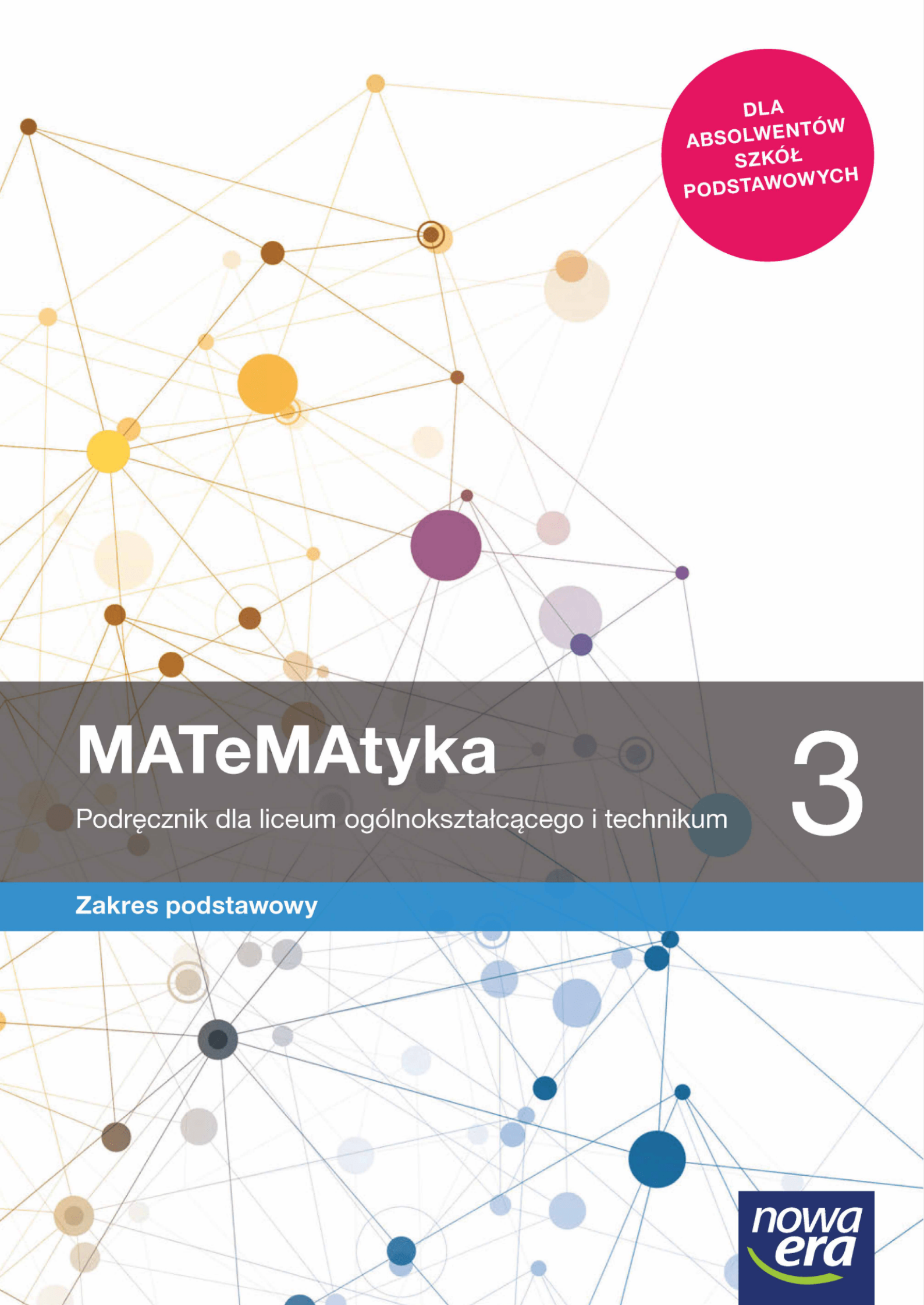




DLA
ABSOLWENTÓW
SZKÓŁ
PODSTAWOWYCH

MATeMATyka

Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i technikum

3

Zakres podstawowy

nowa
era

Wojciech Babiański
Lech Chańko
Joanna Czarnowska
Grzegorz Janocha
Jolanta Wesołowska

MATeMATyka

Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i technikum

3

Zakres podstawowy

MATeMAtyka

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców:

dr. hab. Gustawa Trelńskiego, dr. Jacka Stańdo, mgr Teresy Kosyry-Cieślak.

Etap edukacyjny: III

Typ szkoły: ponadpodstawowa

Rok dopuszczenia: 2021

Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 971/3/2021

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum* autorstwa Doroty Ponczek.

Ta publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2021
ISBN 978-83-267-4203-3

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Katarzyna Radziwińska

Współpraca redakcyjna: Urszula Cielniak, Marcin Minda

Opracowanie odpowiedzi: Ewa Kowalik, Katarzyna Radziwińska

Opracowanie redakcyjne i merytoryczne infografik: Urszula Cielniak

Konsultacje merytoryczne: Jacek Klisowski, Ewa Muszyńska, Barbara Sasim-Leciejewska

Redakcja językowa: Paulina Szulim

Korekta językowa: Dorota Rzeszewska

Nadzór artystyczny: Kaia Pichler

Opieka graficzna: Ewa Kaletyn

Projekt graficzny: Marek Błoszko, Ewa Kaletyn, Wojtek Urbanek

Projekt okładki: Maciej Galiński, Ewa Kaletyn

Fotoedycja: Katarzyna Iwan-Malawska

Rysunki merytoryczne: Lech Chańko

Opracowanie graficzne infografik: Marek Błoszko, Aleksandra Szpunar

Ilustracje na infografikach: Krzysztof Mrawiński, Aleksandra Szpunar

Mapa: Zespół Kartograficzny Nowa Era

Realizacja projektu graficznego: Dorota Chańko

W pracy nad podręcznikiem wykorzystano materiały z podręczników:

MATeMAtyka kl. 2 ZP autorstwa Wojciecha Babińskiego, Lecha Chańko, Joanny Czarnowskiej, Grzegorza Janochy oraz MATeMAtyka kl. 3 ZP i MATeMAtyka kl. 3 ZR autorstwa Wojciecha Babińskiego, Lecha Chańko, Joanny Czarnowskiej, Jolanty Wesołowskiej

Nowa Era Sp. z o.o.

Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa

www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl

Centrum Kontaktu: 801 88 10 10, 58 721 48 00

Druk i oprawa: Walstead Central Europe

Fotografia na okładce: Shutterstock/designleo.

Fotografie: BE&W: Alamy Stock Photo - Gunter Kirsch s. 79 (zamek Czocha), Nerthuz s. 42, Witold Skrypczak s. 79 (zamek w Czersku); Getty Images: E+/4x6 s. 36 (gitarzysta), iStock Unreleased/ewg3D s. 79 (zamek w Niedzicy), iStock/Getty Images Plus - Andrey Mitrofanov s. 111, Antonio_Diaz s. 36 (dziewczyna), Moment/Troy Harrison s. 171; Shutterstock: Alexey Boldin s. 187 (smartwatch), Dmitry Demkin s. 127 (słoneczniki), Ian 2010 s. 127 (słonecznik), Marcin Krzyzak s. 79 (zamek w Ogrodzieńcu), Maridav s. 187 (bieg), Pecold s. 79 (zamek w Gniewie); Thinkstock/Getty Images: Fuse s. 175; Lech Chańko s. 9, 45, 53.

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w podręczniku. Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Spis treści

1. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna

Potęga o wykładniku całkowitym – warto powtórzyć	10
1.1. Potęga o wykładniku wymiernym – powtórzenie	11
1.2. Potęga o wykładniku rzeczywistym	13
1.3. Funkcja wykładnicza	16
1.4. Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej	19
1.5. Logarytm	22
1.6. Logarytm dziesiętny	26
1.7. Logarytm iloczynu i logarytm ilorazu	28
1.8. Logarytm potęgi	30
1.9. Funkcja logarytmiczna	32
1.10. Przekształcenia wykresu funkcji logarytmicznej	37
1.11. Funkcje wykładnicza i logarytmiczna – zastosowania	41
1.12. Zagadnienia uzupełniające	44
Zestawy powtórzeniowe	46
Sposób na zadanie	50
Zadania testowe	51
Przed obowiązkową maturą z matematyki	52

2. Geometria analityczna

Twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie do niego odwrotne – warto powtórzyć	54
2.1. Odległość między punktami w układzie współrzędnych	55
2.2. Środek odcinka	58
Prosta w układzie współrzędnych – warto powtórzyć	61
2.3. Odległość punktu od prostej	62
Pole trójkąta w układzie współrzędnych – warto wiedzieć	66
2.4. Okrąg w układzie współrzędnych (1)	67
2.5. Okrąg w układzie współrzędnych (2)	72
Postać ogólna równania okręgu – warto wiedzieć	75
2.6. Wzajemne położenie dwóch okręgów	76
2.7. Wzajemne położenie okręgu i prostej	80
2.8. Układy równań – powtórzenie	83
2.9. Punkty wspólne prostej i okręgu (1)	86

2.10. Punkty wspólne prostej i okręgu (2)	89
2.11. Symetria osiowa	93
2.12. Symetria środkowa	97
2.13. Zagadnienia uzupełniające	101
Zestawy powtórzeniowe	104
Sposób na zadanie	108
Zadania testowe	109
Przed obowiązkową maturą z matematyki	110

3. Ciągi

3.1. Pojęcie ciągu	112
3.2. Sposoby określania ciągu	115
3.3. Ciągi monotoniczne	119
3.4. Ciągi określone rekurencyjnie	123
3.5. Ciąg arytmetyczny (1)	128
3.6. Ciąg arytmetyczny (2)	132
Suma, różnica, iloczyn i iloraz ciągów – warto wiedzieć	135
3.7. Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (1)	136
3.8. Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (2)	140
3.9. Ciąg geometryczny (1)	142
3.10. Ciąg geometryczny (2)	145
3.11. Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego	148
3.12. Ciągi arytmetyczne i ciągi geometryczne – zadania	152
3.13. Procent składany	155
3.14. Zagadnienia uzupełniające	161
Zestawy powtórzeniowe	164
Sposób na zadanie	168
Zadania testowe	169
Przed obowiązkową maturą z matematyki	170

4. Statystyka

4.1. Średnia arytmetyczna	172
4.2. Mediana, skala centylowa i dominanta	176
4.3. Odchylenie standardowe	182
Inne miary rozrzutu danych – warto wiedzieć	188
4.4. Średnia ważona	189
4.5. Zagadnienia uzupełniające	192

Zestawy powtórzeniowe	193
Sposób na zadanie	196
Zadania testowe	197
Przed obowiązkową maturą z matematyki	198
Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań	199
Indeks	228
Tablice logarytmów dziesiętnych	230

Odpowiedzi do pytań i poleceń, a także rozwiązań zadań nie należy zapisywać w podręczniku.

Żółtym paskiem na marginesie oznaczono materiał realizowany w zakresie rozszerzonym.



Oznaczenie przykładów z dowodami oraz ćwiczeń i zadań na dowodzenie.



Oznaczenie zadań, przy których rozwiązaniu należy skorzystać z kalkulatora.



1 Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna

Do opisu niektórych wielkości fizycznych wykorzystujemy **skale logarytmiczną**. Jedną z takich wielkości jest poziom głośności różnych źródeł dźwięku (tabela obok) – dziesięciokrotnemu wzrostowi natężenia dźwięku odpowiada wzrost poziomu głośności o 10 decybeli (patrz str. 36).

Źródło dźwięku	Poziom głośności
Odrzutowiec	160 decybeli
Koncert rockowy	120 decybeli
Cicha rozmowa	40 decybeli
Szelest liści	10 decybeli
Próg słyszalności	0 decybeli

Potęga o wykładniku całkowitym

1. Oblicz:

a) 2^n dla $n = 0, 1, 2, \dots, 10$,

b) 3^n dla $n = 0, 1, \dots, 6$.

2. Oblicz.

a) $(-3)^4$

b) $(-2)^5$

c) $(-6)^3$

d) $(-5)^0$

Dla liczby naturalnej $n \geq 1$ i dla liczby $a \neq 0$: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

3. Oblicz.

a) 4^{-2}

c) 6^{-3}

e) $(-4)^{-1}$

g) $(-2)^{-4}$

b) 5^{-4}

d) 9^{-3}

f) $(-5)^{-2}$

h) $(-3)^{-5}$

4. Oblicz.

a) $(\frac{1}{4})^3$

c) $(1\frac{1}{2})^6$

e) $(\frac{5}{9})^{-1}$

g) $(1\frac{1}{4})^{-3}$

b) $(\frac{2}{3})^4$

d) $(\frac{13}{7})^0$

f) $(\frac{2}{3})^{-3}$

h) $(3\frac{1}{3})^{-4}$

5. Która z liczb jest większa: x czy y ?

a) $x = 2^{10}$, $y = (-2)^{11}$

c) $x = (-3)^4$, $y = (-4)^4$

b) $x = 5^4$, $y = (-5)^6$

d) $x = (-5)^3$, $y = (-7)^3$

6. Przedstaw liczbę w postaci 2^m , gdzie m jest liczbą całkowitą.

a) $2^4 \cdot 2^6$

f) $2 \cdot 2^4 \cdot 2^5$

b) $4^2 \cdot 2^4$

g) $2^{-4} : 2^{-6}$

c) $2^7 : 2^3$

h) $(2^2)^3 \cdot 2$

d) $(2^3 \cdot 2^4) : 2^0$

i) $2 \cdot 2^{15} : 2^3$

e) $2^{-3} \cdot 2^5$

j) $2^{-6} : (2^6 : 2^{-4})$

7. Przedstaw liczbę w postaci 2^m , gdzie m jest liczbą całkowitą.

a) $2^4 \cdot 4^3 \cdot 2^{-1}$

c) $(16^{-2} : 2^{-3}) \cdot 4$

e) $32^{-3} \cdot (2^{-3})^{-5}$

b) $4^3 \cdot 2^4 : 8^{-4}$

d) $(4^3)^{-2} : 64^{-3}$

f) $(8^{-6} : 4^{-6})^{-1}$

8. Przedstaw liczbę w postaci a^m , gdzie m jest liczbą całkowitą.

a) $3^4 \cdot (81 \cdot 9^{-6})^{-1}$

c) $0,01 \cdot 16 \cdot 5^4$

e) $32^{-2} : (64^3 \cdot (\frac{1}{2})^{-3})$

b) $125^3 \cdot 0,2^{-7}$

d) $2^4 \cdot 9^2 \cdot 36^{-5}$

f) $(\frac{2}{3})^{-3} \cdot (\frac{27}{8})^{-3} \cdot 1,5$

Dla $m, n \in \mathbf{Z}$ i $a, b \neq 0$:

■ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

■ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

■ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

■ $a^n \cdot b^n = (ab)^n$

■ $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$

1.1. Potęga o wykładniku wymiernym – powtórzenie

Definicja

Dla dowolnej liczby $a \geq 0$ i liczby naturalnej $n > 1$ przyjmujemy:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Przykład 1

a) $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$ b) $64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$ c) $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$

Ćwiczenie 1

Oblicz.

a) $81^{\frac{1}{2}}$ c) $\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{2}}$ e) $169^{\frac{1}{2}}$ g) $8^{\frac{1}{3}}$ i) $81^{\frac{1}{4}}$ k) $256^{\frac{1}{4}}$
b) $100^{\frac{1}{2}}$ d) $\left(\frac{1}{121}\right)^{\frac{1}{2}}$ f) $441^{\frac{1}{2}}$ h) $27^{\frac{1}{3}}$ j) $64^{\frac{1}{6}}$ l) $1024^{\frac{1}{10}}$

Definicja

Dla dowolnej liczby $a > 0$, liczby naturalnej $n > 1$ i liczby całkowitej m przyjmujemy:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Przykład 2

a) $8^{\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^4 = 2^4 = 16$ b) $9^{-\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{9}\right)^{-3} = 3^{-3} = \frac{1}{27}$

Ćwiczenie 2

Oblicz.

a) $8^{\frac{2}{3}}$ b) $32^{\frac{4}{5}}$ c) $81^{2,5}$ d) $625^{-\frac{1}{4}}$ e) $64^{-\frac{2}{3}}$ f) $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{3}{2}}$

Prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych są analogiczne do praw działań na potęgach o wykładnikach całkowitych.

Przykład 3

a) $2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{\frac{5}{2}} = 2^{\frac{3}{2} + \frac{5}{2}} = 2^4 = 16$
b) $8^{\frac{7}{3}} : 8^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{7}{3} - \frac{2}{3}} = 8^{\frac{5}{3}} = 2^5 = 32$
c) $25^{\frac{3}{2}} : 125^{\frac{2}{3}} = (5^2)^{\frac{3}{2}} : (5^3)^{\frac{2}{3}} = 5^3 : 5^2 = 5^{3-2} = 5$

Dla $a, b > 0$ i $x, y \in \mathbb{Q}$:

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
- $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
- $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

Ćwiczenie 3

Oblicz.

- a) $16^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{6}}$ c) $3^{\frac{3}{2}} : \sqrt{3}$ e) $15^{0,5} \cdot 0,36^{0,25}$ g) $\left(6^{\frac{2}{3}} \cdot 6^{\frac{3}{2}}\right) : 6^{\frac{1}{6}}$
b) $\left(\frac{3}{20}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^{\frac{1}{4}}$ d) $(25\sqrt{5}) : 5^{\frac{3}{2}}$ f) $20^{\frac{1}{3}} \cdot 2,5^{-\frac{1}{3}}$ h) $7 : \left(7^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{7}\right)$

Zadania

1. Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 5.

- a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{5}$ c) $\sqrt{125}$ d) $\sqrt[3]{25}$ e) $\sqrt[4]{125}$

2. Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 3.

- a) $\sqrt[4]{3}$ b) $\sqrt[3]{3^4}$ c) $\frac{1}{\sqrt[5]{3}}$ d) $\frac{1}{\sqrt{3^3}}$ e) $3 \cdot \sqrt[4]{3}$

3. Zapisz liczbę w postaci a^x , gdzie $a \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{Q}$.

- a) $\sqrt[4]{5^{\frac{1}{2}}}$ c) $\sqrt[3]{3} : \sqrt[4]{3}$ e) $2 : 8^{\frac{2}{3}}$ g) $3^{\frac{1}{8}} \cdot 12^{\frac{3}{4}} : \sqrt{8}$
b) $(\sqrt{5})^3$ d) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{3}$ f) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{3}{2}} : 8^{\frac{2}{3}}$ h) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3}$

4. Oblicz.

- a) $9^{\frac{5}{2}}$ d) $8^{-\frac{2}{3}}$ g) $10\,000^{1,25}$ j) $3^3 \cdot 27^{-\frac{4}{3}}$
b) $125^{\frac{4}{3}}$ e) $27^{-\frac{4}{3}}$ h) $81^{-0,375}$ k) $2^2 \cdot 8^{\frac{2}{3}}$
c) $16^{\frac{3}{4}}$ f) $25^{-\frac{1}{2}}$ i) $144^{-0,5}$ l) $5^3 \cdot 125^{-\frac{1}{3}}$

5. Oblicz.

- a) $0,09^{\frac{3}{2}}$ c) $0,008^{\frac{2}{3}}$ e) $0,0625^{-\frac{3}{4}}$ g) $0,008^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{125}$
b) $0,25^{-\frac{1}{2}}$ d) $0,0081^{-\frac{3}{4}}$ f) $0,00032^{\frac{4}{5}}$ h) $0,0256^{\frac{3}{4}} \cdot (\sqrt[3]{10})^9$

6. Przedstaw liczbę w postaci a^m , gdzie $a \in \mathbf{N}$.

- a) $3^4 \cdot (81 \cdot 9^{-6})^{-1}$ c) $0,01 \cdot 16 \cdot 5^4$ e) $32^{-2} : \left(64^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right)$
b) $125^3 \cdot 0,2^{-7}$ d) $2^4 \cdot 9^2 \cdot 36^{-5}$ f) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{-3} \cdot 1,5^6$

Powtórzenie

7. Oblicz.

- a) $\sqrt{16^5}$ b) $\sqrt[3]{27^2}$ c) $\sqrt[5]{32^4}$ d) $(\sqrt[6]{125})^2$

8. Przedstaw liczbę w postaci a^m , gdzie $m \in \mathbf{Q}$.

- a) $7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{2}}$ c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$ e) $3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-\frac{4}{3}} \cdot 9^2$
b) $3^{\frac{5}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}$ d) $\frac{1}{5} \cdot (5^2)^{-\frac{1}{3}}$ f) $25^{-0,5} \cdot \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{-6}$

1.2. Potęga o wykładniku rzeczywistym

Potrąfimy określić wartość liczbową potęgi a^x (nie określamy potęgi 0^0), gdy wykładnik x jest liczbą naturalną, całkowitą lub wymierną.

Pokażemy na przykładach, jak można określić wartość liczbową potęgi a^x , gdy x jest liczbą niewymierną.

Przykład 1

Podaj kilka przybliżeń dziesiętnych liczby $3^{\sqrt{2}}$.

$\sqrt{2} = 1,414213562\dots$, zatem rozpatrujemy kolejno:

$3^{1,4}$	$\approx 4,655536722$
$3^{1,41}$	$\approx 4,706965002$
$3^{1,414}$	$\approx 4,727695035$
$3^{1,4142}$	$\approx 4,728733930$
$\vdots$	$\vdots$
$3^{1,414213562}$	$\approx 4,728804386$

Podane w tabeli przybliżenia możemy obliczyć, korzystając z odpowiedniego kalkulatora lub komputera.

Po podstawieniu w wykładniku coraz dokładniejszych przybliżeń liczby $\sqrt{2}$ otrzymujemy coraz dokładniejsze przybliżenie liczby $3^{\sqrt{2}}$.

Zauważmy, że gdy wykładnik x „zbliża się” do $\sqrt{2}$, to 3^x „zbliża się” do pewnej liczby rzeczywistej, którą oznaczamy $3^{\sqrt{2}}$. Korzystając z kalkulatora, możemy obliczyć przybliżoną wartość $3^{\sqrt{2}} \approx 4,72880438784$.

Przykład 2

Podaj kilka przybliżeń dziesiętnych liczby $5^{\sqrt{2}}$.

$5^{1,4}$	$\approx 9,518269694$
$5^{1,4142}$	$\approx 9,738305174$
$5^{1,414213}$	$\approx 9,738508928$
$5^{1,414213562}$	$\approx 9,738517736$
$\vdots$	$\vdots$
$5^{\sqrt{2}}$	$\approx 9,738517742$

$\sqrt{2} = 1,414213562\dots$

Po podstawieniu w wykładniku coraz dokładniejszych przybliżeń liczby $\sqrt{2}$ otrzymujemy coraz dokładniejsze przybliżenie liczby $5^{\sqrt{2}}$.



Ćwiczenie 1

Podaj przybliżenia dziesiętne liczb $5^{\sqrt{3}}$ i $5^{\sqrt{5}}$ z dokładnością do 0,0001.

Przykład 3

Podaj kilka przybliżeń dziesiętnych liczby 2^π .

$2^{3,14}$	$\approx 8,815240927$
$2^{3,14159}$	$\approx 8,824961595$
$2^{3,14159265}$	$\approx 8,824977805$
$\vdots$	$\vdots$
2^π	$\approx 8,824977827$

$$\pi = 3,14159265\dots$$

Po podstawieniu w wykładniku coraz dokładniejszych przybliżeń liczby π , otrzymujemy coraz dokładniejsze przybliżenie liczby 2^π .



Ćwiczenie 2

Korzystając z odpowiedniego kalkulatora, podaj z dokładnością do 0,0001 przybliżenie dziesiętne liczby: a) 3^π , b) 5^π , c) π^π .

Podane na str. 11 wzory dla potęg o wykładnikach wymiernych są prawdziwe również dla potęg o wykładnikach rzeczywistych (zarówno wymiernych, jak i niewymiernych).

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbf{R}_+$ i dowolnych $x, y \in \mathbf{R}$ prawdziwe są wzory:

$$\begin{aligned} \blacksquare a^x \cdot a^y &= a^{x+y} & \blacksquare (a^x)^y &= a^{x \cdot y} & \blacksquare \frac{a^x}{b^x} &= \left(\frac{a}{b}\right)^x \\ \blacksquare \frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y} & \blacksquare a^x \cdot b^x &= (ab)^x \end{aligned}$$

Ćwiczenie 3

Który z powyższych wzorów wykorzystano w obliczeniach?

a) $\left(2^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 2^2 = 4$

c) $6^\pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^\pi = \left(6 \cdot \frac{3}{2}\right)^\pi = 9^\pi$

b) $\frac{6^{\sqrt{2}}}{2^{\sqrt{2}}} = \left(\frac{6}{2}\right)^{\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{2}}$

d) $5^{\sqrt{2}} \cdot 5^{1-\sqrt{2}} = 5^{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}} = 5$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

a) $\left(5^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$

c) $\left(5^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}$

e) $7^{\sqrt{2}} \cdot 49^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

g) $\frac{2^{\sqrt{3}+6}}{2^{\sqrt{3}+1}}$

b) $\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{2\sqrt{2}}$

d) $\left(2^{\sqrt{7}-\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$

f) $9^{\sqrt{5}} \cdot 3^{1-2\sqrt{5}}$

h) $\frac{6^{\sqrt{3}+1} \cdot 2^{-\sqrt{3}}}{3^{\sqrt{3}}}$

Zadania

1. Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 3.

- a) $3^4 \cdot 3^{1-\sqrt{2}}$ c) $\left(3^{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ e) $6^{\sqrt{7}} : 2^{\sqrt{7}}$
b) $3^3 : 3^{2-\sqrt{2}}$ d) $\left(3^{\sqrt{3}}\right)^{1-\sqrt{3}}$ f) $(\sqrt{3})^\pi \cdot (\sqrt{3})^\pi$

2. Oblicz.

- a) $6^{1-\sqrt{2}} \cdot 6^{\sqrt{2}+1}$ d) $2^{3\sqrt{5}} \cdot 8^{-\sqrt{5}}$ g) $6^{\sqrt{3}} \cdot 3^{1-\sqrt{3}} \cdot 2^{-\sqrt{3}}$
b) $5^{\pi+3} : 5^\pi$ e) $4^{\sqrt{3}} : 2^{2\sqrt{3}}$ h) $4^{\pi+3} \cdot 3^\pi : 12^\pi$
c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{\sqrt{6}-1} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{\sqrt{6}+2}$ f) $\frac{7^{\frac{5}{6}}}{7^{\frac{1}{3}\sqrt{7}}} \cdot \frac{7^{\sqrt{5}+5}}{7^{\sqrt{5}+2}}$ i) $\frac{6^{\frac{2}{3}} \cdot 6^{\frac{3}{2}}}{6^{\frac{1}{6}}} \cdot \left(6^{\sqrt{5}-2}\right)^{\sqrt{5}+2}$

3. Przedstaw liczbę w postaci a^x , gdzie $a \in \mathbb{N}$.

- a) $2^{\sqrt{7}-2} \cdot 4^3$ c) $9^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \cdot 27^{-1}$ e) $\frac{1}{3} \cdot 9^{\pi+\frac{1}{2}} : 81^{2\pi}$
b) $2^{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2}$ d) $27 \cdot \left(3^{-\sqrt{3}}\right)^2$ f) $7^{-2\sqrt{2}} : 49^{\pi+\sqrt{2}}$

4. Sprawdź, czy liczba q należy do przedziału $(3; 6)$. Nie korzystaj z kalkulatora, tylko z podanych przybliżeń.

- a) $q = 4^{\sqrt{3}-1} : \frac{1}{4}$ c) $q = 6^{\sqrt{3}} : \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$
b) $q = 0,5^{\sqrt{3}+1} \cdot 6^{\sqrt{3}}$ d) $q = \left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{4}}$

$$\begin{aligned}2^{\sqrt{3}} &\approx 3,32199709 \\3^{\sqrt{3}} &\approx 6,70499185 \\6^{\sqrt{3}} &\approx 22,2739634\end{aligned}$$

5. Spośród liczb x, y, z wybierz takie dwie, z których jedna jest odwrotnością drugiej.

- a) $x = 2^{4\sqrt{2}}, y = 4^{\frac{\sqrt{2}}{2}}, z = 8^{-\frac{\sqrt{2}}{3}}$
b) $x = 1,5^{4-2\sqrt{3}}, y = \left(\frac{4}{9}\right)^{2+\sqrt{3}}, z = \left(\frac{9}{4}\right)^{\sqrt{3}-2}$
c) $x = 125^{1-2\sqrt{5}}, y = 25^{2-3\sqrt{5}}, z = 0,0016 \cdot 5^{\sqrt{180}}$

Powtórzenie

6. Przedstaw liczbę w postaci a^x , gdzie $a \in \mathbb{N}$.

- a) $5^{\sqrt{3}-1} \cdot 5$ c) $7^{\sqrt{5}+5} : 7^5$ e) $9^{\sqrt{5}+1} : 81^{\frac{1}{2}}$
b) $4^{\sqrt{2}+3} \cdot 4^{-3}$ d) $9^{\sqrt{7}-2} : 9^{-2}$ f) $16^{\sqrt{3}-2} \cdot 4^4$

7. Oblicz.

- a) $\left(5^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$ c) $\left(2^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{6}}$ e) $3^{\sqrt{27}} : 3^{3\sqrt{3}}$
b) $4^{\sqrt{3}} \cdot 4^{2-\sqrt{3}}$ d) $5^{2+\sqrt{5}} \cdot 5^{2-\sqrt{5}}$ f) $7^{4+2\sqrt{2}} : 7^{2+\sqrt{8}}$

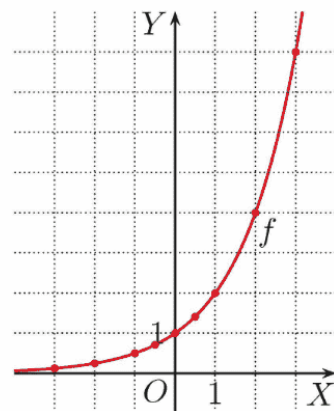
1.3. Funkcja wykładnicza

Przykład 1

Wykres funkcji $f(x) = 2^x$ określonej dla $x \in \mathbf{R}$ szkicujemy, łącząc odpowiednie punkty krzywą jak na rysunku.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	4	8

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(0; \infty)$.



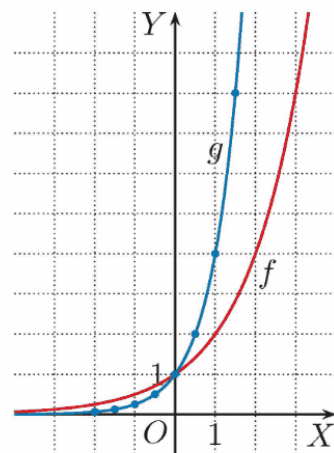
Przykład 2

Wykres funkcji $g(x) = 4^x$ określonej dla $x \in \mathbf{R}$ szkicujemy, łącząc odpowiednie punkty krzywą jak na rysunku.

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$g(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

Zbiorem wartości funkcji g jest przedział $(0; \infty)$.

Wykresy funkcji $g(x) = 4^x$ i $f(x) = 2^x$ dla porównania naszkicowano w tym samym układzie współrzędnych.



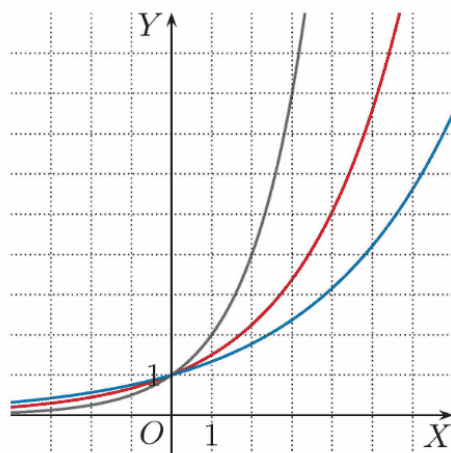
Ćwiczenie 1

Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$ i $h(x) = 4^x$ określonych dla $x \in \mathbf{R}$. Podaj współrzędne punktu wspólnego tych wykresów.

Ćwiczenie 2

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = 2^x$, $g(x) = (\frac{3}{2})^x$ i $h(x) = (\frac{4}{3})^x$.

- Dobierz wzór do każdego wykresu.
- Punkty $P(4, a)$, $Q(-2, b)$, $R(c, 3\frac{3}{8})$ należą do wykresu funkcji g . Wyznacz niewiadome współrzędne tych punktów.
- Które spośród punktów:
 $A(4, 3\frac{15}{81})$, $B(-4, \frac{81}{256})$, $C(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$
 należą do wykresu funkcji h ?

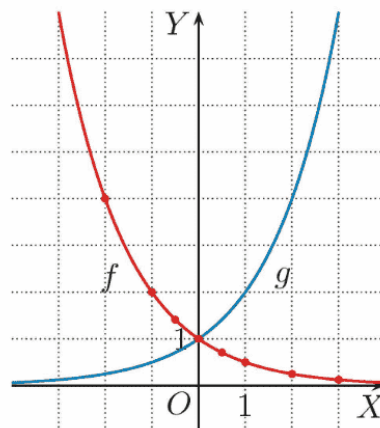


Przykład 3

Wykres funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ określonej dla $x \in \mathbf{R}$ szkicujemy, łącząc odpowiednie punkty krzywą jak na rysunku.

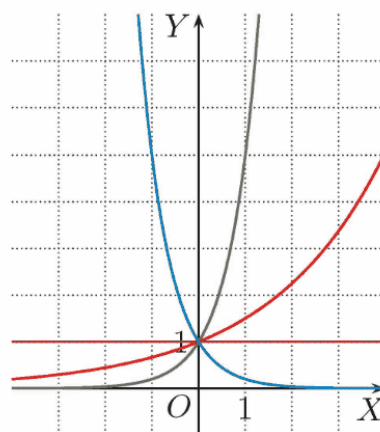
x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	8	4	2	$\sqrt{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Uwaga. Wykres funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ można otrzymać przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $g(x) = 2^x$ względem osi OY , ponieważ $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x} = g(-x)$.



