obu rzutach jest nieparzysta?

Rozwiązanie

W tym doświadczeniu losowym:

$$\overline{\Omega} = 6^2 = 36$$

A – suma liczb oczek jest nieparzysta, czyli za pierwszym razem wypadł wynik parzysty, a za drugim – nieparzysty lub odwrotnie.

Zatem:

$$\overline{A} = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$$

Zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, więc:

$$P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Odp.: $\frac{1}{2}$

$$\Omega = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66\}$$

Zależności między zdarzeniami losowymi

Przyjmijmy, że Ω jest zbiorem zdarzeń elementarnych pewnego doświadczenia losowego oraz A, B są pewnymi zdarzeniami w tym doświadczeniu, czyli $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$.

- **Alternatywą** lub **sumą zdarzeń** A i B nazywamy zdarzenie C , które zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi zdarzenie A albo zachodzi zdarzenie B , albo zachodzą obydwa te zdarzenia jednocześnie. Zdarzeniu C sprzyjają tylko zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniom A lub B , co oznacza, że $C = A \cup B$.
- **Koniunkcją** lub **iloczynem zdarzeń** A i B nazywamy zdarzenie D , które zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy jednocześnie zachodzą: zdarzenie A i zdarzenie B . Zdarzeniu D sprzyjają tylko zdarzenia elementarne sprzyjające jednocześnie zdarzeniom A i B , czyli $D = A \cap B$.
- **Różnicą zdarzeń** A i B nazywamy zdarzenie E , które zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi zdarzenie A i nie zachodzi zdarzenie B . Zdarzeniu E sprzyjają tylko te zdarzenia elementarne, które sprzyjają zdarzeniu A i nie sprzyjają zdarzeniu B , czyli $E = A - B$.
- Zdarzenia A i B są **identyczne**, jeżeli zdarzenie A zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi zdarzenie B . Oznacza to, że zdarzeniom A i B sprzyjają te same zdarzenia elementarne, czyli zbiory A i B są równe: $A = B$.
- Zdarzenie A **pociąga za sobą** zdarzenie B , jeżeli każde zdarzenie elementarne sprzyjające zajściu zdarzenia A sprzyja jednocześnie zajściu zdarzenia B . Oznacza to, że zbiór A jest zawarty w zbiorze B : $A \subset B$.
- Zdarzenia A i B **wykluczają się (wyłączają się)**, gdy ich iloczyn jest zdarzeniem niemożliwym. Inaczej mówiąc, zdarzenia A i B nie mogą zajść jednocześnie. Zbiory A i B są rozłączne: $A \cap B = \emptyset$.
- **Zdarzeniem przeciwnym** do A nazywamy zdarzenie A' polegające na tym, że nie zaszło zdarzenie A . Zdarzenie elementarne sprzyja zdarzeniu A' wtedy i tylko wtedy, gdy nie sprzyja zdarzeniu A .

Oznacza to, że $A' = \Omega - A$.

Zauważmy, że jeżeli $A \subset \Omega$, to:

$$A \cap A' = \emptyset$$

$$A \cup A' = \Omega$$

W teorii zbiorów zbiór A' nazywamy **dopełnieniem** zbioru A do przestrzeni (zbioru) Ω .

Własności prawdopodobieństwa

Definicja

Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa

Niech Ω będzie danym zbiorem zdarzeń elementarnych. Jeżeli każdemu zdarzeniu $A \subset \Omega$ jest przyporządkowana dokładnie jedna liczba $P(A)$ taka, że:

- (1) $P(A) \geq 0$,
- (2) dla każdej pary $A, B \subset \Omega$ wykluczających się zdarzeń zachodzi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$
- (3) $P(\Omega) = 1$,

to mówimy, że **na zdarzeniach w zbiorze Ω określone jest prawdopodobieństwo P** , a liczbę $P(A)$ nazywamy **prawdopodobieństwem zdarzenia A** .

Twierdzenie

Niech Ω będzie danym zbiorem zdarzeń elementarnych, a P – prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach w zbiorze Ω i $A, B \subset \Omega$. Wtedy:

- (1) $P(\emptyset) = 0$.
- (2) jeżeli $A \subset B$, to $P(A) \leq P(B)$.
- (3) dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$ prawdziwa jest nierówność $P(A) \leq 1$.
- (4) $P(A) + P(A') = 1$.
- (5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Zadania

W każdym z zadań 4.1–4.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź.

Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

4.1. Rzucono trzema monetami. Wskaż prawdopodobieństwo, że każda z monet upadła na stół tą samą stroną (orłem lub reszką) do góry.

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{3}$

4.2. Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A jest równe $\frac{x}{5}$ i $x \neq 0$. Zatem prawdopodobieństwo tego, że zdarzenie A nie zajdzie, wynosi

- A. $\frac{1-x}{5}$. B. $\frac{5-x}{x}$. C. $\frac{5-x}{5}$. D. $\frac{5}{x}$.

Odpowiedzi i rozwiązania

4.1. A

4.2. C

4.3. D

4.3. Wiadomo, że $A, B \subset \Omega$, $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{7}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$. Wskaż wartość $P(A \cap B)$.

- A. $\frac{1}{28}$ B. $\frac{1}{84}$ C. $\frac{25}{28}$ D. $\frac{5}{84}$

4.4. P, P, F

4.4. Wiadomo, że $A, B, C \subset \Omega$. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

B. $B \cap C \subset B \cup C$

C. $A' \cup B' = (A \cup B)'$

4.5. $\frac{7}{36}$

4.5. Rzucamy dwiema kostkami sześciennymi. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że suma liczb oczek na obu kostkach będzie podzielna przez 5?

4.6. $\frac{1}{8}$

4.6. Rzucamy kostką i dwiema monetami. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wypadną dwie reszki i liczba nieparzysta?

4.7. 12

4.7. W urnie są kule białe, czarne i zielone, razem 64 sztuki. Prawdopodobieństwo wylosowania z tej urny kuli czarnej wynosi $\frac{9}{16}$, a kuli zielonej $\frac{1}{4}$. Podaj liczbę kul białych znajdujących się w tej urnie.

4.8. $\frac{1}{3}$

4.8. W skarbonce są następujące monety: 6 złotych, 4 dwuzłotówki i 2 pięciozłotówki. Oblicz prawdopodobieństwo, że moneta losowo wyjęta ze skarbonki ma wartość równą średniej wartości monet w skarbonce.

4.9. $\frac{12}{25}$

4.9. Z urny, w której jest 12 kul białych i 13 czarnych, losujemy kolejno bez zwracania dwie kule. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul w jednakowym kolorze?

4.10. $\frac{1}{169}$

4.10. Z talii 52 kart losujemy ze zwracaniem dwa razy po jednej karcie. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania dwa razy asa?

4.11. $\frac{8}{75}$

4.11. Na loterii jest 100 losów, w tym 12 wygrywających. Kupujemy kolejno dwa losy. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że pierwszy kupiony los będzie przegrywający, a drugi – wygrywający?

4.12. $\frac{3}{10}$

4.12. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana liczba naturalna dwucyfrowa jest podzielna przez 5 lub przez 8?

4.13. $\frac{255}{256}$

4.13. Rzucamy 8 razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że co najmniej raz wypadnie orzeł?

5. Obliczanie prawdopodobieństwa z zastosowaniem kombinatoryki

Umiejętności:

- obliczanie prawdopodobieństwa z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa
- zliczanie obiektów z wykorzystaniem wzorów kombinatorycznych

Przypomnijmy – jeżeli w danym doświadczeniu losowym wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, to **prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia** A wynosi:

$$P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}}$$

gdzie $\overline{A}$ oznacza liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia A , a $\overline{\Omega}$ – liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych w tym doświadczeniu.

Powyższy wzór możemy stosować tylko wówczas, gdy $A \subset \Omega$. Jeżeli więc uwzględniamy kolejność (wariacje) w zapisie wyników w zbiorze Ω , to musimy również uwzględnić ją w zapisie zbioru A . Jeżeli natomiast w zapisie zbioru Ω wykorzystujemy kombinacje, to do zapisu zbioru A także musimy użyć kombinacji.

Zastosujemy teraz poznane wzory kombinatoryczne do obliczania wartości $\overline{\Omega}$ i $\overline{A}$. W pewnych sytuacjach będziemy też wykorzystywać metodę drzew.

Przykład 1 ◀ zad. 5.6

W urnie jest 5 kul zielonych i 4 czarne. Losujemy cztery kule. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych kul dokładnie dwie będą zielone?

Rozwiązanie

W doświadczeniu nie odgrywa roli kolejność kul. Zatem zdarzenia elementarne możemy rozpatrywać jako czteroelementowe kombinacje utworzone ze zbioru 9 elementów.

$$\overline{\Omega} = \binom{9}{4} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 7 \cdot 2 \cdot 9$$

◀5.6. Z urny, w której jest 12 kul białych i 8 czarnych, losujemy 3 kule. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych kul dokładnie jedna będzie czarna?

Odp.: $\frac{44}{95}$

MKP

temat 1.8

Multiteka

- Prawdopodobieństwo klasyczne
- Zdarzenie elementarne – rzut dwiema kostkami do gry
- Obliczanie prawdopodobieństwa – rozwiązanie zadania

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.5

 **Generator**
testów i sprawdzianów

Oznaczmy jako A zdarzenie polegające na wylosowaniu dokładnie dwóch kul zielonych (zatem układ sprzyjający to 2 zielone + 2 czarne). Aby uzyskać wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające, możemy następująco wyobrazić sobie doświadczenie: rozdzielamy kulki na dwa podzbiory (oddzielnie zielone oraz czarne) i losujemy 2 kule ze zbioru czarnych oraz 2 kule ze zbioru zielonych. Mamy więc:

$$\overline{A} = \binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 4 \cdot 5 \cdot 3, \text{ czyli } P(A) = \frac{4 \cdot 5 \cdot 3}{7 \cdot 2 \cdot 9} = \frac{10}{21}$$

Odp.: $\frac{10}{21}$

◀ 5.8. W pudełku jest 6 losów wygrywających i 24 losy puste. Kupujemy kolejno trzy losy. Oblicz prawdopodobieństwo, że ostatni z kupionych losów będzie wygrywający.

Odp.: $\frac{1}{5}$

Przykład 2 ◀ zad. 5.8

W urnie są 3 kule zielone i 4 czarne. Losujemy bez zwracania trzy razy po jednej kuli. Obliczymy prawdopodobieństwo, że ostatnią wylosowaną kulą jest kula czarna.

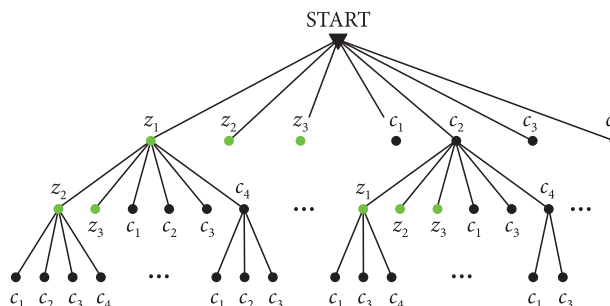
Rozwiązanie

Skoro interesuje nas prawdopodobieństwo zdarzenia A – ostatnia (a więc trzecia) wylosowana kula jest czarna, musimy uwzględnić kolejność kul. Zatem zdarzeniami elementarnymi w tym doświadczeniu są 3-elementowe wariacje bez powtórzeń ze zbioru 7-elementowego, czyli $\overline{\Omega} = 7 \cdot 6 \cdot 5$.

Zdarzenia sprzyjające zajściu zdarzenia A to następujące układy kul:

zielona – zielona – czarna,	czarna – zielona – czarna,
zielona – czarna – czarna,	czarna – czarna – czarna.

Przyjmijmy, że kule zielone są opisane z_1, z_2, z_3 , a kule czarne – c_1, c_2, c_3, c_4 .



Z powyższego drzewka odczytujemy:

$$\overline{A} = 3 \cdot 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 3 \cdot 4 \cdot 10$$

$$P(A) = \frac{3 \cdot 4 \cdot 10}{7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{4}{7}$$

Odp.: $\frac{4}{7}$

Przykład 3 ◀ zad. 5.9

Obliczmy prawdopodobieństwo, z jakim brydżysta otrzyma do ręki 8 pików.

Rozwiązanie

Doświadczenie polega na losowaniu 13 kart z talii 52 kart, kolejność wylosowanych kart nie jest istotna, zatem:

$$\overline{\Omega} = \binom{52}{13} = \frac{52!}{13! \cdot 39!}$$

Zdarzeniem A jest wylosowanie 8 pików i 5 kart niebędących pikami. Rozdzielamy więc talię na dwa podzbiory – 13 pików i resztę (czyli $52 - 13 = 39$) kart i losujemy 8 kart z pików oraz pozostałe 5 ze zbioru kart innych niż piki. Liczba wszystkich zdarzeń sprzyjających jest więc równa:

$$\overline{A} = \binom{13}{8} \cdot \binom{39}{5} = \frac{13!}{8! \cdot 5!} \cdot \frac{39!}{5! \cdot 34!}$$

$$P(A) = \frac{\binom{13}{8} \cdot \binom{39}{5}}{\binom{52}{13}} = \frac{(13!)^2 \cdot (39!)^2}{(5!)^2 \cdot 8! \cdot 34! \cdot 52!} \approx 0,001$$

Odp.: $\frac{(13!)^2 \cdot (39!)^2}{(5!)^2 \cdot 8! \cdot 34! \cdot 52!}$

Przykład 4

Które ze zdarzeń jest bardziej prawdopodobne – wylosowanie przez brydżystę zestawu „4 asy, 4 króle, 4 damy, walet pik” czy zestawu „5♠, 8♠, A♠, 3♥, 10♥, D♥, K♥, 5♦, 8♦, D♦, 3♣, 8♣, K♣”?

Rozwiązanie

Oznaczmy wylosowane zestawy:

A – „4 asy, 4 króle, 4 damy, walet pik”,

B – „5♠, 8♠, A♠, 3♥, 10♥, D♥, K♥, 5♦, 8♦, D♦, 3♣, 8♣, K♣”.

Każde z tych zdarzeń jest reprezentowane przez jedno zdarzenie elementarne (konkretny układ kart), zatem:

$$\overline{A} = \overline{B} = 1$$

i prawdopodobieństwa ich zajścia są **identyczne**.

◀5.9. Z talii 24 kart (6 kart w każdym z czterech kolorów) wyciągamy losowo 5 kart. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy dokładnie 3 piki.

Odp.: $\frac{255}{3542}$

W doświadczeniu losowym wylosowanie np. zestawu 13 konkretnych kart przez brydżystę czy 6 konkretnych liczb w lotto jest zawsze **pojedynczym** zdarzeniem elementarnym. Nie ma więc bardziej lub mniej prawdopodobnych układów. Podobnie – po wyrzuceniu kolejno 26 reszek prawdopodobieństwo wyrzucenia orła w 27. rzucie monetą nie wzrosło i nadal wynosi $\frac{1}{2}$.

◀5.11. Sześciu finalistów konkursu, w tym Anna i Jan, losuje kolejność, w jakiej będą odpowiadać przed komisją. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że Anna nie będzie odpowiadać jako pierwsza i jednocześnie Jan będzie odpowiadać po niej (niekoniecznie bezpośrednio).

Odp.: $\frac{1}{3}$

Przykład 5 ◀ zad. 5.11

Pani przewodnik na wycieczce ustawia losowo w rzędzie dwanaścioro dzieci, w tym Antosia, Basię i Cesię. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wymienione dzieci zostaną ustawione obok siebie w dowolnej kolejności?

Rozwiązanie

Doświadczeniem losowym jest ustalenie kolejności dwanaściorga dzieci.

Zdarzenia elementarne są permutacjami zbioru dwunastoelementowego, więc:

$$\overline{\Omega} = 12!$$

Zdarzenie A polega na takim ustawieniu dzieci, w którym Antoś, Basia i Cesia sąsiadują ze sobą. Obliczmy, ile jest takich zdarzeń.

Trójkę Antoś – Basia – Cesia możemy umieścić wśród innych dzieci na 10 sposobów, na miejscach:

- pierwszym, drugim i trzecim,
- drugim, trzecim i czwartym,
- ...
- dziesiątym, jedenastym i dwunastym.

Dla każdego z nich jest 3! sposobów ustalenia kolejności tych dzieci oraz 9! sposobów ustalenia kolejności pozostałych dzieci. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających jest więc równa:

$$\overline{A} = 10 \cdot 3! \cdot 9!$$

$$P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}} = \frac{10 \cdot 3! \cdot 9!}{12!} = \frac{6 \cdot 10!}{12 \cdot 11 \cdot 10!} = \frac{1}{22}$$

Odp.: $\frac{1}{22}$

Przykład 6

Rzucamy 9 razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że uzyskamy dokładnie 5 orłów?

Doświadczenia „rzut monetą (kostką) k razy” i „rzut k monetami (kostkami)” możemy zinterpretować i opisać dokładnie tak samo. Identyczne są zatem zbiory zdarzeń elementarnych takich doświadczeń.



Rozwiązanie

Zdarzenia elementarne są dziewięcioelementowymi wariacjami z powtórzeniami, więc $\overline{\Omega} = 2^9 = 512$.

Zdarzenie A polega na wyrzuceniu pięciu orłów i czterech reszek. Przykładem zdarzenia elementarnego sprzyjającego zajściu zdarzenia A jest OORORORRO.

Do wyznaczenia wszystkich takich zdarzeń sprzyjających wystarczy znaleźć w zbiorze Ω wszystkie ciągi, w których reszka R występuje dokładnie 4 razy*. W tym celu możemy odpowiednio spreparować doświadczenie, na przykład poprzez pomocnicze losowanie, w którym zamiast rzutów monetą losujemy numery miejsc, na których wpiszemy R.

W ciągu OORORORRO litera R występuje na trzecim, piątym, siódmym i ósmym miejscu. Odpowiada to wylosowaniu liczb 3, 5, 7, 8 ze zbioru $\{1, 2, \dots, 8, 9\}$. Za-uważmy, że nie jest istotna kolejność wylosowanych numerów, natomiast nie mogą się one powtarzać. Zatem w pomocniczym losowaniu mamy $\binom{9}{4}$ wszystkich możliwości i tyle jest w zbiorze Ω zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A.

$$\overline{\overline{A}} = \binom{9}{4} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 7 \cdot 2 \cdot 9, \text{ czyli } P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 9}{512} = \frac{63}{256}$$

Odp.: $\frac{63}{256}$

Przykład 7

W urnie jest 10 kul czarnych i 2 białe. Wszystkie kule dzielimy losowo na dwa podzbiory po 6 kul. Obliczymy prawdopodobieństwo, że w każdym z nich znajdzie się kula biała.

Rozwiązanie

Aby podzielić kule na dwa podzbiory, losujemy 6 z 12 kul. Wybór sześciu kul oznacza bowiem zostawienie w urnie 6 kul. Kolejność wylosowanych kul nie jest istotna, zatem:

$$\overline{\overline{\Omega}} = \binom{12}{6}$$

Oznaczmy zdarzenie A – w każdym z dwóch podzbiorów znajdzie się kula biała. Zdarzenie elementarne sprzyjające zdarzeniu A polega na wylosowaniu 5 kul czarnych i jednej białej. Mamy więc:

$$\overline{\overline{A}} = \binom{10}{5} \cdot \binom{2}{1} \quad \leftarrow \text{kule czarne losujemy spośród 10 czarnych, a kulę białą – spośród 2 białych}$$

$$P(A) = \frac{\binom{10}{5} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{12}{6}} = \frac{10! \cdot 2 \cdot (6!)^2}{(5!)^2 \cdot 12!} = \frac{6}{11}$$

Odp.: $\frac{6}{11}$

*W temacie ósmym (s. 182) przedstawiamy inny sposób rozwiązywania zadań tego typu.

◀5.19. W pudełku jest 400 kul, w tym n czerwonych. Wybieramy losowo dwie kule. Prawdopodobieństwo wylosowania obu kul czerwonych jest równe $\frac{1}{760}$.

- a) Ile kul czerwonych jest w tym pudełku?
b) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że żadna z wylosowanych kul nie jest czerwona.

Odp.: a) 15 b) $\frac{88}{95}$

◀5.20. Wśród n losów na loterii są cztery wygrywające. Kupujemy 3 losy. Dla jakich n prawdopodobieństwo tego, że wszystkie losy będą wygrywające, jest większe od 0,2?

Odp.: $n \in \{4, 5\}$

Przykład 8 ◀ zad. 5.19

Z urny, w której jest 10 kul białych i pewna liczba kul czarnych, losujemy 2 kule. Ile kul czarnych jest w urnie, jeżeli prawdopodobieństwo wylosowania z tej urny dwóch kul białych jest równe $\frac{3}{7}$?

Rozwiązanie

Oznaczmy liczbę kul czarnych literą n ($n \in \mathbf{N}$ i $n > 0$). W doświadczeniu nie odgrywa roli kolejność wylosowanych kul – zdarzenia elementarne są dwuelementowymi kombinacjami ze zbioru $(n+10)$ -elementowego.

$$\overline{\Omega} = \binom{n+10}{2} = \frac{(n+10)!}{2! \cdot (n+8)!} = \frac{(n+9)(n+10)}{2}$$

Niech A oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu dwóch kul białych.

$$\overline{A} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$$

$$P(A) = \frac{90}{(n+9)(n+10)} \quad \leftarrow \text{z warunków zadania wiemy, że } P(A) = \frac{3}{7}$$

$$\frac{90}{(n+9)(n+10)} = \frac{3}{7}$$

Dziedziną tego równania jest zbiór dodatnich liczb naturalnych, więc nie musimy już robić żadnych dodatkowych założeń dotyczących mianownika.

$$(n+9)(n+10) = 30 \cdot 7$$

$$n^2 + 19n - 120 = 0$$

$$n = -24 \text{ lub } n = 5 \quad \leftarrow \text{tylko drugie z otrzymanych rozwiązań należy do dziedziny}$$

Odp.: W urnie jest 5 kul czarnych.

Przykład 9 ◀ zad. 5.20

Ile razy należy rzucić sześcienną kostką do gry, aby prawdopodobieństwo, że szóstka ani razu nie wypadnie, było mniejsze od $\frac{1}{3}$?

Rozwiązanie

Prawdopodobieństwo, że w jednym rzucie szóstka nie wypadnie, jest równe $\frac{5}{6}$, w dwóch rzutach – $\left(\frac{5}{6}\right)^2$ itd.

Szukamy takiego n (gdzie n oznacza liczbę rzutów), aby:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n < \frac{1}{3}$$

Obydwie strony nierówności są dodatnie, możemy je więc zlogarytmować.

$$\log \left(\frac{5}{6} \right)^n < \log \frac{1}{3}$$

$$n \log \frac{5}{6} < \log \frac{1}{3} \quad \leftarrow \log_a b^n = n \log_a b$$

$$n > \frac{\log \frac{1}{3}}{\log \frac{5}{6}} \quad \leftarrow \log \frac{5}{6} < 0$$

$$n > \frac{\log 1 - \log 3}{\log 5 - \log 6} = \frac{-\log 3}{-(\log 6 - \log 5)} = \quad \leftarrow \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$= \frac{\log 3}{\log 6 - \log 5} \approx 6,03$$

Zatem należy wykonać co najmniej 7 rzutów kostką.

Odp.: Co najmniej 7 razy.

Zadania

W każdym z zadań 5.1–5.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź.

Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

5.1. Z cyfr 1, 2, 3, 4 układamy losowo czterocyfrowe liczby o różnych cyfrach. Wskaż prawdopodobieństwo tego, że otrzymana liczba będzie zawarta między liczbami 2000 i 4000.

- A. $\frac{5}{6}$ B. $\frac{5}{12}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{2}$

5.2. Z sześciu odcinków o długościach 1, 3, 5, 6, 7, 9 wybieramy losowo trzy różne odcinki. Wskaż prawdopodobieństwo tego, że z wybranych odcinków można zbudować trójkąt.

- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{3}{20}$ D. $\frac{7}{10}$

5.3. W urnie są 3 kule zielone i 4 czarne. Losujemy cztery kule. Wskaż prawdopodobieństwo tego, że wśród wylosowanych kul dokładnie dwie są czarne.

- A. $\frac{2}{7}$ B. $\frac{3}{35}$ C. $\frac{6}{35}$ D. $\frac{18}{35}$

Odpowiedzi i rozwiązania

5.1. D

5.2. A

5.3. D

5.4. a) $\frac{1}{120}$ b) $\frac{1}{20}$

5.5. $\frac{1}{512}$

5.6. $\frac{44}{95}$

5.7. $\frac{215}{216}$

5.8. $\frac{1}{5}$

5.9. $\frac{255}{3542}$

5.10. $\frac{7}{9}$

5.11. $\frac{1}{3}$

5.12. a) $\frac{25}{81}$ b) $\frac{41}{81}$

5.13. $\frac{3}{5}$

5.4. Pięcioro klientów o różnym wzroście ustawia się losowo w kolejkę przed kasą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że

- a) ustawią się w kolejności od najwyższego do najniższego.
- b) najwyższy stanie na początku kolejki, a najniższy na jej końcu.

5.5. Rzucamy 10 razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w żadnych dwóch kolejnych rzutach nie powtórzy się ten sam wynik.

5.6. Z urny, w której jest 12 kul białych i 8 czarnych, losujemy 3 kule. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych kul dokładnie jedna będzie czarna?

5.7. Rzucamy 3 razy sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że iloczyn liczb oczek we wszystkich rzutach będzie mniejszy od 200.

5.8. W pudełku jest 6 losów wygrywających i 24 losy puste. Kupujemy kolejno trzy losy. Oblicz prawdopodobieństwo, że ostatni z kupionych losów będzie wygrywający.

5.9. Z talii 24 kart (6 kart w każdym z czterech kolorów) wyciągamy losowo 5 kart. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy dokładnie 3 piki.

5.10. Przy okrągłym stole o 10 miejscach usiadło w przypadkowej kolejności 10 osób, w tym jedno małżeństwo. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że małżonkowie nie sąsiadują ze sobą.

5.11. Sześciu finalistów konkursu, w tym Anna i Jan, losuje kolejność, w jakiej będą odpowiadać przed komisją. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że Anna nie będzie odpowiadać jako pierwsza i jednocześnie Jan będzie odpowiadać po niej (niekoniecznie bezpośrednio).

5.12. Spośród kartek z liczbami 1, 2, ..., 9 wybieramy losowo jedną, zwracamy ją i losujemy po raz drugi. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że

- a) wartość bezwzględna różnicy wylosowanych liczb jest nie większa niż 1.
- b) różnica wylosowanych liczb jest liczbą parzystą.

5.13. Dziesięć osób wybrało się na biwak nad jeziorem. Po przyjeździe cztery z nich wzięły się za rozbiwanie namiotów, a pozostali postanowili pójść do lasu po chrust na ognisko. Z jakim prawdopodobieństwem Marta – jedna z uczestniczek biwaku – pójdzie po chrust, jeżeli podziału na grupy dokonano losowo?



5.14. Uczniowie 36-osobowej klasy Izydora nie mogli dojść do porozumienia, jak podzielić się obowiązkami związanymi z przygotowaniem studniówki. Ostatecznie postanowili losować z własnego grona 15 osób do wykonania dekoracji, 7 osób do zrobienia i wręczenia zaproszeń gościom, a pozostałych zatrudnić do sprzątania po zabawie. Z jakim prawdopodobieństwem Izydor i Jolka znajdą się w jednej grupie?

5.15. Z jakim prawdopodobieństwem Izydor zatańczy na studniówce poloneza z Jolką, jeżeli w ich klasie jest 18 uczniów i 18 uczennic, a dobór w pary jest przeprowadzany losowo?

5.16. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że trzy losowo wybrane wierzchołki sześcianu są wierzchołkami trójkąta równobocznego?

5.17. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ losujemy trzy razy kolejno bez zwracania po jednej cyfrze. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że

- a) zapisując cyfry w kolejności losowania, otrzymamy liczbę 451?
- b) wylosujemy trzy cyfry występujące w zapisie liczby 451?
- c) zapisując cyfry w kolejności losowania, otrzymamy liczbę mniejszą od 451?

5.18. W pudełku znajduje się 6 kul białych i 10 czarnych.

- a) Losujemy dwie kule kolejno ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul w tym samym kolorze.
- b) Losujemy dwie kule kolejno bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul o różnych kolorach.
- c) Do pudełka dołożono b kul białych, a następnie wylosowano dwie kule kolejno bez zwracania. Oblicz b , dla którego prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul o różnych kolorach jest równe prawdopodobieństwu wylosowania dwóch kul w tym samym kolorze.

5.19. W pudełku jest 400 kul, w tym n czerwonych. Wybieramy losowo dwie kule. Prawdopodobieństwo wylosowania obu kul czerwonych jest równe $\frac{1}{760}$.

- a) Ile kul czerwonych jest w tym pudełku?
- b) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że żadna z wylosowanych kul nie jest czerwona.