Ćwiczenie 3

- Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.
- Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji $g(x) = 4^x$ i $h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

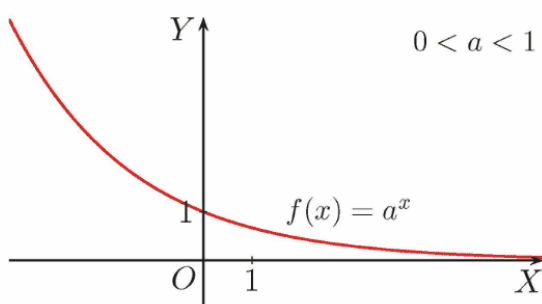


Ćwiczenie 4

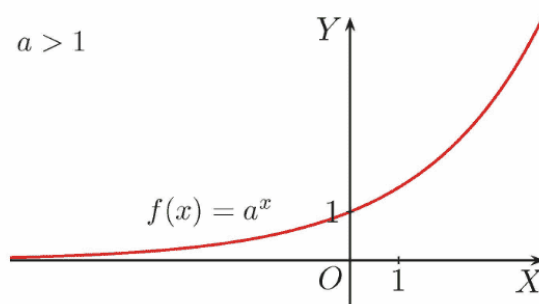
Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = 5^x$, $g(x) = 0,2^x$, $h(x) = 1,5^x$ i $k(x) = 1^x$. Dobierz wzór do każdego wykresu.

Definicja

Funkcję postaci $f(x) = a^x$ określoną dla $x \in \mathbf{R}$, gdzie $a \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$ jest pewną stałą, nazywamy **funkcją wykładniczą**.



Dla $a \in (0; 1)$ funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest malejąca.



Dla $a \in (1; \infty)$ funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest rosnąca.

Dziedziną funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ dla dowolnego $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$, a jej zbiorem wartości – przedział $(0; \infty)$. Wykres funkcji wykładniczej przecina oś OY w punkcie $(0, 1)$, natomiast nie ma punktów wspólnych z osią OX , która jest jego asymptotą poziomą.

Uwaga. Dla $a = 1$ funkcja $f(x) = a^x$ jest funkcją stałą: $f(x) = 1$.

Przykład 4

Zapisz liczby $10^{\sqrt{2}}$, $10^{1,4}$, $10^{1,5}$ w kolejności od najmniejszej do największej.
Funkcja $y = 10^x$ jest rosnąca i $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$, zatem $10^{1,4} < 10^{\sqrt{2}} < 10^{1,5}$.

Przykład 5

Zapisz liczby $0,9^{\sqrt{3}}$, $0,9^{1,7}$, $0,9^{1,8}$ w kolejności od najmniejszej do największej.
Funkcja $y = 0,9^x$ jest malejąca i $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$, zatem:

$$0,9^{1,8} < 0,9^{\sqrt{3}} < 0,9^{1,7}$$

Ćwiczenie 5

Zapisz liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

- a) $5^{\frac{1}{2}}$, $5^{\frac{1}{3}}$, $5^{0,3}$, $5^{0,33}$ c) $0,6^{\frac{1}{2}}$, $0,6^{\frac{1}{3}}$, $0,6^{\frac{3}{7}}$, $0,6^{\frac{3}{8}}$, $0,6^{0,35}$
b) $7^{3,1}$, $7^{3,2}$, 7^{π} , $7^{\sqrt{5}}$ d) $(\frac{1}{3})^2$, $(\frac{1}{3})^{1,5}$, $(\frac{1}{3})^{\sqrt{2}}$, $(\frac{1}{3})^{\sqrt{3}}$, $(\frac{1}{3})^{\frac{\pi}{2}}$

Zadania

- Oblicz wartości funkcji f dla $x \in \{-4, -3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3, 4\}$.
a) $f(x) = 3^x$ b) $f(x) = 4^x$ c) $f(x) = (\frac{1}{4})^x$ d) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$
- Punkt $P(2, 16)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = a^x$. Czy punkt Q też należy do wykresu funkcji f ?
a) $Q(\frac{1}{2}, 2)$ b) $Q(5, 1024)$ c) $Q(-3, \frac{1}{16})$ d) $Q(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
- Punkt $P(2, 2)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = a^x$. Czy punkt Q też należy do wykresu funkcji f ?
a) $Q(1, 1)$ b) $Q(4, 4)$ c) $Q(8, 8)$ d) $Q(-8, \frac{1}{16})$
- Do wykresu funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ należy punkt M . Naszkicuj ten wykres.
a) $M(2, \frac{1}{9})$ b) $M(-3, 8)$ c) $M(\frac{1}{2}, 2)$ d) $M(3, 3\frac{3}{8})$

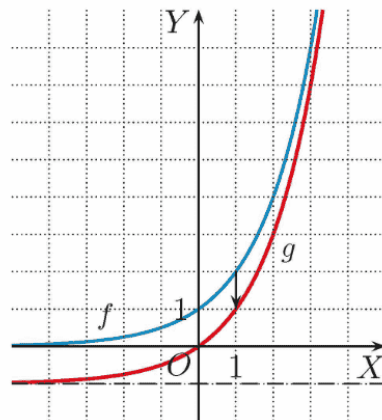
Powtórzenie

- Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g . Odczytaj z rysunku rozwiązanie równania $f(x) = g(x)$.
a) $f(x) = 3^x$, $g(x) = (\frac{1}{3})^x$ b) $f(x) = 4^x$, $g(x) = (\frac{1}{2})^x$
- Zapisz liczby w kolejności od najmniejszej do największej.
a) $2^{\frac{3}{2}}$, $2^{\frac{7}{5}}$, $2^{\sqrt{2}}$, $2^{\sqrt{3}}$ c) $\sqrt[3]{\pi}$, $\pi^{\frac{1}{2}}$, $\pi^{\frac{3}{7}}$, $\pi^{\frac{1}{\pi}}$
b) $(\frac{3}{4})^5$, $(\frac{3}{4})^6$, $(\frac{3}{4})^{2\sqrt{6}}$, $(\frac{3}{4})^{\sqrt{26}}$ d) 9^0 , 9^{-2} , $9^{-\sqrt{3}}$, $9^{-\sqrt{\pi}}$

1.4. Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej

Przykład 1

Wykres funkcji $g(x) = 2^x - 1$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = 2^x$ o 1 jednostkę w dół (rysunek obok). Asymptotą poziomą wykresu funkcji g jest prosta $y = -1$.



Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji g . Podaj zbiór wartości tej funkcji i równanie asymptoty poziomej jej wykresu.

a) $g(x) = 3^x - 2$

b) $g(x) = 2^x + 1$

c) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$

Ćwiczenie 2

Dla jakiego a zbiorem wartości funkcji $f(x) = 2^x + a$ jest przedział:

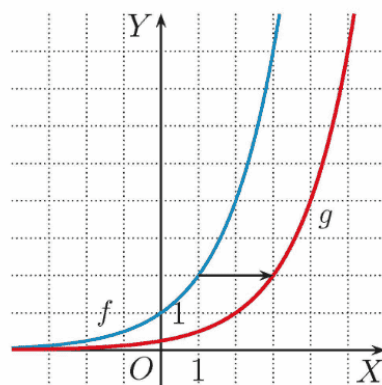
a) $(3; \infty)$,

b) $(-6; \infty)$,

c) $(-\frac{1}{4}; \infty)$?

Przykład 2

Wykres funkcji $g(x) = 2^{x-2}$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = 2^x$ o 2 jednostki w prawo (rysunek obok).



Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji g . Podaj odcięłą punktu należącego do wykresu funkcji g , jeśli rzędna tego punktu jest równa 1.

a) $g(x) = 3^{x-1}$

b) $g(x) = 2^{x+2}$

c) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$

Ćwiczenie 4

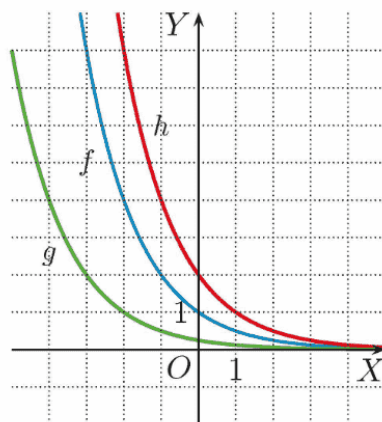
Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji f , g i h . Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

a) Funkcja g dana jest wzorem $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+a}$.

Podaj wartość współczynnika a , jeśli do wykresu funkcji g należy punkt $(-3, 2)$.

b) Funkcja h dana jest wzorem $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-b}$.

Podaj wartość współczynnika b , jeśli do wykresu funkcji h należy punkt $(0, 2)$.

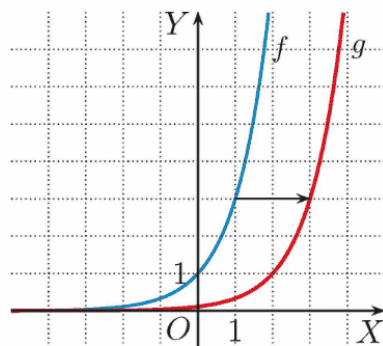


Przykład 3

Opisz, jak należy przekształcić wykres funkcji $f(x) = 3^x$, aby otrzymać wykres funkcji $g(x) = \frac{3^x}{9}$.

$$g(x) = \frac{3^x}{9} = \frac{3^x}{3^2} = 3^{x-2}$$

Wykres funkcji f należy przesunąć o 2 jednostki w prawo (rysunek obok).



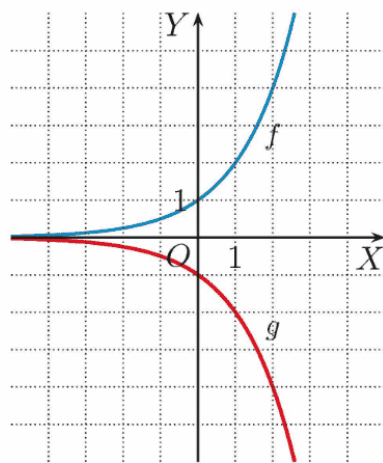
Ćwiczenie 5

Opisz, jak należy przekształcić wykres funkcji $f(x) = 3^x$, aby otrzymać wykres funkcji g .

- a) $g(x) = \frac{3^x}{3}$ b) $g(x) = \frac{3^x}{27}$ c) $g(x) = 3 \cdot 3^x$ d) $g(x) = \sqrt{3} \cdot 3^x$

Przykład 4

Wykres funkcji $g(x) = -2^x$ otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $f(x) = 2^x$ względem osi OX (rysunek obok).



Ćwiczenie 6

Naszczuj wykres funkcji g i określ jej monotoniczność.

- a) $g(x) = -3^x$ c) $g(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$
b) $g(x) = -4^x$ d) $g(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$

Ćwiczenie 7

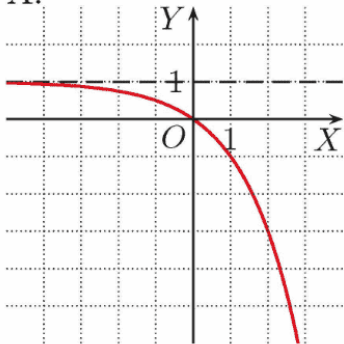
Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy funkcji:

$$f(x) = -2^{x+1}, \quad g(x) = -2^{x-1}, \quad h(x) = -2^x + 1$$

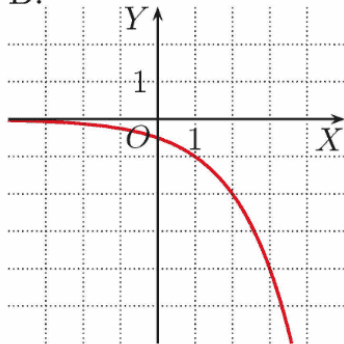
a) Dopasuj wzór funkcji do każdego wykresu.

b) Odczytaj z wykresu każdej funkcji, dla jakich argumentów przyjmuje ona wartości większe od -1 .

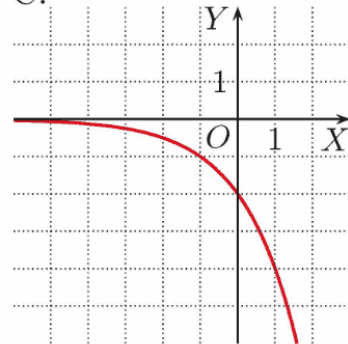
A.



B.

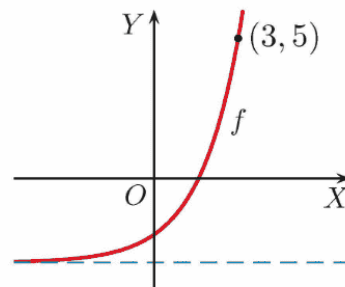


C.



Zadania

- Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj zbiór wartości i miejsce zerowe funkcji f oraz równanie asymptoty poziomej jej wykresu.
 - $f(x) = 2^x + 2$
 - $f(x) = 3^x - 1$
 - $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$
 - $f(x) = 3^{-x} + 1$
 - $f(x) = 4^{-x} - 4$
 - $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3$
- Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = 2^x + a$. Podaj wartość współczynnika a .
- Wykres funkcji $f(x) = 2^x + a$ przechodzi przez punkt P . Podaj wartość współczynnika a .
 - $P(0, -3)$
 - $P(2, 7)$
 - $P(4, 0)$
- Opisz, jak należy przekształcić wykres funkcji $f(x) = 2^x$, aby otrzymać wykres funkcji g .
 - $g(x) = \frac{2^x}{16}$
 - $g(x) = \frac{2^x}{1024}$
 - $g(x) = 8 \cdot 2^x$
 - $g(x) = \sqrt{2} \cdot 2^x$
- Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie odczytaj z wykresu zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq 1$.
 - $f(x) = 2^{x-1}$
 - $f(x) = 2^{x+3}$
 - $f(x) = 4 \cdot 2^x$
 - $f(x) = \frac{2^x}{8}$
 - $f(x) = \frac{27}{3^x}$
 - $f(x) = \frac{0,04}{5^x}$
- Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie odczytaj z wykresu zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq -1$.
 - $f(x) = -2^{x-2}$
 - $f(x) = -3^{x+1}$
 - $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$



Powtórzenie

- Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej miejsce zerowe i zbiór wartości.
 - $f(x) = 2^x - 4$
 - $f(x) = 3^x + 1$
 - $f(x) = 2^{x-3}$
 - $f(x) = 3^{x+2}$
 - $f(x) = -2^x + 2$
 - $f(x) = -3^x + 1$
- Naszkicuj wykres funkcji f i podaj równanie jego asymptoty poziomej.
 - $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3$
 - $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$
 - $f(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$
- Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj zbiory wartości funkcji f i g .
 - $f(x) = 2^x - 3$
 - $f(x) = 3^x + 1$
 - $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$

1.5. Logarytm

Przypomnijmy, że **logarytmem** z liczby dodatniej b przy podstawie a (gdzie a jest liczbą dodatnią różną od 1) nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść podstawę a , aby otrzymać liczbę logarytmowaną b .

$$\log_a b = x \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a^x = b$$

Przykład 1

a) $\log_2 16 = 4$, ponieważ $2^4 = 16$

b) $\log_2 1024 = 10$, ponieważ $2^{10} = 1024$

c) $\log_2 \frac{1}{16} = -4$, ponieważ $2^{-4} = \frac{1}{16}$

$$\log_a b = x$$

liczba logarytmowana
logarytm
podstawa logarytmu

Ćwiczenie 1

Oblicz.

a) $\log_2 32$

c) $\log_2 1$

e) $\log_2 \frac{1}{64}$

g) $\log_2 \sqrt{8}$

b) $\log_2 2$

d) $\log_2 \frac{1}{4}$

f) $\log_2 \sqrt{2}$

h) $\log_2 \sqrt[3]{4}$

Ćwiczenie 2

Oblicz.

a) $\log_3 81$

d) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$

g) $\log_7 7\sqrt{7}$

j) $\log_{\frac{1}{2}} 16$

b) $\log_3 \frac{1}{9}$

e) $\log_9 3$

h) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$

k) $\log_6 \sqrt[3]{36}$

c) $\log_3 \frac{1}{27}$

f) $\log_9 \frac{1}{27}$

i) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$

l) $\log_6 216$

Zwróć uwagę na to, że wartość logarytmu może być dodatnia, ujemna lub równa 0. Z definicji logarytmu wynikają własności podane obok.

Dla $a > 0$, $a \neq 1$:

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

Przykład 2

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = 2^x$.

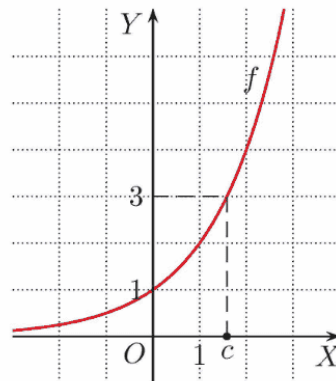
Zauważmy, że $\log_2 3$ to taka liczba c , że $2^c = 3$.

Z wykresu możemy odczytać, że:

$$1 < \log_2 3 < 2$$

Korzystamy z odpowiedniego kalkulatora i otrzymujemy przybliżenie: $\log_2 3 \approx 1,5849625$.

Udowodnimy, że liczba $\log_2 3$ jest niewymierna.



Liczba $\log_2 3$ jest liczbą niewymierną.

Dowód

Przyjmijmy przeciwnie, że $\log_2 3$ jest liczbą wymierną. Oznacza to, że istnieją różne od zera liczby naturalne m i n , takie że $\log_2 3 = \frac{m}{n}$.

Zatem $3 = 2^{\frac{m}{n}}$

$$3^n = 2^m \quad \begin{array}{l} \text{Podnosimy obie strony} \\ \text{równości do potęgi } n. \end{array}$$

Otrzymujemy sprzeczność, ponieważ prawa strona równości jest liczbą podzielna przez 2, a lewa nie. Zatem liczba $\log_2 3$ jest liczbą niewymierną.

D Ćwiczenie 3

Wykaż, że podana liczba jest liczbą niewymierną.

a) $\log_2 5$

b) $\log_3 5$

c) $\log_2 6$

d) $\log_6 2$

Bezpośrednio z definicji logarytmu wynikają własności podane obok.

Dla $a > 0, a \neq 1, b > 0$:

$$\log_a a^x = x$$

$$a^{\log_a b} = b$$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

a) $\log_2 2^{100}$

c) $\log_{1,1} 1,1^{10}$

e) $2^{\log_2 3}$

g) $0,4^{\log_{0,4} 10}$

b) $\log_6 6^{15}$

d) $\log_\pi \pi^{-3}$

f) $3^{\log_3 7}$

h) $5^{\log_5 1}$

Przykład 3

a) Oblicz $\log_3 (\log_2 512)$.

$512 = 2^9$, więc $\log_2 512 = 9$, zatem $\log_3 (\log_2 512) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$.

b) Oblicz $\log_{\sqrt{2}} (\log_{\sqrt{3}} 3)$.

$3 = (\sqrt{3})^2$, więc $\log_{\sqrt{3}} 3 = 2$, zatem $\log_{\sqrt{2}} (\log_{\sqrt{3}} 3) = \log_{\sqrt{2}} 2 = \log_{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^2 = 2$.

c) Oblicz $\log_6 (\log_4 (\log_5 625))$.

$625 = 5^4$, więc $\log_5 625 = 4$, zatem:

$$\log_6 (\log_4 (\log_5 625)) = \log_6 (\log_4 4) = \log_6 1 = \log_6 6^0 = 0$$

Ćwiczenie 5

Oblicz.

a) $\log_4 (\log_6 36)$

c) $\log_8 (\log_2 4)$

e) $\log_4 (\log_{16} (\log_3 81))$

b) $\log_5 (\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32})$

d) $\log_2 (\log_9 (\log_5 125))$

f) $\log_{\frac{1}{2}} (\log_{\sqrt{2}} (\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}))$

Zadania

1. Oblicz.

- | | | | |
|-----------------|----------------------------|-------------------|----------------------------|
| a) $\log_2 64$ | c) $\log_2 \frac{1}{32}$ | e) $\log_2 0,125$ | g) $\log_4 8$ |
| b) $\log_2 512$ | d) $\log_2 \frac{1}{1024}$ | f) $\log_4 2$ | h) $\log_4 \frac{1}{1024}$ |

2. Zapisz liczbę b w postaci 2^x . Oblicz $\log_2 b$.

- | | | | |
|--------------------|------------------------|-----------------------------|---------------------------------|
| a) $b = 4\sqrt{2}$ | b) $b = 16\sqrt[3]{2}$ | c) $b = \frac{\sqrt{2}}{8}$ | d) $b = \frac{\sqrt[3]{2}}{32}$ |
|--------------------|------------------------|-----------------------------|---------------------------------|

3. Oblicz.

- | | | | |
|-------------------------|--------------------------------|-------------------------|--------------------------|
| a) $\log_4 \sqrt{2}$ | c) $\log_4 \frac{\sqrt{2}}{2}$ | e) $\log_{\sqrt{2}} 4$ | g) $\log_3 3\sqrt{3}$ |
| b) $\log_4 \sqrt[3]{2}$ | d) $\log_4 2\sqrt{2}$ | f) $\log_{\sqrt{2}} 32$ | h) $\log_3 9\sqrt[3]{3}$ |

4. Oblicz.

- | | | | |
|---------------------------|-------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------|
| a) $\log_{\frac{1}{3}} 3$ | c) $\log_{0,5} \frac{1}{128}$ | e) $\log_{0,2} 125$ | g) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$ |
| b) $\log_{0,1} 10^6$ | d) $\log_{0,25} 16$ | f) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{216}$ | h) $\log_{\frac{1}{2}} 2\sqrt{2}$ |

5. Oblicz.

- | | | | |
|--|--|----------------------|---------------------------|
| a) $2^{\log_2 9}$ | c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 9}$ | e) $4^{\log_2 9}$ | g) $\sqrt{2}^{\log_2 9}$ |
| b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 5}$ | d) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_4 \frac{1}{3}}$ | f) $81^{\log_3 0,5}$ | h) $\sqrt{3}^{\log_3 16}$ |

6. Oblicz.

- | | | |
|---------------------------------------|-----------------------------------|--|
| a) $\log_3 81 \cdot \log_3 \sqrt{27}$ | b) $\log_5 625 \cdot \log_5 0,04$ | c) $\log_3 9\sqrt{3} \cdot \log_3 \frac{\sqrt{3}}{81}$ |
|---------------------------------------|-----------------------------------|--|

7. Oblicz.

- | | | |
|-------------------------------------|---|---|
| a) $\log_8 64 + \log_4 \frac{1}{8}$ | c) $\log_6 \frac{1}{36} + \log_4 \sqrt[3]{4}$ | e) $\log_{1,5} \frac{9}{4} - \log_{\pi} 1$ |
| b) $\log_5 5^8 - \log_{0,5} 8$ | d) $\log_9 \sqrt{3} - \log_3 \sqrt[4]{3}$ | f) $\log_{\frac{2}{3}} 1,5 - \log_{1,5} \frac{8}{27}$ |

8. Dla jakiej podstawy logarytmu a podana równość jest prawdziwa?

- | | | | |
|--------------------|-----------------------------|-----------------------|---------------------|
| a) $\log_a 25 = 2$ | b) $\log_a \frac{1}{8} = 3$ | c) $\log_a 0,25 = -1$ | d) $\log_a 64 = -3$ |
|--------------------|-----------------------------|-----------------------|---------------------|

9. Dla jakiej liczby logarytmowanej b podana równość jest prawdziwa?

- | | | | |
|--------------------------------|--------------------------------|---|--------------------------------|
| a) $\log_2 b = 5$ | c) $\log_{27} b = \frac{2}{3}$ | e) $\log_{\frac{1}{16}} b = -\frac{3}{4}$ | g) $\log_{\sqrt{3}} b = 6$ |
| b) $\log_{\frac{1}{2}} b = -1$ | d) $\log_7 b = 0$ | f) $\log_{\sqrt{2}} b = -6$ | h) $\log_{\frac{3}{4}} b = -1$ |

10. Oblicz.

- | | | |
|------------------------------|--|---|
| a) $\log_2(\log_{11} 121)$ | c) $\log_{\frac{1}{9}}(\log_2 8)$ | e) $\log_9(\log_8(\log_3 9))$ |
| b) $\log_{0,1}(\log_2 1024)$ | d) $\log_{\sqrt{2}}\left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}\right)$ | f) $\log_8(\log_{\frac{1}{4}}(\log_4 2))$ |

11. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Dane są liczby x i y takie, że $2^x = 16$ i $3^y = 16$. Zapisz x i y jako logarytmy pewnych liczb. Która z liczb x , y jest całkowita?

$2^x = 16$, zatem $x = \log_2 16$ oraz $x \in \mathbf{Z}$, gdyż $\log_2 16 = 4$

$3^y = 16$, zatem $y = \log_3 16$ oraz $y \notin \mathbf{Z}$

Liczby x i y spełniają poniższe warunki. Zapisz x i y jako logarytmy pewnych liczb. Która z liczb x , y jest całkowita?

a) $2^x = 27$, $3^y = 27$

c) $6^x = 216$, $8^y = 216$

b) $2^x = 1000$, $10^y = 1000$

d) $3^x = \frac{1}{3}$, $9^y = \frac{1}{3}$

12. Oblicz a , jeśli spełnione są warunki:

a) $4^x = 64$ i $x = \log_2 a$,

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{32}$ i $x = \log_4 a$,

b) $5^x = 5\sqrt{5}$ i $x = \log_8 a$,

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$ i $x = \log_2 a$.

13. Rozwiąż równanie.

a) $2^{x-1} = 4$

e) $4^{x-3} = 16$

b) $2^{x+2} = 64$

f) $5^{x+2} = 625$

c) $3^{x-4} = 9$

g) $6^{2x-1} = 216$

d) $3^{x+4} = 27$

h) $8^{3x+4} = 64$

Rozwiąż równanie $2^{x+1} = 16$.

$$\log_2 2^{x+1} = \log_2 16$$

$$x + 1 = 4$$

$$x = 3$$

14. a) Dla jakich wartości x liczba $\log_2 x$ jest dodatnia, a dla jakich – ujemna?

b) Dla jakich wartości x liczba $\log_{\frac{1}{2}} x$ jest dodatnia, a dla jakich – ujemna?

Powtórzenie

15. Oblicz.

a) $\log_2 8 + \log_2 16$

c) $\log_3 27 - \log_3 1$

e) $\log_5 125 - \log_5 \frac{1}{5}$

b) $\log_3 9 + \log_3 81$

d) $\log_4 4 - \log_4 64$

f) $\log_3 \frac{1}{9} - \log_3 \frac{1}{3}$

16. Oblicz.

a) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{2}} 2$

c) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} - \log_2 \sqrt{2}$

e) $\log_4 2 + \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{8}$

b) $\log_{\frac{1}{3}} 9 + \log_{\frac{1}{3}} 27$

d) $\log_3 \sqrt{3} - \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{3}$

f) $\log_6 6\sqrt{6} - \log_{\frac{1}{6}} 36$

17. Dla jakiej podstawy logarytmu a podana równość jest prawdziwa?

a) $\log_a 16 = 4$

c) $\log_a 16 = 1$

e) $\log_a 16 = -1$

b) $\log_a 16 = 2$

d) $\log_a 16 = \frac{1}{2}$

f) $\log_a 16 = -2$

1.6. Logarytm dziesiętny

Przypomnijmy, że **logarytmy dziesiętne** to logarytmy o podstawie 10. Zamiast $\log_{10} b$ piszemy $\log b$. Na przykład $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$.

Ćwiczenie 1

Oblicz.

- a) $\log 1000$ c) $\log 10^6$ e) $\log \sqrt{10}$
 b) $\log 0,1$ d) $\log 0,0001$ f) $\log 10\sqrt{10}$

Poniżej zamieszczono fragment tablic (str. 230–231), w których znajdują się przybliżone wartości logarytmów dziesiętnych liczb.

b	$b + 0,00$	$b + 0,01$	$b + 0,02$	$b + 0,03$	$b + 0,04$	$b + 0,05$	$b + 0,06$	$b + 0,07$	$b + 0,08$	$b + 0,09$
1,0	0,0000	0,0043	0,0086	0,0128	0,0170	0,0212	0,0253	0,0294	0,0334	0,0374
1,1	0,0414	0,0453	0,0492	0,0531	0,0569	0,0607	0,0645	0,0682	0,0719	0,0755
1,2	0,0792	0,0828	0,0864	0,0899	0,0934	0,0969	0,1004	0,1038	0,1072	0,1106
1,3	0,1139	0,1173	0,1206	0,1239	0,1271	0,1303	0,1335	0,1367	0,1399	0,1430
1,4	0,1461	0,1492	0,1523	0,1553	0,1584	0,1614	0,1644	0,1673	0,1703	0,1732
1,5	0,1761	0,1790	0,1818	0,1847	0,1875	0,1903	0,1931	0,1959	0,1987	0,2014
1,6	0,2041	0,2068	0,2095	0,2122	0,2148	0,2175	0,2201	0,2227	0,2253	0,2279
1,7	0,2304	0,2330	0,2355	0,2380	0,2405	0,2430	0,2455	0,2480	0,2504	0,2529
1,8	0,2553	0,2577	0,2601	0,2625	0,2648	0,2672	0,2695	0,2718	0,2742	0,2765
1,9	0,2788	0,2810	0,2833	0,2856	0,2878	0,2900	0,2923	0,2945	0,2967	0,2989
2,0	0,3010	0,3032	0,3054	0,3075	0,3096	0,3118	0,3139	0,3160	0,3181	0,3201
2,1	0,3222	0,3243	0,3263	0,3284	0,3304	0,3324	0,3345	0,3365	0,3385	0,3404
2,2	0,3424	0,3444	0,3464	0,3483	0,3502	0,3522	0,3541	0,3560	0,3579	0,3598
2,3	0,3617	0,3636	0,3655	0,3674	0,3692	0,3711	0,3729	0,3747	0,3766	0,3784

Ćwiczenie 2

Korzystając z tablicy logarytmów dziesiętnych, podaj przybliżoną wartość:

- a) $\log 2$, b) $\log 1,5$, c) $\log 1,78$, d) $\log 2,29$.

Przykład 1

Korzystając z tablicy logarytmów dziesiętnych, podaj przybliżoną wartość liczby $10^{0,356}$.

Zauważmy, że $\log 10^{0,356} = 0,356$. Zatem znajdujemy w tablicy liczbę 0,356 i odczytujemy, że $\log 2,27 \approx 0,356$, czyli $10^{0,356} \approx 2,27$.

Ćwiczenie 3

Odczytaj z tablicy logarytmów dziesiętnych przybliżoną wartość liczby:

- a) $10^{0,301}$, b) $10^{0,1761}$, c) $10^{0,0043}$, d) $10^{0,3522}$.

Przed wynalezieniem kalkulatorów tablice logarytmów były wykorzystywane do szybszego wykonywania obliczeń. Dzięki logarytmowaniu mnożenie zastępowano dodawaniem.

Przykład 2

Oblicz $1,22 \cdot 1,55$, korzystając z tablicy logarytmów dziesiętnych.

$$\begin{aligned} 1,22 \cdot 1,55 &\approx 10^{0,0864} \cdot 10^{0,1903} = && \text{Z tablicy odczytujemy:} \\ &= 10^{0,0864 + 0,1903} = 10^{0,2767} \approx && 1,22 \approx 10^{0,0864} \\ &\approx 1,89 && 1,55 \approx 10^{0,1903} \\ &&& 10^{0,2767} \approx 1,89 \end{aligned}$$

Zadania

1. Oblicz.

a) $\log 10^9 - \log 10^8$	d) $\log \frac{1}{100} + \log \frac{1}{1000}$	g) $\log \frac{\sqrt{10}}{10} - \log \frac{\sqrt[3]{10}}{10}$
b) $\log 100 + \log_4 \frac{1}{16}$	e) $\log_8 \frac{1}{64} + \log \sqrt[3]{10}$	h) $\log_{1,5} \frac{27}{8} - \log 1$
c) $\log 10^7 - \log_{0,5} 8$	f) $\log \sqrt[4]{10} - \log_3 \sqrt[4]{27}$	i) $\log_{\frac{2}{5}} 2,5 - \log \sqrt{10}$

2. Oblicz.

a) $\log_2(\log 10\,000)$	c) $\log_{\frac{1}{9}}(\log 1000)$	e) $\log_9(\log_8(\log 100))$
b) $\log_3(\log 1000)$	d) $\log_{\sqrt{2}}(\log 10\,000)$	f) $\log_8(\log_{\frac{1}{4}}(\log \sqrt{10}))$

3. Która z liczb jest większa: x czy y ?

a) $x = \log_2 32, y = \log 10^6$	d) $x = \log(\log 10), y = \log_{\frac{1}{2}} 2$
b) $x = \log 0,01, y = \log_2 \frac{1}{8}$	e) $x = \log_4(\log_2 16), y = \log 10\sqrt{10}$
c) $x = \log_8 2, y = \log \sqrt{10}$	f) $x = \log_{\frac{1}{4}}(\log 100), y = \log_{\sqrt{2}} 2$

4. Oblicz przybliżoną wartość sumy, korzystając z tablicy logarytmów dziesiętnych.

a) $10^{0,0792} + 10^{0,2553}$	b) $10^{0,5132} + 10^{0,8293}$	c) $10^{0,2989} + 10^{0,1732}$
--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------

Powtórzenie

5. Czy x jest liczbą całkowitą? Czy jest liczbą wymierną?

a) $x = \log 100$	c) $x = \log 10^{\frac{2}{3}}$	e) $x = \log 10\sqrt[3]{10}$
b) $x = \log \sqrt[3]{10}$	d) $x = \log 0,01$	f) $x = \log 10^{\sqrt{2}}$

6. Oblicz.

a) $\log_2(3 + \log 10)$	c) $\log_2(\log \sqrt{10})$	e) $\log_2 2^{100} - \log 100^{10}$
b) $\log_2(3 - \log 100)$	d) $\log_9(\log \sqrt[3]{10})$	f) $\log 10^5 + \log_{0,1} 100$

1.7. Logarytm iloczynu i logarytm ilorazu

Twierdzenie o logarytmie iloczynu

Jeżeli a , x i y są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Dowód

Niech a , x i y będą liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$. Niech $p = \log_a x$ oraz $q = \log_a y$, wtedy:

$$a^p = x \text{ i } a^q = y$$

Korzystamy z definicji logarytmu.

$$x \cdot y = a^p \cdot a^q$$

Korzystamy z własności działań na potęgach.

$$x \cdot y = a^{p+q}$$

$$\log_a(x \cdot y) = p + q$$

Korzystamy z definicji logarytmu.