5.20. Wśród n losów na loterii są cztery wygrywające. Kupujemy 3 losy. Dla jakich n prawdopodobieństwo tego, że wszystkie losy będą wygrywające, jest większe od 0,2?

5.21. W urnie jest 20 kul białych i 2 czarne. Losujemy bez zwracania n kul. Dla jakich wartości n prawdopodobieństwo wylosowania samych kul białych jest większe od $\frac{1}{2}$?

5.15. $\frac{1}{18}$

5.16. $\frac{1}{7}$

5.17. a) $\frac{1}{504}$ b) $\frac{1}{84}$ c) $\frac{3}{8}$

5.18. a) $\frac{17}{32}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $b = 9$

5.19. a) 15 b) $\frac{88}{95}$

5.20. $n \in \{4, 5\}$

5.21. $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

5.14.
$$\frac{\binom{34}{13}\binom{21}{7} + \binom{34}{15}\binom{19}{5} + \binom{34}{15}\binom{19}{7}}{\binom{36}{15}\binom{21}{7}} = \frac{31}{90}$$

5.22. a) 0,2 b) 0,05 c) 0,15

5.22. Spośród liczb 1, 2, 3, 4, 5, 8 wybieramy trzy różne. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrane liczby są długościami boków

a) trójkąta? b) trójkąta prostokątnego? c) trójkąta rozwartokątnego?

* 5.23. Rzucamy 12 razy kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że każda liczba oczek wypadnie dokładnie 2 razy?

Prosto do matury

1. P, P, P

2. $\frac{9}{20}$

3. $\frac{10}{21}$

4. $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{10^3} = \frac{18}{25}$

5. $n \in \{6, 7, 8, 9\}$

Prosto do matury



1. Przy okrągłym stole o ośmiu miejscach usiadło w sposób przypadkowy osiem osób. Oceń prawdziwość podanych zdań.

A. Prawdopodobieństwo tego, że osoby X i Y nie siedzą obok siebie, jest równe $\frac{5}{7}$.B. Prawdopodobieństwo tego, że osoby X, Y i Z siedzą obok siebie, jest równe $\frac{1}{7}$.C. Prawdopodobieństwo tego, że osoby X i Y siedzą obok siebie, a osoba Z nie sąsiaduje z żadną z nich, jest równe $\frac{4}{21}$.

2. Z cyfr 1, 2, 3, 4, 5 układamy wszystkie możliwe liczby trzycyfrowe o różnych cyfrach. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana spośród nich liczba jest mniejsza od 320.

3. Z grupy, w której jest pięciu mężczyzn i cztery kobiety, wybrano losowo 3-osobową delegację. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w skład delegacji weszła dokładnie jedna kobieta.

4. W windzie dziesięciopiętrowego domu jedzie trzech pasażerów. Zakładamy, że wszystkie możliwe rozkłady wysiadania pasażerów na piętrach są jednakowo prawdopodobne. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że każdy pasażer wysiadzie na innym piętrze.

5. Z pudełka, w którym jest n kul, w tym 6 białych, losujemy dwie kule. Dla jakich wartości n prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych jest większe od $\frac{1}{3}$?

5.23. $\overline{\Omega} = 6^{12}$

A – każda liczba wypadnie dokładnie 2 razy

Wybieramy kolejno po 2 miejsca dla jedynki, dwójki, trójki, czwórki i piątki (na pozostałych dwóch będą szóstki).

$$\overline{A} = \binom{12}{2} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} = \frac{12!}{2!10!} \cdot \frac{10!}{2!8!} \cdot \frac{8!}{2!6!} \cdot \frac{6!}{2!4!} \cdot \frac{4!}{2!2!} = \frac{12!}{2^6}$$

$$P(A) = \frac{12!}{2^6 \cdot 6^{12}}$$

6. Prawdopodobieństwo warunkowe

Umiejętności:

- obliczanie prawdopodobieństwa warunkowego

W rachunku prawdopodobieństwa mamy często do czynienia z sytuacjami, gdy szanse zajścia pewnych zdarzeń zależą od innych zdarzeń. Mówimy wówczas o **prawdopodobieństwie warunkowym**. Aby wyjaśnić to pojęcie, przeanalizujemy poniższy przykład.

Przykład 1

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie kostką sześcienną. Rozpatrzmy zdarzenia:

A – suma liczb oczek w rzutach I i II jest równa 6,

B – w rzucie I wypadła parzysta liczba oczek.

W tabelach zaznaczyliśmy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zajściu odpowiednio zdarzenia A i zdarzenia B .

$$P(A) = \frac{5}{36}, \quad P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Założmy teraz, że w pierwszym rzucie wypadła parzysta liczba oczek, czyli że zaszło zdarzenie B . Ile wtedy wynosi prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A ?

Ponieważ zdarzenie B już zaszło, bierzemy pod uwagę tylko zdarzenia mu sprzyjające i do nich ograniczamy zbiór zdarzeń elementarnych (kolor niebieski w tabeli). Następnie sprawdzamy, ile spośród nich sprzyja zajściu zdarzenia A , co jest równoznaczne z wyznaczeniem liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia $A \cap B$. W tabeli obok widać, że są dwa takie zdarzenia: (2, 4) i (4, 2).

$$\overline{B} = 18, \quad \overline{A \cap B} = 2$$

Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B , jest

$$\text{więc równe } \frac{\overline{A \cap B}}{\overline{B}} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}.$$

I \ II	1	2	3	4	5	6
1					A	
2				A		
3			A			
4		A				
5	A					
6						

I \ II	1	2	3	4	5	6
1		B		B		B
2		B		B		B
3		B		B		B
4		B		B		B
5	B			B		B
6		B		B		B

I \ II	1	2	3	4	5	6
1					A	
2				A		
3			A			
4		A				
5	A					
6						

MKP

temat 1.10

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 2.6


Generator
 testów i sprawdzianów

Szukane prawdopodobieństwo jest różne od prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia A . Prawdopodobieństwo to oznaczamy $P(A|B)$ i nazywamy prawdopodobieństwem warunkowym: $P(A|B) = \frac{\overline{A \cap B}}{\overline{B}}$.

Zauważmy, że możemy w inny sposób zapisać wzór na $P(A|B)$.

$$P(A|B) = \frac{\overline{A \cap B}}{\overline{B}} = \frac{\overline{\overline{A \cap B}}}{\overline{\overline{B}}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Powyższy wzór został przyjęty jako definicja prawdopodobieństwa warunkowego.

Definicja

Niech $A, B \subset \Omega$ i $P(B) > 0$. **Prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B** , nazywamy liczbę:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Prawdopodobieństwo warunkowe spełnia warunki aksjomatycznej definicji prawdopodobieństwa, a więc ma te same własności co prawdopodobieństwo zdefiniowane w sposób aksjomatyczny i klasyczny.

Przykład 2 ◀ zad. 6.6

Ze wszystkich liczb trzycyfrowych, których cyfry należą do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, losujemy jedną liczbę. Obliczymy prawdopodobieństwo, że cyfry wylosowanej liczby są różne, pod warunkiem, że ta liczba jest parzysta.

Rozwiązanie

Wszystkich liczb trzycyfrowych o cyfrach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ jest $5^3 = 125$.

Losujemy jedną taką liczbę, zatem $\overline{\Omega} = 125$.

Oznaczmy zdarzenia:

A – wylosowana liczba ma różne cyfry, B – wylosowana liczba jest parzysta.

Szukamy $P(A|B)$. Musimy więc obliczyć $P(B)$ i $P(A \cap B)$.

$$\overline{B} = 2 \cdot 5^2 = 50$$

◀ o parzystości decyduje ostatnia cyfra

$$P(B) = \frac{50}{125}$$

Zdarzenie $A \cap B$ polega na tym, że wylosowana liczba ma różne cyfry i jej ostatnią cyfrą jest 2 lub 4.

$$\overline{A \cap B} = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$$

◀ 6.6. Ze zbioru wszystkich trzycyfrowych liczb naturalnych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo, że ta liczba jest podzielna przez 5, pod warunkiem, że jest to liczba nieparzysta.

Odp.: $\frac{1}{5}$

$$P(A \cap B) = \frac{24}{125}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{24}{125}}{\frac{50}{125}} = \frac{12}{25}$$

Odp.: Prawdopodobieństwo, że cyfry wylosowanej liczby są różne, pod warunkiem, że ta liczba jest parzysta, wynosi $\frac{12}{25}$.

Przykład 3 ◀ zad. 6.10

W wyścigu żużlowym startuje czterech zawodników: Tomasz, Jarosław, Krzysztof i Adam. Niech T , J , K , A będą zdarzeniami oznaczającymi kolejno zwycięstwo każdego z nich. Eksperci szacują, że $P(T) = 0,5$, $P(J) = 0,2$, $P(K) = 0,2$, $P(A) = 0,1$. W czasie drugiego okrążenia Krzysztof się przewrócił. Jakie szanse zwycięstwa mają teraz pozostali zawodnicy?

Rozwiązanie

Wiemy, że zdarzenie K nie zaszło, czyli zaszło zdarzenie K' . Należy więc obliczyć prawdopodobieństwa warunkowe: $P(T|K')$, $P(J|K')$ i $P(A|K')$. Zdarzenia T , J , K i A wykluczają się nawzajem, czyli:

$$\begin{aligned} T \cap K' &= T && \leftarrow \text{„wygra Tomasz i przegra Krzysztof” oznacza} \\ J \cap K' &= J && \text{po prostu, że „wygra Tomasz”} \\ A \cap K' &= A \end{aligned}$$

Zatem:

$$P(T|K') = \frac{P(T \cap K')}{P(K')} = \frac{P(T)}{P(K')} = \frac{0,5}{0,8} = 0,625$$

$$P(J|K') = \frac{P(J \cap K')}{P(K')} = \frac{P(J)}{P(K')} = \frac{0,2}{0,8} = 0,25$$

$$P(A|K') = \frac{P(A \cap K')}{P(K')} = \frac{P(A)}{P(K')} = \frac{0,1}{0,8} = 0,125$$

Odp.: Szanse zwycięstwa Tomasza, Jarosława i Adama wynoszą teraz odpowiednio 0,625, 0,25 i 0,125.

Prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń

Po przekształceniu wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe otrzymujemy wzór na prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

◀6.10. W teleturnieju startują cztery osoby. Do finału zakwalifikowują się trzy spośród nich. Prawdopodobieństwo odpadnięcia przed finałem wynosi:

- dla pani Agnieszki 0,2,
- dla pani Grażyny 0,1,
- dla pani Małgosi 0,4,
- dla pana Bogdana 0,3.

Po pierwszej rundzie pani Grażyna zapewniła już sobie udział w finale. Jakie jest prawdopodobieństwo, że do finału zakwalifikuje się pan Bogdan?

Odp.: $\frac{2}{3}$

◀6.12. Adam nie przygotował się dziś do lekcji. Prawdopodobieństwo tego, że zostanie zapytany, ocenia na 20%, a prawdopodobieństwo tego, że za odpowiedź otrzyma ocenę niedostateczną – na 90%. Przyjmując te dane, oblicz prawdopodobieństwo, że Adam otrzyma dziś ocenę niedostateczną z odpowiedzi.

Odp.: 0,18

Przykład 4

Z pudełka, w którym jest 8 kul białych i 5 czarnych, losujemy kolejno bez zwracania 2 kule. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pierwsza kula jest biała, a druga czarna?

Rozwiązanie

Możemy zastosować schemat klasyczny. Ale zadanie można też rozwiązać inaczej.

Określmy zdarzenia:

A – pierwsza z wylosowanych kul jest biała,

B – druga z wylosowanych kul jest czarna.

Z warunków zadania wynika od razu, że $P(A) = \frac{8}{13}$ i $P(B|A) = \frac{5}{12}$, bo jeśli jako pierwszą wylosowaliśmy kulę białą, to w urnie zostało 7 kul białych i 5 czarnych.

Stosujemy wzór na prawdopodobieństwo iloczynu:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{8}{13} \cdot \frac{5}{12} = \frac{10}{39}$$

Odp.: $\frac{10}{39}$

Przykład 5 ◀ zad. 6.12

Egzamin na studiach składa się z części pisemnej i ustnej. Aby go zdać, trzeba zaliczyć obie części. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany z grupy zdających student zaliczy część pisemną, jest równe 0,6. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany student, który przeszedł przez część pisemną, zaliczy część ustną, wynosi 0,8. Jakie jest prawdopodobieństwo, że student losowo wybrany z grupy zdających nie zda egzaminu?

Rozwiązanie

Wśród studentów zdających egzamin określamy zdarzenia:

A – losowo wybrany student zda część pisemną;

B – losowo wybrany student zda część ustną.

Z warunków zadania wynika, że $P(A) = 0,6$ i $P(B|A) = 0,8$.

Zauważmy, że zdanie egzaminu, czyli zaliczenie obu jego części, oznacza zajście zdarzenia $A \cap B$.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = 0,6 \cdot 0,8 = 0,48$$

Szukamy prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia przeciwnego do $A \cap B$.

$$P((A \cap B)') = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,48 = 0,52$$

Odp.: Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany z grupy zdających student nie zda egzaminu, jest równe 0,52.

D Przykład 6 ◀ zad. 6.16

Rozważamy doświadczenie losowe, w którym Ω jest zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych. Niech $A, B \subset \Omega$. Wykażemy, że jeżeli $P(A) = \frac{4}{5}$ i $P(B) = \frac{3}{10}$, to $P(A|B) \geq \frac{1}{3}$.

Dowód

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{0,3}$$

Musimy więc oszacować $P(A \cap B)$.

$$P(A \cup B) \leq 1$$

← własność prawdopodobieństwa

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$$

← $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$0,8 + 0,3 - P(A \cap B) \leq 1$$

$$P(A \cap B) \geq 0,1$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{0,3} \geq \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$$

Koniec dowodu

Zadania

W każdym z zadań 6.1–6.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź.

Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

6.1. Ω jest zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych pewnego doświadczenia losowego. Wiemy, że $A, B \subset \Omega$, $P(A \cap B) = \frac{2}{15}$ oraz $P(B') = \frac{1}{3}$. Wskaż $P(A|B)$.

- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{2}{30}$ D. $\frac{4}{5}$

6.2. Ω jest zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych pewnego doświadczenia losowego. Wiemy, że $A, B \subset \Omega$, $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(A|B) = \frac{1}{5}$ i $P(B|A) = \frac{1}{4}$. Wskaż $P(B)$.