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Twierdzenie o logarytmie ilorazu

Jeżeli a , x i y są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Ćwiczenie 1

Udowodnij twierdzenie o logarytmie ilorazu.

Przykład 1

a) Sprawdź, czy prawdziwa jest równość: $\log_2 96 = 5 + \log_2 3$.

$$\log_2 96 = \log_2(32 \cdot 3) = \log_2 32 + \log_2 3 = 5 + \log_2 3$$

b) Sprawdź, czy prawdziwa jest równość: $\log_3 \frac{7}{9} = \log_3 7 - 2$.

$$\log_3 \frac{7}{9} = \log_3 7 - \log_3 9 = \log_3 7 - 2$$

Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy równość jest prawdziwa.

a) $\log_2 6 = 1 + \log_2 3$

c) $\log_2 \frac{8}{3} = 3 - \log_2 3$

b) $\log 500 = 2 + \log 5$

d) $\log 0,07 = -2 + \log 7$

Przykład 2

Oblicz.

a) $\log 125 + \log 4 - \log 5 = \log \frac{125 \cdot 4}{5} = \log 100 = 2$

b) $\log_3 36 - \log_3 2 + \log_3 \frac{1}{6} = \log_3 \left(\frac{36}{2} \cdot \frac{1}{6} \right) = \log_3 3 = 1$

Ćwiczenie 3

Oblicz.

- a) $\log_6 4 + \log_6 9$ c) $\log_{\frac{1}{2}} 0,6 - \log_{\frac{1}{2}} 0,15$ e) $\log_5 0,04 - \log_5 0,008$
b) $\log_7 19 - \log_7 \frac{19}{49}$ d) $\log 6 - \log 2 - \log 3$ f) $\log \frac{7}{4} - \log 14 - \log 125$

Przykład 3

Przedstaw wyrażenie $3 + \log_2 7$ w postaci logarytmu o podstawie 2.

$$\begin{aligned} 3 + \log_2 7 &= \log_2 8 + \log_2 7 = \text{Zapisujemy 3 jako } \log_2 8. \\ &= \log_2(8 \cdot 7) = \log_2 56 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 4

Przedstaw wyrażenie w postaci logarytmu o podstawie a .

- a) $2 + \log_3 5$, $a = 3$ b) $\log_2 10 - 1$, $a = 2$ c) $4 - \log_3 36$, $a = 3$

Zadania

1. Oblicz.

- a) $\log_{12} 2 + \log_{12} 8 + \log_{12} 9$ c) $\log 0,12 - \log 0,3 + \log 25$
b) $\log_3 \frac{1}{12} + \log_3 \frac{14}{15} + \log_3 \frac{10}{21}$ d) $\log_{0,2} 0,3 - \log_{0,2} 0,5 - \log_{0,2} 15$

2. Wiadomo, że $\log 5 \approx 0,7$. Oblicz przybliżoną wartość:

- a) $\log 50$, b) $\log 500$, c) $\log 0,05$, d) $\log \frac{1}{5}$.

3. Wiadomo, że $\log_2 7 \approx 2,8$. Oblicz przybliżoną wartość:

- a) $\log_2 14$, b) $\log_2 28$, c) $\log_2 3,5$, d) $\log_2 \frac{7}{4}$.

4. Wiadomo, że $\log_5 2 \approx 0,43$, $\log_5 7 \approx 1,21$. Oblicz przybliżoną wartość:

- a) $\log_5 14$, b) $\log_5 70$, c) $\log_5 0,4$, d) $\log_5 0,7$.

5. Zapisz liczbę p w postaci $\log_a b$.

- a) $p = \log_2 5 + \log_2 6$ b) $p = \log_3 8 - \log_3 2$ c) $p = 1 + \log_4 3$

Powtórzenie

6. Oblicz.

- a) $\log_4 2 + \log_4 8$ c) $\log_{\frac{1}{8}} 3 + \log_{\frac{1}{8}} 2$ e) $\log_{15} 3 + \log_{15} 5$
b) $\log 2 + \log 50$ d) $\log_{0,1} 0,2 + \log_{0,1} 0,5$ f) $\log_{20} 100 + \log_{20} 4$

7. Oblicz.

- a) $\log_4 12 - \log_4 3$ c) $\log_6 72 - \log_6 2$ e) $\log_{\frac{1}{2}} 3,5 - \log_{\frac{1}{2}} 7$
b) $\log 8 + \log 125$ d) $\log_3 54 - \log_3 2$ f) $\log_5 15 - \log_5 75$

1.8. Logarytm potęgi

Twierdzenie o logarytmie potęgi

Jeżeli a i x są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to dla dowolnego $p \in \mathbf{R}$:

$$\log_a x^p = p \cdot \log_a x$$

Dowód

Niech a i x będą liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$. Niech $q = \log_a x$, wtedy z definicji logarytmu $x = a^q$, zatem:

$$x^p = (a^q)^p$$

$$x^p = a^{p \cdot q}$$

Korzystamy z własności działań na potęgach.

$$\log_a x^p = p \cdot q$$

Korzystamy z definicji logarytmu.

$$\log_a x^p = p \cdot \log_a x$$

Przykład 1

Niech x będzie taką liczbą, że $\log_2 x = 0,3$. Oblicz $\log_2 x^5$ i $\log_2 \frac{1}{x}$.

$$\log_2 x^5 = 5 \log_2 x = 5 \cdot 0,3 = 1,5$$

$$\log_2 \frac{1}{x} = \log_2 x^{-1} = -\log_2 x = -0,3$$

Ćwiczenie 1

Niech x będzie taką liczbą, że $\log x = \frac{1}{3}$. Oblicz:

a) $\log x^6$, b) $\log \frac{1}{x^3}$, c) $\log \sqrt{x}$, d) $\log \frac{1}{\sqrt{x^3}}$, e) $\log \frac{x^3}{\sqrt{x}}$.

Przykład 2

Przedstaw wyrażenie $3 \log_4 8 - 2$ w postaci logarytmu o podstawie 4.

$$3 \log_4 8 - 2 = \log_4 8^3 - \log_4 4^2 =$$

Zapisujemy 2 jako $\log_4 4^2$.

$$= \log_4 \frac{8^3}{4^2} = \log_4 (2 \cdot 2 \cdot 8) = \log_4 32$$

Ćwiczenie 2

Przedstaw wyrażenie w postaci logarytmu pewnej liczby.

a) $3 + \log_2 5$ b) $2 \log_3 4 - 1$ c) $3 \log_{\frac{1}{2}} 3 + 1$ d) $4 - 2 \log_3 6$

Przykład 3

Wiadomo, że $\log_2 5 \approx 2,32$. Oblicz przybliżoną wartość $\log_2 250$.

$$\begin{aligned} \log_2 250 &= \log_2 (2 \cdot 125) = \log_2 2 + \log_2 125 = 1 + \log_2 5^3 = 1 + 3 \log_2 5 \approx \\ &\approx 1 + 3 \cdot 2,32 = 7,96 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 3

Wiadomo, że $\log_3 2 \approx 0,63$. Oblicz przybliżoną wartość:

- a) $\log_3 4$, b) $\log_3 12$, c) $\log_3 96$, d) $\log_3 72$.

Zadania

1. Wiadomo, że $\log 2 \approx 0,3$. Oblicz przybliżoną wartość:

- a) $\log 4$, b) $\log 16$, c) $\log 0,04$, d) $\log 1600$.

2. Wiadomo, że $\log 4 \approx 0,6$ oraz $\log 5 \approx 0,7$. Oblicz przybliżoną wartość:

- a) $\log 25$, b) $\log 64$, c) $\log 0,64$, d) $\log 2,5$, e) $\log \frac{5}{4}$, f) $\log 20$.

D 3. Niech x będzie taką liczbą, że $\log_2 x = 0,4$. Uzasadnij, że:

- a) $\log_2 2x^2 = 1,8$, b) $\log_2 16x^3 = 5,2$, c) $\log_2 \frac{x^4}{2} = 0,6$.

4. Niech x będzie taką liczbą, że $\log_3 x = -\frac{1}{4}$. Oblicz:

- a) $\log_3 3x^2$, b) $\log_3 9x^8$, c) $\log_3 \frac{x^4}{81}$, d) $\log_3 27x^6$.

D 5. Niech $p = \log_2 3$ oraz $q = \log_2 5$. Uzasadnij poniższą równość.

- a) $\log_2 45 = 2p + q$ b) $\log_2 75 = p + 2q$ c) $\log_2 405 = 4p + q$

6. Wyraż liczbę a za pomocą p , jeśli $p = \log 2$.

- a) $a = \log 200$ b) $a = \log 0,02$ c) $a = \log 0,04$ d) $a = \log 1600$

D 7. Wykaż, że dla dowolnych $x, y \in \mathbf{R}_+$ podana równość jest prawdziwa.

- a) $\log \frac{x}{y} + \log \frac{y}{x} = 0$ c) $\log x^2 y - \log xy^2 = \log x - \log y$
b) $\log x^2 y^2 = 2 \log x + 2 \log y$ d) $\log x^3 y^4 - \log x^2 y^3 = \log x + \log y$

Powtórzenie

8. Dla jakiej liczby a prawdziwa jest poniższa równość?

- a) $\log_2 3^5 = a \log_2 3$ c) $\log_2 81 = a \log_2 3$ e) $\log_7 625 = a \log_7 5$
b) $\log_5 2^{100} = a \log_5 2$ d) $\log_5 32 = a \log_5 2$ f) $\log_{\frac{1}{2}} 64 = a \log_{\frac{1}{2}} 4$

9. Oblicz x .

- a) $\log_5 x = 3 \log_5 2$ c) $\log_{\frac{1}{2}} x = 3 \log_{\frac{1}{2}} 5$ e) $\log x = 2 \log \sqrt{2}$
b) $\log_7 x = 2 \log_7 3$ d) $\log_{\frac{1}{10}} x = 6 \log_{\frac{1}{10}} 10$ f) $\log x = 4 \log \sqrt{3}$

10. Wiadomo, że $\log 3 \approx 0,48$. Oblicz przybliżoną wartość:

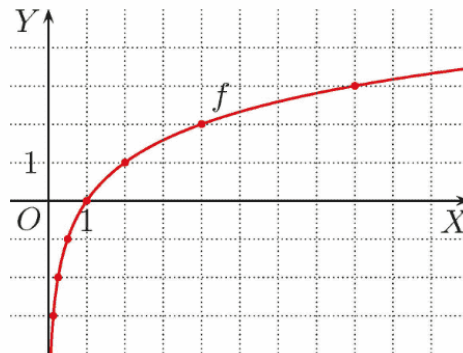
- a) $\log 9$, b) $\log 27$, c) $\log 0,9$, d) $\log 0,81$.

1.9. Funkcja logarytmiczna

Przykład 1

Jeśli każdej liczbie dodatniej x przyporządkujemy wartość $\log_2 x$, to otrzymamy funkcję $f(x) = \log_2 x$ określoną dla $x \in (0; \infty)$. Jej wykres przedstawiono na rysunku obok.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3



Definicja

Funkcję postaci $f(x) = \log_a x$ określoną dla $x \in (0; \infty)$, gdzie $a \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$ jest pewną stałą, nazywamy **funkcją logarytmiczną**.

Ćwiczenie 1

Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji:

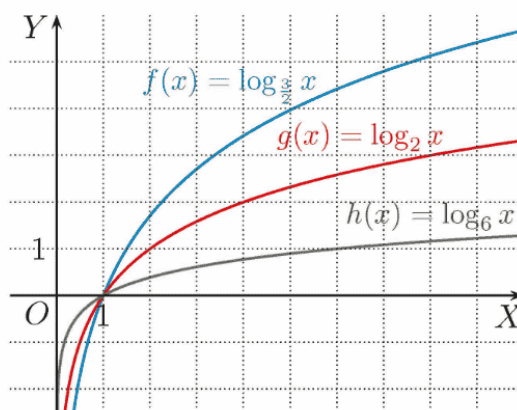
$$f(x) = \log_3 x \quad \text{oraz} \quad g(x) = \log_4 x$$

Podaj współrzędne punktu wspólnego tych wykresów.

Ćwiczenie 2

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = \log_{\frac{3}{2}} x$, $g(x) = \log_2 x$ oraz $h(x) = \log_6 x$. Do którego z tych wykresów należy punkt:

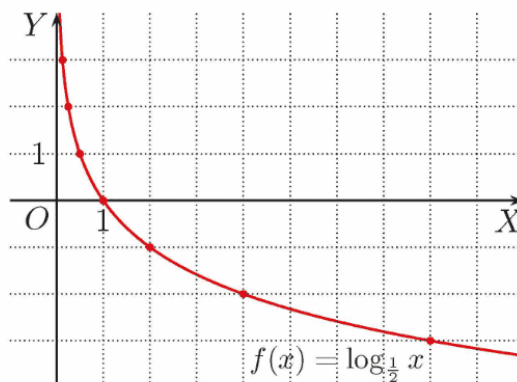
a) $(216, 3)$, b) $(2\frac{1}{4}, 2)$, c) $(1024, 10)$?



Przykład 2

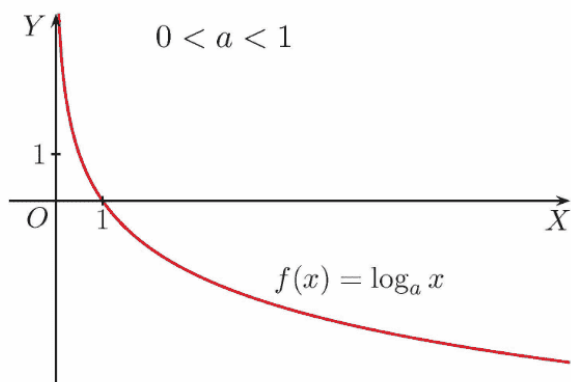
Wykres funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ określonej dla $x \in (0; \infty)$ szkicujemy, łącząc odpowiednie punkty krzywą jak na rysunku.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$	3	2	1	0	-1	-2	-3

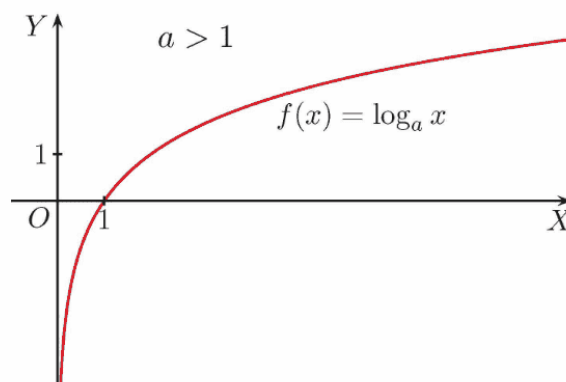


Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji: a) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, b) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$.



Dla $a \in (0; 1)$ funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x$ jest malejąca.



Dla $a \in (1; \infty)$ funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x$ jest rosnąca.

Dziedziną funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a x$ dla $a \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$ jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich, a jej zbiorem wartości – zbiór liczb rzeczywistych. Oś OY jest asymptotą pionową wykresu funkcji $f(x) = \log_a x$, a punkt $(1, 0)$ jest punktem przecięcia tego wykresu z osią OX .

Ćwiczenie 4

Dla jakich argumentów x funkcja $f(x) = \log_a x$ przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich ujemne, jeśli wiadomo, że: a) $a \in (1; \infty)$, b) $a \in (0; 1)$?

Przykład 3

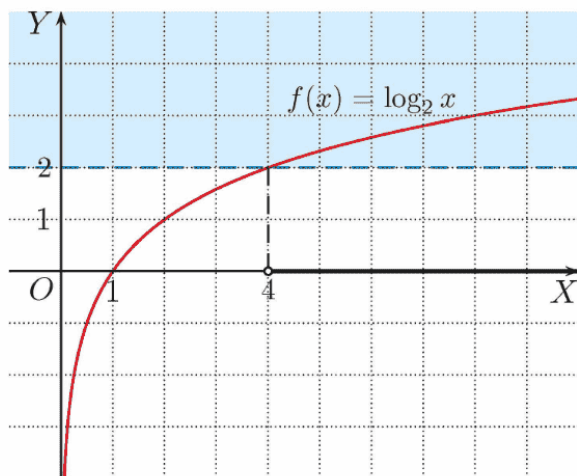
Rozwiąż nierówność $\log_2 x > 2$.

Zakładamy, że $x > 0$.

$$\log_2 x > \log_2 4 \quad 2 = \log_2 4$$

$$x > 4, \text{ czyli } x \in (4; \infty)$$

Nie zmieniamy zwrotu nierówności, ponieważ funkcja $f(x) = \log_2 x$ jest rosnąca.



Przykład 4

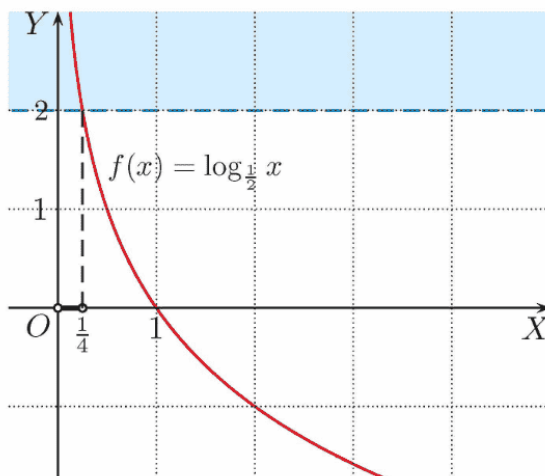
Rozwiąż nierówność $\log_{\frac{1}{2}} x > 2$.

Zakładamy, że $x > 0$.

$$\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} \quad 2 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$$

$$x < \frac{1}{4}, \text{ czyli } x \in (0; \frac{1}{4})$$

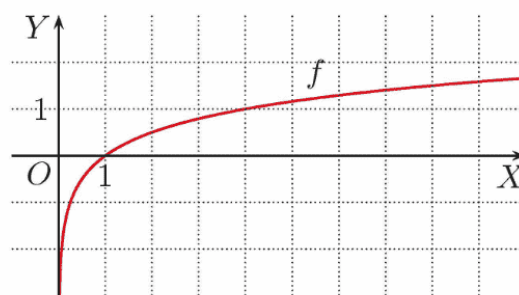
Zmieniamy zwrot nierówności, ponieważ funkcja $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ jest malejąca.



Ćwiczenie 5

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \log_4 x$. Podaj rozwiązanie nierówności.

- a) $\log_4 x \geq 1$ c) $\log_4 x > \frac{3}{2}$
b) $\log_4 x < 1$ d) $\log_4 x \leq \frac{3}{2}$



Ćwiczenie 6

Naszkicuj odpowiedni wykres i podaj rozwiązanie nierówności.

- a) $\log_3 x > 1$ c) $\log_3 x \geq -2$ e) $\log_{\frac{1}{3}} x \geq -1$ g) $\log_{\frac{1}{3}} x < 2$
b) $\log_3 x \leq 1$ d) $\log_3 x > 2$ f) $\log_{\frac{1}{3}} x < 1$ h) $\log_{\frac{1}{3}} x \geq 2$

Zadania

1. Czy punkt P należy do wykresu funkcji $f(x) = \log_2 x$ lub $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$?

- a) $P(\frac{1}{8}, 3)$ b) $P(\frac{1}{16}, -4)$ c) $P(2\sqrt{2}, \frac{3}{2})$ d) $P(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$

2. Dla jakiej wartości a punkt P należy do wykresu funkcji $f(x) = \log_a x$?

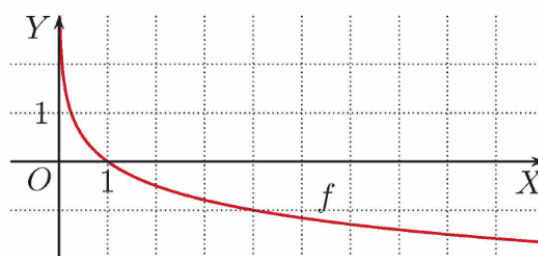
- a) $P(27, 3)$ b) $P(625, 4)$ c) $P(32, -5)$ d) $P(4, 4)$

3. Podaj zbiór wartości funkcji f o dziedzinie D_f .

- a) $f(x) = \log_3 x, D_f = \langle \frac{1}{3}; 1 \rangle$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x, D_f = \langle \frac{1}{2}; 8 \rangle$
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x, D_f = \langle \frac{1}{9}; 27 \rangle$ d) $f(x) = \log_8 x, D_f = \langle \frac{1}{2}; \sqrt{2} \rangle$

4. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$. Podaj rozwiązanie nierówności.

- a) $\log_{\frac{1}{4}} x \leq 1$ c) $\log_{\frac{1}{4}} x \geq -1$
b) $\log_{\frac{1}{4}} x \geq 8$ d) $\log_{\frac{1}{4}} x < -\frac{1}{2}$



5. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_2 x$ i podaj rozwiązanie nierówności.

- a) $-2 \leq \log_2 x \leq 1$ b) $-3 < \log_2 x < -1$

6. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ i podaj rozwiązanie nierówności.

- a) $-1 < \log_{\frac{1}{2}} x \leq 2$ b) $-2 \leq \log_{\frac{1}{2}} x < 1$

7. Określ monotoniczność funkcji f .

- a) $f(x) = \log_{\sqrt{5}} x$ b) $f(x) = \log_{\sqrt{5}-1} x$ c) $f(x) = \log_{\sqrt{2}-1} x$

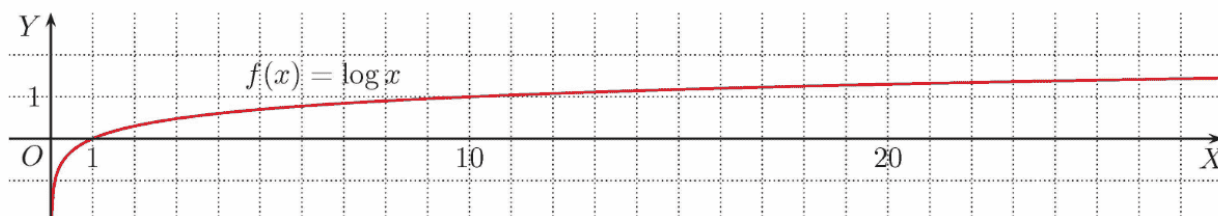
8. Dla jakich wartości parametru m funkcja f jest rosnąca?

a) $f(x) = \log_{2m} x$ b) $f(x) = \log_{\frac{m}{4}} x$ c) $f(x) = \log_{m+1} x$

9. Dla jakich wartości parametru m funkcja f jest malejąca?

a) $f(x) = \log_{3m} x$ b) $f(x) = \log_{\frac{m}{2}} x$ c) $f(x) = \log_{m+2} x$

10. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \log x$.



Dla jakich argumentów x spełniona jest podana nierówność?

a) $\log x > 1$ b) $\log x > 2$ c) $\log x > 3$ d) $\log x > 6$

11. Rozwiąż nierówność.

a) $|\log x| \leq 1$ b) $|\log x| \leq 4$ c) $\log^2 x \leq 4$ d) $\log^2 x \leq 9$

Uwaga. Zamiast $(\log_a x)^2$ piszemy $\log_a^2 x$.

12. Rozwiąż nierówność.

a) $|\log_4 x| \leq 1$ b) $|\log_4 x| > 1$ c) $\log_4^2 x \leq 4$ d) $\log_4^2 x \geq 4$

Powtórzenie

13. Korzystając z monotoniczności odpowiedniej funkcji logarytmicznej, uporządkuj liczby x, y, z w kolejności rosnącej.

a) $x = 2 \log_3 2, y = \frac{1}{3} \log_3 27, z = \log_3 \frac{7}{2}$

b) $x = \frac{3}{4} \log_{\frac{1}{3}} 16, y = \frac{2}{3} \log_{\frac{1}{3}} 8, z = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} 80$

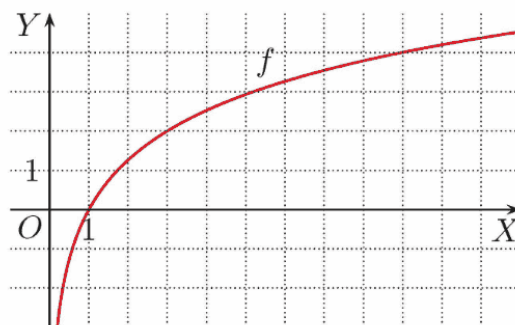
14. Podaj zbiór wartości funkcji $f(x) = \log_2 x$ o dziedzinie D_f .

a) $D_f = (0; 1)$ b) $D_f = \langle 2; \infty \rangle$ c) $D_f = \langle \frac{1}{2}; 8 \rangle$ d) $D_f = \langle \frac{\sqrt{2}}{2}; 1024 \rangle$

15. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \log_{\sqrt{3}} x$. Podaj cztery punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu tej funkcji. Rozwiąż nierówność.

a) $\log_{\sqrt{3}} x > 2$ c) $\log_{\sqrt{3}} x < 4$

b) $\log_{\sqrt{3}} x \leq 2$ d) $\log_{\sqrt{3}} x \geq 4$



Skala logarytmiczna

Gdy porównujemy wielkości fizyczne, które przyjmują wartości z szerokiego zakresu, wygodniej jest porównywać ich logarytmy. W ten sposób powstaje **skala logarytmiczna**, na której w równych odstępach umieszczone są logarytmy wartości tych wielkości fizycznych.

Dźwięk

Natężenie dźwięku i poziom natężenia dźwięku to wielkości fizyczne związane z falą dźwiękową. Zachodzi między nimi zależność:

$$L = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$$

gdzie:

I – natężenie badanej fali dźwiękowej w watach na metr kwadratowy (W/m^2),

$I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ – próg słyszalności (dolna granica zakresu słyszalności dla częstotliwości 1000 Hz),

L – poziom natężenia dźwięku.

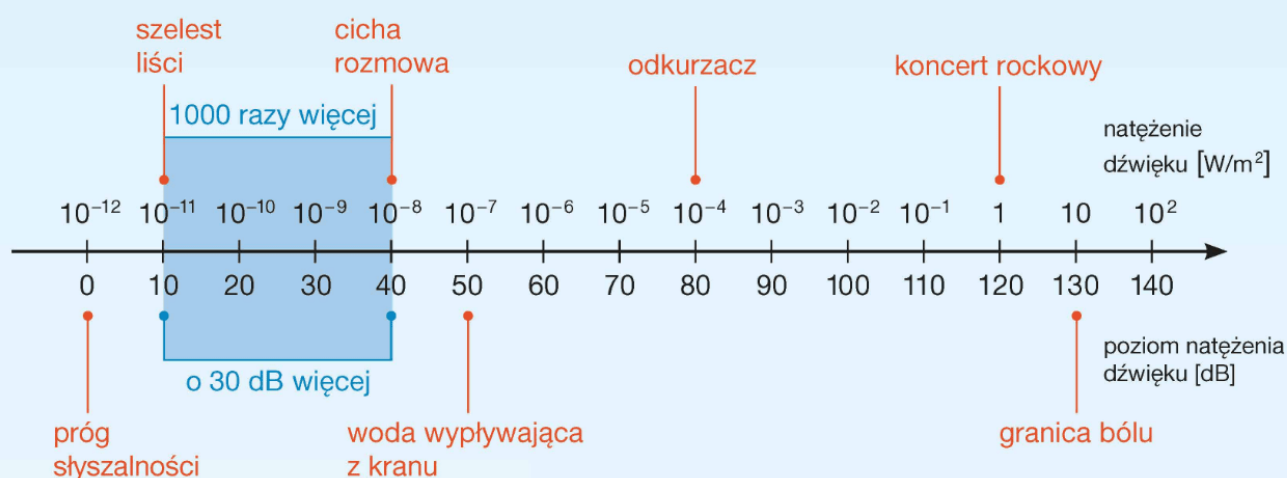
Poziom natężenia dźwięku podawany jest w **decybelach** (dB).

Na przykład jeżeli podczas koncertu rockowego natężenie dźwięku jest równe 1 W/m^2 , to poziom natężenia dźwięku wynosi:

$$L = 10 \cdot \log \frac{1}{10^{-12}} = 10 \cdot \log 10^{12} = 10 \cdot 12 = 120 \text{ [dB]}$$



Na osi poniżej pokazano natężenia dźwięków z różnych źródeł (skala liniowa) i odpowiadające im poziomy natężenia dźwięków (skala logarytmiczna). Zwróć uwagę, że wzrost poziomu natężenia dźwięku o 30 dB oznacza tysiąckrotny wzrost natężenia tego dźwięku.



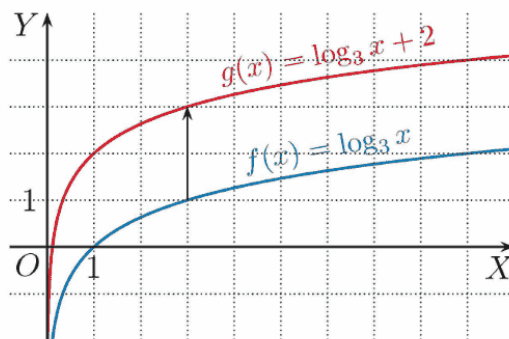
1 O ile decybeli wzrośnie poziom natężenia dźwięku, jeżeli natężenie dźwięku wzrośnie dwukrotnie?

1.10. Przekształcenia wykresu funkcji logarytmicznej

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \log_3 x + 2$.

Wykres funkcji g możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \log_3 x$ o 2 jednostki w górę. Dziedziną funkcji g jest zbiór $D_g = (0; \infty)$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = 0$.



Ćwiczenie 1

Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji:

$$f(x) = \log_2 x, \quad g(x) = \log_2 x + 1, \quad h(x) = \log_2 x - 3$$

Podaj wartości każdej z tych funkcji dla $x \in \{\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8\}$.

Ćwiczenie 2

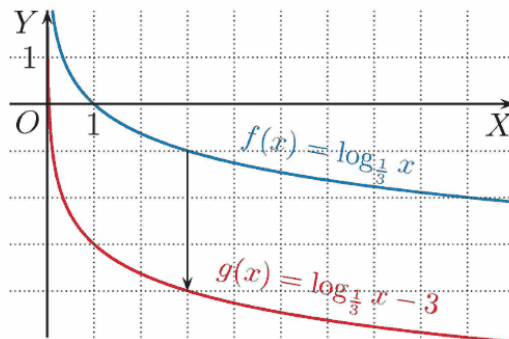
Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g .

a) $f(x) = \log_3 x - 1, \quad g(x) = \log_3 x + 1$ b) $f(x) = \log_4 x - 3, \quad g(x) = \log_4 x + 3$

Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x - 3$.

Wykres funkcji g możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ o 3 jednostki w dół. Dziedziną funkcji g jest zbiór $D_g = (0; \infty)$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = 0$.



Ćwiczenie 3

Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji:

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x, \quad g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 2, \quad h(x) = \log_{\frac{1}{2}} x - 4$$

Podaj, dla jakich argumentów funkcje te przyjmują wartości nieujemne.

Ćwiczenie 4

Punkt P należy do wykresu funkcji f . Wyznacz współczynnik a i naszkicuj wykres funkcji f .

a) $f(x) = \log_3 x + a, \quad P(3, 2)$

c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x + a, \quad P(3, -3)$

b) $f(x) = \log_4 x + a, \quad P(4, -1)$

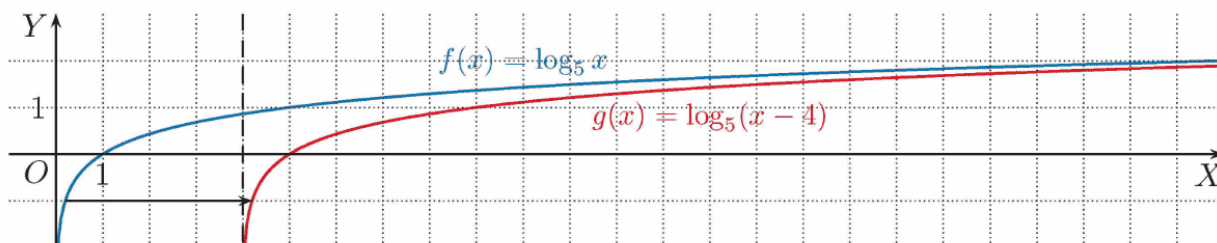
d) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x + a, \quad P(4, 0)$

Przykład 3

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \log_5(x - 4)$.

Wykres funkcji g możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \log_5 x$ o 4 jednostki w prawo.

Dziedziną funkcji g jest zbiór $D_g = (4; \infty)$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = 4$. Miejscem zerowym funkcji g jest liczba 5.



Ćwiczenie 5

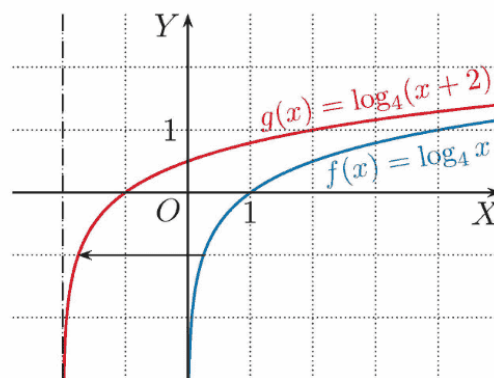
Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Wyznacz miejsce zerowe tej funkcji oraz równanie asymptoty pionowej jej wykresu.

- a) $f(x) = \log_2(x - 1)$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 2)$ e) $f(x) = \log_3(x - 2)$
b) $f(x) = \log_2(x - 3)$ d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 4)$ f) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x - 1)$

Przykład 4

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \log_4(x + 2)$.

Wykres funkcji g możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \log_4 x$ o 2 jednostki w lewo. Dziedziną funkcji g jest zbiór $D_g = (-2; \infty)$, a asymptotą pionową jej wykresu – prosta $x = -2$. Miejscem zerowym funkcji g jest liczba -1 .



Ćwiczenie 6

Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Wyznacz miejsce zerowe tej funkcji oraz równanie asymptoty pionowej jej wykresu. Odczytaj z rysunku zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq 1$.

- a) $f(x) = \log_2(x + 1)$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 1)$ e) $f(x) = \log_3(x + 2)$
b) $f(x) = \log_2(x + 2)$ d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 4)$ f) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x + 3)$

Ćwiczenie 7

Punkt P należy do wykresu funkcji $f(x) = \log_2(x + a)$. Wyznacz a .

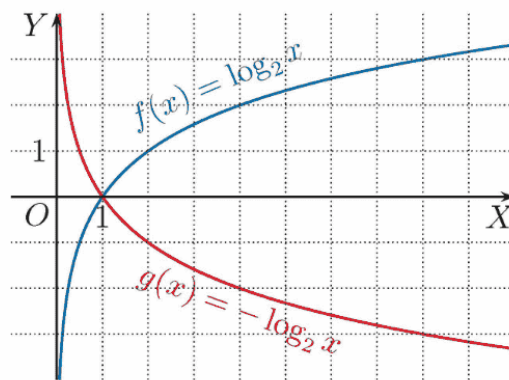
- a) $P(-5, 0)$ b) $P(-2, 1)$ c) $P(-\frac{1}{2}, -1)$

Przykład 5

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = -\log_2 x$.

Wykres funkcji g możemy otrzymać przez odbicie symetryczne względem osi OX wykresu funkcji $f(x) = \log_2 x$.

Dziedziną funkcji f i g jest zbiór $(0; \infty)$. Asymptotą pionową ich wykresów jest oś OY . Zwróć uwagę, że: $-\log_2 x = \log_{\frac{1}{2}} x$.



Ćwiczenie 8

Określ dziedziny funkcji f i g oraz naszkicuj ich wykresy w jednym układzie współrzędnych.

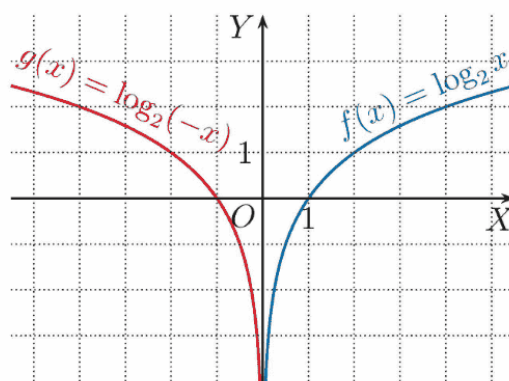
- a) $f(x) = \log_3 x$, $g(x) = -\log_3 x$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$, $g(x) = -\log_{\frac{1}{4}} x$

Przykład 6

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \log_2(-x)$.

Wykres funkcji g możemy otrzymać przez odbicie symetryczne względem osi OY wykresu funkcji $f(x) = \log_2 x$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (0; \infty)$, a funkcji g – zbiór $D_g = (-\infty; 0)$. Asymptotą pionową ich wykresów jest oś OY .



Ćwiczenie 9

Określ dziedziny funkcji f i g oraz naszkicuj ich wykresy w jednym układzie współrzędnych.

- a) $f(x) = \log_3 x$, $g(x) = \log_3(-x)$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$

Zadania

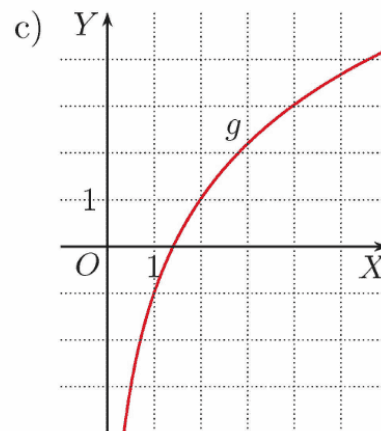
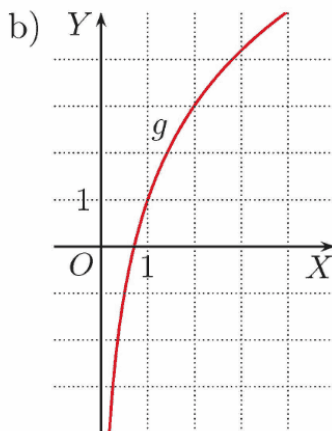
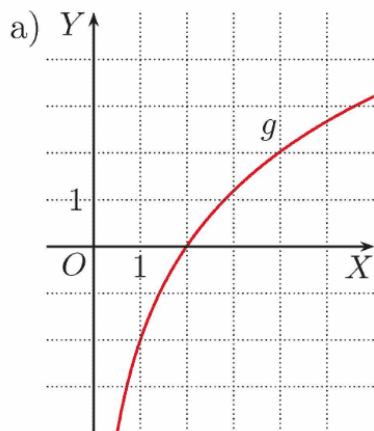
1. Naszkicuj wykres funkcji f . Wyznacz jej miejsce zerowe.

- a) $f(x) = \log_2 x - 2$ c) $f(x) = \log_3 x + 1$ e) $f(x) = \log_4 x - 2$
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 1$ d) $f(x) = \log_3 x - 2$ f) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x + 2$

2. Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres. Podaj równanie asymptoty pionowej tego wykresu.

- a) $f(x) = \log_2(x + 3)$ c) $f(x) = \log_3(x - 1)$ e) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 2)$
b) $f(x) = \log_2(x - 4)$ d) $f(x) = \log_3(x + 2)$ f) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x - 3)$

3. Przedstawiony na rysunku wykres funkcji g można otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \log_{\sqrt{2}} x$ wzdłuż osi OY . Podaj wzór funkcji g i wyznacz jej miejsce zerowe.



4. Określ dziedzinę funkcji f i naskicuj jej wykres. Podaj zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne.

a) $f(x) = \log_2(x+1) - 2$

d) $f(x) = \log_3(x+3) - 1$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-1) - 1$

e) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+4) + 1$

c) $f(x) = \log_3(x-2) + 3$

f) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x-1) - 3$

5. Określ dziedzinę funkcji f i naskicuj jej wykres. Podaj jej miejsce zerowe.

a) $f(x) = -\log_3 x - 1$

c) $f(x) = 2 - \log_2 x$

b) $f(x) = -\log_{\frac{1}{2}} x + 2$

d) $f(x) = -1 - \log_{\frac{1}{3}} x$

6. Określ dziedzinę funkcji f i naskicuj jej wykres. Podaj jej miejsce zerowe.

a) $f(x) = \log_2(-x) + 1$

c) $f(x) = \log_3(-x) - 2$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(-x) - 1$

d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-x) + 3$

Powtórzenie

7. Określ dziedzinę funkcji f i naskicuj jej wykres. Podaj równanie asymptoty pionowej wykresu tej funkcji.

a) $f(x) = \log_2(x-2) + 1$

d) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x+3) + 2$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-1) - 2$

e) $f(x) = \log_4(x-1) - 3$

c) $f(x) = \log_3(x+2) - 1$

f) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}}(x+2) - 2$

8. Naskicuj wykresy funkcji $g(x) = f(x+1)$ i $h(x) = g(-x)$. Podaj dziedziny tych funkcji.

a) $f(x) = \log_2 x$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

1.11. Funkcje wykładnicza i logarytmiczna – zastosowania

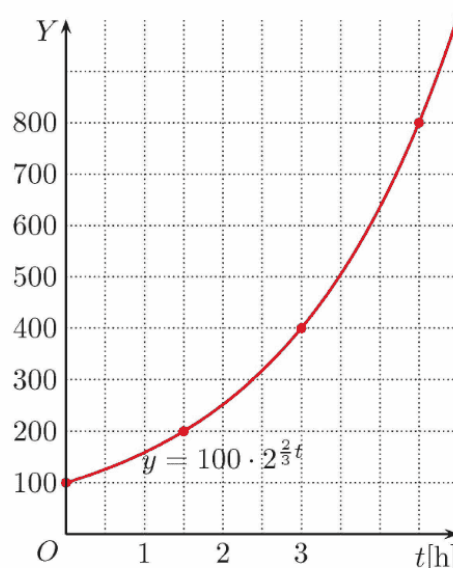
■ Wzrost wykładniczy

Przykład 1

Pewne doświadczenie polegało na badaniu wzrostu liczebności kolonii bakterii. Na początku doświadczenia było 100 bakterii. Stwierdzono, że liczba bakterii podwaja się w ciągu półtorej godziny. Przyjmuje się, że liczbę bakterii, w zależności od czasu t mierzonego w godzinach, wyraża wzór:

$$y = y_0 \cdot a^t$$

w którym y_0 jest początkową liczbą bakterii, natomiast a jest pewną stałą. Aby wyznaczyć a , zauważmy, że dla $t = 1,5$ zachodzi równość $200 = 100 \cdot a^{1,5}$. Stąd $a = 2^{\frac{2}{3}} \approx 1,588$.



Ćwiczenie 1

Po dwóch godzinach od rozpoczęcia pewnego doświadczenia liczba bakterii była równa 1200, a po sześciu godzinach wzrosła do 10 800. Liczbę bakterii, w zależności od czasu t mierzonego w godzinach, wyraża wzór:

$$y = y_0 \cdot a^t$$

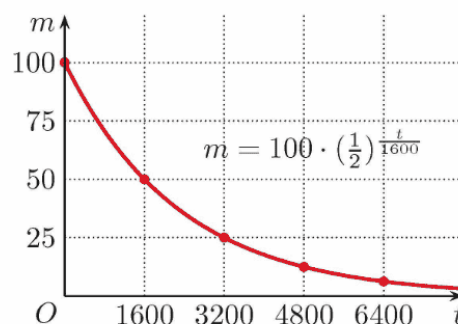
w którym y_0 jest początkową liczbą bakterii, natomiast a jest pewną stałą. Oblicz, ile było bakterii na początku doświadczenia, a ile po 10 godzinach.

■ Rozpad promieniotwórczy

Wzór $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ opisuje masę próbki promieniotwórczego izotopu o okresie połowicznego rozpadu T , po upływie czasu t (m_0 oznacza masę początkową próbki).

Na przykład okres połowicznego rozpadu radu-226 jest równy 1600 lat. Jeśli masa początkowa m_0 próbki tego izotopu była równa 100 mg, to po upływie t lat masa dana jest za pomocą wzoru:

$$m = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}$$



Uwaga. Czas t powinien być podany w tych samych jednostkach co okres połowicznego rozpadu T (w tym przypadku jest podany w latach).

Ćwiczenie 2

Po jakim czasie z próbki radu-226:

- a) o masie 100 mg zostanie 12,5 mg tego izotopu,
- b) o masie 10,24 mg zostanie 0,01 mg tego izotopu?

Ćwiczenie 3

Okres połowicznego rozpadu strontu-90 jest równy 28 lat. Po jakim czasie początkowa masa próbki tego izotopu zmniejszy się o 75%, a po jakim czasie o 87,5%?

W żyjącym organizmie (roślinnym lub zwierzęcym) stosunek ilości radioaktywnego izotopu węgla ^{14}C do izotopu nieradioaktywnego ^{12}C wynosi około $1,5 \cdot 10^{-12}$. Po śmierci organizmu ilość radioaktywnego izotopu ^{14}C maleje (okres jego połowicznego rozpadu wynosi około 5700 lat), a ilość izotopu ^{12}C pozostaje niezmienną. Podczas prac archeologicznych pomiar zawartości izotopu ^{14}C może więc stanowić podstawę określenia wieku znalezisk.

Przykład 2

Oblicz przybliżony wiek znaleziska, w którym zmierzona zawartość izotopu ^{14}C jest równa 66% początkowej zawartości tego izotopu.

Korzystamy ze wzoru: $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$,
gdzie $T = 5700$ lat.

$m = 0,66m_0$, zatem otrzymujemy:

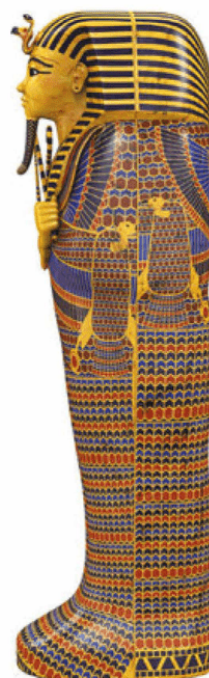
$$0,66 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$$

$$\log 0,66 = \log \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$$

$$\log 0,66 = \frac{t}{5700} \log 0,5$$

$$t = 5700 \cdot \frac{\log 0,66}{\log 0,5} \approx 3417$$

Znalezisko ma około 3417 lat.



Ćwiczenie 4

Oblicz przybliżony wiek znaleziska, w którym zmierzona zawartość izotopu ^{14}C jest mniejsza od zawartości początkowej o: a) 50%, b) 75%.

Ćwiczenie 5

W pewnym znalezisku stosunek ilości izotopu węgla ^{14}C do izotopu ^{12}C wynosi $1,875 \cdot 10^{-13}$. Oblicz przybliżony wiek znaleziska.

Zadania

1. W laboratorium obserwowano wzrost liczebności kolonii bakterii, która co pół godziny zwiększała się o 25%. Doświadczenie rozpoczęło się o godzinie 9.00, a o 10.00 populacja liczyła 10^5 organizmów. Wyznacz początkową liczbę bakterii y_0 i współczynnik a , jeśli wzór $y = y_0 \cdot a^t$ opisuje liczbę bakterii y po upływie czasu t . Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij (zastosuj notację wykładniczą).

Godzina	9.00	9.30	9.45	10.00	10.30	11.45	12.00
Liczba bakterii	?	?	?	10^5	?	?	?

2. a) Oblicz okres połowicznego rozpadu jodu-131, jeśli wiadomo, że z próbki o masie 4,8 g po szesnastu dniach zostało 1,2 g.
b) Po siedmiu dniach z 40 g neptunu-239 zostało 5 g tego izotopu. Oblicz okres jego połowicznego rozpadu.



3. Jednym z radioaktywnych odpadów w elektrowniach jądrowych jest pluton-239. Oblicz okres połowicznego rozpadu tego izotopu, jeśli wiadomo, że po 100 000 lat jego masa zmniejsza się o 75%.



4. Oblicz przybliżony wiek znaleziska, w którym zmierzona zawartość izotopu ^{14}C jest mniejsza od zawartości początkowej o: a) 20%, b) 80%.



5. Oblicz, ile procent początkowej zawartości izotopu ^{14}C znajduje się w:
a) egipskiej mumii mającej 3330 lat, b) kości mającej 17 000 lat.

Powtórzenie

6. W tabeli podano, jaka część masy promieniotwórczego izotopu pozostała po upływie czasu T , $2T$, $3T$, $4T$, $5T$, $6T$, gdzie T to okres połowicznego rozpadu. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

Upływ czasu	Ułamek	Procent
T	$\frac{1}{2}$	50
$2T$	$\frac{1}{4}$	?
$3T$	$\frac{1}{8}$	?
$4T$	?	6,25
$5T$	$\frac{1}{32}$	3,125
$6T$	?	?

7. W laboratorium obserwowano szybkość namnażania się pewnej bakterii. Badana kolonia liczyła początkowo 1000 organizmów.

Funkcja $y = 1000 \cdot (\sqrt[3]{2})^t$ opisuje liczbę bakterii po czasie t (w godzinach) od rozpoczęcia obserwacji. Oblicz $y(1)$ i $y(2)$. Po jakim czasie od rozpoczęcia obserwacji liczba bakterii się podwoiła?

1.12. Zagadnienia uzupełniające

Zmiana podstawy logarytmu

Twierdzenie o zmianie podstawy logarytmu

Jeśli a, b, x są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1, b \neq 1$, to $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$.

Przykład 1

a) Przedstaw $\log_4 9$ w postaci logarytmu o podstawie 2.

$$\log_4 9 = \frac{\log_2 9}{\log_2 4} = \frac{\log_2 9}{2} = \frac{1}{2} \log_2 9 = \log_2 9^{\frac{1}{2}} = \log_2 3$$

b) Przedstaw $\log_4 9$ w postaci logarytmu o podstawie 0,25.

$$\log_4 9 = \frac{\log_{0,25} 9}{\log_{0,25} 4} = \frac{\log_{0,25} 9}{-1} = -\log_{0,25} 9 = \log_{0,25} 9^{-1} = \log_{0,25} \frac{1}{9}$$

1. Przedstaw wyrażenie w postaci logarytmu o podstawie 2.

a) $\log_{16} 3$

c) $\log_{\sqrt{2}} 11$

e) $\log_4 6 + \log_8 6$

b) $\log_{0,5} 7$

d) $\log_{\frac{1}{8}} 9$

f) $\log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_{\frac{1}{4}} 3 + \log_{0,125} 3$

2. Przedstaw podany logarytm w postaci logarytmu o podstawie c .

a) $\log_{0,1} 7, c = 10$

c) $\log_7 11, c = 49$

e) $\log_2 6, c = \frac{1}{2}$

b) $\log_8 3, c = 2$

d) $\log 625, c = 0,1$

f) $\log_{\frac{1}{3}} 12, c = 3$

D 3. Wykaż, że podana równość jest prawdziwa.

a) $\log_2 25 + \log_4 25 = \log_2 125$

c) $\log_3 4 + \log_9 4 = \log_{\frac{1}{3}} 0,125$

b) $\log_{0,1} 4 + \log_{0,01} 16 = \log \frac{1}{16}$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 9 + \log_4 9 = \log_2 \frac{1}{3}$

4. Wyraż liczbę a za pomocą p , jeśli $p = \log_3 2$.

a) $a = \log_9 2$

c) $a = \log_{\sqrt{3}} 4$

e) $a = \log_{\frac{1}{3}} 18$

g) $a = \log_{27} \frac{1}{48}$

b) $a = \log_{\frac{1}{27}} 2$

d) $a = \log_{81} \sqrt{2}$

f) $a = \log_{\sqrt[3]{3}} 6$

h) $a = \log_{3\sqrt{3}} \frac{\sqrt{2}}{2}$

5. Oblicz x .

a) $\log_4 x = \log_{64} 125$

c) $\log_4 x = \log_8 27$

b) $\log_4 x = \log_{\sqrt{2}} 3$

d) $\log_4 x = \log_{2\sqrt{2}} 10^5$

D 6. Uzasadnij, że jeśli $a > 0, b > 0$ oraz $a \neq 1, b \neq 1$, to prawdziwy jest wzór:

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

Większość kalkulatorów naukowych jest wyposażona jedynie w dwa klawisze umożliwiające obliczanie logarytmów: **LOG** – dla logarytmu dziesiętnego oraz **LN** – dla logarytmu naturalnego (czyli takiego, którego podstawą jest niewymierna liczba e o przybliżonej wartości 2,718281828). Jeśli chcemy użyć kalkulatora do obliczenia logarytmu o innej podstawie, najpierw korzystamy ze wzoru na zmianę podstawy logarytmu.



Przykład 2

Korzystając z odpowiedniego kalkulatora, oblicz wartość $\log_3 5$ z dokładnością do trzech miejsc po przecinku.

Korzystamy z twierdzenia o zmianie podstawy logarytmu:

$$\log_3 5 = \frac{\log 5}{\log 3} \approx \frac{0,69897}{0,47712} \approx 1,465$$

7. Oblicz wartość logarytmu z dokładnością do trzech miejsc po przecinku. Skorzystaj z tablic logarytmów dziesiętnych (str. 230–231) lub odpowiedniego kalkulatora.
- | | | | |
|---------------|---------------|-------------------|----------------|
| a) $\log_2 9$ | c) $\log_6 3$ | e) $\log_{0,5} 9$ | g) $\log_3 12$ |
| b) $\log_3 7$ | d) $\log_4 5$ | f) $\log_{0,4} 6$ | h) $\log_4 20$ |

Skala Richtera

Jednym z przykładów skali logarytmicznej (str. 36) jest **skala Richtera**, opublikowana w 1935 roku przez amerykańskiego geofizyka Charlesa Richtera [czyt. czarlsa richtera] (1900–1985). Służy ona do określania siły trzęsień ziemi. Miarą tej siły jest liczba $R = \log \frac{A}{A_0}$, gdzie A oznacza amplitudę trzęsienia wyrażoną w centymetrach, a $A_0 = 10^{-4}$ cm jest stałą nazywaną amplitudą wzorcową (drgania niewyczuwalne przez człowieka). Liczbę R wyraża się w stopniach skali Richtera.

8. a) W Nepalu 25 kwietnia 2015 roku miało miejsce trzęsienie ziemi o sile 7,8 stopnia w skali Richtera. Oblicz amplitudę tego trzęsienia ziemi.
- b) W południowych Chinach 20 kwietnia 2013 roku odnotowano trzęsienie ziemi o sile 6,6 stopnia w skali Richtera. Oblicz, ile razy większą amplitudę drgań miało to trzęsienie ziemi od amplitudy najsilniejszego ze wstrząsów wtórnych, który miał siłę 5,1 stopnia.

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Oblicz.

a) 4^{-3}

c) $(-\frac{1}{2})^{-3}$

e) $\frac{2^3 \cdot 2^4}{2^5}$

g) $\frac{3^6 \cdot 9}{3^5}$

b) 3^{-4}

d) $(\frac{3}{4})^{-2}$

f) $\frac{5^4 \cdot 5^{-2}}{5^3}$

h) $\frac{6^4 \cdot 36^{-1}}{6^{-1}}$

2. Oblicz.

a) $8^{\frac{1}{3}} + 9^{\frac{1}{2}}$

c) $4^{-\frac{1}{2}} + 27^{-\frac{1}{3}}$

e) $27^{\frac{2}{3}} + 32^{\frac{2}{5}}$

g) $(\frac{9}{4})^{\frac{3}{2}} - (\frac{81}{16})^{\frac{3}{4}}$

b) $64^{\frac{1}{6}} - 64^{\frac{1}{2}}$

d) $16^{-\frac{1}{4}} + 16^{-\frac{1}{2}}$

f) $25^{\frac{3}{2}} - 8^{-\frac{2}{3}}$

h) $(\frac{64}{125})^{\frac{2}{3}} + (\frac{4}{25})^{\frac{1}{2}}$

3. Oblicz.

a) $3^{\frac{5}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}$

c) $81^{\frac{3}{4}} : 81^{\frac{1}{2}}$

e) $2^{\frac{2}{5}} \cdot 8^{\frac{1}{5}}$

g) $4^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{3}}$

b) $5^{-\frac{5}{4}} \cdot 5^{\frac{4}{3}}$

d) $9^{\frac{1}{3}} : 9^{-\frac{1}{6}}$

f) $5^{-\frac{2}{7}} : 25^{-\frac{1}{7}}$

h) $9^{\frac{3}{10}} : 27^{-\frac{4}{5}}$

4. Zapisz liczbę w postaci a^x , gdzie $a \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{Q}$.

a) $5\sqrt{5}$

c) $125\sqrt[3]{5}$

e) $16\sqrt{8}$

g) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$

b) $49\sqrt{7}$

d) $5\sqrt[3]{25}$

f) $8\sqrt[3]{16}$

h) $\frac{\sqrt[3]{2}}{2\sqrt{2}}$

5. Zapisz liczby w kolejności od największej do najmniejszej.

a) $4^{\frac{\sqrt{3}}{2}}, 8^{\frac{1}{2}}, 16^{\frac{\sqrt{2}}{4}}, 32^{\frac{\pi}{10}}, 256^{\frac{1}{4}}$

b) $(\frac{1}{3})^{3\sqrt{2}}, (\frac{1}{9})^{2,6}, (\frac{1}{27})^{\frac{3}{2}}, (\frac{1}{81})^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{243}$

6. Która z liczb jest większa: x czy y ?

a) $x = (\frac{\sqrt{3}}{2})^{-4}, y = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2}$

b) $x = (\frac{2^6}{6^3})^{-\frac{2}{3}}, y = (\sqrt[3]{1,6})^6$

7. Podaj konieczne założenia, a następnie uprość wyrażenie.

a) $\frac{(4x)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{x}}$

b) $\frac{(64x)^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{x^2}}{x^2}$

c) $\frac{\sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt{x}}{x^{\frac{1}{3}}}$

d) $\frac{\sqrt[3]{x^6} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}$

8. Naskicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g . Odczytaj z rysunku rozwiązanie równania $f(x) = g(x)$.

a) $f(x) = 3^x, g(x) = 4x + 1$

c) $f(x) = (\frac{1}{3})^x, g(x) = x + 4$

b) $f(x) = 2^x, g(x) = \frac{3}{2}x + 1$

d) $f(x) = (\frac{1}{4})^x, g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{17}{4}$

9. Naskicuj wykres funkcji f i odczytaj z niego, dla jakich argumentów funkcja ta przyjmuje wartości ujemne.

a) $f(x) = 5(5^x - 1)$

b) $f(x) = 8(2^{-x} - 1)$

c) $f(x) = 3(3^{x+2} - 1)$



10. Oblicz.

- a) $\log_3 27$ c) $\log_3 \frac{1}{27}$ e) $\log_{\frac{1}{3}} 27$ g) $\log_{\sqrt{3}} 27$
 b) $\log_{27} 3$ d) $\log_{\frac{1}{27}} 3$ f) $\log_{27} \sqrt{3}$ h) $\log_{27} 3\sqrt{3}$

11. Oblicz.

- a) $\log_2 8 + \log_{\frac{1}{2}} 4 + \log_9 81$ c) $\log_3 27 - \log_4 2 - \log_2 \frac{1}{8}$
 b) $\log 0,1 + \log 1000 + \log_{0,1} 10$ d) $\log_{36} 6 + \log_{16} 4 - \log_8 2$

12. Oblicz.

- a) $3^{\log_3 2}$ b) $9^{\log_3 2}$ c) $3^{1-\log_3 2}$ d) $4^{\log_4 0,5-2}$

13. Naszkicuj wykres funkcji f . Odczytaj z wykresu, dla jakiego argumentu funkcja ta przyjmuje wartość a .

- a) $f(x) = 2^x - 1$, $a = \log_4 64$ c) $f(x) = -3^x$, $a = \log_3 \frac{1}{27}$
 b) $f(x) = 2^{x+1}$, $a = \log_{\frac{1}{2}} 0,25$ d) $f(x) = 3^{-x}$, $a = \log_{\sqrt{2}} 2\sqrt{2}$

14. Oblicz.

- a) $\log_2 6 + \log_2 8 - \log_2 3$ d) $\log 4 - \log 16 - \log 25$
 b) $\log_3 2 + \log_3 27 - \log_3 6$ e) $2 \log 5 + \log 4 - \log 10^4$
 c) $\log_4 10 - \log_4 5 + \log_4 8$ f) $3 \log 2 - \log 80 + 6 \log 1$

15. W karcie wybranych wzorów i stałych fizykochemicznych na egzaminie maturalnym z biologii, chemii i fizyki znajduje się tablica przybliżonych wartości logarytmów dziesiętnych. Korzystając z zamieszczonego fragmentu tablicy, podaj przybliżone wartości:

- a) $\log 0,03$, $\log 0,3$, $\log 3$,
 b) $\log 0,054$, $\log 0,0054$, $\log 5,4$,
 c) $\log 3 + \log 9$, $\log 8 - \log 2$.

x	$\log x$	x	$\log x$	x	$\log x$
0,01	-2,000	0,26	-0,585	0,51	-0,292
0,02	-1,699	0,27	-0,569	0,52	-0,284
0,03	-1,523	0,28	-0,553	0,53	-0,276
0,04	-1,398	0,29	-0,538	0,54	-0,268
0,05	-1,301	0,30	-0,523	0,55	-0,260
0,06	-1,222	0,31	-0,509	0,56	-0,252
0,07	-1,155	0,32	-0,495	0,57	-0,244

D 16. Wykaż, że dla dowolnego $x > 0$ prawdziwa jest poniższa równość.

- a) $1 + 2 \log_3 x = \log_3 (3x^2)$ c) $2 + 3 \log_4 x = \log_4 (16x^3)$
 b) $10 \log x - 1 = \log(0,1x^{10})$ d) $6 - 2 \log x = \log \frac{1\,000\,000}{x^2}$



Zestaw II

1. Oblicz.

a) $(3^{-2})^2$	c) $2^{-3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$	e) $\frac{2^{-3} \cdot 4^{-2}}{2^{-6}}$	g) $\frac{6^4 \cdot 9^{-4}}{4^2 \cdot 12^{-1}}$
b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$	d) $9^3 \cdot 3^{-5}$	f) $\frac{10^{-2}}{5^{-6} \cdot 25^2}$	h) $\frac{16^{-2} \cdot 125^{-3}}{10^{-4} \cdot 25^{-2}}$

2. Oblicz.

a) $25^{\frac{1}{2}} \cdot 625^{\frac{1}{4}}$	c) $2^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2}$	e) $25^{\frac{3}{2}} \cdot 125^{-\frac{1}{3}}$	g) $8^{\frac{2}{3}} \cdot 32^{-\frac{3}{5}}$
b) $8^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{-\frac{1}{4}}$	d) $27^{\frac{1}{3}} \cdot 9^{-\frac{1}{2}}$	f) $64^{-\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{5}{3}}$	h) $0,001^{-\frac{1}{3}} \cdot 0,09^{\frac{1}{2}}$

3. Oblicz.

a) $7^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{6}}$	c) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}} \cdot 2^{\frac{7}{6}}$	e) $\sqrt[3]{100} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{4}{3}}$
b) $5^{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt{5} \cdot 5^{-\frac{4}{3}}$	d) $(\sqrt[6]{81})^{-\frac{3}{2}}$	f) $\frac{11^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{44}} \cdot \left(\frac{2}{11}\right)^3$

4. Zapisz liczbę w postaci a^x , gdzie $a \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{Q}$.

a) $8\sqrt{2}$	c) $\frac{\sqrt{27}}{9}$	e) $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}$
b) $4\sqrt[3]{2}$	d) $\sqrt[4]{3\sqrt{3}}$	f) $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt[4]{8}}$

5. Określ, czy podana liczba jest większa, czy mniejsza od 1. Skorzystaj z własności funkcji wykładniczej.

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{4}{3}}$	b) $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$	c) $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$	d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}$	e) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{2}{3}}$	f) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{3}{4}}$
---	---	---	--	--	--

6. Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej.

a) $5^{\sqrt{5}}$, $25\sqrt{5}$, $125^{\frac{4}{5}}$, $25^{1,1}$	c) $9^{\frac{1}{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sqrt[4]{27}$, $(\sqrt[3]{3})^{-2}$
b) $\frac{1}{\sqrt[8]{8}}$, $(\sqrt{2})^{-\frac{3}{2}}$, $0,5$, $16^{-\frac{1}{3}}$	d) $(4,5)^{-2}$, $\sqrt{0,4}^{\sqrt{12}}$, $(2,5)^{-2,4}$, $0,064$

7. Wyznacz przybliżoną wartość potęgi z dokładnością do czterech miejsc po przecinku. Skorzystaj z przybliżenia $\sqrt[10]{10} \approx 1,258925$.

a) $10^{1,1}$	b) $10^{-0,9}$	c) $10^{-1,9}$	d) $10^{-2,9}$
---------------	----------------	----------------	----------------

8. Wykres funkcji wykładniczej $y = a^x$ przechodzi przez punkt P . Wyznacz wzór tej funkcji i naskicuj jej wykres.

a) $P\left(\frac{5}{2}, 32\right)$	b) $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	c) $P(-6, 729)$
------------------------------------	--	-----------------

9. Naskicuj wykres funkcji f . Podaj zbiór wartości tej funkcji oraz jej miejsca zerowe (jeśli istnieją).

a) $f(x) = 2^x - 2$	c) $f(x) = 2 + 2^{-x}$	e) $f(x) = -3^{-x}$
b) $f(x) = 3^{x-1} + 2$	d) $f(x) = 4 - 2^x$	f) $f(x) = 2^{2x} - 4$



10. Oblicz $\sqrt{ab}$.
a) $a = \log_3 9$, $b = \log_2 256$ b) $\log_2 a = 5$, $\log_4 b = \frac{1}{2}$
11. Oblicz x .
a) $\log_{\frac{1}{4}} x = -2$ c) $\log_{81} x^2 = \frac{1}{2}$ e) $\log_9 |x| = \frac{3}{2}$
b) $\log_4 x = \frac{3}{2}$ d) $\log_{\frac{1}{8}} x^2 = \frac{1}{3}$ f) $\log_{2\sqrt{2}} |x| = 4$
12. Oblicz x .
a) $\log_6 x = \log_6 4 + \log_6 9$ c) $\log x = 2 \log 5 + \log 4$
b) $\log_3 x = \log_3 18 - \log_3 2$ d) $\log x = \log 80 - 3 \log 2$
13. Oblicz podstawę logarytmu.
a) $\log_a 2 = \frac{1}{2}$ b) $\log_a 8 = 6$ c) $\log_a 32 = -5$
14. Do której ćwiartki układu współrzędnych należy punkt (x, y) ?
a) $x = \log_{\frac{1}{4}} 1024$, $y = \log_{\sqrt{2}} 4$ b) $x = \log_2 \pi$, $y = \log_{\frac{1}{2}} \pi$
15. Oblicz $\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 x)$, jeśli:
a) $x = 3$, b) $x = \sqrt{3}$, c) $x = 81$, d) $x = 3^8$.
16. Wykres funkcji g otrzymano w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Naskicuj wykres funkcji g i podaj jej wzór, jeżeli przekształceniem tym jest:
a) przesunięcie o 2 jednostki w dół, c) symetria względem osi OY ,
b) przesunięcie o 1 jednostkę w lewo, d) symetria względem osi OX .
17. Naskicuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji f , g i h . Podaj asymptoty tych wykresów i miejsca zerowe funkcji.
a) $f(x) = \log_2 x + 2$, $g(x) = \log_2(x + 2)$, $h(x) = \log_2(x + 2) + 2$
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}x$, $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 2)$, $h(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}(x - 2)$
18. Do wykresu funkcji $f(x) = \log_a(x - 2) + 1$ należy punkt P . Wyznacz a i naskicuj wykres funkcji f .
a) $P(4, 2)$ b) $P(6, 2)$ c) $P\left(\frac{7}{3}, 0\right)$ d) $P(4, 3)$
19. Naskicuj wykres funkcji f . Podaj jej dziedzinę oraz zbiór argumentów, dla których funkcja ta przyjmuje wartości ujemne.
a) $f(x) = \log_2(x - 3) - 1$ c) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(2x + 2)$
b) $f(x) = -\log_4(x + 1) + 1$ d) $f(x) = -\log_3(x + 3) + 2$

**D Przykład 1**

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb x, y prawdziwa jest równość:

$$\log \frac{1}{xy^2} - \log x^{-1} = -\frac{1}{2} \log y^4$$

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

I sposób

Przekształcamy lewą stronę równania tak, aby otrzymać jego prawą stronę:

$$\begin{aligned} \log \frac{1}{xy^2} - \log x^{-1} &= -\log xy^2 + \log x = -\log x - \log y^2 + \log x = \\ &= -\log y^2 = -\log(y^4)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \log y^4 \end{aligned}$$

II sposób

Kolejno piszemy równania równoważne z równaniem wyjściowym:

$$\begin{aligned} \log \frac{1}{xy^2} - \log x^{-1} &= -\frac{1}{2} \log y^4 \\ \log x^{-1} y^{-2} - \log x^{-1} &= \log(y^4)^{-\frac{1}{2}} \\ \log \frac{x^{-1} y^{-2}}{x^{-1}} &= \log y^{-2} \\ \log y^{-2} &= \log y^{-2} \end{aligned}$$

Ostatnia równość jest prawdziwa, więc prawdziwa jest też równość wyjściowa.