- A. $\frac{8}{25}$ B. $\frac{1}{10}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{2}$

6.3. Z pudełka, w którym jest 10 kul białych i 6 czerwonych, losujemy kolejno bez zwracania dwie kule. Prawdopodobieństwo, że pierwsza kula jest czerwona, a druga biała, wynosi

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{5}{8}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

◀ **6.16.** Niech $A, B \subset \Omega$. Wykaż, że jeżeli $P(B) = 0,4$ i $P(A|B) = 0,6$, to $P(A) \leq 0,84$.

Odp.: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24$

$P(A \cup B) \leq 1$ i $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,

więc $P(A) = P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B) = P(A \cup B) - 0,4 + 0,24 \leq 1 - 0,16 = 0,84$,

czyli $P(A) \leq 0,84$.

Odpowiedzi i rozwiązania

6.1. B

6.2. D

6.3. A

6.4. $\frac{15}{16}$

6.5. $\frac{3}{5}$

6.6. $\frac{1}{5}$

6.7. $\frac{156}{703}$

6.8. $\frac{1}{3}$

6.9. 42%

6.10. $\frac{2}{3}$

6.11. 0,375

6.4. Rzucamy 5 razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej dwóch orłów, jeżeli za pierwszym razem wypadł orzeł?

6.5. Rzucamy 3 razy sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że za każdym razem uzyskamy inną liczbę oczek, pod warunkiem, że suma liczb wyrzuczonych oczek jest równa 15.

6.6. Ze zbioru wszystkich trzycyfrowych liczb naturalnych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo, że ta liczba jest podzielna przez 5, pod warunkiem, że jest to liczba nieparzysta.

6.7. Z talii 52 kart losujemy 3 karty. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dokładnie dwóch pików, pod warunkiem, że nie wylosujemy żadnego kiera.

6.8. Przyjmijmy, że prawdopodobieństwo urodzenia się dziewczynki i chłopca jest takie samo. W pewnej rodzinie jest dwoje dzieci. Wiadomo, że co najmniej jedno z nich jest chłopcem. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że oboje dzieci to chłopcy?

6.9. Prawdopodobieństwo tego, że reprezentacja klasy 4c dojdzie do finału szkolnych rozgrywek piłki nożnej, jest równe 60%, a prawdopodobieństwo tego, że wygra w meczu finałowym, jest równe 70%. Jakie jest prawdopodobieństwo, że reprezentacja klasy 4c zdobędzie mistrzostwo?

6.10. W teleturnieju startują cztery osoby. Do finału zakwalifikowują się trzy spośród nich. Prawdopodobieństwo odpadnięcia przed finałem wynosi:

- dla pani Agnieszki 0,2,
- dla pani Grażyny 0,1,
- dla pani Małgosi 0,4,
- dla pana Bogdana 0,3.

Po pierwszej rundzie pani Grażyna zapewniła już sobie udział w finale. Jakie jest prawdopodobieństwo, że do finału zakwalifikuje się pan Bogdan?

6.11. Karol typuje, że prawdopodobieństwo zdobycia tytułu mistrzowskiego w piłce nożnej przez drużynę Manchesteru United wynosi 30%, przez drużynę Chelsea London – 20%, a przez jedną z pozostałych drużyn – 50%. Uwzględniając te dane, oblicz prawdopodobieństwo zdobycia tytułu mistrzowskiego przez drużynę Manchesteru United, pod warunkiem, że drużyna Chelsea London nie zdobędzie tego tytułu.

6.12. Adam nie przygotował się dziś do lekcji. Prawdopodobieństwo tego, że zostanie zapytany, ocenia na 20%, a prawdopodobieństwo tego, że za odpowiedź otrzyma ocenę niedostateczną – na 90%. Przyjmując te dane, oblicz prawdopodobieństwo, że Adam otrzyma dziś ocenę niedostateczną z odpowiedzi.

6.13. Oblicz $P(A|B)$, wiedząc, że $A, B \subset \Omega$, $P(B') = 0,2$ i $P(A \cap B) = 0,75$.

6.14. Oblicz $P(A|B)$, wiedząc, że $A, B \subset \Omega$, $P(A) = P(B) = 0,7$ i $P(A \cup B) = 0,8$.

6.15. Oblicz $P(A|B)$, wiedząc, że $A, B \subset \Omega$ i $B \subset A$.

D 6.16. Niech $A, B \subset \Omega$. Wykaż, że jeżeli $P(B) = 0,4$ i $P(A|B) = 0,6$, to $P(A) \leq 0,84$.

*** 6.17.** Krzysztof średnio raz na trzy dni spóźnia się do szkoły. Tłumaczy to tym, że średnio co czwarty dzień za późno wychodzi z domu i spóźnia się na autobus, a nawet jeśli wyjdzie punktualnie, autobus często zatrzymuje się w korku. Jakie jest prawdopodobieństwo, że mimo wyjścia z domu o odpowiedniej porze Krzysztof spóźni się do szkoły?

Prosto do matury



1. Oceń prawdziwość podanych zdań. Dane są zdarzenia $A, B \subset \Omega$ takie, że $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ i $P(A|B) = \frac{1}{3}$. Wynika z tego, że

A. $P(A) = \frac{1}{3}$. B. $P(B) = 1$. C. $P(B|A) = \frac{1}{3}$.

2. Oblicz $P(A|B')$, wiedząc, że $A, B \subset \Omega$, $P(B) = 0,2$ i $P(A \cup B) = 0,35$.

3. Prawdopodobieństwo, że kierowca zostanie na pewnym odcinku drogi zatrzymany i będzie ukarany mandatem, wynosi 4%. Prawdopodobieństwo, że na tym odcinku kierowca w ogóle zostanie zatrzymany do kontroli, wynosi 5%. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kierowca, który został zatrzymany, będzie ukarany mandatem?

4. Rzucamy trzema kostkami sześciennymi do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma liczb oczek na wszystkich kostkach będzie liczbą parzystą, jeżeli ich iloczyn jest liczbą parzystą?

D 5. Wykaż, że jeżeli $A, B \subset \Omega$ i $P(B) > 0$, to $P(A'|B) = 1 - P(A|B)$.

6.17. A – Krzysztof spóźni się do szkoły, $P(A) = \frac{1}{3}$, B – Krzysztof spóźni się na autobus, $P(B) = \frac{1}{4}$

Zauważmy, że $P(A|B) = 1$ (jeżeli Krzysztof spóźni się na autobus, to spóźni się do szkoły),

ale $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, więc $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.

$(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$ i $(A \cap B) \cap (A \cap B') = \emptyset$, więc $P(A \cap B) + P(A \cap B') = P(A)$.

$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. Zatem: $P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{\frac{1}{12}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{12} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{9}$

5. $(A' \cap B) \cup (A \cap B) = B$ i $(A' \cap B) \cap (A \cap B) = \emptyset$, więc $P(A' \cap B) + P(A \cap B) = P(B)$.

$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$, $P(A'|B) = \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - P(A|B)$

6.12. 0,18

6.13. $\frac{15}{16}$

6.14. $\frac{6}{7}$

6.15. 1

6.16. Patrz s. 165.

Prosto do matury

1. P, P, F

2. $\frac{3}{16}$

3. 80%

4. $\frac{4}{7}$

7. Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

Umiejętności:

- wykorzystywanie w zadaniach twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym

Omawiane w poprzednim temacie prawdopodobieństwo warunkowe stosujemy przede wszystkim w sytuacjach, gdy mamy do czynienia z doświadczeniem losowym przeprowadzanym w kilku etapach. Przeanalizujmy najpierw przykład.

Przykład 1

W pierwszym pudełku jest 1 los wygrywający i 9 pustych, a w drugim są 3 losy wygrywające i 12 pustych. Rzucamy monetą. Jeśli wypadnie orzeł, wyciągamy jeden los z pierwszego pudełka, jeśli reszka – jeden los z drugiego pudełka. Obliczymy prawdopodobieństwo wyciągnięcia losu wygrywającego.

Rozwiązanie

Doświadczenie składa się z dwóch etapów:

I. Rzut monetą.

Oznaczamy: O – wypadnięcie orła, R – wypadnięcie reszki.

$$P(O) = P(R) = \frac{1}{2}$$

II. Losowanie jednego losu z pudełka.

Niech W będzie zdarzeniem polegającym na wyciągnięciu losu wygrywającego. Prawdopodobieństwo zdarzenia W zależy od wyniku pierwszego etapu doświadczenia. Jeśli zaszło zdarzenie O , to sięgamy do pierwszego pudełka i wtedy prawdopodobieństwo wylosowania losu wygrywającego wynosi $\frac{1}{10}$. Jeśli natomiast zaszło zdarzenie R , to sięgamy do drugiego pudełka i prawdopodobieństwo wylosowania losu wygrywającego wynosi $\frac{3}{15}$. Zatem:

$$P(W|O) = \frac{1}{10}$$

$$P(W|R) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

Szukamy odpowiedzi na pytanie, z jakim prawdopodobieństwem znajdzie alternatywa: „wypadnie orzeł i wyciągniemy los wygrywający z pierwszego pudełka” lub „wypadnie reszka i wyciągniemy los wygrywający z drugiego pudełka”.

MKP

tematy 1.11, 1.12

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.7

 **Generator**
testów i sprawdzianów

Symbolicznie zapiszemy to jako: $P(W) = P[(W \cap O) \cup (W \cap R)]$.

Wiemy, że:

$$P(W \cap O) = P(W|O) \cdot P(O)$$

$$P(W \cap R) = P(W|R) \cdot P(R)$$

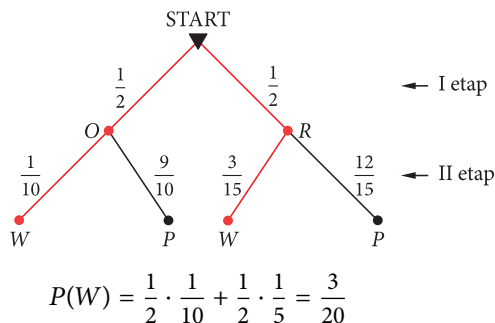
Ponadto:

$$P[(W \cap O) \cap (W \cap R)] = 0 \quad \leftarrow \text{zdarzenia } (W \cap O) \text{ i } (W \cap R) \text{ się wykluczają}$$

Zatem:

$$\begin{aligned} P(W) &= P[(W \cap O) \cup (W \cap R)] = P(W \cap O) + P(W \cap R) = \\ &= P(W|O) \cdot P(O) + P(W|R) \cdot P(R) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{20} \end{aligned}$$

Popatrzmy na ilustrację graficzną rozwiązania.



Odp.: Prawdopodobieństwo wyciągnięcia losu wygrywającego jest równe $\frac{3}{20}$.

Układ zupełny zdarzeń. Prawdopodobieństwo całkowite

W powyższym przykładzie istotne było to, że zdarzenia O i R się wykluczały, a ich alternatywa była zdarzeniem pewnym. Taki układ zdarzeń będziemy nazywać **układem zupełnym**. To określenie rozszerzymy na większą liczbę zdarzeń.

Definicja

Zdarzenia $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n \subset \Omega$ tworzą **układ zupełny zdarzeń**, jeżeli spełniają równocześnie następujące warunki:

- $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \dots \cup B_n = \Omega$,
- $P(B_i) > 0$ dla $1 \leq i \leq n$,
- $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $i \neq j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$.

Oznacza to, że jeśli zdarzenia tworzą układ zupełny, to musi zajść dokładnie jedno z nich.

Uogólnieniem przykładu 1 jest twierdzenie, którego dowód pominiemy.

Twierdzenie

Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

Jeżeli zdarzenia $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n \subset \Omega$ tworzą układ zupełny i $A \subset \Omega$, to:

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)$$

◀7.8. W pierwszej urnie są 4 kule białe i 3 czarne, a w drugiej 5 białych i 3 czarne. Z drugiej urny przekładamy 2 kule do pierwszej urny, z której następnie losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej.

Odp.: $\frac{5}{12}$

Przykład 2 ◀ zad. 7.8

Z pudełka, w którym jest 5 kul białych i 3 czarne, wyciągamy losowo jedną kulę, zwracamy ją do pudełka i dokładamy jeszcze dwie kule w takim samym kolorze jak wylosowana kula. Następnie po raz drugi losujemy jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kula wylosowana za drugim razem będzie biała?

Rozwiązanie

Oznaczmy zdarzenia:

B_1 – kula wylosowana za pierwszym razem jest biała,

B_2 – kula wylosowana za pierwszym razem jest czarna,

A – kula wylosowana za drugim razem jest biała.

$$P(B_1) = \frac{5}{8}, \quad P(B_2) = \frac{3}{8}$$

$B_1 \cup B_2 = \Omega$ i $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, zatem zdarzenia B_1 i B_2 tworzą układ zupełny.

$$P(A|B_1) = \frac{7}{10}$$

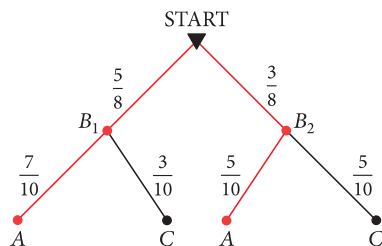
← dołożono 2 kule białe i w pudełku jest 7 kul białych i 3 czarne

$$P(A|B_2) = \frac{5}{10}$$

← dołożono 2 kule czarne i w pudełku jest 5 kul białych i 5 czarnych

Zgodnie z twierdzeniem o prawdopodobieństwie całkowitym:

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) = \frac{7}{10} \cdot \frac{5}{8} + \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{8} = \frac{50}{80} = \frac{5}{8}$$



$$P(A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{7}{10} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{10} = \frac{5}{8}$$

Odp.: Prawdopodobieństwo wylosowania za drugim razem kuli białej jest równe $\frac{5}{8}$.

Przykład 3

Pan Jacek prowadzi firmę montującą systemy alarmowe w domu klienta i zatrudnia trzech pracowników: pan Stanisław wykonuje 50% zleceń w firmie, pan Tomasz 40%, a pan Bogdan 10%. Klienci, u których zlecenie wykonywał pan Stanisław, zgłaszają reklamację z prawdopodobieństwem 2%, klienci pana Tomasza – z prawdopodobieństwem 5%, a pana Bogdana – z prawdopodobieństwem aż 20%. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany klient firmy pana Jacka zgłosi reklamację?

Rozwiązanie

Oznaczamy zdarzenia:

B_1 – zlecenie wykonuje pan Stanisław,

B_2 – zlecenie wykonuje pan Tomasz,

B_3 – zlecenie wykonuje pan Bogdan,

A – losowo wybrany klient zgłasza reklamację.

$$P(B_1) = 0,5, \quad P(A|B_1) = 0,02$$

$$P(B_2) = 0,4, \quad P(A|B_2) = 0,05$$

$$P(B_3) = 0,1, \quad P(A|B_3) = 0,2$$

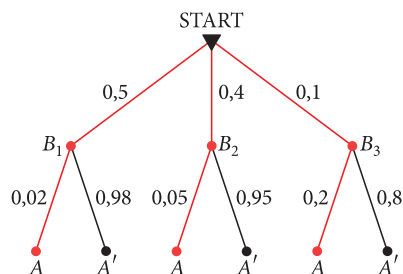
Zdarzenia B_1, B_2 i B_3 tworzą układ zupełny:

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega,$$

$$B_1 \cap B_2 = \emptyset, \quad B_1 \cap B_3 = \emptyset, \quad B_2 \cap B_3 = \emptyset$$

Zatem możemy zastosować twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + P(A|B_3) \cdot P(B_3) = \\ &= 0,02 \cdot 0,5 + 0,05 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,1 = 0,05 \end{aligned}$$



$$P(A) = 0,5 \cdot 0,02 + 0,4 \cdot 0,05 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,05$$

Odp.: Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany klient firmy pana Jacka zgłosi reklamację, wynosi 5%.

Wzór Bayesa

Przykład 4

Założmy, że do firmy pana Jacka z przykładu 3 przyszedł klient z reklamacją. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zareklamowane zlecenie wykonywał u niego pan Stanisław, jakie – że pan Tomasz, a jakie – że pan Bogdan?

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak w przykładzie 3.

Szukamy $P(B_1|A)$, $P(B_2|A)$ i $P(B_3|A)$.

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1) \cdot P(B_1)}{P(A)}$$

Wykorzystując obliczenia z przykładu 3, otrzymujemy: $P(B_1|A) = \frac{0,02 \cdot 0,5}{0,05} = 20\%$.

Analogicznie:

$$P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2) \cdot P(B_2)}{P(A)} = \frac{0,05 \cdot 0,4}{0,05} = 40\%$$

$$P(B_3|A) = \frac{P(A|B_3) \cdot P(B_3)}{P(A)} = \frac{0,2 \cdot 0,1}{0,05} = 40\%$$

Odp.: Prawdopodobieństwo, że zareklamowane zlecenie wykonywał pan Stanisław, jest równe 20%, pan Tomasz – 40%, pan Bogdan – 40%.

Rozumowanie podane w przykładzie 4 można uogólnić. Otrzymujemy wówczas następujące twierdzenie, które podajemy bez dowodu.

Twierdzenie

Wzór Bayesa

Jeżeli zdarzenia $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n \subset \Omega$ tworzą układ zupełny, $A \subset \Omega$ i $P(A) > 0$, to dla dowolnego $1 \leq i \leq n$ zachodzi równość:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)}$$

Przykład 5 ◀ zad. 7.21

Dane są trzy pudełka z losami. W pierwszym pudełku jest 6 losów wygrywających i 14 pustych, w drugim są 4 losy wygrywające i 16 pustych, a w trzecim są 2 losy wygrywające i 18 pustych. Z losowo wybranego pudełka wyciągnięto 2 losy. Okazało się, że oba są wygrywające. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyciągnięto je z trzeciego pudełka?

◀ 7.21. W pierwszym pudełku było 6 kul białych i 4 czarne, a w drugim 2 kule białe i 3 czarne. Z pierwszego pudełka wylosowano dwie kule i bez oglądania przełożono do drugiego. Następnie wylosowano jedną kulę z drugiego pudełka. Okazało się, że wylosowana kula jest biała. Jakie jest prawdopodobieństwo, że obie kule przełożone do drugiego pudełka były białe?

Odp.: $\frac{5}{12}$

Rozwiązanie

Oznaczamy zdarzenia:

B_1 – losowano z pierwszego pudełka,

B_2 – losowano z drugiego pudełka,

B_3 – losowano z trzeciego pudełka,

A – wyciągnięto dwa losy wygrywające.

Interesujące nas prawdopodobieństwo $P(B_3|A)$ wyznaczymy ze wzoru Bayesa:

$$P(B_3|A) = \frac{P(A|B_3) \cdot P(B_3)}{P(A)}$$

Wyznaczamy kolejno prawdopodobieństwa występujące w ułamku powyżej.

Zauważmy, że:

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3} \quad \leftarrow \text{założenie w treści zadania}$$

Zdarzenia B_1 , B_2 i B_3 tworzą układ zupełny:

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega$$

$$B_1 \cap B_2 = \emptyset, B_1 \cap B_3 = \emptyset, B_2 \cap B_3 = \emptyset$$

Zatem możemy zastosować twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.

Kolejność dwóch losów wyciągniętych z pudełka nie jest istotna, dlatego wykorzystamy wzór na liczbę kombinacji.

$$P(A|B_1) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{15}{190} \quad \leftarrow \text{w pudełku } B_1 \text{ jest } (6 + 14) \text{ losów}$$

$$P(A|B_2) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{6}{190} \quad \leftarrow \text{w pudełku } B_2 \text{ jest } (4 + 16) \text{ losów}$$

$$P(A|B_3) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{1}{190} \quad \leftarrow \text{w pudełku } B_3 \text{ jest } (2 + 18) \text{ losów}$$

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + P(A|B_3) \cdot P(B_3) =$$

$$= \frac{15}{190} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6}{190} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{190} \cdot \frac{1}{3} = \frac{22}{190} \cdot \frac{1}{3}$$

Stosujemy teraz wzór Bayesa.

$$P(B_3|A) = \frac{P(A|B_3) \cdot P(B_3)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{190} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{22}{190} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{22}$$

Odp.: Prawdopodobieństwo tego, że losy wyciągnięto z trzeciego pudełka, jest

równe $\frac{1}{22}$.

Zadania

Odpowiedzi i rozwiązania

7.1. D

7.1. Ze zbioru $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ losujemy jedną liczbę, a następnie z pozostałych – drugą. Prawdopodobieństwo tego, że druga z wylosowanych liczb jest podzielna przez 3, wynosi

- A. $\frac{7}{15}$. B. $\frac{3}{10}$. C. $\frac{2}{15}$. D. $\frac{2}{5}$.

7.2. B

7.2. W pierwszym pudełku jest 5 kul białych i 2 czarne, w drugim – 2 kule białe i 3 czarne. Z losowo wybranego pudełka wyciągamy jedną kulę. Prawdopodobieństwo, że będzie to kula czarna, wynosi

- A. $\frac{5}{12}$. B. $\frac{31}{70}$. C. $\frac{5}{24}$. D. $\frac{31}{35}$.

7.3. A

7.3. W trzech pudełkach znajdują się piłki w kolorze zielonym i czerwonym. W pierwszym pudełku jest 6 piłek zielonych i 4 czerwone, w drugim 4 zielone i 5 czerwonych, a w trzecim 3 zielone i 3 czerwone. Losujemy jedną piłkę z pierwszego pudełka. Jeśli jest to piłka zielona, to losujemy jedną piłkę z drugiego pudełka, a jeśli czerwona, to jedną piłkę z pudełka trzeciego. Prawdopodobieństwo tego, że w drugim losowaniu otrzymaliśmy piłkę zieloną, wynosi

- A. $\frac{7}{15}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{3}{10}$. D. $\frac{7}{10}$.

7.4. a) Tak, bo $A \cup B = \Omega$,
 $A \cap B = \emptyset$, $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$.

b) Nie, bo $A \cup B \neq \Omega$.

c) Tak, bo $A \cup B \cup C = \Omega$,
 $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $C \cap B = \emptyset$,
 $P(A) = P(B) = \frac{1}{4}$, $P(C) = \frac{1}{2}$.

7.5. a) Tak, bo $A \cup B = \Omega$,
 $A \cap B = \emptyset$, $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$.

b) Nie, bo $A \cup B \neq \Omega$.

c) Nie, bo $A \cup B \neq \Omega$.

7.4. Czy następujące zdarzenia tworzą układ zupełny? Odpowiedź uzasadnij.

a) doświadczenie – rzut monetą

A – wypadnięcie orła, B – wypadnięcie reszki

b) doświadczenie – rzut dwiema monetami

A – wypadnięcie dwóch orłów, B – wypadnięcie dwóch reszek

c) doświadczenie – wyciągnięcie karty z talii

A – wylosowanie kiera, B – wylosowanie kara,

C – wylosowanie karty czarnego koloru

7.5. Doświadczenie polega na rzucie kostką i monetą. Czy następujące zdarzenia tworzą układ zupełny? Odpowiedź uzasadnij.

a) A – wypadnięcie orła, B – wypadnięcie reszki

b) A – wypadnięcie orła i parzystej liczby oczek, B – wypadnięcie reszki

c) A – wypadnięcie orła i parzystej liczby oczek,

B – wypadnięcie reszki i nieparzystej liczby oczek

7.6. W pierwszym pudełku jest 5 kul białych i 3 czarne, w drugim – 3 kule białe i 3 czarne. Z losowo wybranego pudełka wyciągamy jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie to kula biała?

7.7. Rzucamy trzema monetami, a następnie jeszcze raz tymi, na których wypadł orzeł. Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania w sumie dwóch orłów.

7.8. W pierwszej urnie są 4 kule białe i 3 czarne, a w drugiej 5 białych i 3 czarne. Z drugiej urny przekładamy 2 kule do pierwszej urny, z której następnie losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej.

7.9. W urnie znajdują się 3 kule czerwone, 4 zielone i 5 kul białych. Wybieramy losowo jedną kulę, zatrzymujemy ją, a z pozostałych losujemy dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że

a) obie kule z drugiego losowania są białe.

b) kule wylosowane za drugim razem są różnych kolorów.

7.10. Ze zbioru $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13\}$ losujemy jedną liczbę, a następnie z pozostałych drugą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że druga liczba jest

a) nieparzysta.

b) niepodzielna przez 4.

7.11. Średnio pięciu mężczyzn na stu i dwie kobiety na tysiąc nie rozróżniają kolorów. Z grupy, w której stosunek liczby kobiet do liczby mężczyzn wynosi $3 : 7$, wybrano losowo jedną osobę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wybrana osoba nie rozróżnia kolorów.

7.12. W pierwszym pudełku są 2 kule zielone i 6 kul pomarańczowych, a w drugim pudełku są 4 zielone i 5 pomarańczowych. Losujemy jedną kulę z pierwszego pudełka, dobieramy do niej jeszcze trzy kule tego samego koloru i wrzucamy wszystkie cztery do drugiego pudełka. Następnie losujemy dwie kule z drugiego pudełka. Oblicz prawdopodobieństwo, że obie wylosowane wtedy kule będą pomarańczowe.

7.13. Do każdej z trzech urn wkładamy identyczny zestaw kul, w którym jest tyle samo kul białych co czarnych. Następnie z każdej urny losujemy jedną kulę i nie oglądając jej, wrzucamy do czwartej, początkowo pustej urny. Na koniec losujemy z tej urny jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej z czwartej urny.

7.14. Z urny, w której są 3 kule białe i 2 czarne, wybieramy losowo 3 kule, a następnie rzucamy sześcienną kostką do gry tyle razy, ile białych kul wylosowaliśmy. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej raz sześciu oczek.

7.6. $\frac{9}{16}$

7.7. $\frac{9}{32}$

7.8. $\frac{5}{12}$

7.9. a) $\frac{5}{33}$ b) $\frac{47}{66}$

7.10. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{7}{9}$

7.11. 0,0356

7.12. $\frac{59}{156}$

7.13. $\frac{1}{2}$

7.14. $\frac{119}{432}$

D

7.16. $\frac{49}{248}$

7.17. $\frac{43}{80}$

7.18. $\frac{31}{90}$

7.19. $\frac{455}{8192}$

7.20. w pierwszym pudełku: dwie,
w drugim: jedna

7.21. $\frac{5}{12}$

7.22. $\frac{5}{7}$

7.15. W pudełku jest n losów, w tym k wygrywających. Dwie osoby kolejno losują po jednym losie bez zwracania. Wykaż, że prawdopodobieństwo wyciągnięcia losu wygrywającego jest jednakowe dla każdej z tych osób.

7.16. Wybieramy losowo jeden ze zbiorów: $A = \{1, 2, \dots, 62\}$ lub $B = \{1, 2, \dots, 124\}$. Z wybranego zbioru losujemy jedną liczbę i oznaczamy ją x . Oblicz prawdopodobieństwo tego, że liczba $x^2 + 1$ jest podzielna przez 10.

7.17. W urnie jest 6 kul białych i 4 czarne. Rzucamy trzy razy monetą. Jeżeli reszka wypadnie trzy razy, losujemy bez zwracania trzy kule, jeśli wypadnie dwa razy – dwie kule, w pozostałych przypadkach – jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania dokładnie jednej kuli białej?

7.18. W pierwszej urnie jest 20 kul, w tym 4 białe. W drugiej urnie jest 15 kul, w tym 6 białych. Rzucamy dwa razy sześcienną kostką do gry. Jeżeli suma liczb oczek jest równa co najwyżej 5, losujemy kulę z pierwszej urny. W przeciwnym razie losujemy kulę z drugiej urny. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej.

7.19. Rzucamy raz sześcienną kostką do gry, a następnie dwiema monetami tyle razy, ile oczek wypadło na kostce. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia samych orłów.

7.20. W dwóch pudełkach są kule białe i czarne. Wiadomo, że w pierwszym są 2 czarne, w drugim – 1 czarna, a suma liczb kul białych w obu pudełkach jest równa 3. Rzucamy sześcienną kostką. Jeżeli wypadnie mniej niż 5 oczek, losujemy jedną kulę z pierwszego pudełka. W przeciwnym razie losujemy jedną kulę z drugiego pudełka. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej w tym doświadczeniu jest największe. Jak są rozmieszczone kule białe?

7.21. W pierwszym pudełku było 6 kul białych i 4 czarne, a w drugim 2 kule białe i 3 czarne. Z pierwszego pudełka wylosowano dwie kule i bez oglądania przełożono do drugiego. Następnie wylosowano jedną kulę z drugiego pudełka. Okazało się, że wylosowana kula jest biała. Jakie jest prawdopodobieństwo, że obie kule przełożone do drugiego pudełka były białe?

7.22. Ola średnio raz na 5 dni dojeżdża do szkoły autobusem, a w pozostałe dni – tramwajem. Prawdopodobieństwo, że spóźni się do szkoły w dniu, kiedy jedzie autobusem, wynosi 20%, natomiast gdy jedzie tramwajem – 2%. Pewnego dnia Ola spóźniła się do szkoły. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jechała autobusem.