D Przykład 2

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb x, y, z prawdziwa jest równość:

$$\log xy + \log \frac{z^2}{y} = \log xyz - \log \frac{y}{z}$$

I sposób

Przekształcamy lewą stronę równania tak, aby otrzymać jego prawą stronę:

$$\begin{aligned} \log xy + \log \frac{z^2}{y} &= \log \left(xy \cdot \frac{z^2}{y} \right) = \log \left(xyz \cdot \frac{z}{y} \right) = \\ &= \log \left(xyz : \frac{y}{z} \right) = \log xyz - \log \frac{y}{z} \end{aligned}$$

II sposób

Przekształcamy podaną równość w sposób równoważny:

$$\begin{aligned} \log xy + \log \frac{z^2}{y} &= \log xyz - \log \frac{y}{z} \\ \log \left(xy \cdot \frac{z^2}{y} \right) &= \log \frac{xyz}{\frac{y}{z}} \\ \log xz^2 &= \log xz^2 \end{aligned}$$

Ostatnia równość jest prawdziwa, więc prawdziwa jest też równość wyjściowa.



Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. Do wykresu funkcji $f(x) = 4^x$ należy punkt o współrzędnych:
A. $(-1, -4)$, B. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, C. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, D. $(\frac{1}{4}, 1)$.
2. Wartość funkcji $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ jest liczbą całkowitą dla:
A. $x = \frac{1}{2}$, B. $x = -3$, C. $x = 2$, D. $x = 10$.
3. Wartość funkcji $f(x) = (\sqrt{2})^x$ jest liczbą wymierną dla:
A. $x = 1$, B. $x = -1$, C. $x = -3$, D. $x = -6$.
4. Funkcją rosnącą jest funkcja:
A. $f(x) = (\sqrt{3} - 1)^x$, C. $f(x) = (\frac{1}{2})^x$,
B. $f(x) = (\sqrt{5} - 1)^x$, D. $f(x) = (\frac{\sqrt{2}}{2})^x$.
5. Która funkcja ma dodatnie miejsce zerowe?
A. $f(x) = 6^x - 6$ C. $h(x) = (\frac{1}{2})^x - 2$
B. $g(x) = 4^x + 4$ D. $k(x) = (\frac{1}{2})^x + 2$
6. Prawdziwa jest nierówność:
A. $3^{\sqrt{2}} \leq 3^{1,5}$, C. $2^\pi \leq 2^{3,14}$,
B. $0,5^{\sqrt{2}} \leq 0,5^{1,5}$, D. $4^\pi \leq 4^{3,141}$.
7. Prawdziwa jest równość:
A. $16^{\sqrt{2}} \cdot 4^{2\sqrt{2}} = 16^{3\sqrt{2}}$, C. $4^{\sqrt{3}} : 2^{2\sqrt{3}} = 2$,
B. $8^{2\sqrt{5}} : 2^{6\sqrt{5}-1} = 2$, D. $2^{5\sqrt{5}} \cdot 32^{2-\sqrt{5}} = 2^5$.
8. Prawdziwa jest nierówność:
A. $\log_2 8 < \log_3 9$, C. $\log_2 \frac{1}{2} > \log_{\frac{1}{3}} 3$,
B. $\log_{\frac{1}{2}} 8 < \log_{\frac{1}{3}} 9$, D. $\log_{\frac{1}{2}} 1 > \log_3 3$.
9. Prawdziwa jest równość:
A. $\log_3 12 - 2 \log_3 2 = 1$, C. $\log_3 6 + \log_3 \frac{1}{2} = 3$,
B. $\log_3 27 + \log_3 3 = 3$, D. $\log_3 75 - \log_3 25 = -1$.
10. Punkt $(8, -3)$ należy do wykresu funkcji:
A. $f(x) = \log_6(x - 6) - 6$, C. $f(x) = \log_3(x - 3) - 3$,
B. $f(x) = \log_4(x - 4) - 4$, D. $f(x) = \log_2(x - 2) - 2$.



■ Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

Wyznacz liczbę, której 80% jest równe $2^{3+2\sqrt{3}} : 4^{\sqrt{3}}$.

Zadanie 2 (2 pkt)

Punkt $P(p, 2)$ należy do wykresu funkcji $y = 16^x$. Wyznacz p .

☐ Zadanie 3 (2 pkt)

Uzasadnij równość $4 \log_9 3 + 9 \log_3 9 = 5 \log_3 81$.

☐ Zadanie 4 (2 pkt)

Uzasadnij, że liczba $\log_2 \sqrt{6} + \log_2 \sqrt{8} - \log_2 \sqrt{3}$ jest wymierna.

☐ Zadanie 5 (2 pkt)

Wykaż, że dla $x > 0$, $y > 0$ prawdziwa jest równość:

$$\log x^2 y^3 = \log x + 2 \log y + \log xy$$

■ Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 6 (4 pkt)

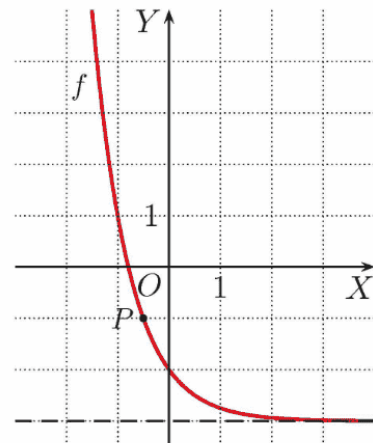
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji:

$$f(x) = a^x - 3$$

Oblicz wartość tej funkcji dla $x = -5$, jeśli wiadomo, że punkt $P(-\frac{1}{2}, -1)$ należy do jej wykresu.

Zadanie 7 (4 pkt)

Naszkicuj wykresy funkcji $f(x) = 3^x$ i $g(x) = 9 \cdot 3^x$. Prosta o równaniu $y = 100$ przecina wykres funkcji f w punkcie P , a wykres funkcji g – w punkcie Q . Ile jest równa długość odcinka PQ ?



Zadanie 8 (4 pkt)

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = a^x + b$, gdzie $a = \log_9 \sqrt{3}$ oraz $b = \log_3 \frac{1}{9}$.

☐ Zadanie 9 (3 pkt)

Wykaż, że dla $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ prawdziwa jest równość:

$$2 \log \frac{x^3}{y} - 3 \log x^2 z = 2 \log \left(\frac{y}{z} \right)^{-1} - 5 \log z$$

Zadanie 10 (4 pkt)

Punkt $(1, -1)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \log_2(x - a) + b$, a prosta o równaniu $x = -3$ jest jego asymptotą pionową. Podaj współczynniki a i b oraz naszkicuj wykres funkcji f .



2 Geometria analityczna

W tym rozdziale opisujemy i badamy figury geometryczne położone w prostokątnym układzie współrzędnych, w którym jednostki na obu osiach mają równe długości.

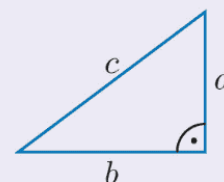
Układ współrzędnych wykorzystywany jest także w geografii. Określając położenie punktu na kuli ziemskiej, podaje się jego szerokość i długość geograficzną, np. położenie latarni morskiej na wyspie w archipelagu Utklippan w Szwecji – szerokość geograficzna: $55^{\circ}57'10''\text{N}$, długość geograficzna: $15^{\circ}42'06''\text{E}$.

Twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie do niego odwrotne

Twierdzenie Pitagorasa

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

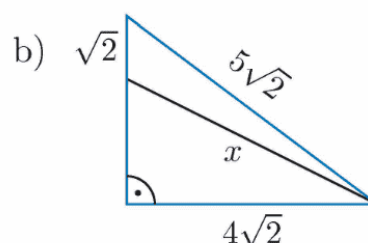
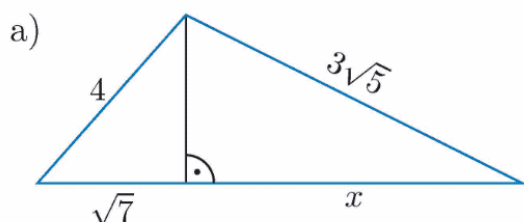
$$a^2 + b^2 = c^2$$



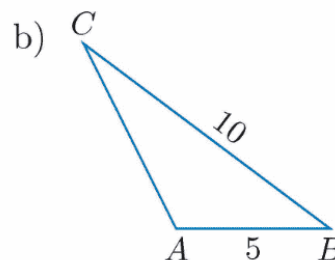
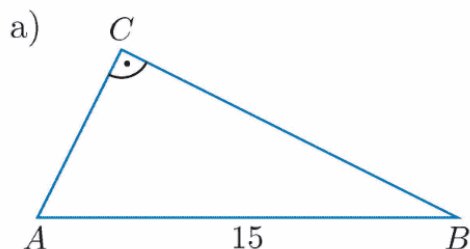
1. Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a , b i przeciwprostokątnej c . Oblicz jego obwód.

a) $a = 4$, $b = 2\sqrt{2}$ b) $a = 3\sqrt{2}$, $c = 3\sqrt{5}$ c) $b = 2$, $c = \frac{5}{2}$

2. Oblicz x .



3. Podstawa trójkąta równoramiennego jest dłuższa od ramienia o 2 cm. Oblicz pole tego trójkąta, jeżeli wiadomo, że jego obwód jest równy 32 cm.
4. Wysokość trójkąta ABC opuszczona z wierzchołka C jest równa 6. Oblicz obwód trójkąta ABC .



Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Jeżeli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to trójkąt ten jest prostokątny.

5. Sprawdź, czy trójkąt o podanych bokach jest prostokątny.

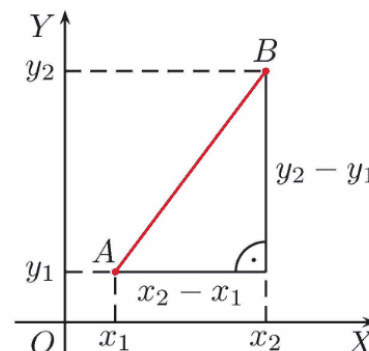
a) 5, 12, 13 c) $2\frac{1}{4}$, 3, $3\frac{3}{4}$ e) $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$
 b) 8, 15, 17 d) 15, 18, 25 f) $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$, 6

2.1. Odległość między punktami w układzie współrzędnych

Odległość między punktami A i B jest równa długości odcinka AB .

Rozważmy punkty $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ w prostokątnym układzie współrzędnych. Odległość między nimi możemy obliczyć, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$



Twierdzenie

Odległość między punktami $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ wyraża się za pomocą wzoru:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Przykład 1

Oblicz odległość między punktami $A(2, 5)$ i $B(-1, 1)$.

$$|AB| = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Ćwiczenie 1

Oblicz odległość między punktami A i B .

a) $A(-3, -1), B(-5, -1)$

c) $A(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}), B(\frac{1}{2}, -1)$

b) $A(5, -6\frac{1}{2}), B(-7, -1\frac{1}{2})$

d) $A(3 + \sqrt{3}, \sqrt{7}), B(\sqrt{3}, -4 + \sqrt{7})$

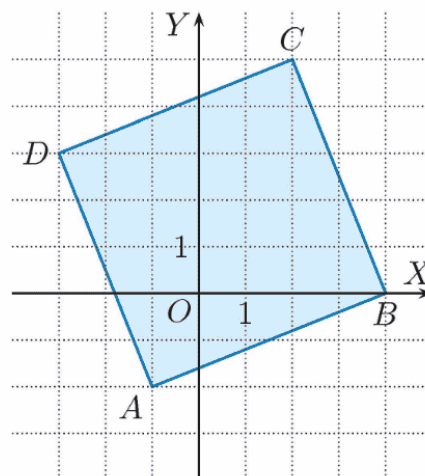
Przykład 2

Oblicz obwód kwadratu $ABCD$ (rysunek obok).

Z rysunku odczytujemy: $A(-1, -2)$, $B(4, 0)$, zatem:

$$\sqrt{(4 - (-1))^2 + (0 - (-2))^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$$

Obwód kwadratu $ABCD$ jest równy $4\sqrt{29}$.

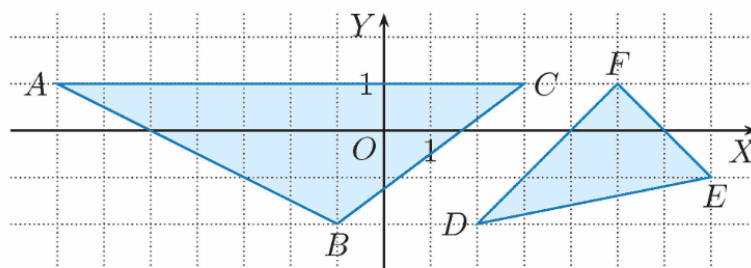


Ćwiczenie 2

Oblicz obwód prostokąta o kolejnych wierzchołkach $A(-6, 1)$, $B(-3, -3)$, $C(5, 3)$, $D(2, 7)$.

Ćwiczenie 3

Oblicz obwody trójkątów ABC i DEF przedstawionych na rysunku obok.



Ćwiczenie 4

Sprawdź, czy trójkąt ABC jest równoramienny.

- | | |
|---------------------------------|--|
| a) $A(1, 3), B(6, 4), C(4, -1)$ | c) $A(-3, -3), B(12, -3), C(6, 9)$ |
| b) $A(0, 0), B(4, -1), C(3, 3)$ | d) $A(-1, 0), B(2, \sqrt{3}), C(2 - \sqrt{3}, \sqrt{3})$ |

Przykład 3

Sprawdź, czy trójkąt o wierzchołkach $A(-2, -4)$, $B(4, 2)$ i $C(1, 5)$ jest prostokątny.

$$|AB| = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (2 - (-4))^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72}$$

$$|AC| = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (5 - (-4))^2} = \sqrt{9 + 81} = \sqrt{90}$$

$$|BC| = \sqrt{(1 - 4)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}$$

Zauważmy, że: $|AB|^2 + |BC|^2 = 72 + 18 = 90 = |AC|^2$.

Zatem z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa wynika, że trójkąt ABC jest prostokątny.

Ćwiczenie 5

Sprawdź, czy trójkąt ABC jest równoramienny. Czy jest prostokątny?

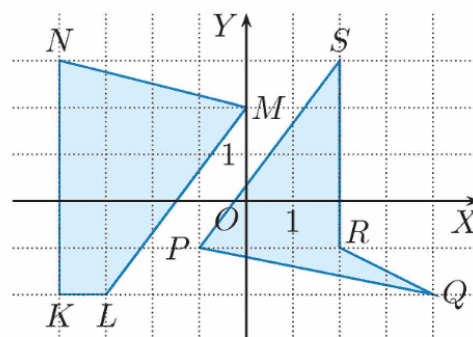
- | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|
| a) $A(-1, 2), B(4, 1), C(2, 4)$ | c) $A(1, 1), B(5, 3), C(-1, 6)$ |
| b) $A(-3, 0), B(1, -4), C(5, 4)$ | d) $A(-4, 0), B(-1, -3), C(5, 3)$ |

Zadania

1. Który z czworokątów $KLMN$ i $PQRS$ (rysunek obok) ma większy obwód?

2. Który z odcinków AB i CD jest dłuższy?

- | |
|--|
| a) $A(1, -2), B(4, 4), C(2, 2), D(8, -2)$ |
| b) $A(-2, 3), B(4, 1), C(-1, 1), D(4, 6)$ |
| c) $A(3, -2), B(8, -2), C(-2, 2), D(2, 5)$ |



3. Sprawdź, czy trójkąt ABC jest prostokątny.

- | | |
|-----------------------------------|----------------------------------|
| a) $A(3, 0), B(-6, 8), C(-2, -2)$ | b) $A(-5, -1), B(4, 1), C(3, 5)$ |
|-----------------------------------|----------------------------------|

4. Sprawdź, czy trójkąty ABC i DEF są przystające lub podobne.
 - a) $A(2, 2)$, $B(8, 5)$, $C(1, 4)$, $D(-2, 0)$, $E(4, -3)$, $F(5, -1)$
 - b) $A(-1, 1)$, $B(2, 5)$, $C(0, 4)$, $D(4, 4)$, $E(0, 2)$, $F(-2, -4)$
5. Oblicz obwód oraz wysokości trójkąta, którego jednym z wierzchołków jest punkt przecięcia prostych:
 - a) $y = x - 1$ i $y = -\frac{1}{2}x + 5$, a pozostałe wierzchołki są punktami przecięcia tych prostych z osią OY ,
 - b) $y = x + 2$ i $y = 3x - 6$, a pozostałe wierzchołki są punktami przecięcia tych prostych z osią OX .
6. Oblicz obwód, długości przekątnych oraz wysokość rombu $ABCD$.
 - a) $A(-3, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 4)$, $D(-2, 3)$
 - b) $A(-5, -2)$, $B(2, -1)$, $C(7, 4)$, $D(0, 3)$
7. Wyznacz współrzędne punktów należących do prostej l , których odległość od punktu P jest równa d .
 - a) $l: y = 2x - 2$, $P(5, 3)$, $d = \sqrt{10}$
 - b) $l: y = -x + 6$, $P(3, 2)$, $d = \sqrt{13}$
8. Dane są punkty $A(-2, 2)$ i $C(5, 3)$. Oblicz współrzędne wierzchołków B i D prostokąta $ABCD$, jeśli należą one do prostej o równaniu $y = 4 - x$.
9. Dane są wierzchołki $A(-4, 2)$, $B(8, -2)$ i $C(6, 4)$ trapezu równoramiennego $ABCD$ o podstawie AB . Oblicz współrzędne wierzchołka D .

Powtórzenie

10. Narysuj łamaną $PQRST$ i oblicz jej długość.
 - a) $P(-7, 0)$, $Q(-1, 3)$, $R(-3, 4)$, $S(-1, 5)$, $T(3, 3)$
 - b) $P(6, -2)$, $Q(2, 1)$, $R(-1, -1)$, $S(6, -6)$, $T(2, -6)$
11. Wierzchołkami kwadratu są punkty $A(-3, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 4)$ i $D(-4, 3)$. Oblicz obwód tego kwadratu oraz długość jego przekątnej.
- D 12. Uzasadnij, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem, a następnie oblicz jego obwód i pole.
 - a) $A(-3, 2)$, $B(6, 2)$, $C(4, 6)$, $D(1, 6)$
 - b) $A(-3, -3)$, $B(1, -5)$, $C(1, 9)$, $D(-3, 1)$
13. Sprawdź, czy trójkąt ABC jest prostokątny. Oblicz jego pole.
 - a) $A(0, -2)$, $B(3, 7)$, $C(-3, 4)$
 - b) $A(3, 0)$, $B(-3, -2)$, $C(0, -4)$

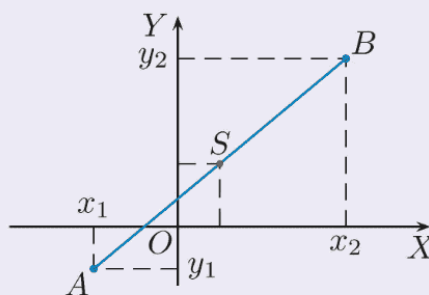
2.2. Środek odcinka

Jeżeli znamy współrzędne końców odcinka, możemy wyznaczyć współrzędne jego środka.

Środek odcinka

Środkiem odcinka AB o końcach w punktach $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ jest punkt:

$$S\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



Przykład 1

Wyznacz współrzędne środka odcinka AB , jeśli $A(-3, 2)$ i $B(5, -4)$.

Środek odcinka AB ma współrzędne: $\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{2-4}{2}\right) = (1, -1)$.

Ćwiczenie 1

Wyznacz współrzędne środka odcinka AB .

- a) $A(-2, -1)$, $B(6, 3)$ b) $A(-4, 1)$, $B(5, -8)$ c) $A(\frac{1}{2}, -2)$, $B(3, \frac{1}{3})$

Przykład 2

Punkt $S(1, 5)$ jest środkiem odcinka AB . Wyznacz współrzędne punktu A , jeśli punkt B ma współrzędne $(-3, 4)$.

Niech punkt A ma współrzędne (x_1, y_1) , wówczas:

$$\begin{aligned}\frac{x_1 - 3}{2} &= 1 \quad \text{i} \quad \frac{y_1 + 4}{2} = 5 \\ x_1 - 3 &= 2 \quad \text{i} \quad y_1 + 4 = 10 \\ x_1 &= 5 \quad \text{i} \quad y_1 = 6\end{aligned}$$

Ćwiczenie 2

- a) Dany jest punkt $A(5, 8)$. Wyznacz współrzędne punktu B , jeśli punkt $S(-1, -3)$ jest środkiem odcinka AB .
- b) Punkt $S(2, 1)$ jest środkiem odcinka o końcach $A(x, -2)$ i $B(7, y)$. Oblicz długość odcinka AB .
- c) Punkt $S(1, 1)$ jest środkiem odcinka o końcach $A(x, y)$ i $B(x + y, x - y)$. Oblicz długość odcinka AB .

Przypomnijmy, że **środkową trójkąta** nazywamy odcinek łączący jego wierzchołek ze środkiem przeciwległego boku.

Przykład 3

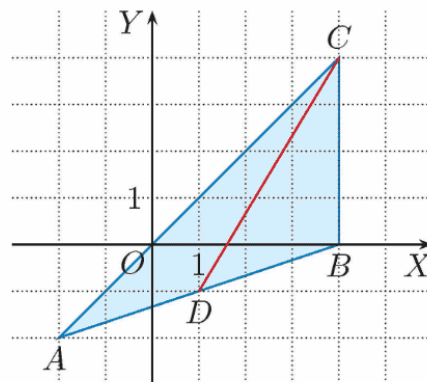
Dany jest trójkąt ABC (rysunek obok). Oblicz długość środkowej tego trójkąta poprowadzonej z wierzchołka C .

Niech D będzie środkiem odcinka AB :

$$D\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{-2+0}{2}\right) = D(1, -1)$$

Obliczamy długość środkowej:

$$|CD| = \sqrt{(4-1)^2 + (4-(-1))^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$



Ćwiczenie 3

Oblicz długości środkowych trójkąta ABC .

- a) $A(-2, -1)$, $B(6, 3)$, $C(-2, 3)$ b) $A(-6, -1)$, $B(2, 3)$, $C(-4, 5)$

Zadania

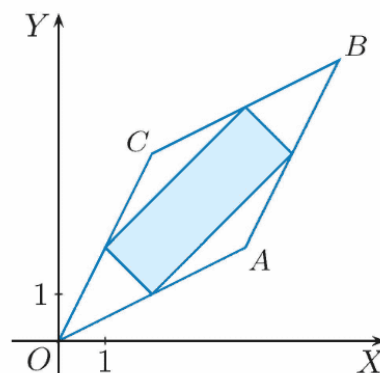
- Oblicz odległość środka odcinka AB od początku układu współrzędnych.

a) $A(1, 6)$, $B(-7, 2)$ b) $A(-7, 7)$, $B(11, 1)$ c) $A(9, \sqrt{7})$, $B(-4, -\sqrt{7})$
- Dany jest punkt $A(4, 5)$ oraz punkt S będący środkiem odcinka AB . Wyznacz współrzędne punktu B .

a) $S(-2, 3)$ b) $S(6, 7)$ c) $S(-3, 1)$
- Dany jest punkt $A(-4, -3)$. Oblicz długość odcinka AB , jeśli:

a) jego środkiem jest punkt $(-1, -2)$,
 b) jego środek leży na osi OX , a odcięta punktu B jest równa 2.
- Oblicz długości przekątnych rombu o wierzchołkach $O(0, 0)$, $A(4, 2)$, $B(6, 6)$ i $C(2, 4)$ (rysunek obok). Oblicz pole prostokąta, którego wierzchołkami są środki boków rombu $OABC$.
- Dany jest prostokąt o wierzchołkach $A(-4, -3)$, $B(8, 3)$, $C(6, 7)$ i $D(-6, 1)$.

a) Oblicz obwód prostokąta $ABCD$.
 b) Oblicz obwód rombu, którego wierzchołkami są środki boków prostokąta $ABCD$.



6. Wyznacz współrzędne środków odcinka AC i odcinka BD . Czy czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem?
- a) $A(-2, -1), B(17, 2), C(18, 5), D(-1, 2)$
 b) $A(1, -1), B(7, 1), C(8, 5), D(2, 2)$
7. Punkty $A(1, 2), B(-1, -1)$ i $C(5, 2)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Oblicz współrzędne punktu S będącego środkiem odcinka AC oraz współrzędne wierzchołka D .
8. a) Przekątne kwadratu przecinają się w punkcie $(2, 1)$, a jeden z jego wierzchołków ma współrzędne $(1, -2)$. Oblicz pole i obwód tego kwadratu.
 b) Pole kwadratu jest równe 20, a jeden z jego wierzchołków ma współrzędne $(3, 6)$. Oblicz współrzędne punktu przecięcia przekątnych kwadratu, jeśli punkt ten należy do prostej $x = 4$.
9. Odcinek AB leżący na prostej k ma długość d . Środkiem tego odcinka jest punkt S . Wyznacz współrzędne punktów A i B .
- a) $k: y = x, d = 4\sqrt{2}, S(3, 3)$ b) $k: y = \frac{3}{4}x + 2, d = 10, S(12, 11)$
10. Czy punkt P należy do okręgu, którego średnicą jest odcinek AB ?
- a) $A(-1, -1), B(5, 3), P(0, 4)$ b) $A(-5, 5), B(7, 1), P(-1, -3)$

Powtórzenie

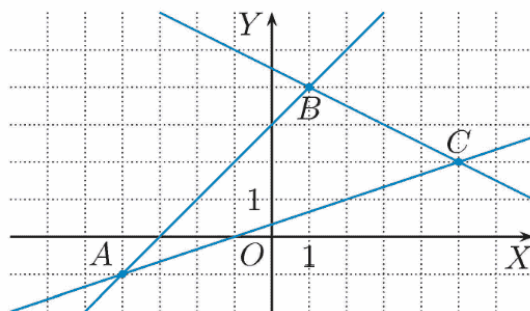
11. W której ćwiartce układu współrzędnych leży środek odcinka AB ?
- a) $A(-17, 3), B(7, 19)$ c) $A(\frac{3}{2}, \frac{1}{3}), B(-\frac{3}{4}, \frac{2}{3})$
 b) $A(1, 2), B(-2, -3)$ d) $A(\frac{5}{4}, \frac{4}{5}), B(-\frac{4}{5}, -\frac{5}{4})$
12. Wyznacz współrzędne środków boków kwadratu o wierzchołkach $A(-3, 2), B(1, 0), C(3, 4)$ i $D(-1, 6)$.
13. Oblicz długości środkowych trójkąta ABC .
- a) $A(-3, 2), B(1, 4), C(-3, 8)$ b) $A(-2, -1), B(10, 3), C(2, 3)$
14. Wyznacz współrzędne środka okręgu o średnicy PQ i oblicz jego promień.
- a) $P(-4, 2), Q(2, -6)$ b) $P(-7, -1), Q(5, 3)$
15. W trapezie o wierzchołkach $A(6, 5), B(-6, -1), C(-2, -3)$ oraz $D(2, -1)$ punkt P jest środkiem ramienia AD , a punkt Q – środkiem ramienia BC . Oblicz długości odcinków AB, CD i PQ .

Prosta w układzie współrzędnych

Równanie prostej postaci $y = ax + b$ nazywamy **równaniem kierunkowym prostej**.

Współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$ przechodzącej przez punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) , gdzie $x_1 \neq x_2$, jest równy $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

1. Wyznacz równania prostych AB , AC i BC (rysunek obok).
2. Wyznacz równanie prostej PQ . Czy należy do niej punkt C ?
 - a) $P(-2, 1)$, $Q(2, 5)$, $C(4, 8)$
 - b) $P(-1, 7)$, $Q(3, -1)$, $C(-2, 9)$



Proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są:

- równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2$,
- prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 \cdot a_2 = -1$.

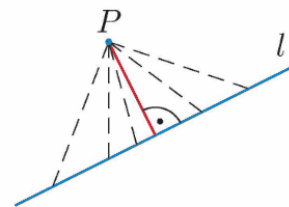
3. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt P i równoległej do prostej l .
 - a) $P(1, 3)$, $l: y = 4x + 2$
 - b) $P(20, 9)$, $l: y = -\frac{1}{5}x + 2$
4. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt A i prostopadłej do prostej l .
 - a) $A(3, -1)$, $l: y = 2x + 7$
 - b) $A(12, 7)$, $l: y = -6x + 1$
5. Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB .
 - a) $A(-2, 1)$, $B(6, 5)$
 - b) $A(-5, 3)$, $B(1, -1)$
 - c) $A(-2, -2)$, $B(0, 4)$

Równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie $A \neq 0$ lub $B \neq 0$, nazywamy **równaniem ogólnym prostej**.

6. Przekształć równanie ogólne prostej do postaci kierunkowej.
 - a) $3x - y - 4 = 0$
 - b) $-4x + 2y + 5 = 0$
 - c) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - 3 = 0$
7. Prosta l przechodzi przez punkt P i jest prostopadła do prostej k . Wyznacz równanie prostej l .
 - a) $P(4, 5)$, $k: 2x - y - 7 = 0$
 - b) $P(\frac{1}{2}, -1)$, $k: 2x + \frac{1}{3}y - 1 = 0$

2.3. Odległość punktu od prostej

Przypomnijmy, że **odległością punktu P od prostej l** nazywamy długość najkrótszego odcinka łączącego punkt P z punktem na prostej l (odcinek ten jest prostopadły do prostej l). Jeśli punkt P leży na prostej l , to przyjmujemy, że jego odległość od tej prostej jest równa zero.



Przykład 1

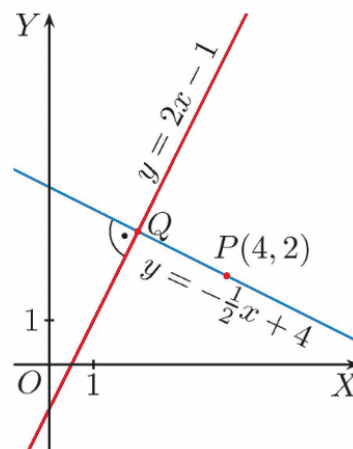
Oblicz odległość punktu $P(4, 2)$ od prostej $y = 2x - 1$.

Wyznaczamy równanie prostej l przechodzącej przez punkt P i prostopadłej do prostej $y = 2x - 1$. Jest ono postaci $y = -\frac{1}{2}x + b$. Podstawiamy do tego równania współrzędne punktu P i otrzymujemy $2 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + b$, czyli $b = 4$.

Zatem $l: y = -\frac{1}{2}x + 4$.

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$$



i otrzymujemy współrzędne punktu przecięcia się prostych: $Q(2, 3)$.

Obliczamy długość odcinka PQ :

$$|PQ| = \sqrt{(2 - 4)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{5}$$

Zatem odległość punktu P od prostej $y = 2x - 1$ jest równa $\sqrt{5}$.

Ćwiczenie 1

Oblicz odległość punktu P od prostej l .

a) $P(5, 1)$, $l: y = x$

b) $P(-1, 3)$, $l: y = \frac{4}{3}x - 4$

Jeżeli metodę opisaną w przykładzie 1. zastosujemy w przypadku ogólnym, to otrzymamy wzór na odległość punktu od prostej.

Odległość punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej l o równaniu ogólnym:

$$Ax + By + C = 0$$

wyraża się za pomocą wzoru:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Przykład 2

Oblicz odległość punktu $P(5, -1)$ od prostej $y = -\frac{4}{3}x + 2$.

Aby skorzystać ze wzoru na odległość punktu od prostej, równanie prostej zapisujemy w postaci ogólnej:

$$4x + 3y - 6 = 0$$

i odczytujemy z niego wartości współczynników: $A = 4$, $B = 3$ i $C = -6$. Wartości te razem ze współrzędnymi $x_0 = 5$ i $y_0 = -1$ podstawiamy do wzoru:

$$d = \frac{|4 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) - 6|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|20 - 3 - 6|}{\sqrt{25}} = \frac{11}{5}$$

Ćwiczenie 2

Oblicz odległości punktów $A(0, 3)$, $B(-1, 0)$ i $C(-1, 3)$ od prostej l .

a) $l: y - x = 1$

b) $l: 3x - y - 7 = 0$

c) $l: y = -\frac{1}{2}x + 2,5$

Przykład 3

Punkty $A(-1, 0)$, $B(1, 2)$ i $C(2, -2)$ są wierzchołkami trójkąta ABC . Oblicz pole tego trójkąta.

Pole trójkąta obliczymy, korzystając ze wzoru $P = \frac{1}{2}a \cdot h$, w którym $a = |AB|$, a h jest odległością punktu C od prostej AB .

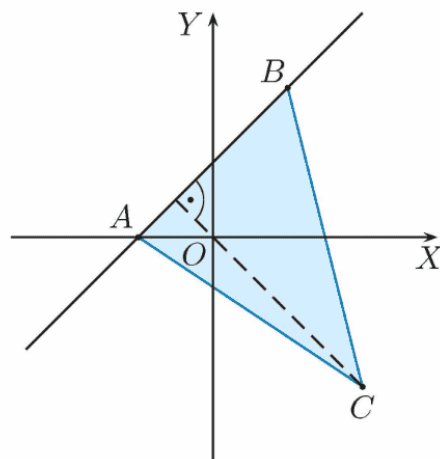
$$a = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Wyznaczamy równanie prostej AB : $y = x + 1$ i zapisujemy je w postaci ogólnej: $x - y + 1 = 0$.