7.15. B_1 – I osoba wylosowała los wygrywający

B_2 – I osoba wylosowała los przegrywający

$$P(B_1) = \frac{k}{n}, \quad P(B_2) = \frac{n-k}{n}$$

Jeżeli $k > 0$ i $k < n$, to zdarzenia B_1, B_2 tworzą układ zupełny zdarzeń.

A – II osoba wylosowała los wygrywający

Stosujemy twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) = \frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1} + \frac{n-k}{n} \cdot \frac{k}{n-1} = \\ &= \frac{k^2 - k + nk - k^2}{n(n-1)} = \frac{k(n-1)}{n(n-1)} = \frac{k}{n}, \text{ czyli } P(B_1) = P(A). \end{aligned}$$



7.23. Pewna rzadka choroba genetyczna występuje u 0,05% ludności. Test wykrywający tę chorobę daje wynik pozytywny u 99,5% osób chorych oraz 0,3% osób zdrowych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba, u której test dał wynik pozytywny, rzeczywiście jest chora? Wynik podaj z dokładnością do 1%.

Prosto do matury



1. Gramy w następującą grę. Rzucamy kostką sześcienną. Wygramy, jeżeli wyrzucimy 6 oczek. Jeżeli wyrzucimy 5 oczek, mamy prawo rzucić jeszcze raz (ostatni), żeby ponownie spróbować wyrzucić szóstkę. Oceń prawdziwość podanych zdań.

- A. Prawdopodobieństwo wygranej w tej grze jest równe $\frac{1}{3}$.
B. Prawdopodobieństwo wygranej w tej grze jest równe $\frac{7}{36}$.
C. Gdyby wyrzucenie 5 oczek nie dawało możliwości dodatkowego rzutu, prawdopodobieństwo wygranej nie zmieniłoby się.

2. W pierwszym pudełku są 4 losy wygrywające i 6 pustych, a w drugim – 4 wygrywające i 5 pustych. Rzucamy kostką do gry. Jeżeli wypadną mniej niż 3 oczka, wyciągamy jeden los z pierwszego pudełka, w przeciwnym razie – z drugiego. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wybrany los jest wygrywający.

3. W dwóch pojemnikach zgromadzono losy. W pierwszym znajduje się 7 losów wygrywających i 5 pustych, a w drugim – 5 wygrywających i 7 pustych. Przeniesiono jeden los z pojemnika pierwszego do drugiego, z którego następnie wyciągnięto jeden los. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jest to los wygrywający.

4. W klasie 1a jest 10 dziewczynek i 20 chłopców, a w klasie 1b – 18 dziewczynek i 12 chłopców. Rzucamy monetą. Jeżeli wypadnie orzeł, losujemy 3 osoby z klasy 1a, w przeciwnym razie losujemy 3 osoby z klasy 1b. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania dokładnie dwóch chłopców?

5. Mamy dwie monety. Jedna z nich jest symetryczna. Prawdopodobieństwo wyrzucenia orła na drugiej jest równe $\frac{1}{4}$. Przypadkowo wybraną monetą wykonaliśmy 5 rzutów i otrzymaliśmy same reszki. Jakie jest prawdopodobieństwo, że rzucaliśmy monetą niesymetryczną?

7.23. 14%

Prosto do matury

1. F, P, F

2. $\frac{58}{135}$

3. $\frac{67}{156}$

4. $\frac{386}{1015}$

5. $\frac{243}{275}$

TELETURNIEJ

Przed graczem biorącym udział w teleturnieju znajduje się troje zamkniętych drzwi. Zadaniem gracza jest wybranie jednych z nich: to, co za nimi, należy do niego! Może trafić na nagrodę główną – samochód, lub na nagrodę pocieszenia – kozę, bo za dwojgiem drzwi zamknięto po jednej kozie.



Gracz dokonuje wyboru i wskazuje jedno drzwi. Prowadzący (który wie, co się kryje za każdymi drzwiami) otwiera jedno z tych, których gracz nie wskazał – takie, za którymi stoi koza. Pozostałe drzwi pozostawia zamknięte. I pyta gracza: „**Czy chcesz zmienić swój wybór?**”.

WŁAŚCIWA STRATEGIA

Prześledźmy możliwy tok rozumowania gracza.

*Jeżeli wskazałem **drzwi z nagrodą** (prawdopodobieństwo tego zdarzenia to $1/3$), prowadzący mógł otworzyć dowolne inne drzwi – za dwojgiem pozostałych drzwi jest koza.*

*Zmiana decyzji spowoduje, że **przegram**.*

*Jeżeli wskazałem **drzwi z kozą** (prawdopodobieństwo tego zdarzenia to $2/3$), prowadzący musiał otworzyć drugie drzwi, za którymi jest koza. Zatem za trzecimi drzwiami na pewno jest samochód.*

*Zmiana decyzji spowoduje, że **wygram**.*

Z porównania obu prawdopodobieństw wynika, że zdecydowanie bardziej opłaca mi się w następnym ruchu zmienić wybór drzwi.

Graczowi biorącemu udział w takim teleturnieju opłaca się zawsze przyjąć propozycję zmiany wcześniejszego wyboru. Wygra bowiem wtedy średnio dwa teleturnieje na trzy.

OBLICZENIE „NA PIECHOTĘ”

Założmy, że samochód ukryty jest za pierwszymi drzwiami. Rozpiszmy w kolejnych wierszach tabeli wszystkie możliwe sytuacje w momencie, w którym gracz ma podjąć końcową decyzję. Widzimy początkowy wybór gracza (ludzik przed drzwiami) i drzwi, które otworzył prowadzący.

Drzwi nr 1	Drzwi nr 2	Drzwi nr 3	Szansa zajścia danej sytuacji	
				ukrycie nagrody za drzwiami nr 1
			$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$	wybór przez gracza drzwi nr 1
			$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$	wybór przez prowadzącego drzwi nr 2 (prowadzący ma dwoje drzwi do wyboru)
			$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{9}$	ukrycie nagrody za drzwiami nr 1
			$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{9}$	wybór przez gracza drzwi nr 2
			$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{9}$	wybór przez prowadzącego drzwi nr 3 (prowadzący ma jedno drzwi do wyboru)

W ten sam sposób należy rozpisać przypadki, gdy samochód jest ukryty za drzwiami nr 2 i 3, i obliczyć odpowiednie prawdopodobieństwa. Zsumowanie prawdopodobieństw wszystkich sytuacji, w których gracz za pierwszym razem

wskazuje drzwi z kozą, oznacza szansę wygrania głównej nagrody pod warunkiem, że gracz po otwarciu drzwi zmieni decyzję:

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$$

ISTOTNA RÓŻNICA

Założmy, że po tym, jak prowadzący otworzył drzwi, gracza zastępuje osoba, która nie wie, co się wcześniej wydarzyło. Ma przed sobą dwoje zamkniętych drzwi i ma wybrać jedno z nich. Jaka jest szansa, że trafi na samochód? Oczywiście $\frac{1}{2}$. Dlaczego więc w przypadku pierwszego gracza prawdopodobieństwo wygranej może wynieść aż $\frac{2}{3}$? Otóż ten gracz zna początkowy etap teleturnieju i zanim wybierze drzwi w następnym kroku, może obrać skuteczniejszą strategię postępowania. Drugi gracz jest tej szansy pozbawiony – wyboru dokonuje losowo.

TEORIA GIER

Działem matematyki zajmującym się badaniem sytuacji konfliktowych zwanych grami jest **teoria gier**. Uczestnicy gier (**gracze**) podejmują decyzje (tzw. **strategie**), które pociągają za sobą określone skutki (tzw. **wypłaty**). Teoria gier ma szerokie zastosowania m.in. w informatyce, wojskowości, ekonomii, biologii i socjologii.



8. Schemat Bernoulliego

Umiejętności:

- wykorzystywanie w zadaniach schematu Bernoulliego

Teorię rachunku prawdopodobieństwa zakończymy omówieniem doświadczenia losowego, w którym interesują nas wyłącznie dwa możliwe wyniki, symbolicznie określane jako **sukces**, którego prawdopodobieństwo oznaczamy p , $0 < p < 1$, oraz **porażka**, której prawdopodobieństwo wynosi $q = 1 - p$.

Doświadczenie tego typu nosi nazwę **próby Bernoulliego**.

Na przykład, jeżeli próbą jest rzut kostką i sukcesem nazwiemy wypadnięcie szóstki, to $p = \frac{1}{6}$, natomiast porażką będzie każdy wynik różny od szóstki i $q = \frac{5}{6}$.



Jacob Bernoulli (1654–1705) szwajcarski matematyk i fizyk, zajmował się rachunkiem różniczkowym i całkowym, a także rachunkiem prawdopodobieństwa.

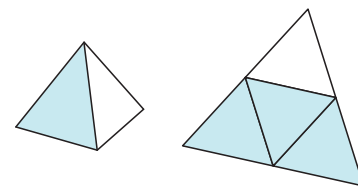
Schemat Bernoulliego jest ciągiem powtórzeń tej samej próby Bernoulliego, wykonanych przy założeniu, że próby przeprowadzane są niezależnie* i prawdopodobieństwo uzyskania sukcesu w każdej z nich pozostaje niezmiennie.

Zadanie, którym się teraz zajmiemy, polega na obliczeniu prawdopodobieństwa wystąpienia określonej liczby k sukcesów w schemacie n prób Bernoulliego ($0 \leq k \leq n$). Zaczniemy od analizy przykładu.

Przykład 1

W doświadczeniu korzystamy z kostki, która jest czworościanem foremnym o trzech ścianach pomalowanych na niebiesko i jednej białej. Kostkę podrzucamy i notujemy kolor ścianki, na którą czworościan upadł na podłogę.

Próba Bernoulliego jest rzut kostką. Sukcesem nazwiemy uzyskanie koloru białego, porażką – koloru niebieskiego.



* Dokładna definicja pojęcia „niezależność” wymaga bardziej zaawansowanej matematyki. Tu można je rozumieć potocznie (choć niezbyt ściśle): wynik pojedynczej próby nie wpływa na wyniki innych prób.

MKP

temat 1.14

dla nauczyciela.pl | Kartkówka 2.8

Generator
testów i sprawdzianów

Na każdą ze ścian kostka może upaść z identycznym prawdopodobieństwem równym $\frac{1}{4}$, zatem w pojedynczej próbie sukces osiągamy z prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{4}$, a porażkę z prawdopodobieństwem $q = \frac{3}{4}$.

- Zbadamy, jak wygląda zbiór zdarzeń elementarnych w doświadczeniu, które jest schematem dwóch opisanych prób Bernoulliego.
- Rzucamy kostką pięć razy. Obliczymy prawdopodobieństwo, że trzy z tych pięciu prób Bernoulliego zakończą się sukcesem, czyli – w pięciu rzutach dokładnie trzy razy kostka upadnie na białą ściankę.

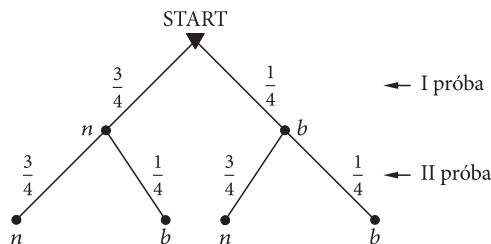
Rozwiązanie

- Niech n oznacza sytuację, w której kostka upadnie na ściankę koloru niebieskiego, a b – na ściankę koloru białego.

Cztery możliwe wyniki doświadczenia, które jest schematem dwóch prób Bernoulliego, zapiszemy jako dwuelementowe ciągi liter:

$$\Omega = \{nn, nb, bn, bb\}$$

Zauważmy, że zdarzenia elementarne nie są tu jednakowo prawdopodobne. Popatrzmy na ilustrację tego doświadczenia.



Prawdopodobieństwo każdego zdarzenia elementarnego w tym doświadczeniu jest iloczynem** prawdopodobieństw zajścia zdarzeń sprzyjających w pojedynczych próbach.

Zatem:

$$P(nn) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}, \quad P(nb) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}, \quad P(bn) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}, \quad P(bb) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

Można wykazać, że ten sposób obliczania prawdopodobieństwa spełnia założenia definicji wprowadzonej na s. 149, w szczególności:

$$P(\Omega) = \frac{9}{16} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = 1$$

**Uzasadnienie poprawności takiego sposobu obliczania tego prawdopodobieństwa wymaga bardziej zaawansowanego aparatu matematycznego.

b) Interesuje nas prawdopodobieństwo uzyskania $k = 3$ sukcesów w $n = 5$ próbach.

Oznaczmy je $P_5(3)$ (ogólnie: $P_n(k)$).

Zdarzenia elementarne są pięcioelementowymi ciągami:

$$\Omega = \{nnnnn, nnnnb, \dots, bnnnn, \dots, nbnnb, \dots, bbbbn, bbbbb\}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \quad \leftarrow \text{prawdopodobieństwo zajścia sprzyjającego zdarzenia elementarnego (np. nbnnb)}$$

Zdarzeń sprzyjających jest tyle, ile jest możliwości wpisania trzech liter b na pięciu ponumerowanych miejscach – możemy je wybrać na $\binom{5}{3}$ sposobów (na pozostałych dwóch wpisujemy n). Zatem prawdopodobieństwo, że w pięciu rzutach dokładnie trzy razy kostka upadnie na białą ściankę, jest równe $\binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$.

$$\text{Odp.: } P_5(3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

Jeśli uogólnimy powyższy przykład, możemy stwierdzić, że prawdopodobieństwo otrzymania k sukcesów ($k \leq n$) w n opisanych próbach Bernoulliego (czyli – w n rzutach kostka upadnie na białą ściankę dokładnie k razy) jest równe:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}$$

Powyższe rozumowanie prowadzi do twierdzenia, które podajemy bez dowodu.

Twierdzenie

Twierdzenie Bernoulliego

Prawdopodobieństwo uzyskania k sukcesów w schemacie n prób Bernoulliego wyraża się wzorem:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

gdzie p jest prawdopodobieństwem uzyskania sukcesu w pojedynczej próbie, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$ i $0 \leq k \leq n$.

Przykład 2 zad. 8.4

Rzucamy 10 razy kostką do gry. Obliczymy prawdopodobieństwo, że szóstka wypadnie dokładnie

a) 5 razy. b) 7 razy.

Zauważmy, że nie ma znaczenia, czy wybieramy miejsca na wpisanie b czy n , ponieważ $\binom{5}{3} = \binom{5}{2}$.

Ogólnie: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

◀ 8.4. Rzucamy 8 razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia orła dokładnie 3 razy.

Odp.: $\frac{7}{32}$

Rozwiązanie

Mamy do czynienia ze schematem 10 prób Bernoulliego. Sukcesem jest wypadnięcie szóstki: $n = 10$, $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$.

$$\text{a) } k = 5, \text{ zatem } P_{10}(5) = \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5.$$

$$\text{b) } k = 7, \text{ zatem } P_{10}(7) = \binom{10}{7} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^7 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3.$$

Zauważmy, że na s. 154 bardzo podobny przykład 6 został rozwiązany bez korzystania ze schematu Bernoulliego.

Przykład 3 ◀ zad. 8.8

Obliczmy prawdopodobieństwo, że w 7 rzutach kostką co najwyżej dwa razy wypadnie szóstka.

Rozwiązanie

Mamy do czynienia ze schematem 7 prób Bernoulliego. Sukcesem jest wypadnięcie szóstki: $n = 7$, $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$.

Sukces ma wystąpić co najwyżej dwa razy, zatem interesuje nas zdarzenie A będące alternatywą trzech wykluczających się zdarzeń: $A = A_0 \cup A_1 \cup A_2$, gdzie:

A_0 oznacza zdarzenie – szóstka nie wypadła ani razu,

A_1 oznacza zdarzenie – szóstka wypadła dokładnie raz,

A_2 oznacza zdarzenie – szóstka wypadła dokładnie dwa razy.

Zdarzenia A_0 , A_1 i A_2 się wykluczają, czyli żadne dwa nie mogą zajść równocześnie, zatem:

$$P(A) = P(A_0 \cup A_1 \cup A_2) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2)$$

$$P(A_0) = P_7(0) = \binom{7}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 = \left(\frac{5}{6}\right)^7$$

$$P(A_1) = P_7(1) = \binom{7}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 = \frac{7 \cdot 5^6}{6^7}$$

$$P(A_2) = P_7(2) = \binom{7}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{21 \cdot 5^5}{6^7}$$

$$P(A) = \frac{5^7}{6^7} + \frac{7 \cdot 5^6}{6^7} + \frac{21 \cdot 5^5}{6^7} = \frac{5^5}{6^7} (25 + 35 + 21) = \frac{5^5 \cdot 81}{6^7} \approx 0,904$$

Odp.: Prawdopodobieństwo tego, że w siedmiu rzutach kostką szóstka wypadnie co najwyżej dwa razy, jest równe $\frac{5^5 \cdot 81}{6^7}$.

◀ **8.8.** Z talii 52 kart losujemy 6 razy ze zwracaniem po jednej karcie. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kiera co najwyżej 4 razy.

$$\text{Odp.: } \frac{4077}{4096}$$

◀8.13. Harcerze otrzymali polecenie od drużynowego, aby przeprowadzić wywiad z ciekawym człowiekiem. Prawdopodobieństwo tego, że harcerzowi uda się wykonać to zadanie, jest równe 0,4. Ilu harcerzy musi wyruszyć w teren, aby prawdopodobieństwo, że co najmniej jeden wywiad zostanie przeprowadzony, było większe od 99%?

Odp.: 10

Przykład 4 ◀ zad. 8.13

Rzucamy n razy symetryczną kostką w kształcie ośmiościanu foremego, na którego ściankach zapisane są liczby od 1 do 8. Wyznamy najmniejszą liczbę rzutów, przy której prawdopodobieństwo, że co najmniej raz wypadnie ósemka, jest większe od 50%.



Rozwiązanie

Mamy do czynienia ze schematem n prób Bernoulliego. Sukcesem jest wypadnięcie ósemki.

$$p = \frac{1}{8}, \quad q = \frac{7}{8}$$

Sukces ma wystąpić co najmniej raz, zatem łatwiej rozważyć zdarzenie przeciwne:

A_0 – ósemka nie wypadła ani razu

$$P(A_0) = P_n(0) = \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^0 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^n = \left(\frac{7}{8}\right)^n$$

Z warunków zadania wynika nierówność:

$$1 - P(A_0) > \frac{1}{2}$$

$$1 - \left(\frac{7}{8}\right)^n > \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{7}{8}\right)^n < \frac{1}{2}$$

Do rozwiązania tej nierówności można wykorzystać kalkulator, można ją również rozwiązać sposobem wskazanym w przykładzie 9 w temacie 5 (s. 156). Ostatecznie:

$$n \geq 6$$

Odp.: Prawdopodobieństwo, że ósemka wypadnie co najmniej raz, jest większe od 50%, jeżeli liczba rzutów wynosi co najmniej 6.

Najbardziej prawdopodobna liczba sukcesów w schemacie Bernoulliego

Rozważmy teraz ciąg $P_n(0), P_n(1), P_n(2), \dots, P_n(n)$ w schemacie n prób Bernoulliego, w którym prawdopodobieństwo uzyskania sukcesu w jednej próbie wynosi p , $0 < p < 1$, $q = 1 - p$.

Okazuje się, że w ciągu $(P_n(k))$, gdzie $P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ i $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, można wskazać wartość największą. Przy powyższych założeniach zachodzi bowiem następujące twierdzenie (dowód pomijamy).

Twierdzenie

- Jeżeli $(n+1)p$ nie jest liczbą całkowitą, to najbardziej prawdopodobną liczbą sukcesów w schemacie n prób Bernoulliego jest największa liczba całkowita k_0 taka, że:

$$k_0 < (n+1)p$$

- Jeżeli $(n+1)p$ jest liczbą całkowitą, to najbardziej prawdopodobne są liczby sukcesów:

$$(n+1)p - 1 \text{ oraz } (n+1)p$$

i prawdopodobieństwa ich uzyskania są równe.

Przykład 5 ◀ zad. 8.14

Rzucamy trzynaście razy kostką. Obliczymy najbardziej prawdopodobną liczbę wyrzuconych szóstek.

Rozwiązanie

$$n = 13, p = \frac{1}{6}$$

$$(n+1)p = \frac{14}{6} = 2\frac{1}{3}, \text{ czyli } k_0 = 2$$

Odp.: Najbardziej prawdopodobną liczbą wyrzuconych szóstek jest 2.

Przykład 6

W grze w brydża gracz losuje 13 z 52 kart w talii. Niech sukcesem będzie wylosowanie wśród nich czterech asów. Obliczymy najbardziej prawdopodobną liczbę sukcesów w 20 rozdaniach.

Rozwiązanie

$$n = 20$$

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych w pojedynczej próbie (czyli w jednym rozdaniu): $\overline{\Omega} = \binom{52}{13} = \frac{52!}{13! \cdot 39!}$

Niech A oznacza sukces, czyli wylosowanie przez gracza czterech asów.

$$\overline{A} = \binom{4}{4} \cdot \binom{48}{9} = \frac{48!}{9! \cdot 39!}$$

$$p = \frac{48!}{9!39!} \cdot \frac{13!39!}{52!} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52} = \frac{11}{49 \cdot 5 \cdot 17}$$

$$(n+1)p = \frac{21 \cdot 11}{49 \cdot 5 \cdot 17} = \frac{33}{35 \cdot 17} < 1, \text{ czyli } k_0 = 0$$

Odp.: Najbardziej prawdopodobną liczbą sukcesów jest 0.

◀8.14. Rysiek rzuca 20 razy trzema monetami. Jeśli wypadną trzy orły – zjada ciasteczko. Oblicz najbardziej prawdopodobną liczbę zjedzonych przez niego ciasteczek.

Odp.: 2

◀8.16. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany uczeń pewnej szkoły spóźni się na lekcję w poniedziałek rano, jest równe 0,15. Oblicz najbardziej prawdopodobną liczbę tych uczniów 19-osobowej klasy, którzy przyjdą w najbliższy poniedziałek punktualnie.

Odp.: 16 i 17

Odpowiedzi i rozwiązania

8.1. B

8.2. D

8.3. C

8.4. $\frac{7}{32}$

8.5. $\frac{80}{243}$

Przykład 7 ◀ zad. 8.16

Obliczymy najbardziej prawdopodobną liczbę orłów wyrzuconych w 49 rzutach monetą.

Rozwiązanie

$$n = 49, \quad p = \frac{1}{2}$$

$$(n+1)p = \frac{50}{2} = 25$$

Wynik jest liczbą całkowitą, zatem najbardziej prawdopodobne liczby wyrzuconych orłów to 24 i 25.

Odp.: 24 i 25

Zadania

W każdym z zadań 8.1–8.3 jest tylko jedna poprawna odpowiedź. Wybierz ją i zapisz w zeszytcie.

8.1. Rzucamy 5 razy monetą. Prawdopodobieństwo wyrzucenia orła dokładnie 3 razy wynosi

A. $\frac{1}{8}$. B. $\frac{5}{16}$. C. $\binom{5}{3} \cdot \frac{1}{8}$. D. $\frac{1}{16}$.

8.2. Rzucamy 5 razy kostką do gry. Prawdopodobieństwo wyrzucenia parzystej liczby oczek dokładnie 4 razy wynosi

A. $\frac{1}{32}$. B. $\frac{1}{16}$. C. $\binom{5}{4} \cdot \frac{1}{16}$. D. $\frac{5}{32}$.

8.3. Rzucamy 7 razy kostką do gry. Prawdopodobieństwo wyrzucenia szóstki dokładnie 4 razy wynosi

A. $\binom{7}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^6 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1$. C. $\binom{7}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$.
B. $\frac{7}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$. D. $\binom{7}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$.

8.4. Rzucamy 8 razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia orła dokładnie 3 razy.

8.5. Rzucamy 5 razy kostką sześcienną. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia dokładnie 2 razy liczby oczek podzielnej przez 3.

8.6. W pudełku są cztery klocki czerwone i trzy niebieskie. Antoś losuje z pudełka trzy razy po dwa klocki ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo dwukrotnego wylosowania samych czerwonych klocków.

8.7. W urnie znajduje się 6 kul zielonych i 4 żółte. Losujemy z urny 7 razy po 2 kule, zwracając je za każdym razem do urny. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania pary kul różnych kolorów dokładnie cztery razy?

8.8. Z talii 52 kart losujemy 6 razy ze zwracaniem po jednej karcie. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kiera co najwyżej 4 razy.

8.9. W pewnej grze prawdopodobieństwo wygranej w jednej rozgrywce wynosi 0,5. Co jest bardziej prawdopodobne: wygranie 2 rozgrywek z 4 czy 3 rozgrywek z 6?

8.10. Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami do gry. Rozważamy zdarzenia:
 A – parzysty iloczyn liczb oczek pojawi się dwa razy w 4-krotnym rzucie kostkami,
 B – suma liczb oczek na obu kostkach podzielna przez 3 pojawi się trzy razy w 5-krotnym rzucie kostkami.

Oblicz prawdopodobieństwa $P(A)$ oraz $P(B)$. Które z nich jest większe?

8.11. Jedno podejście do gry polega na równoczesnym rzucie kostką i monetą. Gracz wygrywa, gdy wypadnie szóstka i orzeł. Jakie jest prawdopodobieństwo wygrania trzy razy w pięciu podejściach?

8.12. Pewien test składa się z 12 zadań, w których należy ocenić, czy zdania są prawdziwe czy fałszywe. Podanie co najmniej 8 poprawnych odpowiedzi zalicza ten test. Jakie jest prawdopodobieństwo zaliczenia testu przez osobę, która na wszystkie pytania odpowiada losowo?

8.13. Harcerze otrzymali polecenie od drużynowego, aby przeprowadzić wywiad z ciekawym człowiekiem. Prawdopodobieństwo tego, że harcerzowi uda się wykonać to zadanie, jest równe 0,4. Ilu harcerzy musi wyruszyć w teren, aby prawdopodobieństwo, że co najmniej jeden wywiad zostanie przeprowadzony, było większe od 99%?

8.14. Rysiek rzuca 20 razy trzema monetami. Jeśli wypadną trzy orły – zjada ciasteczko. Oblicz najbardziej prawdopodobną liczbę zjedzonych przez niego ciasteczek.

8.15. Dziadek Stefan twierdzi, że za czasów jego młodości prawdopodobieństwo tego, że na święta Bożego Narodzenia spadnie śnieg, było równe 90%. Przyjmując, że dziadek ma rację, oblicz najbardziej prawdopodobną liczbę świąt ze śniegiem w ciągu 18 lat jego młodości.



$$\mathbf{8.6.} \quad \frac{60}{343}$$

$$\mathbf{8.7.} \quad \left(\frac{7}{4}\right) \cdot \left(\frac{8}{15}\right)^4 \cdot \left(\frac{7}{15}\right)^3$$

$$\mathbf{8.8.} \quad \frac{4077}{4096}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{8.9.} \quad & \text{Wygranie 2 rozgrywek z 4.} \\ & \text{Wskazówka: } \left(\frac{4}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \\ & = \frac{3}{8} > \left(\frac{6}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16} \end{aligned}$$

$$\mathbf{8.10.} \quad P(A) = \frac{27}{128}, \quad P(B) = \frac{40}{243}, \\ P(A) > P(B)$$

$$\mathbf{8.11.} \quad \left(\frac{5}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^3 \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^2$$

$$\mathbf{8.12.} \quad \frac{397}{2048}$$

$$\mathbf{8.13.} \quad 10$$

$$\mathbf{8.14.} \quad 2$$

$$\mathbf{8.15.} \quad 17$$

8.16. 16 i 17

Prosto do matury

1. F, P, F

$$2. \binom{8}{3} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^5$$

$$3. \frac{2304}{3125}$$

4. Mamy tu 10 prób Bernoulliego. Taki iloczyn dają pary (4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6), więc prawdopodobieństwo sukcesu jest równe $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Zatem $q = \frac{5}{6}$. Szukane prawdopodobieństwo jest równe:

$$P_{10}(2) = \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 = \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{5^8}{6^{10}} = \frac{3 \cdot 5^9}{2 \cdot 6^9}$$

5. 6

8.16. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany uczeń pewnej szkoły spóźni się na lekcję w poniedziałek rano, jest równe 0,15. Oblicz najbardziej prawdopodobną liczbę tych uczniów 19-osobowej klasy, którzy przyjdą w najbliższy poniedziałek punktualnie.

* 8.17. W każdej z sześciu urn jest 14 kul. Liczba kul białych w urnie o numerze k jest równa k dla $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Pozostałe kule są czarne. Rzucamy kostką sześcienną, a następnie losujemy jedną kulę z urny o numerze równym liczbie wyrzuconych oczek. Procedurę tę powtarzamy cztery razy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że dokładnie dwa razy wylosujemy w opisany sposób kulę białą.