Obliczamy odległość punktu C od prostej AB :

$$h = \frac{|1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Zatem pole trójkąta: $P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} = 5$.



Ćwiczenie 3

Oblicz odległość punktu C od prostej l oraz pole trójkąta ABC , którego wierzchołki A i B są punktami przecięcia prostej l z osiami układu współrzędnych.

a) $l: y = 3x + 6$, $C(2, -4)$

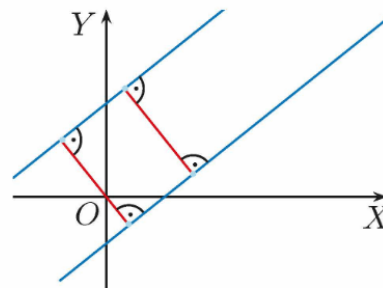
b) $l: y = -\frac{2}{3}x + 4$, $C(1, -1)$

Ćwiczenie 4

Punkty A i B są punktami przecięcia prostej $y = \frac{3}{5}x - 6$ z osiami układu współrzędnych. Oblicz pole równoległoboku $ABCD$, którego wierzchołek D ma współrzędne $(1, 4)$.

Odległość między dwiema prostymi równoległymi jest równa odległości dowolnego punktu jednej z tych prostych od drugiej prostej.

Najkrótszy odcinek łączący dwa punkty prostych równoległych musi być prostopadły do tych prostych (dlaczego?).



Przykład 4

Oblicz odległość między prostymi $l: 3x - 2y + 2 = 0$ i $k: 3x - 2y - 11 = 0$.

Dane proste są równoległe. Do równania prostej l podstawiamy $x = 0$ i otrzymujemy $y = 1$, zatem punkt $A(0, 1)$ należy do tej prostej.

Obliczamy odległość punktu A od prostej k :

$$d = \frac{|3 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 - 11|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

Ćwiczenie 5

Oblicz odległość między prostymi:

a) $y = x - 1$ i $y = x + 3$,

c) $x - 2y - 4 = 0$ i $y = \frac{1}{2}x + 6$,

b) $y = 2x - 1$ i $y = 2x + 2$,

d) $3x - 2y - 4 = 0$ i $y = \frac{3}{2}x + 1$.

Zadania

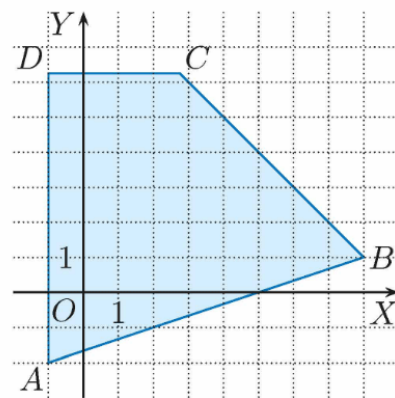
- Oblicz odległości punktów A i B od prostej l . Czy prosta AB jest równoległa do prostej l ?

a) $A(1, 4)$, $B(5, 5)$, $l: y = \frac{2}{5}x - 6$

b) $A(-4, -2)$, $B(2, 6)$, $l: y = 1\frac{1}{3}x - 5$

c) $A(-5, -1)$, $B(7, -6)$, $l: y = -2,4x$

- Dany jest czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A(-1, -2)$, $B(8, 1)$, $C(\frac{11}{4}, \frac{25}{4})$ i $D(-1, \frac{25}{4})$ (rysunek obok). Oblicz odległości punktu $S(2, 4)$ od boków tego czworokąta.



- Punkty $A(6, 4)$, $B(-3, 7)$ i $C(-2, 0)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Oblicz odległość wierzchołka C od prostej AB oraz pole tego równoległoboku.
- Oblicz pole trójkąta ABC .
 - $A(-1, 1)$, $B(3, -2)$, $C(2, 3)$
 - $A(-2, 1)$, $B(3, 6)$, $C(2, -1)$

5. Oblicz pole koła stycznego jednocześnie do prostych k i l .
 a) $k: 2x - y + 4 = 0, l: 2x - y - 6 = 0$ b) $k: y = \frac{3}{4}x + 6, l: y = \frac{3}{4}x - \frac{13}{2}$
6. Sprawdź, czy proste AB i CD są równoległe. Jeśli są, oblicz odległość między nimi oraz oblicz pole czworokąta $ABCD$.
 a) $A(-2, -6), B(6, 2), C(0, 3), D(-3, 0)$
 b) $A(-9, -2), B(3, -6), C(3, 4), D(0, 5)$
7. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz równanie prostej l_2 równoległej do prostej $l_1: y = 2x$, jeśli wiadomo, że odległość między tymi prostymi jest równa 4.

Równanie prostej l_2 ma postać $y = 2x + b$. Dla $x = 0$ otrzymujemy punkt $P(0, b)$ należący do tej prostej. Zapisujemy równanie prostej l_1 w postaci ogólnej: $-2x + y = 0$. Wyznaczamy odległość punktu P od tej prostej:

$$\frac{|-2 \cdot 0 + 1 \cdot b + 0|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{5}}$$

Ale $\frac{|b|}{\sqrt{5}} = 4$, zatem $|b| = 4\sqrt{5}$, czyli równanie prostej l_2 zapisujemy w postaci:

$$y = 2x + 4\sqrt{5} \quad \text{lub} \quad y = 2x - 4\sqrt{5}$$

Wyznacz równanie prostej odległej o 10 od prostej: a) $y = x$, b) $y = x + 3$.

8. a) Punkty A i B są punktami przecięcia prostej $y = 2x - 4$ z osiami układu współrzędnych, a punkt C leży na prostej $y = 2x + 2$. Oblicz pole trójkąta ABC .
 b) Punkty A i B są punktami przecięcia prostej $y = \frac{1}{2}x - 6$ z osiami układu współrzędnych, a punkty C i D leżą na prostej $y = \frac{1}{2}x - 1$. Oblicz pole równoległoboku $ABCD$.

Powtórzenie

9. Oblicz odległość punktu P od prostej l .
 a) $P(8, -4), l: y = 2,5x + 5$ b) $P(2, \frac{1}{2}), l: y = -\frac{3}{4}x + 2$
10. Oblicz odległość punktu C od prostej AB oraz pole trójkąta ABC .
 a) $A(-3, -1), B(5, -3), C(2, 4)$ b) $A(-2, -2), B(2, 0), C(4, 6)$
11. Oblicz odległość między prostymi k i l .
 a) $k: y = \frac{1}{2}x + 3, l: y = \frac{1}{2}x - 2$ b) $k: 3x + 4y + 4 = 0, l: y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

Pole trójkąta w układzie współrzędnych

Twierdzenie

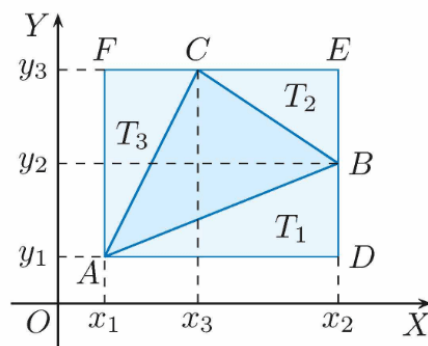
Pole trójkąta o wierzchołkach $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$ wyraża się wzorem:

$$P = \frac{1}{2} |x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_2 y_1 - x_3 y_2|$$

W dowodzie powyższego wzoru na pole trójkąta ABC (rysunek obok), korzysta się np. z tego, że pole to można zapisać w postaci:

$$P = P_{ADEF} - P_1 - P_2 - P_3$$

gdzie $ADEF$ jest prostokątem, a P_1 , P_2 , P_3 są odpowiednio polami trójkątów T_1 , T_2 , T_3 .



Przykład 1

Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach $A(-1, 1)$, $B(5, 2)$, $C(1, 5)$, korzystając z podanego wzoru. Następnie sprawdź otrzymany wynik, odejmując od pola prostokąta $ADEF$ sumę pól trójkątów T_1 , T_2 i T_3 .

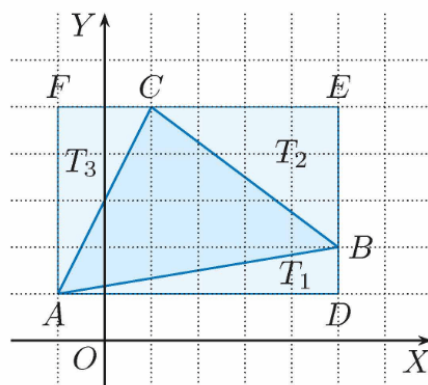
Współrzędne $x_1 = -1$, $y_1 = 1$, $x_2 = 5$, $y_2 = 2$, $x_3 = 1$, $y_3 = 5$ podstawiamy do wzoru i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} |x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_2 y_1 - x_3 y_2| = \\ &= \frac{1}{2} |(-1) \cdot 2 + 5 \cdot 5 + 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 5 - 5 \cdot 1 - 1 \cdot 2| = \\ &= \frac{1}{2} |-2 + 25 + 1 + 5 - 5 - 2| = \frac{1}{2} \cdot 22 = 11 \end{aligned}$$

Sprawdzamy otrzymany wynik:

$$P_{ADEF} = 6 \cdot 4 = 24, \quad P_1 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 = 3, \quad P_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6, \quad P_3 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$$

Zatem $P = P_{ADEF} - (P_1 + P_2 + P_3) = 24 - 13 = 11$.



Przykład 2

Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach $A(-2, -3)$, $B(8, 2)$, $C(4, 5)$.

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} |(-2) \cdot 2 + 8 \cdot 5 + 4 \cdot (-3) - (-2) \cdot 5 - 8 \cdot (-3) - 4 \cdot 2| = \\ &= \frac{1}{2} |-4 + 40 - 12 + 10 + 24 - 8| = \frac{1}{2} \cdot 50 = 25 \end{aligned}$$

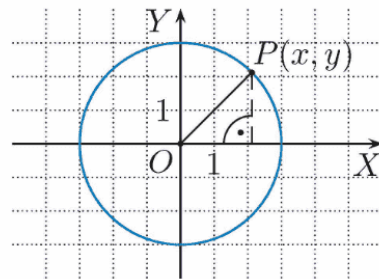
1. Korzystając z podanego wzoru, oblicz pole trójkąta ABC .

- a) $A(-3, 3)$, $B(3, -2)$, $C(5, 1)$ b) $A(1, 6)$, $B(-3, -2)$, $C(6, 3)$

2.4. Okrąg w układzie współrzędnych (1)

Na rysunku obok przedstawiono okrąg o promieniu 3 i środku w początku układu współrzędnych. Zauważ, że współrzędne dowolnego punktu $P(x, y)$ tego okręgu spełniają równanie:

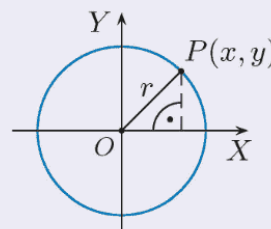
$$x^2 + y^2 = 3^2$$



Równanie okręgu

Okrąg o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $r > 0$ jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają równanie:

$$x^2 + y^2 = r^2$$



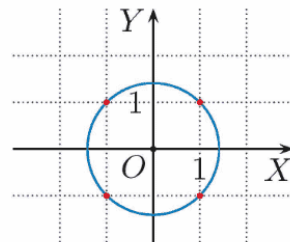
Uwaga. Zamiast „okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = r^2$ ” będziemy też pisać krótko: „okrąg $x^2 + y^2 = r^2$ ”.

Przykład 1

Okrąg o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $r = \sqrt{2}$ (rysunek obok) ma równanie:

$$x^2 + y^2 = 2$$

Należą do niego cztery punkty o obu współrzędnych całkowitych: $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ i $(1, -1)$.



Ćwiczenie 1

Podaj równanie okręgu o środku w początku układu współrzędnych i promieniu r . Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych do niego należy?

a) $r = 2$

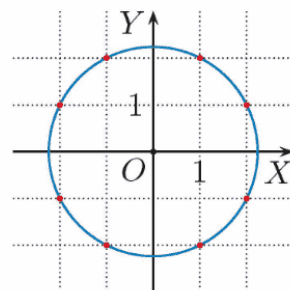
b) $r = 4$

c) $r = 5$

d) $r = 7$

Ćwiczenie 2

Do okręgu o środku w punkcie $O(0, 0)$ i promieniu $r = \sqrt{5}$ (rysunek obok) należy osiem punktów o obu współrzędnych całkowitych. Podaj równanie tego okręgu oraz współrzędne tych punktów.



Ćwiczenie 3

Podaj równanie okręgu o środku w punkcie $O(0, 0)$ i promieniu r oraz należące do niego punkty o obu współrzędnych całkowitych. Przedstaw to na rysunku.

a) $r = 2\sqrt{2}$

b) $r = 3\sqrt{2}$

c) $r = \sqrt{10}$

d) $r = \sqrt{17}$

Ćwiczenie 4

Podaj równanie okręgu o środku w punkcie $(0, 0)$ przechodzącego przez punkt:

- a) $(0, 6)$, b) $(-8, 0)$, c) $(\sqrt{3}, 0)$, d) $(0, 5\sqrt{2})$.

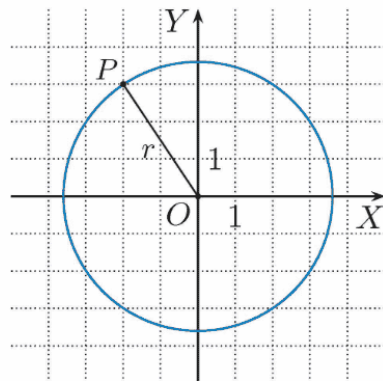
Przykład 2

Punkt $P(-2, 3)$ leży na okręgu o środku w punkcie $O(0, 0)$. Wyznacz równanie i promień tego okręgu.

Do równania okręgu $x^2 + y^2 = r^2$ podstawiamy $x = -2$ i $y = 3$:

$$(-2)^2 + 3^2 = r^2$$

Stąd $r^2 = 13$, czyli równanie okręgu ma postać $x^2 + y^2 = 13$, a jego promień $r = \sqrt{13}$.



Ćwiczenie 5

Wyznacz równanie i promień okręgu o środku w punkcie $O(0, 0)$, jeśli okrąg ten przechodzi przez punkt P .

- a) $P(5, -12)$ b) $P(-3, -3)$ c) $P(-4, -5)$ d) $P(\sqrt{3}-1, \sqrt{3}+1)$

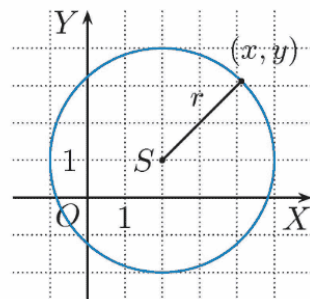
Wzór na odległość między dwoma punktami można wykorzystać do otrzymania równania okręgu o środku w punkcie (a, b) i promieniu r .

Przykład 3

Podaj równanie okręgu o środku w punkcie $S(2, 1)$ i promieniu $r = 3$.

Szukany okrąg jest zbiorem wszystkich punktów (x, y) , których odległość od punktu $S(2, 1)$ jest równa 3, zatem jego równanie ma postać:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} &= 3 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 &= 9\end{aligned}$$



Twierdzenie

Okrąg o środku w punkcie (a, b) i promieniu $r > 0$ jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają równanie:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Równanie $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ nazywamy **równaniem okręgu w postaci kanonicznej**.

Na przykład równanie $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 36$ jest spełnione przez współrzędne wszystkich punktów należących do okręgu o środku $(3, -5)$ i promieniu 6.

Ćwiczenie 6

Podaj równanie okręgu o środku w punkcie S i promieniu r , a następnie narysuj ten okrąg.

- a) $S(2, 5)$, $r = 3$ b) $S(-7, 6)$, $r = 2$ c) $S(-4, -3)$, $r = \sqrt{2}$

Ćwiczenie 7

Podaj współrzędne środka i promień okręgu o równaniu:

- a) $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 16$, e) $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{3}{4})^2 = 2\frac{7}{9}$,
b) $(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 9$, f) $x^2 + (y + \frac{9}{4})^2 = 10$,
c) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 100$, g) $(x - 1\frac{1}{6})^2 + y^2 = 45$,
d) $(x + 5)^2 + (y + 9)^2 = 225$, h) $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 8$.

Przykład 4

Wyznacz równanie okręgu o środku w punkcie $S(2, -1)$ przechodzącego przez punkt $P(3, 1)$.

Obliczamy promień: $r = |SP| = \sqrt{(3 - 2)^2 + (1 - (-1))^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$.

Zatem równanie okręgu ma postać: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$.

Ćwiczenie 8

Wyznacz równanie okręgu o środku w punkcie S przechodzącego przez punkt P .

- a) $S(0, -1)$, $P(1, 1)$ b) $S(-3, -1)$, $P(-1, 3)$ c) $S(-1, 1)$, $P(2, 2)$

D Przykład 5

Uzasadnij, że równanie $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 23 = 0$ jest równaniem okręgu o środku w punkcie $(2, 3)$ i promieniu 6.

Równanie okręgu o środku w punkcie $(2, 3)$ i promieniu 6 w postaci kanonicznej ma postać $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 36$.

Przekształcamy to równanie: $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 36$

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 23 = 0$$

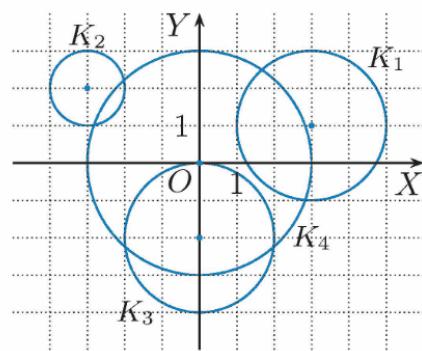
D Ćwiczenie 9

a) Uzasadnij, że równanie $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 30 = 0$ jest równaniem okręgu o środku w punkcie $(-3, 5)$ i promieniu 2.

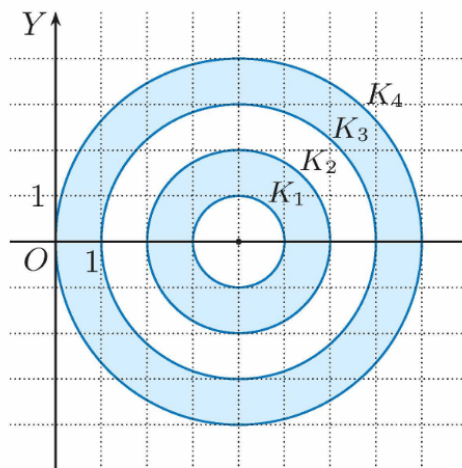
b) Uzasadnij, że równanie $x^2 + y^2 - 2x + 12y + 12 = 0$ jest równaniem okręgu o środku w punkcie $(1, -6)$ i promieniu 5.

Zadania

- Wyznacz równanie okręgu o środku w punkcie $O(0,0)$ przechodzącego przez punkt P . Czy punkty A i B należą do tego okręgu?
 - $P(0, -10), A(6, -8), B(-8, -6)$
 - $P(-5, 3), A(-6, 0), B(-3, -5)$
 - $P(3, \sqrt{7}), A(0, -4), B(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$
 - $P(\sqrt{2}, 3\sqrt{2}), A(2, 4), B(2\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$
- Narysuj w jednym układzie współrzędnych okręgi K_1 i K_2 . Oblicz pole pierścienia kołowego ograniczonego tymi okręgami.
 - $K_1: x^2 + y^2 = 5, K_2: x^2 + y^2 = 10$
 - $K_1: x^2 + y^2 = 13, K_2: x^2 + y^2 = 17$
- Podaj współrzędne środka okręgu i jego promień.
 - $(x+3)^2 + (y-6)^2 = 8$
 - $x^2 + (y-1)^2 = 3$
 - $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 16$
 - $(x-\sqrt{2})^2 + y^2 = 18$
- Dopasuj okręgi K_1, K_2, K_3 i K_4 (rysunek obok) do odpowiednich wzorów.
 - $x^2 + y^2 = 9$
 - $x^2 + (y+2)^2 = 4$
 - $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$
 - $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 1$
- Podaj równanie okręgu o środku w punkcie S i promieniu r .
 - $S(1, 3), r = 2$
 - $S(-2, -3), r = 7$
 - $S(-6, 2), r = \frac{3}{4}$
 - $S(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}), r = 2\frac{1}{2}$
 - $S(-5, -1), r = 2\sqrt{5}$
 - $S(\sqrt{3}, 0), r = 3\sqrt{3}$
- Wyznacz równanie okręgu, który ma środek w punkcie S i przechodzi przez punkt P .
 - $S(2, 0), P(1, 3)$
 - $S(4, 1), P(1, -3)$
 - $S(2, -3), P(4, -1)$
 - $S(-3, 1), P(1, 5)$
 - $S(-5, 2), P(-8, -2)$
 - $S(-4, -2), P(-1, 0)$
- Wyznacz równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek AB . Narysuj ten okrąg.
 - $A(1, 2), B(7, 2)$
 - $A(-3, 3), B(-3, -5)$
 - $A(-1, -2), B(3, 6)$
 - $A(-1, 1), B(3, 3)$
 - $A(-3, -4), B(5, 2)$
 - $A(-2, -3), B(6, -1)$
- Uzasadnij, że równanie $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 13 = 0$ jest równaniem okręgu o środku w punkcie $(-2, 4)$ i promieniu $\sqrt{7}$.

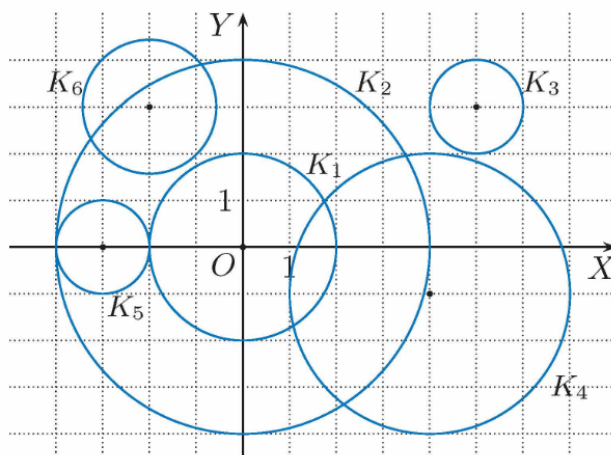


9. Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym ABC .
- a) $A(-1, 2), B(6, -2), C(3, 4)$ c) $A(2, 3), B(5, -1), C(-3, -7)$
b) $A(-2, -4), B(6, 0), C(0, 2)$ d) $A(-4, 1), B(4, -3), C(8, 5)$
10. Wyznacz równanie okręgu opisanego na kwadracie $ABCD$ i okręgu wpisanego w ten kwadrat.
- a) $A(0, 6), B(2, 0), C(8, 2), D(6, 8)$
b) $A(-2, 0), B(0, -4), C(4, -2), D(2, 2)$
11. Wyznacz równanie okręgu, do którego należą wierzchołki prostokąta $ABCD$.
- a) $A(-3, -1), B(1, -3), C(4, 3), D(0, 5)$
b) $A(-9, 2), B(-1, -4), C(2, 0), D(-6, 6)$
12. a) Podaj równania okręgów K_1, K_2, K_3 i K_4 przedstawionych na rysunku obok.
b) Do których z przedstawionych okręgów należą punkty $A(4 - \sqrt{6}, \sqrt{3})$, $B(1, -\sqrt{7})$ i $C(\frac{7}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$?
c) Jaki procent koła ograniczonego okręgiem K_4 został zacieniowany?
d) Podaj równanie okręgu o środku $(1, 0)$, który ma z okręgiem K_4 jeden punkt wspólny.



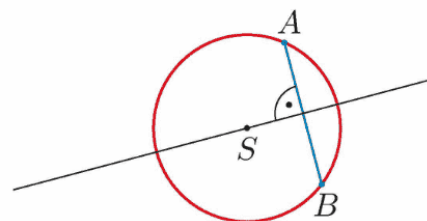
Powtórzenie

13. Punkt P należy do okręgu o środku w punkcie $O(0,0)$. Oblicz długość łuku tego okręgu wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze α .
- a) $P(-2, 2), \alpha = 90^\circ$ b) $P(5, \sqrt{11}), \alpha = 120^\circ$ c) $P(-3, -4), \alpha = 72^\circ$
14. Podaj równania okręgów $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6$ przedstawionych na rysunku obok.
15. Odcinek AB jest średnicą okręgu o środku w punkcie S . Wyznacz równanie tego okręgu oraz oblicz współrzędne punktu A .
- a) $B(7, 1), S(3, -1)$
b) $B(1, 5), S(-2, 1)$



2.5. Okrąg w układzie współrzędnych (2)

Przypomnijmy, że jeśli odcinek AB jest cięciwą okręgu, to środek okręgu należy do symetralnej tej cięciwy.



Przykład 1

Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A(0, 5)$ i $B(4, 1)$, którego środek należy do prostej l : $x = -2$.

Odcinek AB jest cięciwą okręgu. Jego środkiem jest punkt $P(2, 3)$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej AB :

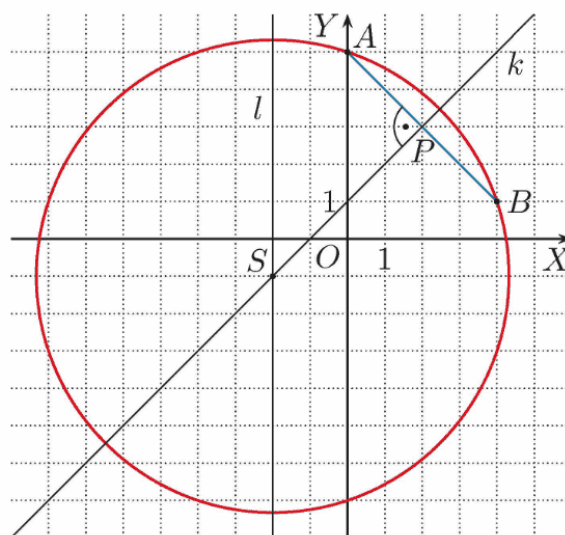
$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 5}{4 - 0} = \frac{-4}{4} = -1$$

Symetralna odcinka AB (prosta k na rysunku obok) jest do niego prostopadła, zatem jej współczynnik kierunkowy jest równy 1. Jej równanie ma więc postać: $y = x + b$.

Ponieważ punkt $P(2, 3)$ należy do prostej k , otrzymujemy: $3 = 2 + b$, skąd $b = 1$.

Prosta k opisana jest więc równaniem:

$$y = x + 1$$



Środek okręgu S jest punktem przecięcia prostej k i prostej l . Aby wyznaczyć jego współrzędne, rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Zatem otrzymujemy $S(-2, -1)$.

Obliczamy promień okręgu:

$$|SA| = \sqrt{(0 - (-2))^2 + (5 - (-1))^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Równanie okręgu ma postać: $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 40$.

Ćwiczenie 1

Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty A i B , którego środek należy do prostej l .

a) $A(-2, 2)$, $B(2, 4)$, $l: y = 1$

b) $A(3, -5)$, $B(5, -3)$, $l: y = x - 2$

Przykład 2

Wyznacz współrzędne środka okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $A(-4, -2)$, $B(6, -2)$ i $C(2, 4)$.

Środkiem okręgu opisanego na trójkącie jest punkt przecięcia symetralnych jego boków. Wyznamy symetralne boków AB i AC trójkąta ABC (rysunek obok).

Zauważmy, że symetralną boku AB jest prosta k : $x = 1$.

Aby wyznaczyć równanie symetralnej boku AC , skorzystamy z tego, że jest ona prostopadła do boku AC i przechodzi przez jego środek – punkt $P(-1, 1)$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej AC :

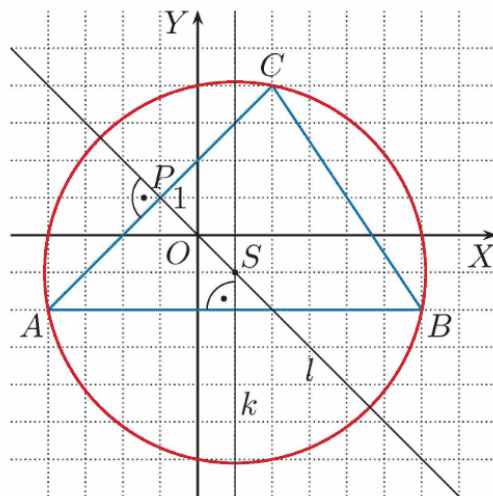
$$\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{4 - (-2)}{2 - (-4)} = \frac{4+2}{2+4} = 1$$

Zatem symetralna boku AC , prosta l , ma współczynnik kierunkowy równy -1 , więc jej równanie ma postać: $y = -x + b$.

Ponieważ punkt $P(-1, 1)$ należy do prostej l , otrzymujemy równanie:

$$1 = -(-1) + b$$

Stąd $b = 0$, czyli prosta l ma równanie $y = -x$. Środek okręgu S jest punktem przecięcia prostej k i prostej l , zatem ma współrzędne $(1, -1)$.



Ćwiczenie 2

Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC .

a) $A(6, 5)$, $B(0, -1)$, $C(2, 5)$

b) $A(3, 6)$, $B(-3, -6)$, $C(3, -2)$

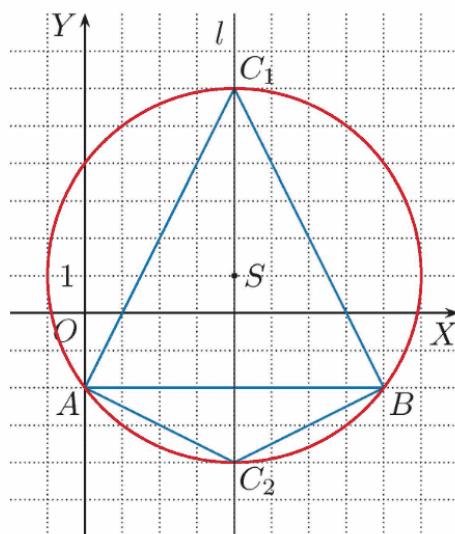
Przykład 3

Okrąg $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 25$ jest opisany na trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AB , gdzie $A(0, -2)$ i $B(8, -2)$. Wyznacz współrzędne wierzchołka C .

Środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC jest punkt $S(4, 1)$, a promień tego okręgu jest równy 5.

Zauważmy, że symetralną podstawy AB trójkąta ABC jest prosta l : $x = 4$.

Punkt C należy do prostej l oraz $|SC| = 5$, zatem ma on współrzędne $(4, 6)$ lub $(4, -4)$.



Ćwiczenie 3

Trójkąt równoramienny ABC jest wpisany w okrąg $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 8$. Wyznacz współrzędne wierzchołka C , jeśli $A(-1, -1)$ i $B(3, -1)$ są wierzchołkami przy podstawie tego trójkąta.

Zadania

- Punkt P jest środkiem cięciwy AB okręgu, którego środek należy do prostej l . Wyznacz równanie tego okręgu.
 - $A(3, 5)$, $P(4, 3)$, $l: x = -1$
 - $A(4, 0)$, $P(1, -1)$, $l: y = 5$
 - $A(-2, 3)$, $P(2, 5)$, $l: y = x$
 - $A(2, -3)$, $P(-1, -1)$, $l: y = x + 1$
- Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC .
 - $A(-3, 2)$, $B(9, 2)$, $C(5, 10)$
 - $A(-2, 6)$, $B(-2, -2)$, $C(4, 4)$
 - $A(3, -3)$, $B(9, 3)$, $C(-3, 9)$
 - $A(-7, -3)$, $B(3, -1)$, $C(1, 5)$
 - $A(0, -3)$, $B(7, -2)$, $C(7, 4)$
 - $A(-5, 0)$, $B(-3, -2)$, $C(1, 2)$
- Okrąg $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 25$ jest opisany na trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AB , gdzie $A(-2, -1)$, $B(6, -1)$. Oblicz pole tego trójkąta, jeśli wierzchołek C leży:
 - w I ćwiartce układu współrzędnych,
 - w IV ćwiartce układu współrzędnych.
- Okrąg $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$ jest opisany na trójkącie równoramiennym ABC , którego podstawą jest odcinek AB , gdzie $A(6, -2)$, $B(6, 4)$. Oblicz obwód tego trójkąta.

Powtórzenie

- Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A(-2, 4)$ i $B(4, 4)$, którego środek należy do prostej $l: y = -1$.
- Okrąg $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 29$ jest opisany na trójkącie ABC . Oblicz pole tego trójkąta, jeśli jest on:
 - prostokątny równoramienny,
 - prostokątny, a jedna jego przyprostokątna jest zawarta w osi OY ,
 - równoramienny ostrokątny oraz $A(-3, 4)$ i $B(-3, 0)$ są wierzchołkami przy jego podstawie,
 - równoramienny rozwartokątny oraz $A(-3, 4)$ i $B(7, 4)$ są wierzchołkami przy jego podstawie.

Postać ogólna równania okręgu

Równanie okręgu zapisane w postaci kanonicznej:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

można przekształcić do **postaci ogólnej**:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

gdzie A , B i C są pewnymi stałymi.

Przykład 1

Zapisz równanie okręgu $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$ w postaci ogólnej.

$$\begin{aligned}(x - 3)^2 + (y + 2)^2 &= 9 \\ x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 &= 9 \\ x^2 - 6x + y^2 + 4y + 4 &= 0\end{aligned}$$

Nie zawsze równanie postaci $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ jest równaniem okręgu.

Przykład 2

Sprawdź, czy podane równanie jest równaniem okręgu.

a) $x^2 + y^2 + 2x + 10y - 10 = 0$

$$\begin{aligned}(x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 2 \cdot 5y + 25) - 10 - 1 - 25 &= 0 \\ (x + 1)^2 + (y + 5)^2 &= 36\end{aligned}$$

Jest to równanie okręgu o środku w punkcie $(-1, -5)$ i promieniu 6.

b) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 13 = 0$

$$\begin{aligned}(x^2 + 2 \cdot 3x + 9) + (y^2 - 2 \cdot 2y + 4) + 13 - 9 - 4 &= 0 \\ (x + 3)^2 + (y - 2)^2 &= 0\end{aligned}$$

Powyższe równanie jest prawdziwe tylko dla $x = -3$ i $y = 2$, zatem spełniają je jedynie współrzędne punktu $(-3, 2)$. Nie jest to więc równanie okręgu.

c) $x^2 + y^2 - x - 3y + 3 = 0$

$$\begin{aligned}(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}) + (y^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}y + \frac{9}{4}) + 3 - \frac{1}{4} - \frac{9}{4} &= 0 \\ (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Suma kwadratów nie może być liczbą ujemną, więc powyższe równanie jest sprzeczne (zbiór rozwiązań jest pusty) i nie może być równaniem okręgu.