Prosto do matury



1. Z talii 52 kart losujemy pięć razy ze zwracaniem po jednej karcie. Oceń prawdziwość podanych zdań.

Prawdopodobieństwo wylosowania

A. dokładnie dwa razy asa wynosi $\binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{26}\right)^2 \cdot \left(\frac{25}{26}\right)^3$.

B. dokładnie trzy razy pika wynosi $\binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$.

C. co najmniej raz asa kier wynosi $\binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{52}\right)^1 \cdot \left(\frac{51}{52}\right)^4$.

2. W urnie jest 5 kul zielonych i 7 czerwonych. Losujemy z urny 8 razy ze zwracaniem po jednej kuli. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli zielonej dokładnie trzy razy?

3. Prawdopodobieństwo opóźnienia autobusu, którym pani Edyta dojeżdża do pracy, jest równe 0,2. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w ciągu pięciu dni autobus spóźni się nie więcej niż jeden raz.

4. Rzucamy 10 razy dwiema sześciennymi kostkami do gry. Wykaż, że prawdopodobieństwo zdarzenia A – dokładnie dwa razy iloczyn liczb wyrzuconych oczek będzie większy od 20, jest równe $\frac{3 \cdot 5^9}{2 \cdot 6^9}$.

5. Prawdopodobieństwo trafienia do celu w jednym strzale wynosi 0,6. Ile strzałów należy oddać, aby z prawdopodobieństwem większym od 99% cel został trafiony co najmniej raz?

8.17. A – sukces, czyli wylosowanie kuli białej

B_k – na kostce wypadło k oczek, $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$P(B_k) = \frac{1}{6}, \quad P(A|B_k) = \frac{k}{14}$$

Zgodnie z twierdzeniem o prawdopodobieństwie całkowitym:

$$\begin{aligned} p &= P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + P(B_3) \cdot P(A|B_3) + P(B_4) \cdot P(A|B_4) + \\ &+ P(B_5) \cdot P(A|B_5) + P(B_6) \cdot P(A|B_6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{14} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{14} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{14} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{14} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{14} + \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{14} = \\ &= \frac{1}{84} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{84} = \frac{1}{4}, \quad q = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$P_4(2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 6 \cdot \frac{3^2}{4^4} = \frac{3^3}{2 \cdot 4^3} = \frac{27}{128}$$

9. Powtórzenie

Zadania zamknięte

W każdym z zadań 1–10 jest tylko jedna poprawna odpowiedź.

Wybierz ją i zapisz w zeszycie.

- Wskaż liczbę podzbiorów zbioru siedmioelementowego.
A. 7^2 B. 2^7 C. $\binom{7}{2}$ D. $7!$
- Czternastoosobową grupę przedszkolaków, do której należą bliźniaki Jaś i Staś, podzielono losowo na dwa siedmioosobowe zespoły. Prawdopodobieństwo tego, że Jaś i Staś znajdują się w różnych zespołach, wynosi
A. $\frac{7}{13}$ B. $\frac{\binom{12}{6}}{\binom{14}{7}}$ C. $\frac{6!}{\binom{14}{7}}$ D. $\frac{4}{5}$
- W urnie są 2 kule białe i 3 czarne. Losujemy dwie kule bez zwracania. Prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych kul co najmniej jedna jest czarna, wynosi
A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{3}{20}$ C. $\frac{9}{10}$ D. $\frac{2}{3}$
- Zdarzenia A i B zawarte w zbiorze Ω są takimi zdarzeniami losowymi, że $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$ oraz $P(B|A) = \frac{1}{4}$. Wynika stąd, że $P(A')$ jest równe
A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{4}$
- W pierwszym koszu jest 14 jabłek i 18 gruszek, a w drugim 20 jabłek i 12 gruszek. Rzucamy sześcienną kostką do gry. Jeżeli wypadnie liczba oczek podzielna przez trzy, to losujemy jeden owoc z pierwszego kosza, w przeciwnym przypadku losujemy jeden owoc z drugiego kosza. Wskaż prawdopodobieństwo wylosowania gruszki.
A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{7}{16}$ D. $\frac{9}{16}$
- Rzucamy sześć razy kostką do gry. Prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej cztery razy liczby oczek większej od dwóch jest równe
A. $\frac{490}{729}$ B. $\frac{496}{727}$ C. $\frac{496}{729}$ D. $\frac{491}{727}$
- Wiadomo, że $A, B \subset \Omega$, $P(A|B) = 0,75$, $P(A \cap B) = 0,6$. Zatem $P(B)$ jest równe
A. 0,15. B. 0,35. C. 0,45. D. 0,8.

Odpowiedzi i rozwiązania

1. B

2. A

3. C

4. B

5. C

6. C

7. D

Multiteka

- Teoria chaosu
- Fale wyjątkowe
- Ubezpieczenie Titanica
- Paradoks urodzin
- Irracjonalne lęki
- Matematyka a wyścigi konne
- Problem Monty'ego Halla
- Roboty i wnioskowanie bayesowskie
- Złamanie kodu Enigmy
- Dylemat więźnia

dlanauczyciela.pl | Klasówka 2

- 8. B**
- 8.** Rzucamy 10 razy monetą. Prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki dokładnie 7 razy wynosi
- A. $\frac{7!}{10!}$. B. $\frac{15}{128}$. C. $\binom{10}{7} \cdot \frac{1}{2^7}$. D. $\frac{3}{8}$.
- 9. D**
- 9.** Rzucamy 6 razy kostką do gry. Prawdopodobieństwo wyrzucenia co najwyżej dwóch oczek dokładnie 2 razy wynosi
- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{1}{16}$. C. $\binom{6}{2} \cdot \frac{5^4}{6^6}$. D. $\frac{80}{243}$.
- 10. B**
- 10.** Rzucamy 5 razy czworościenną kostką do gry, na której ściankach są cyfry od 1 do 4. Prawdopodobieństwo wyrzucenia cyfry 4 dokładnie 3 razy wynosi
- A. $\frac{3}{20}$. B. $\frac{45}{512}$. C. $\frac{45}{256}$. D. $\frac{135}{256}$.
- W zadaniach 11–20 oceń prawdziwość podanych zdań.**
- 11. F, F, F**
- 11.** Liczba $\binom{12}{5}$ jest podzielna
- A. przez 5^2 . B. przez 3^4 . C. przez 2^6 .
- 12. P, F, F**
- 12.** Liczba permutacji zbioru $2n$ -elementowego jest 120 razy większa od liczby permutacji zbioru n -elementowego.
- A. Jest to możliwe dla $n = 3$.
 B. Jest to możliwe dla $n = 6$.
 C. Taka sytuacja jest niemożliwa.
- 13. F, P, P**
- 13.** Liczba sposobów, na które można rozmieścić dziesięć osób w trzech pokojach: pięcioosobowym, trzyosobowym i dwuosobowym, jest równa
- A. $\binom{10}{5} \cdot \binom{10}{3} \cdot \binom{10}{2}$. B. $\binom{10}{3} \cdot \binom{7}{2}$. C. $\binom{10}{5} \cdot \binom{5}{3}$.
- 14. P, F, P**
- 14.** Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych losujemy jedną. Prawdopodobieństwo, że wylosowana liczba jest podzielna przez
- A. 3 wynosi $\frac{1}{3}$. B. 7 wynosi $\frac{1}{7}$. C. 225 wynosi $\frac{1}{225}$.
- 15. F, P, F**
- 15.** W urnie są 2 losy wygrywające i 18 przegrywających. Kupujemy 2 losy. Prawdopodobieństwo kupienia
- A. dwóch losów wygrywających jest równe $\frac{1}{95}$.
 B. dwóch losów przegrywających jest równe $\frac{153}{190}$.
 C. dokładnie jednego losu wygrywającego jest równe $\frac{2}{19}$.

16. Z pudełka, w którym są 3 kule białe i 2 czarne, losujemy trzy razy bez zwracania po jednej kuli. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej

- A. za pierwszym razem jest równe 0,6.
B. za drugim razem jest równe 0,6.
C. za trzecim razem jest równe 0,6.

17. Zdarzenia A, B, C tworzą układ zupełny. Zatem

- A. $P(A) + P(B) + P(C) = 1$. B. $P(A \cup B \cup C) = 1$. C. $P(A \cap B \cap C) = 0$.

18. Zdarzenia $A, B \subset \Omega$ się wykluczają. Wynika z tego, że

- A. $A' \cap B' = \emptyset$. B. $A \cup B = \Omega$. C. $B - A = B$.

19. Dane są zdarzenia $A, B \subset \Omega$ takie, że $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,8$. Zatem

- A. $P(A \cap B) = 0,48$. B. $P(A \cap B) \geq 0,4$ C. $P(A \cap B) \leq 0,6$.

20. Dane są zdarzenia $A, B \subset \Omega$ takie, że $P(A|B) = P(B|A)$. Wynika z tego, że

- A. $P(A) = P(B)$. B. $P(A \cap B) = 0$. C. $P(A) = 0$ i $P(B) = 0$.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

21. Ile liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach i mniejszych od 24 000 możemy ułożyć z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6?

22. Ile jest wszystkich podzielnych przez 5 liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach?

23. Mamy 12 różnych przypraw. Każdą z nich możemy dodać do sosu. Ile różnych rodzajów sosu możemy w ten sposób przygotować?

24. Dane są zdarzenia $A, B \subset \Omega$ takie, że $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B') = \frac{1}{3}$ oraz $P(A \cap B) = \frac{2}{5}$. Oblicz $P(A \cup B)$.

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

D 25. Wykaż, że suma współczynników $\binom{n}{k}$ rozwinięcia dwumianu Newtona dla k parzystego jest równa sumie współczynników dla k nieparzystego.

26. Na ile sposobów możemy tak poprzestawiać cyfry w liczbie 13 742, aby otrzymać liczbę podzielną przez 4?

27. Ile jest liczb osiemnastocyfrowych, w których żadna cyfra nie jest zerem i żadna cyfra nie występuje więcej niż dwa razy?

28. Dane są zdarzenia $A, B \subset \Omega$ takie, że $P(A) = 0,5$, $P(B') = 0,6$ oraz $P(A \cup B) = 0,7$. Oblicz $P(A'|B)$.

16. P, P, P

17. P, P, P

18. F, F, P

19. F, P, P

20. F, F, F

21. 168

22. 952

23. $\binom{12}{0} + \binom{12}{1} + \binom{12}{2} + \dots + \binom{12}{11} + \binom{12}{12} = 2^{12}$

24. $\frac{3}{5}$

26. 24

27. $\frac{18!}{2^9}$

28. 0,5

$$25. 0 = (1 - 1)^n = \binom{n}{0} \cdot 1^n + \binom{n}{1} \cdot 1^{n-1} \cdot (-1)^1 + \dots + \binom{n}{n} \cdot 1^0 \cdot (-1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

Przenosimy na lewą stronę wyrazy $\binom{n}{k}$ dla k nieparzystych i otrzymujemy żadaną nierówność.

D

30. $P(A) = \frac{19}{35}$, $P(B) = \frac{31}{35}$

31. 6, 7, 8 lub 9

32. bez zwracania

33. 21

34. $\frac{20}{81}$

35. a) 0,08 b) 0,5 c) 0,16

36. $\frac{1}{4}$

37. $\frac{716}{729}$

38. $n \geq 5$

29. Dane są zdarzenia $A, B \subset \Omega$ takie, że $P(A|B) = 0,4$ oraz $P(B|A) = 0,5$. Wykaż, że $P((A \cap B)|(A \cup B)) = \frac{2}{7}$.

30. Ze zbioru $\{1, 2, \dots, 7\}$ losujemy trzy razy po jednej liczbie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:

A – suma trzech wylosowanych liczb jest liczbą parzystą,

B – iloczyn trzech wylosowanych liczb jest liczbą parzystą.

31. Wśród losów loterii fantowej jest sześć wygrywających. Jaka musi być liczba losów, aby prawdopodobieństwo tego, że zakupione dwa losy będą wygrywające, było większe od $\frac{1}{3}$?

32. W urnie są 3 kule białe i 5 czarnych. Kiedy wylosowanie dokładnie dwóch kul białych jest bardziej prawdopodobne: gdy losujemy trzy razy po jednej kuli ze zwracaniem czy bez zwracania?

33. W koszu jest pewna liczba piłeczek kolorowych i 6 białych. Wyciągamy dwie piłeczki bez zwracania. Ile piłeczek znajduje się w koszu, jeżeli prawdopodobieństwo wyciągnięcia dwóch piłeczek kolorowych wynosi 0,5?

34. W urnie są 3 kule białe, 2 czarne i 4 zielone. Losujemy dwie kule z urny bez zwracania. Jeśli wylosowane kule są tego samego koloru, to rzucamy raz kostką do gry. W przeciwnym razie rzucamy kostką dwa razy. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że dokładnie na jednej kostce otrzymamy 5 oczek.

35. W pewnym mieście przeprowadzono sondaż na temat budowy obwodnicy. Przeciw tej budowie wypowiedziało się 60% mieszkańców, w tym 70% handlowców. Pozostałe osoby poparły projekt, wśród nich 20% handlowców. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrana w tym mieście osoba

a) jest handlowcem i zwolennikiem obwodnicy.

b) jest handlowcem.

c) popiera budowę obwodnicy, jeżeli wiadomo, że jest handlowcem.

36. Jacek rzucił osiem razy kostką i otrzymał dwie szóstkę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ostatnim rzucie wypadła szóstkę?

37. W każdym z 6 pudełek znajduje się jedna kula niebieska, cztery żółte i cztery zielone. Z każdego pudełka losujemy dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo, że co najmniej z dwóch pudełek wylosujemy kule o różnych kolorach.

38. Rzucamy n razy dwiema kostkami sześciennymi do gry. Dla jakich n prawdopodobieństwo wyrzucenia co najmniej raz na każdej z kostek nieparzystej liczby oczek jest większe od 0,75?

$$29. P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{5} \text{ i } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{2},$$

$$\text{więc } \frac{P(B)}{P(A \cap B)} = \frac{5}{2} \text{ i } \frac{P(A)}{P(A \cap B)} = 2$$

$$P((A \cap B)|(A \cup B)) = \frac{P((A \cap B) \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{1}{\frac{P(A \cup B)}{P(A \cap B)}} =$$

$$= \left(\frac{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}{P(A \cap B)} \right)^{-1} = \left(\frac{P(A)}{P(A \cap B)} + \frac{P(B)}{P(A \cap B)} - 1 \right)^{-1} =$$

$$= \left(2 + \frac{5}{2} - 1 \right)^{-1} = \left(\frac{7}{2} \right)^{-1} = \frac{2}{7}$$