1. Sprawdź, czy podane równanie jest równaniem okręgu.

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 3x - 3y + 4\frac{1}{2} = 0$

b) $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 12 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 3y + 2 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 6y + 2x = 0$

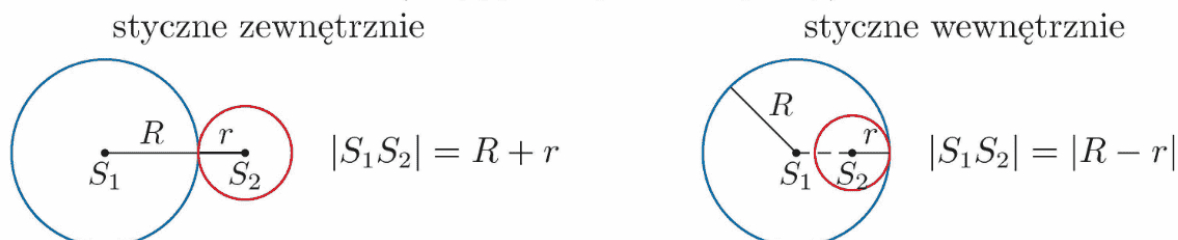
f) $2x^2 + 2y^2 - 20x - 4y + 2 = 0$

2.6. Wzajemne położenie dwóch okręgów

Przypomnijmy, jak mogą być położone względem siebie dwa różne okręgi.

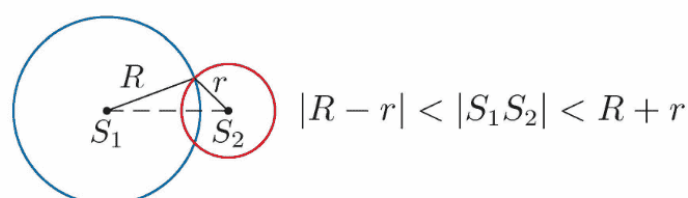
Okręgi styczne

(mają jeden punkt wspólny)



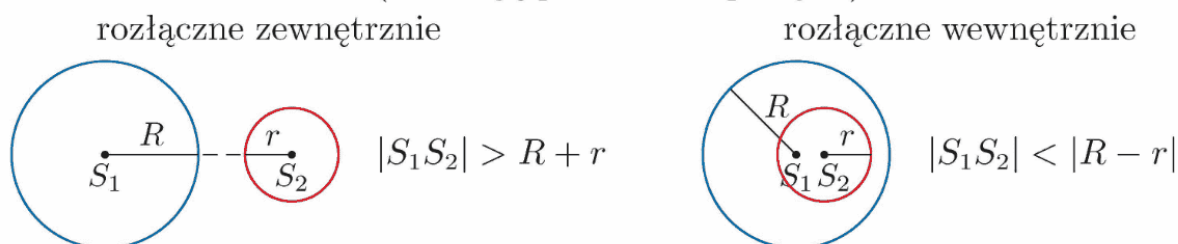
Okręgi przecinające się

(mają dwa punkty wspólne)



Okręgi rozłączne

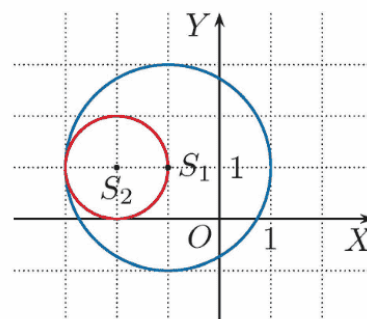
(nie mają punktów wspólnych)



Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono okrąg o środku $S_1(-1, 1)$ i promieniu $R = 2$ oraz okrąg o środku $S_2(-2, 1)$ i promieniu $r = 1$.

Zauważ, że $|R - r| = 1 = |S_1S_2|$. Okręgi te mają jeden punkt wspólny (są styczne wewnętrznie).



Ćwiczenie 1

Narysuj w układzie współrzędnych okrąg o środku w punkcie S_1 i promieniu R oraz okrąg o środku w punkcie S_2 i promieniu r . Podaj odległość między środkami tych okręgów. Ile punktów wspólnych mają te okręgi?

- | | |
|---|--|
| a) $S_1(-1, 0)$, $R = 5$, $S_2(1, 0)$, $r = 2$ | c) $S_1(-2, 0)$, $R = 6$, $S_2(-2, 4)$, $r = 2$ |
| b) $S_1(0, 3)$, $R = 4$, $S_2(0, -2)$, $r = 1$ | d) $S_1(0, 0)$, $R = \frac{3}{2}$, $S_2(2, 2)$, $r = \frac{3}{2}$ |

Przykład 2

Ile punktów wspólnych mają okręgi:

$$K_1: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 16 \quad \text{ i } \quad K_2: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4?$$

Środkiem okręgu K_1 jest punkt $S_1(3, 4)$, a jego promień $R = 4$.

Środkiem okręgu K_2 jest punkt $S_2(1, 2)$, a jego promień $r = 2$.

Obliczamy odległość między środkami tych okręgów:

$$|S_1S_2| = \sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$R+r = 6$ oraz $|R-r| = 2$, zatem $|R-r| < |S_1S_2| < R+r$ (gdyż $2 < 2\sqrt{2} < 6$), więc okręgi K_1 i K_2 mają dwa punkty wspólne (przecinają się).

Ćwiczenie 2

Ile punktów wspólnych mają okręgi K_1 i K_2 ?

- a) $K_1: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 20$, $K_2: (x-7)^2 + (y-4)^2 = 5$
- b) $K_1: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 49$, $K_2: (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$
- c) $K_1: (x+3)^2 + (y-3)^2 = 36$, $K_2: (x+1)^2 + (y+1)^2 = 4$
- d) $K_1: (x-4)^2 + (y-4)^2 = 40$, $K_2: (x-1)^2 + (y-3)^2 = 10$

Przykład 3

Dany jest okrąg $K_1: (x+3)^2 + (y+2)^2 = 25$ oraz okrąg K_2 o środku w punkcie $S_2(5, 4)$ i promieniu r . Dla jakich wartości r okręgi te mają jeden punkt wspólny?

Środkiem okręgu K_1 jest punkt $S_1(-3, -2)$, a jego promień $R = 5$.

Obliczamy odległość między środkami okręgów K_1 i K_2 :

$$|S_1S_2| = \sqrt{(5-(-3))^2 + (4-(-2))^2} = \sqrt{64+36} = 10$$

Dane okręgi mają jeden punkt wspólny, gdy:

- są styczne zewnętrznie, czyli $|S_1S_2| = 10 = 5 + r$, skąd $r = 5$
lub
- są styczne wewnętrznie, czyli $|S_1S_2| = 10 = |5 - r|$, skąd $r = 15$.

Ćwiczenie 3

Dany jest okrąg $K_1: (x+3)^2 + (y-2)^2 = 16$ oraz okrąg K_2 o środku w punkcie S_2 i promieniu r . Dla jakich wartości r okręgi te mają jeden punkt wspólny?

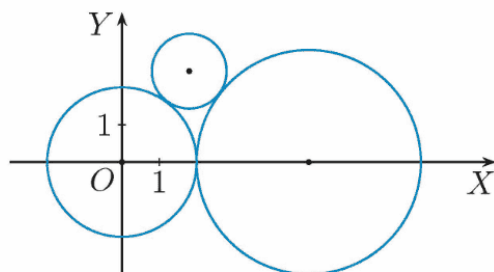
- a) $S_2(4, 2)$
- b) $S_2(-4, 4)$

Ćwiczenie 4

Dany jest okrąg $(x+7)^2 + (y-5)^2 = 25$ oraz okrąg o środku w punkcie $S(5, -4)$ i promieniu r . Dla jakich wartości r okręgi te mają dwa punkty wspólne?

Zadania

1. Dane są okręgi K_1 i K_2 . Oblicz odległość między środkami tych okręgów i określ ich wzajemne położenie.
- a) $K_1: (x-3)^2 + y^2 = 4$, $K_2: (x-3)^2 + (y-6)^2 = 16$
b) $K_1: (x+2)^2 + (y+2)^2 = 1$, $K_2: (x+2)^2 + (y-3)^2 = 36$
c) $K_1: (x+2)^2 + (y+1)^2 = 90$, $K_2: (x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$
d) $K_1: (x+4)^2 + (y-5)^2 = 84$, $K_2: (x+5)^2 + (y+2)^2 = 16$
e) $K_1: (x+1)^2 + (y-8)^2 = 49$, $K_2: (x-1)^2 + (y-6)^2 = 4$
f) $K_1: (x-7)^2 + (y-2)^2 = 49$, $K_2: (x+5)^2 + (y+3)^2 = 25$
2. Oblicz odległość między środkami okręgów K_1 i K_2 . Dla jakich wartości r , gdzie $r > 0$, okręgi te mają jeden punkt wspólny, a dla jakich – dwa punkty wspólne?
- a) $K_1: (x-5)^2 + (y+1)^2 = 64$, $K_2: (x+7)^2 + (y-4)^2 = r^2$
b) $K_1: (x+2)^2 + (y+1)^2 = 16$, $K_2: (x-3)^2 + (y-3)^2 = r^2$
c) $K_1: (x-2)^2 + (y-5)^2 = 49$, $K_2: (x+6)^2 + (y-1)^2 = r^2$
3. Średnicą okręgu K_1 jest odcinek AB , a średnicą okręgu K_2 – odcinek CD . Wyznacz równania tych okręgów i określ ich wzajemne położenie.
- a) $A(-3, -1)$, $B(1, 3)$, $C(3, 3)$, $D(1, 5)$
b) $A(-5, 1)$, $B(-1, -3)$, $C(1, -1)$, $D(1, 5)$
c) $A(-2, 1)$, $B(4, 1)$, $C(3, 2)$, $D(1, 4)$
4. Okręgi o promieniach 1, 2 i 3, parami styczne zewnętrznie, położone są w sposób przedstawiony na rysunku obok. Wyznacz współrzędne środka najmniejszego okręgu.



Powtórzenie

5. Ile punktów wspólnych mają okręgi $K_1: (x+2)^2 + (y+1)^2 = 25$ i K_2 ?
- a) $K_2: (x+2)^2 + (y-2)^2 = 2$ c) $K_2: (x-4)^2 + (y+4)^2 = 5$
b) $K_2: (x-7)^2 + (y-5)^2 = 25$ d) $K_2: (x-6)^2 + (y+7)^2 = 225$
6. Dany jest okrąg K_1 o środku $S_1(1, 3)$ i promieniu r . Dla jakich wartości r okrąg ten ma jeden punkt wspólny z okręgiem K_2 , a dla jakich – dwa punkty wspólne?
- a) $K_2: (x+2)^2 + (y+1)^2 = 4$ b) $K_2: (x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$

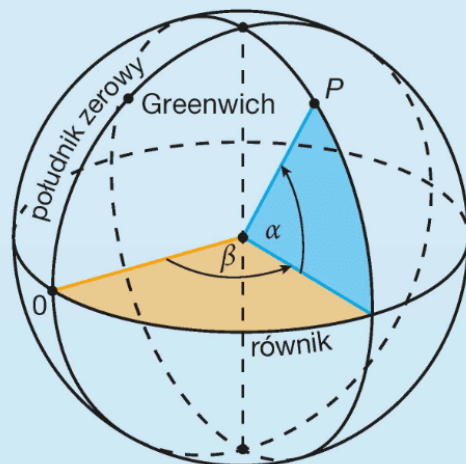
Współrzędne geograficzne

Określając położenie punktu na kuli ziemskiej, podaje się jego:

szerokość geograficzną (kąt α mierzony od równika w kierunku północnym albo południowym),

długość geograficzną (kąt β mierzony od południka zerowego w kierunku wschodnim albo zachodnim).

Tak określony układ współrzędnych wykorzystuje się przy tworzeniu map.



Na mapie punkt O oznacza położenie zamku Ogródzieniec ($50^{\circ}27'N$, $19^{\circ}33'E$) pokazanego na zdjęciu obok.



- 1 Czy potrafisz wskazać, które z punktów A, B, C, D odpowiadają położeniu zamków na zdjęciach?



Zamek w Niedzicy



Zamek w Czersku



Zamek Czocho



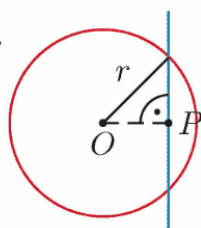
Zamek w Gniewie

2.7. Wzajemne położenie okręgu i prostej

Przypomnijmy, że okrąg i prosta mogą mieć dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub nie mieć punktów wspólnych.

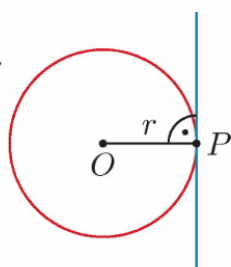
Niech $|OP|$ będzie odległością środka okręgu od prostej.

$$|OP| < r$$



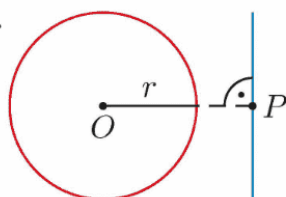
Prostą, która ma z okręgiem dwa punkty wspólne, nazywamy jego **sieczną**. Odległość siecznej od środka okręgu jest mniejsza od jego promienia.

$$|OP| = r$$



Jeśli prosta ma z okręgiem jeden punkt wspólny, to mówimy, że jest **styczna** do okręgu (wspólny punkt nazywamy **punktem styczności**). Promień okręgu prowadzony do punktu styczności z prostą jest do niej prostopadły. Odległość stycznej od środka okręgu jest równa jego promieniowi.

$$|OP| > r$$



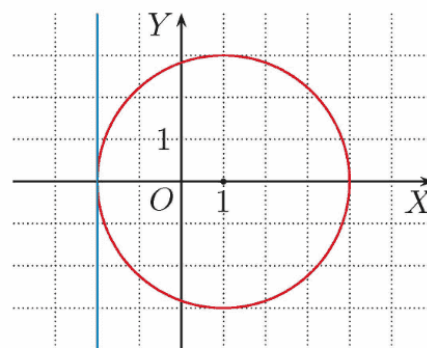
Na rysunku obok okrąg i prosta nie mają punktów wspólnych (są rozłączne). Odległość prostej od środka okręgu jest większa od jego promienia.

Przykład 1

Ile punktów wspólnych z okręgiem o środku w punkcie $(1, 0)$ ma prosta $x = -2$ w zależności od promienia r tego okręgu?

Dana prosta:

- ma jeden punkt wspólny z okręgiem dla $r = 3$ (rysunek obok),
- ma dwa punkty wspólne z okręgiem dla $r > 3$,
- nie ma punktów wspólnych z okręgiem dla $0 < r < 3$.



Ćwiczenie 1

Ile punktów wspólnych z okręgiem o środku w punkcie S ma prosta k w zależności od promienia r tego okręgu?

a) $S(2, -2)$, $k: y = 2$

c) $S(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, $k: x = 1 - \sqrt{2}$

b) $S(-2, 2)$, $k: x = \sqrt{3}$

d) $S(-1, 3)$, $k: y = x + 2$

Przykład 2

Dane są okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = 16$ i prosta $l: x = 3$. Oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez punkty ich przecięcia.

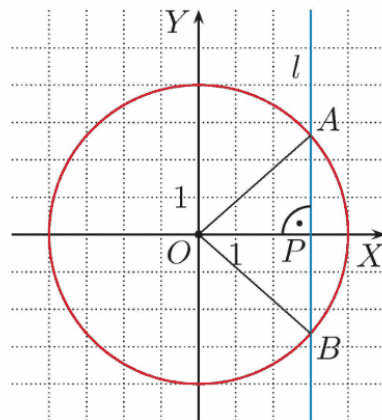
Środkiem okręgu jest punkt $(0,0)$, a promień jest równy 4. Niech $|OP|$ będzie odległością środka okręgu od prostej l , a punkty A, B niech będą punktami przecięcia okręgu z tą prostą.

Wówczas $|OP| = 3$, zatem:

$$|AP| = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$$

Trójkąty OPA i OPB są przystające, więc długość cięciwy:

$$|AB| = 2 \cdot |AP| = 2\sqrt{7}$$



Ćwiczenie 2

Oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez punkty przecięcia prostej l i okręgu o równaniu $(x-2)^2 + y^2 = 25$.

a) $l: x = 4$

b) $l: x = -1$

c) $l: y = \frac{1}{2}x$

Ćwiczenie 3

Cięciwa o długości 6 jest wyznaczona przez punkty przecięcia prostej l i okręgu o środku w punkcie S . Wyznacz równanie tego okręgu.

a) $l: x = 3, S(-1, -2)$

b) $l: y = -2, S(4, 1)$

Przykład 3

Ile punktów wspólnych z okręgiem o równaniu $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 10$ ma prosta $l: x - 3y + 3 = 0$?

Promień okręgu jest równy $\sqrt{10}$, a środkiem okręgu jest punkt $S(4, -1)$. Obliczamy odległość punktu S od prostej l :

$$d = \frac{|1 \cdot 4 + (-3) \cdot (-1) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

Odległość środka okręgu od prostej jest równa promieniowi okręgu, więc okrąg i prosta są styczne – mają jeden punkt wspólny.

Ćwiczenie 4

Ile punktów wspólnych z okręgiem o środku w punkcie S i promieniu 4 ma prosta l ?

a) $S(3, 4), l: 12x + 5y - 4 = 0$

c) $S(-3, 2), l: 4x + 3y + 6 = 0$

b) $S(7, 4), l: 3x + 4y - 12 = 0$

d) $S(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}), l: x + y = 0$

Zadania

1. Ile punktów wspólnych z okręgiem $(x+3)^2 + (y-1)^2 = r^2$ ma prosta k w zależności od promienia r tego okręgu?

a) $k: y = 5$

b) $k: x = 5$

c) $k: x = -\frac{1}{2}$

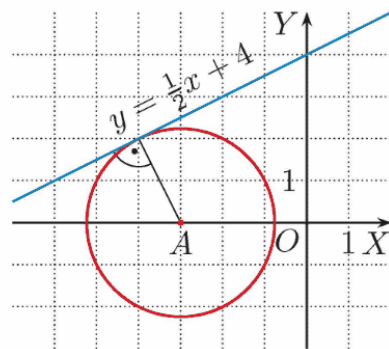
2. Prosta l jest styczna do okręgu, którego środkiem jest punkt A . Oblicz promień tego okręgu.

a) $l: y = \frac{1}{2}x + 4$, $A(-3, 0)$ (rysunek obok)

b) $l: 3x + 4y - 5 = 0$, $A(-4, -2)$

c) $l: y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$, $A(2, 1)$

d) $l: y = 3x - 1$, $A(-5, 4)$



3. Oblicz odległość punktu S od prostej l . Ile punktów wspólnych z okręgiem o środku w punkcie S i promieniu 3 ma ta prosta?

a) $S(1, 3)$, $l: 2x + y = 0$

d) $S(-1, -2)$, $l: \frac{2}{3}x - y + 3 = 0$

b) $S(-7, 2)$, $l: x - 2y + 1 = 0$

e) $S(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$, $l: 3x + y - 1 = 0$

c) $S(-2, 4)$, $l: x - y + 2 = 0$

f) $S(-8\sqrt{2}, \sqrt{2} + 1)$, $l: x - 7y + 7 = 0$

4. Określ liczbę punktów wspólnych prostej l z okręgiem o środku w punkcie S w zależności od promienia r tego okręgu.

a) $l: 3x + 4y - 1 = 0$, $S(1, 2)$

d) $l: x - \frac{1}{2}y + 2 = 0$, $S(3, 2)$

b) $l: \frac{1}{2}x - y - \frac{3}{2} = 0$, $S(-5, 1)$

e) $l: \sqrt{2}x - y = 0$, $S(6, 0)$

c) $l: \frac{4}{3}x - y + 4 = 0$, $S(5, 3)$

f) $l: \sqrt{3}x - y + 4 = 0$, $S(2\sqrt{3}, -1)$

Powtórzenie

5. Ile punktów wspólnych ma podany okrąg z prostą $y = -2$?

a) $(x+5)^2 + (y-4)^2 = 36$

c) $(x+2)^2 + (y-6)^2 = 4$

b) $(x-8)^2 + (y+1)^2 = 4$

d) $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 8$

- D** 6. Uzasadnij, że prosta k jest styczna do okręgu $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$.

a) $k: y = \frac{4}{3}x + 9$

b) $k: y = \frac{3}{4}x - 5$

7. Ile punktów wspólnych ma okrąg $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 17$ z prostą AB ?

a) $A(-2, -1)$, $B(4, -4)$

b) $A(0, -3)$, $B(2, 5)$

c) $A(1, -2)$, $B(3, 4)$

8. Podaj równania stycznych do okręgu $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 49$ równoległych do osi: a) OX , b) OY .

2.8. Układy równań – powtórzenie

Przykład 1

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x - 3y = -5 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$ metodą podstawiania i podaj jego interpretację geometryczną.

Wybieramy jedno z równań i wyznaczamy z niego jedną z niewiadomych.

$$\begin{cases} x = 3y - 5 \\ 2(3y - 5) + 5y = 1 \end{cases}$$

Wyznaczamy niewiadomą x z pierwszego równania.

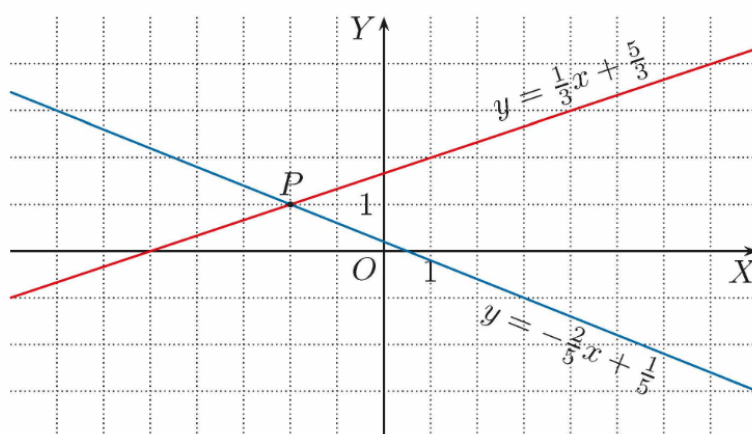
Podstawiamy wyrażenie $3y - 5$ w miejsce x w drugim równaniu.

$$\begin{cases} x = 3y - 5 \\ 6y - 10 + 5y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y - 5 \\ 11y = 11 \quad / : 11 \end{cases}$$

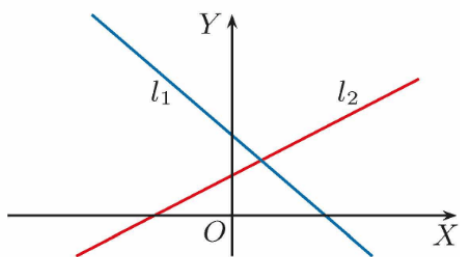
$$\begin{cases} x = 3y - 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

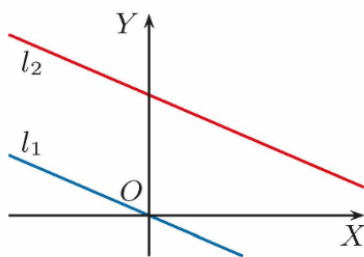


Aby przedstawić interpretację geometryczną układu równań, równania przekształcamy do postaci $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$ i $y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}$. Rysujemy proste określone tymi równaniami. Punkt $P(-2, 1)$ jest punktem przecięcia tych prostych.

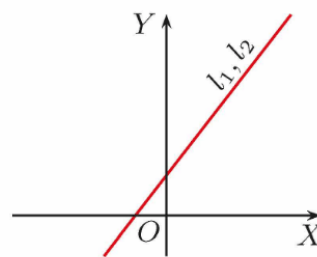
Przypomnijmy, że jeśli proste l_1 i l_2 odpowiadają równaniom układu, to możliwa jest jedna z następujących sytuacji.



Układ oznaczony – proste przecinają się w jednym punkcie.



Układ sprzeczny – proste są równoległe i różne.



Układ nieoznaczony – proste pokrywają się.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y = -4 \\ x - 2y = -6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$

Przypomnijmy, że prosta i parabola mogą mieć dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub nie mieć punktów wspólnych.

Przykład 2

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = x^2 - 2 \end{cases}$ i podaj jego interpretację geometryczną.

Układ rozwiążemy metodą podstawiania. Do drugiego równania w miejsce y podstawiamy wyrażenie $2x - 2$ i otrzymujemy:

$$2x - 2 = x^2 - 2$$

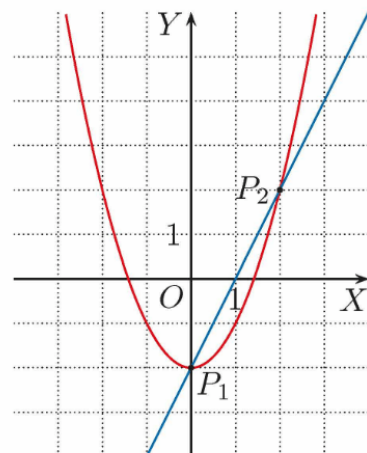
$$2x - x^2 = 0$$

$$x(2 - x) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x = 2$$

Dla każdej wartości niewiadomej x obliczamy wartość niewiadomej y i otrzymujemy dwa rozwiązania:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \text{ oraz } \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$



Na rysunku przedstawiono prostą $y = 2x - 2$ i parabolę $y = x^2 - 2$. Mają one dwa punkty wspólne: $P_1(0, -2)$ i $P_2(2, 2)$.

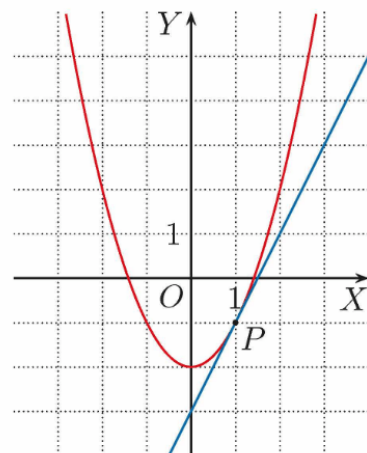
Przykład 3

Na rysunku obok przedstawiono parabolę $y = x^2 - 2$ i prostą $y = 2x - 3$. Mają one jeden punkt wspólny: $P(1, -1)$.

Układ równań:

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = x^2 - 2 \end{cases}$$

ma zatem jedno rozwiązanie (rozwiąż ten układ algebraicznie).



Ćwiczenie 2

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = -x^2 + 4 \\ y = -x + 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = 2x^2 - 4 \\ y = 2x \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = x + 4 \\ y = (x - 2)^2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = -(x + 1)^2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = -2x^2 + 2 \end{cases}$

Zadania

1. Rozwiąż układ równań. Podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} x + y = -4 \\ 2x + y = -5 \end{cases}$	c) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$	e) $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ x - y = -4 \end{cases}$	d) $\begin{cases} 3x + y = -5 \\ 5x - 3y = -3 \end{cases}$	f) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x - 3y = -10 \end{cases}$

2. Boki trójkąta są zawarte w prostych: $4x - 3y + 6 = 0$, $3x + 4y - 8 = 0$ oraz $7x + y - 27 = 0$. Wyznacz współrzędne jego wierzchołków. Narysuj ten trójkąt.

3. Rozwiąż układ równań. Podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} y = x - 5 \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$	c) $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ y = x^2 - 3 \end{cases}$	e) $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = (x - 1)^2 \end{cases}$
b) $\begin{cases} y = x + 3 \\ y = -x^2 + 5 \end{cases}$	d) $\begin{cases} y = -2x - 1 \\ y = -x^2 - 1 \end{cases}$	f) $\begin{cases} y = -x - 1 \\ y = (x + 3)^2 \end{cases}$

4. Rozwiąż układ równań. Podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} y = -2x + 2 \\ y = 2x^2 - 2 \end{cases}$	c) $\begin{cases} y = -2x - 6 \\ y = \frac{1}{2}x^2 - 4 \end{cases}$	e) $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = \frac{1}{4}x^2 \end{cases}$
b) $\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = 2(x - 1)^2 \end{cases}$	d) $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + 2 \end{cases}$	f) $\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = -\frac{1}{4}x^2 - 2 \end{cases}$

Powtórzenie

5. Rozwiąż układ równań. Podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} -3x + 2y = -8 \\ x + y = 1 \end{cases}$	b) $\begin{cases} 3x + y = -4 \\ x - 2y = -6 \end{cases}$	c) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$
---	---	---

6. Naszkicuj w tym samym układzie współrzędnych parabolę $y = -x^2 + 3$ oraz prostą k . Odczytaj współrzędne ich punktów wspólnych.

a) $k: y = x + 1$	c) $k: y = 2x$	e) $k: y = -x - 3$
b) $k: y = -x + 1$	d) $k: y = 2x + 3$	f) $k: y = 2x + 4$

7. Wyznacz współrzędne punktów wspólnych wykresów funkcji f i g .

a) $f(x) = 2x, g(x) = 2x^2 - 4x$	b) $f(x) = -2x + 4, g(x) = x^2 - 4x + 4$
----------------------------------	--

2.9. Punkty wspólne prostej i okręgu (1)

Przykład 1

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

Z drugiego równania wyznaczamy $y = -x - 2$ i podstawiamy do pierwszego równania:

$$x^2 + (-x - 2)^2 = 20$$

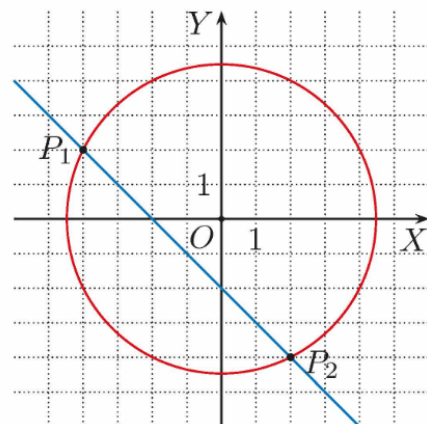
$$2x^2 + 4x - 16 = 0 \quad / : 2$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x = -4 \quad \text{lub} \quad x = 2$$

Zatem rozwiązaniem układu są dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$$



Okrąg $x^2 + y^2 = 20$ i prosta $x + y + 2 = 0$ mają dwa punkty wspólne: $P_1(-4, 2)$ i $P_2(2, -4)$.

Przykład 2

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$

Do pierwszego równania podstawiamy $y = 2x - 5$:

$$x^2 + (2x - 5)^2 = 5$$

$$5x^2 - 20x + 20 = 0 \quad / : 5$$

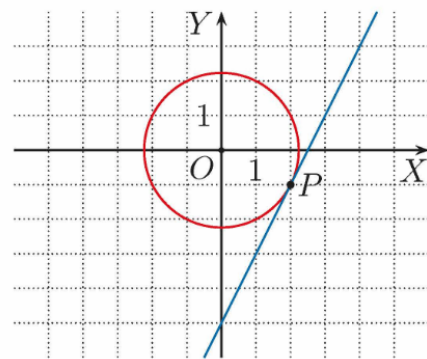
$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

$$x = 2$$

Zatem rozwiązaniem układu jest para liczb:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$



Prosta $y = 2x - 5$ jest styczna do okręgu $x^2 + y^2 = 5$ w punkcie $P(2, -1)$.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ y = x - 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ y = 3x + 10 \end{cases}$

Przykład 3

Wyznacz punkty wspólne prostej $y = -x - 6$ oraz okręgu $x^2 + y^2 = 20$. Oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez te punkty.

Podstawiamy $y = -x - 6$ do równania okręgu:

$$x^2 + (-x - 6)^2 = 20$$

$$2x^2 + 12x + 16 = 0 \quad / : 2$$

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

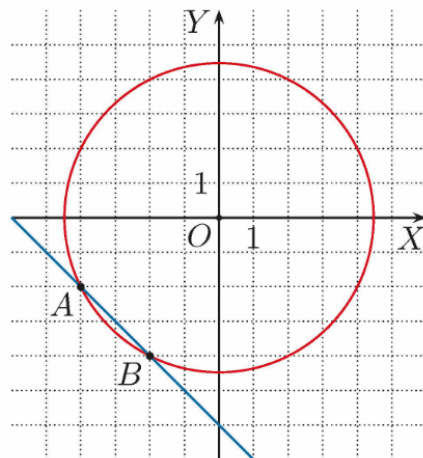
$$x = -4 \text{ lub } x = -2$$

Dla $x = -4$ otrzymujemy $y = -2$,

dla $x = -2$ otrzymujemy $y = -4$.

Zatem punktami wspólnymi są: $A(-4, -2)$ oraz $B(-2, -4)$. Obliczamy długość cięciwy:

$$|AB| = \sqrt{(-2 - (-4))^2 + (-4 - (-2))^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$



Ćwiczenie 2

Prosta l przecina okrąg K w punktach A i B . Oblicz długość cięciwy AB .

a) $l: y = x - 5$, $K: x^2 + y^2 = 17$

b) $l: y = 3x - 10$, $K: x^2 + y^2 = 20$

Przykład 4

Na rysunku obok przedstawiono kwadrat wpisany w okrąg $x^2 + y^2 = 10$. Bok AB jest zawarty w prostej $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$. Wyznacz wierzchołki tego kwadratu.

Podstawiamy $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ do równania okręgu:

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\right)^2 = 10$$

$$x^2 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{4} = 10$$

$$\frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{15}{4} = 0 \quad / \cdot \frac{4}{5}$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

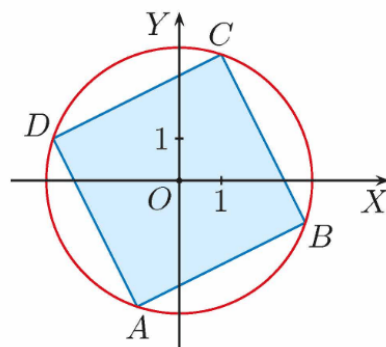
$$x = -1 \text{ lub } x = 3$$

Dla $x = -1$ otrzymujemy $y = -3$, a dla $x = 3$ otrzymujemy $y = -1$.

Zatem wierzchołek A ma współrzędne $(-1, -3)$, a wierzchołek B ma współrzędne $(3, -1)$.

Punkt $O(0,0)$ jest środkiem przekątnej AC oraz $A(-1, -3)$, zatem wierzchołek C ma współrzędne $(1, 3)$.

Punkt $O(0,0)$ jest środkiem przekątnej BD oraz $B(3, -1)$, zatem wierzchołek D ma współrzędne $(-3, 1)$.



Ćwiczenie 3

Wierzchołki prostokąta $ABCD$ należą do okręgu $x^2 + y^2 = 13$, a bok BC jest zawarty w prostej $y = -x + 5$. Wyznacz te wierzchołki.

Zadania

1. Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y = x \end{cases}$	d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$	g) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \\ 3x - 2y - 13 = 0 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ y = -\frac{3}{2}x \end{cases}$	e) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases}$	h) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x - 5y - 13 = 0 \end{cases}$
c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = 2x + 5 \end{cases}$	f) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ 3x - y - 10 = 0 \end{cases}$	i) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x - 2y - 10 = 0 \end{cases}$

2. W okrąg $x^2 + y^2 = 18$ wpisano trójkąt równoramienny prostokątny. Wierzchołek kąta prostego tego trójkąta ma współrzędne $(-3, 3)$. Wyznacz jego pozostałe wierzchołki.

3. W okrąg $x^2 + y^2 = 20$ jest wpisany kwadrat, którego jedna z przekątnych jest zawarta w prostej $y = -\frac{1}{2}x$. Wyznacz wierzchołki tego kwadratu i oblicz jego obwód.

4. W okrąg $x^2 + y^2 = 40$ jest wpisany kwadrat, którego jeden z boków jest zawarty w prostej $y = 2x - 10$. Wyznacz wierzchołki tego kwadratu i oblicz jego pole.

5. Wierzchołki prostokąta $ABCD$ należą do okręgu K , a jeden z jego boków jest zawarty w prostej l . Wyznacz te wierzchołki.

a) $l: x - y + 3 = 0, K: x^2 + y^2 = 17$ b) $l: x + y + 4 = 0, K: x^2 + y^2 = 26$

Powtórzenie

6. Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y = x - 4 \end{cases}$	c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 2x + y + 5 = 0 \end{cases}$	e) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x - y - 5 = 0 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ 5x - 2y = 0 \end{cases}$	d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ 2x - y + 10 = 0 \end{cases}$	f) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ 5x + 3y - 17 = 0 \end{cases}$

7. Przekątne trapezu są zawarte w prostych $y - x = 1$ i $x + y = -1$. Wyznacz wierzchołki tego trapezu, jeśli należą one do okręgu $x^2 + y^2 = 25$.

2.10. Punkty wspólne prostej i okręgu (2)

Przykład 1

Wyznacz punkty wspólne prostej $y = x - 5$ i okręgu $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

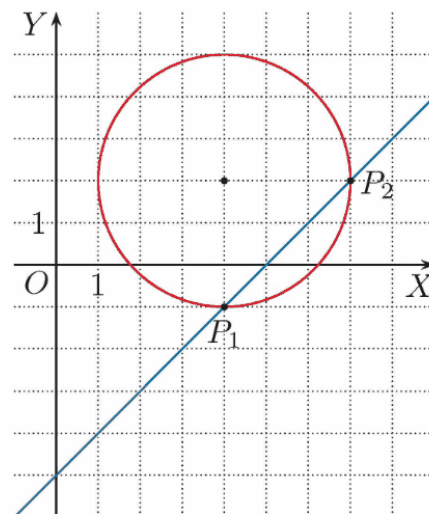
Do równania okręgu podstawiamy $y = x - 5$:

$$\begin{aligned}(x - 4)^2 + (x - 5 - 2)^2 &= 9 \\(x - 4)^2 + (x - 7)^2 &= 9 \\x^2 - 8x + 16 + x^2 - 14x + 49 &= 9 \\2x^2 - 22x + 56 &= 0 \quad / : 2 \\x^2 - 11x + 28 &= 0 \\x &= 4 \text{ lub } x = 7\end{aligned}$$

Dla $x = 4$ otrzymujemy $y = -1$,

a dla $x = 7$ otrzymujemy $y = 2$.

Zatem punktami wspólnymi prostej i okręgu są punkty $P_1(4, -1)$ i $P_2(7, 2)$.



Ćwiczenie 1

Wyznacz punkty wspólne prostej l i okręgu K . Wykonaj rysunek.

a) $l: y = x + 4$, $K: (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$

b) $l: y = x + 2$, $K: (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 17$

D Ćwiczenie 2

Uzasadnij, że prosta $l: y = 2x - 3$ nie ma punktów wspólnych z okręgiem K .

a) $K: (x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 18$

b) $K: (x - 6)^2 + (y - 1)^2 = 9$

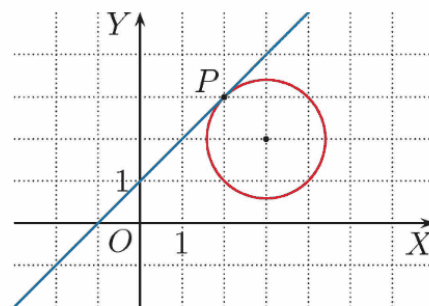
Przykład 2

Wyznacz punkty wspólne prostej $y = x + 1$ i okręgu $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 2$.

Do równania okręgu podstawiamy $y = x + 1$:

$$\begin{aligned}(x - 3)^2 + (x + 1 - 2)^2 &= 2 \\x^2 - 6x + 9 + x^2 - 2x + 1 &= 2 \\2x^2 - 8x + 8 &= 0 \quad / : 2 \\x^2 - 4x + 4 &= 0 \\(x - 2)^2 &= 0 \\x &= 2\end{aligned}$$

Wówczas $y = 3$, zatem prosta i okrąg mają jeden punkt wspólny: $P(2, 3)$.



Prosta $y = x + 1$ i okrąg o środku $(3, 2)$ i promieniu $\sqrt{2}$ są styczne w punkcie $P(2, 3)$.

Ćwiczenie 3

Wyznacz punkty wspólne prostej l i okręgu K . Wykonaj rysunek.

a) $l: y = -x - 2$, $K: (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 8$

b) $l: y = 3x - 2$, $K: (x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 10$

Przykład 3

W okrąg $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$ wpisano kwadrat. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego kwadratu, jeśli jeden z jego boków jest zawarty w prostej $y = 2x + 2$.

Podstawiamy $y = 2x + 2$ do równania okręgu:

$$(x - 2)^2 + (2x + 2 - 1)^2 = 10$$

$$(x - 2)^2 + (2x + 1)^2 = 10$$

$$x^2 - 4x + 4 + 4x^2 + 4x + 1 = 10$$

$$5x^2 = 5 \quad / : 5$$

$$x^2 = 1$$

$$x = -1 \text{ lub } x = 1$$

Dla $x = -1$ mamy $y = 0$, a dla $x = 1$ mamy $y = 4$, zatem współrzędne dwóch wierzchołków kwadratu to $A(1, 4)$ i $B(-1, 0)$.

Współrzędne wierzchołka $C(x_C, y_C)$ wyznaczymy, korzystając z tego, że środek okręgu $S(2, 1)$ jest środkiem przekątnej kwadratu AC :

$$\frac{x_C + 1}{2} = 2 \quad \text{ i } \quad \frac{y_C + 4}{2} = 1$$

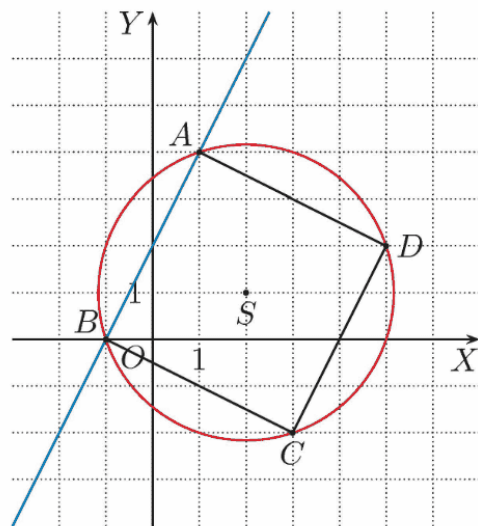
Stąd $C(3, -2)$.

Analogicznie korzystamy z tego, że punkt $S(2, 1)$ jest środkiem przekątnej kwadratu BD , aby wyznaczyć współrzędne wierzchołka $D(x_D, y_D)$:

$$\frac{x_D - 1}{2} = 2 \quad \text{ i } \quad \frac{y_D + 0}{2} = 1$$

Stąd $D(5, 2)$.

Wierzchołkami kwadratu są punkty $A(1, 4)$, $B(-1, 0)$, $C(3, -2)$ i $D(5, 2)$.



Ćwiczenie 4

a) W okrąg $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 5$ wpisano kwadrat. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego kwadratu, jeśli jeden z jego boków jest zawarty w prostej $y = -3x - 1$.

b) W okrąg $(x - 2)^2 + y^2 = 25$ wpisano kwadrat. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego kwadratu, jeśli jedna z jego przekątnych jest zawarta w prostej $4x - 3y = 8$.

Przykład 4

Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} x - 2y = -4 \\ x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0 \end{cases}$$

Wyznaczamy niewiadomą x z pierwszego równania i podstawiamy do drugiego równania:

$$\begin{cases} x = 2y - 4 \\ (2y - 4)^2 + y^2 - 6(2y - 4) - 2y = 0 \end{cases}$$

Rozwiązujemy drugie równanie:

$$\begin{aligned} 4y^2 - 16y + 16 + y^2 - 12y + 24 - 2y &= 0 \\ 5y^2 - 30y + 40 &= 0 \quad / : 5 \\ y^2 - 6y + 8 &= 0 \\ y = 2 \text{ lub } y = 4 \end{aligned}$$

Dla $y = 2$ otrzymujemy $x = 0$, a dla $y = 4$ otrzymujemy $x = 4$.

Zatem układ równań ma dwa rozwiązania:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$$

Uwaga. Równanie $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0$ jest równaniem okręgu o środku w punkcie $(3, 1)$ i promieniu $\sqrt{10}$ (sprawdź). Zatem otrzymane pary liczb są współrzędnymi punktów wspólnych tego okręgu i prostej $x - 2y = -4$.

Ćwiczenie 5

Rozwiąż układ równań.

a)
$$\begin{cases} x - y = -4 \\ x^2 + y^2 - 2x - 6y = -6 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 21 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y = 18 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 4x + 3y = -7 \\ x^2 + y^2 - 6x - 4y = 12 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x - 3y = -1 \\ x^2 + y^2 + 8x - 6y = -9 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} x - 3y = 3 \\ x^2 + y^2 + 4x - 2y = -3 \end{cases}$$

D Ćwiczenie 6

Uzasadnij, że podany układ równań nie ma rozwiązania.

a)
$$\begin{cases} 2x - y = -2 \\ x^2 + y^2 - 6x + 4y = 3 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x - 3y = -6 \\ x^2 + y^2 + 4x + 8y = -11 \end{cases}$$

Zadania

- Okrąg K i prosta l przecinają się w punktach A i B . Oblicz $|AB|$.
 - $K: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$, $l: y = x - 2$
 - $K: (x-4)^2 + (y+1)^2 = 10$, $l: y = -2x + 2$
- Jedna z przekątnych kwadratu wpisanego w okrąg $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 13$ zawarta jest w prostej $3x + 2y - 8 = 0$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego kwadratu oraz oblicz jego pole.
- W okrąg $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 20$ wpisano trójkąt równoramienny. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta, jeśli wiadomo, że jego podstawa jest zawarta w prostej $y = \frac{1}{2}x + 3$.
- Jeden z boków prostokąta jest zawarty w prostej $y = x + 4$, a jego wierzchołki należą do okręgu $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 40$. Wyznacz współrzędne tych wierzchołków.
 - Jeden z boków kwadratu wpisanego w okrąg $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 20$ jest zawarty w prostej $y = -3x + 6$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego kwadratu.
- Rozwiąż układ równań.
 - $$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0 \end{cases}$$
 - $$\begin{cases} x - 3y = -3 \\ x^2 + y^2 + 8x - 6y + 15 = 0 \end{cases}$$
 - $$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0 \end{cases}$$
 - $$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x^2 + y^2 + 6x = 4 \end{cases}$$
 - $$\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ x^2 + y^2 - 10x + 8y = -12 \end{cases}$$
 - $$\begin{cases} x - 2y = -3 \\ x^2 + y^2 + 4x - 6y = 12 \end{cases}$$

Powtórzenie

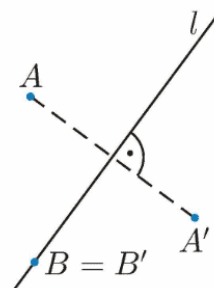
- Wyznacz punkty wspólne prostej l i okręgu K . Wykonaj rysunek.
 - $l: y = 4x + 6$, $K: (x+6)^2 + (y+1)^2 = 17$
 - $l: x - 3y + 2 = 0$, $K: (x-3)^2 + (y+1)^2 = 8$
- Rozwiąż układ równań.
 - $$\begin{cases} 5x - y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 8y + 7 = 0 \end{cases}$$
 - $$\begin{cases} 3x - 4y + 8 = 0 \\ x^2 + y^2 + 8x + 2y - 8 = 0 \end{cases}$$

2.11. Symetria osiowa

Założmy, że punkt A nie należy do prostej l .

Punkt A' nazywamy **punktem symetrycznym** do punktu A **względem prostej l** , jeżeli punkty A i A' leżą na prostej prostopadłej do prostej l i środek odcinka AA' należy do prostej l (prosta l jest symetralną odcinka AA').

Punktem symetrycznym względem prostej l do punktu należącego do tej prostej jest ten sam punkt (patrz punkt B na rysunku obok).

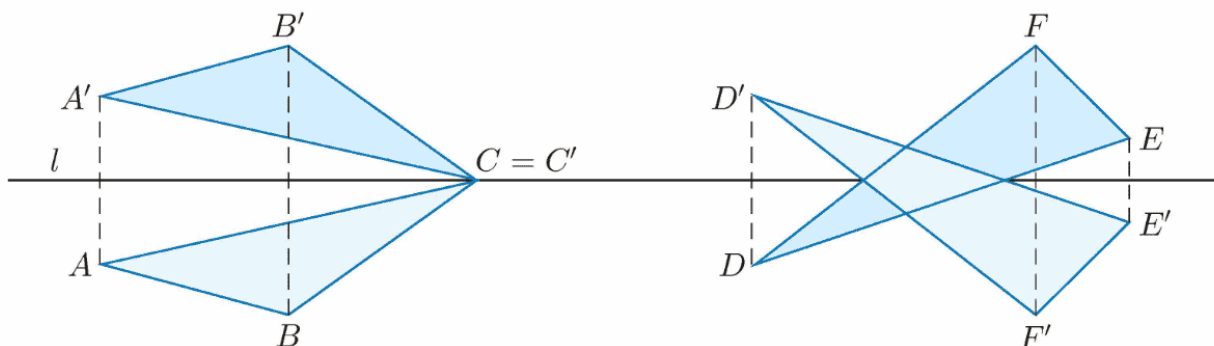


Definicja

Symetrią osiową względem prostej l (lub symetrią względem prostej l) nazywamy przekształcenie, które każdemu punktowi płaszczyzny przyporządkowuje punkt do niego symetryczny względem prostej l .

Prostą l nazywamy **osią symetrii**.

Na rysunku poniżej przedstawiono trójkąty ABC i DEF oraz ich obrazy w symetrii osiowej względem prostej l – odpowiednio trójkąty $A'B'C'$ i $D'E'F'$.



Odległość między obrazami dwóch punktów w symetrii osiowej jest równa odległości między tymi punktami (mówimy, że symetria osiowa jest przekształceniem, które nie zmienia odległości między punktami). Zatem obrazem dowolnej figury w symetrii osiowej jest figura do niej przystająca. Na przykład obrazem trójkąta jest trójkąt do niego przystający, a obrazem okręgu jest okrąg o takim samym promieniu.

Ćwiczenie 1

Narysuj w zeszycie ośmiokąt foremny, a następnie jego obraz w symetrii względem prostej (rysunek obok):

- a) l_1 , b) l_2 , c) l_3 .

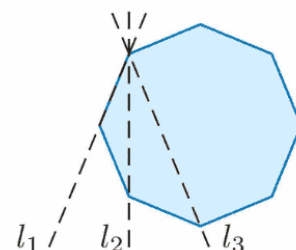


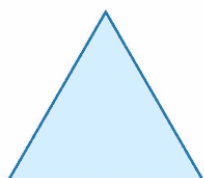
Figura jest **osiowosymetryczna**, jeśli jest ona swoim własnym obrazem w symetrii względem pewnej prostej l . Prosta l nazywamy wówczas **osią symetrii** tej figury.

Ćwiczenie 2

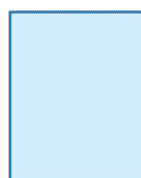
Podaj, ile osi symetrii mają poniższe figury.



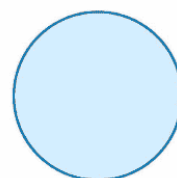
kwadrat



trójkąt równoboczny



prostokąt



koło

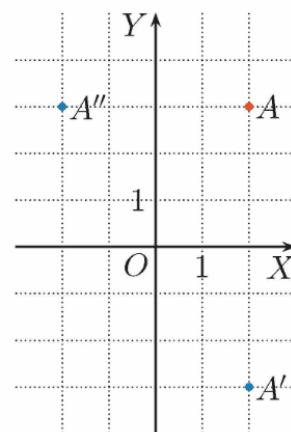
■ Symetria względem osi układu współrzędnych

Przykład 1

Obrazem punktu $A(2, 3)$ w symetrii względem osi OX jest punkt $A'(2, -3)$. Obrazem punktu $A(2, 3)$ w symetrii względem osi OY jest punkt $A''(-2, 3)$.

Punktem symetrycznym do punktu $P(x, y)$ względem osi OX układu współrzędnych jest punkt $P'(x, -y)$.

Punktem symetrycznym do punktu $P(x, y)$ względem osi OY układu współrzędnych jest punkt $P''(-x, y)$.



Ćwiczenie 3

Podaj współrzędne końców odcinka $A'B'$ symetrycznego do odcinka AB względem osi OX oraz odcinka $A''B''$ symetrycznego do odcinka AB względem osi OY . Narysuj w jednym układzie współrzędnych odcinki AB , $A'B'$ i $A''B''$.

- a) $A(0, 3)$, $B(3, 0)$ b) $A(1, -2)$, $B(-4, 3)$ c) $A(-5, 1)$, $B(1, 4)$

Ćwiczenie 4

Dany jest trójkąt ABC o wierzchołkach $A(0, 3)$, $B(2, -1)$, $C(3, -1)$. Narysuj ten trójkąt oraz jego obraz w symetrii względem: a) osi OX , b) osi OY .

Ćwiczenie 5

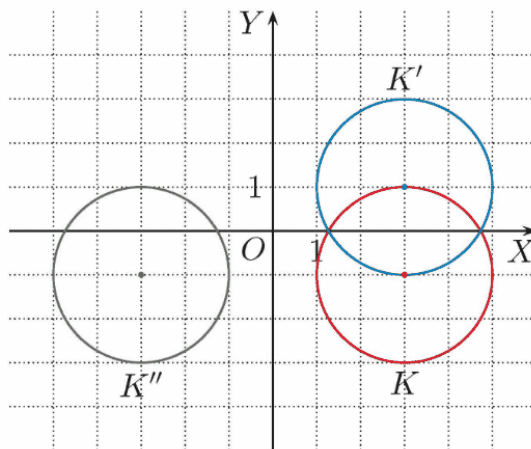
Dane są punkty $A(-2, 1)$, $B(2, -3)$, $C(4, -1)$ i $D(0, 3)$. Podaj współrzędne wierzchołków prostokąta będącego obrazem prostokąta $ABCD$ w symetrii względem: a) osi OX , b) osi OY .

Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono okrąg K dany równaniem $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$.

Okrąg K' jest symetryczny do okręgu K względem osi OX (okręgi te mają równe promienie, a ich środki są symetryczne względem osi OX).

Okrąg K'' jest symetryczny do okręgu K względem osi OY (okręgi te mają równe promienie, a ich środki są symetryczne względem osi OY).



Ćwiczenie 6

Podaj równania okręgów K' i K'' z powyższego przykładu.

Ćwiczenie 7

Podaj równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu K względem osi OX oraz okręgu K'' symetrycznego do okręgu K względem osi OY .

- a) $K: (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$ c) $K: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$
b) $K: (x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 13$ d) $K: (x + 1)^2 + (y + 6)^2 = 49$

Zadania

- Sprawdź, czy odcinki AB i $A'B'$ są symetryczne względem osi OX lub osi OY .
 - $A(-2, 1), B(3, -2), A'(-2, -1), B'(3, 2)$
 - $A(-3, 4), B(-1, -2), A'(3, 4), B'(1, -2)$
 - $A(-4, -3), B(2, 2), A'(-4, 3), B'(-2, 2)$
 - $A(-2, 0), B(0, 4), A'(2, 0), B'(0, -4)$
- Narysuj w jednym układzie współrzędnych trójkąt symetryczny do trójkąta ABC względem osi OX oraz trójkąt symetryczny do trójkąta ABC względem osi OY .
 - $A(-1, 2), B(5, 3), C(2, 5)$ c) $A(-3, 2), B(0, -3), C(3, 2)$
 - $A(-3, 0), B(-2, -5), C(0, 3)$ d) $A(-3, -1), B(9, -2), C(2, 1)$
- Oblicz pole części wspólnej kwadratu K o wierzchołkach $(-5, 1), (-2, -2), (1, 1), (-2, 4)$ oraz kwadratu symetrycznego do kwadratu K względem:
 - osi OX ,
 - osi OY .

4. a) Prostokąt $A'B'C'D'$ jest symetryczny względem osi OY do prostokąta o wierzchołkach $A(-4, -2)$, $B(0, -4)$, $C(3, 2)$ i $D(-1, 4)$. Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych należy do wielokąta będącego częścią wspólną tych prostokątów?
- b) Równoległobok $A'B'C'D'$ jest symetryczny względem osi OX do równoległoboku o wierzchołkach $A(-4, 0)$, $B(2, -2)$, $C(4, 2)$ i $D(-2, 4)$. Oblicz pole i obwód deltoidu będącego częścią wspólną tych równoległoboków. Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych należy do tego deltoidu?
5. Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu K względem osi OX . Sprawdź, czy punkt $P(-3, 2)$ należy do okręgu K' .
- a) $K: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$ c) $K: (x + 3)^2 + y^2 = 4$
b) $K: (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 41$ d) $K: (x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 40$
6. Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu K względem osi OY . Narysuj te okręgi i odczytaj współrzędne ich punktów wspólnych. Sprawdź wynik, podstawiając współrzędne odczytanych punktów do równań okręgów K i K' . Oblicz pole rombu, którego wierzchołkami są środki okręgów K i K' oraz punkty wspólne tych okręgów.
- a) $K: (x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 25$ c) $K: (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 13$
b) $K: (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 8$ d) $K: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 20$
- *7. Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu K względem osi OX . Oblicz pole części wspólnej kół ograniczonych przez te okręgi.
- a) $K: (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 18$ b) $K: x^2 + (y - 3\sqrt{3})^2 = 36$

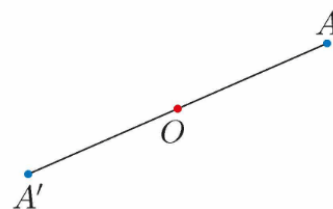
Powtórzenie

8. Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta symetrycznego do trójkąta o wierzchołkach $A(-3, -1)$, $B(6, -4)$ i $C(0, 0)$ względem:
- a) osi OX , b) osi OY .
9. Podaj równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu K względem osi OX oraz okręgu K'' symetrycznego do okręgu K względem osi OY . Narysuj okręgi K , K' i K'' .
- a) $K: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$ c) $K: (x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 25$
b) $K: (x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 18$ d) $K: (x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 13$

2.12. Symetria środkowa

Punkt A' nazywamy **punktem symetrycznym** do punktu A **względem punktu** O ($A \neq O$), jeżeli punkt O jest środkiem odcinka łączącego punkty A i A' .

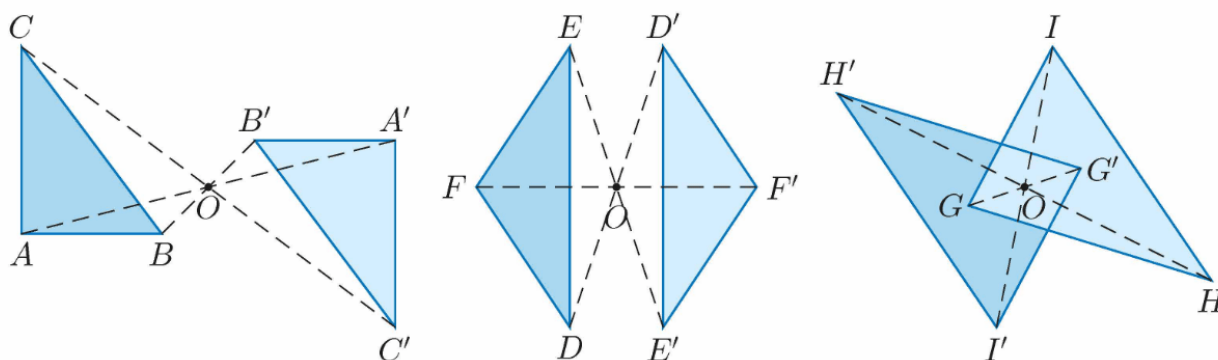
Punktem symetrycznym do O jest on sam.



Symetrią środkową względem punktu O (lub symetrią względem punktu O) nazywamy przekształcenie, które każdemu punktowi płaszczyzny przyporządkowuje punkt do niego symetryczny względem punktu O .

Punkt O nazywamy **środkiem symetrii**.

Na rysunkach poniżej przedstawiono trójkąty ABC , DEF i GHI oraz ich obrazy w symetrii środkowej względem punktu O .



Symetria środkowa jest przekształceniem, które nie zmienia odległości między punktami. Zatem obrazem dowolnej figury w symetrii środkowej jest figura do niej przystająca.

Ćwiczenie 1

Narysuj trójkąt równoboczny ABC , a następnie przekształć go symetrycznie względem:

- a) jednego z jego wierzchołków,
- b) środka jednego z jego boków,
- c) punktu przecięcia jego dwusiecznych,
- d) punktu leżącego na zewnątrz niego.

Figurę nazywamy **środkowosymetryczną**, jeśli istnieje taki punkt O , że figura ta jest swoim własnym obrazem w symetrii względem tego punktu. Punkt O nazywamy wówczas **środkiem symetrii** tej figury.

Ćwiczenie 2

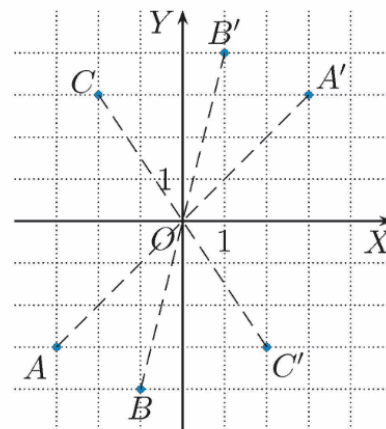
Która z wymienionych figur ma środek symetrii: trójkąt, równoległobok, prosta, kwadrat, odcinek, półprosta?

■ Symetria względem początku układu współrzędnych

Przykład 1

Punktami symetrycznymi do punktów $A(-3, -3)$, $B(-1, -4)$ i $C(-2, 3)$ względem początku układu współrzędnych są odpowiednio punkty $A'(3, 3)$, $B'(1, 4)$ i $C'(2, -3)$.

Punktem symetrycznym do punktu $P(x, y)$ względem początku układu współrzędnych jest punkt $P'(-x, -y)$.



Ćwiczenie 3

Trójkąt $A'B'C'$ jest symetryczny do trójkąta ABC względem początku układu współrzędnych. Podaj współrzędne wierzchołków trójkąta $A'B'C'$.

- a) $A(3, -2)$, $B(-2, -1)$, $C(-1, 4)$ b) $A(2, -2)$, $B(1, 3)$, $C(-3, 1)$

Ćwiczenie 4

Prostokąty $ABCD$ i $A'B'C'D'$ są symetryczne względem początku układu współrzędnych. Oblicz pole części wspólnej tych prostokątów.

- a) $A(-3, -2)$, $B(5, -2)$, $C(5, 3)$, $D(-3, 3)$
b) $A(-2, 1)$, $B(1, -2)$, $C(3, 0)$, $D(0, 3)$

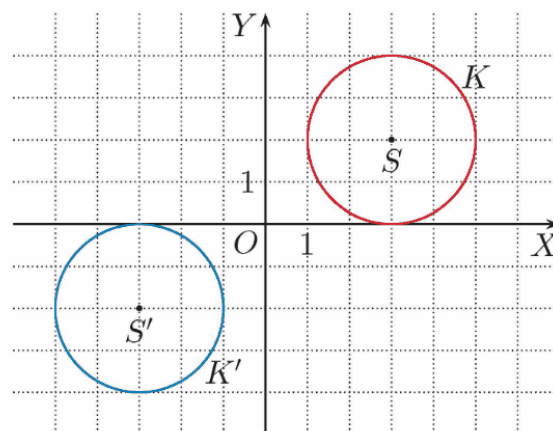
Przykład 2

Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego względem początku układu współrzędnych do okręgu $K: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$. Narysuj te okręgi.

Środkiem okręgu K jest punkt $S(3, 2)$, a jego promień $r = 2$.

Zatem środkiem okręgu K' jest punkt symetryczny do S względem początku układu współrzędnych, czyli $S'(-3, -2)$, a jego promień $r' = 2$.

Oznacza to, że okrąg K' jest dany równaniem $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$.



Ćwiczenie 5

Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego względem początku układu współrzędnych do okręgu $K: (x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 16$. Narysuj te okręgi.

Ćwiczenie 6

Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego względem początku układu współrzędnych do okręgu K . Narysuj te okręgi.

a) $K: (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$

c) $K: (x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$

b) $K: (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$

d) $K: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$

Ćwiczenie 7

Okrąg K dany jest równaniem:

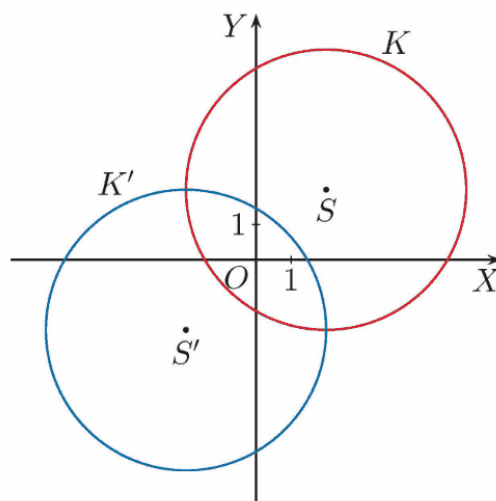
$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 16$$

Okrąg K' jest symetryczny do okręgu K względem początku układu współrzędnych.

a) Wyznacz równanie okręgu K' .

D b) Uzasadnij, że punkty $P(-2, 2)$ i $Q(2, -2)$ są punktami wspólnymi okręgów K i K' .

c) Oblicz pole części wspólnej kół ograniczonych przez te okręgi.



Zadania

1. Punkt A' położony jest symetrycznie do punktu A względem początku układu współrzędnych. Oblicz długość odcinka AA' , jeśli wiadomo, że:

a) $A(3, 4)$, b) $A(-1, 4)$, c) $A(-6, -8)$, d) $A(a, a)$.

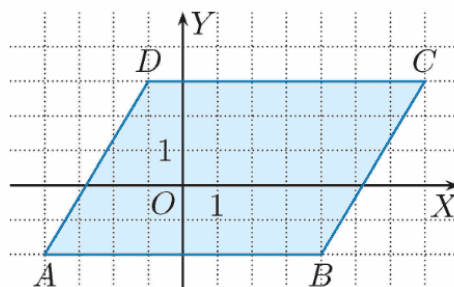
2. Narysuj w układzie współrzędnych prostokąt $ABCD$ i znajdź jego obraz w symetrii względem początku układu współrzędnych.

a) $A(1, 1)$, $B(4, 1)$, $C(4, 3)$, $D(1, 3)$

b) $A(-3, -1)$, $B(1, -1)$, $C(1, 2)$, $D(-3, 2)$

c) $A(-4, -3)$, $B(2, 0)$, $C(1, 2)$, $D(-5, -1)$

3. Równoległobok $A'B'C'D'$ jest obrazem równoległoboku $ABCD$ (rysunek obok) w symetrii względem punktu O . Oblicz pole części wspólnej tych równoległoboków.



4. Wyznacz równanie okręgu K' będącego obrazem okręgu K w symetrii względem początku układu współrzędnych. Narysuj okręgi K i K' .

a) $K: (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 9$

c) $K: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 20$

b) $K: (x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 17$

d) $K: (x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 10$

5. W jednym układzie współrzędnych narysuj okrąg $K: (x+3)^2 + (y-3)^2 = 36$ oraz okrąg K' będący obrazem okręgu K w symetrii względem początku układu współrzędnych. Wyznacz równanie okręgu K' i oblicz pole części wspólnej kół ograniczonych przez te okręgi.

- D** 6. Okrąg K' jest obrazem okręgu K w symetrii względem osi OX , a okrąg K'' jest obrazem okręgu K' w symetrii względem osi OY . Uzasadnij, że okrąg K'' jest obrazem okręgu K w symetrii względem początku układu współrzędnych.

7. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Dany jest okrąg $K: (x-4)^2 + (y+2)^2 = 1$. Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu K względem punktu $P(3,1)$.

Środkiem okręgu K jest punkt $S(4, -2)$.

Niech $S'(x_1, y_1)$ będzie środkiem okręgu K' .

Wówczas punkt $P(3,1)$ jest środkiem odcinka SS' , zatem:

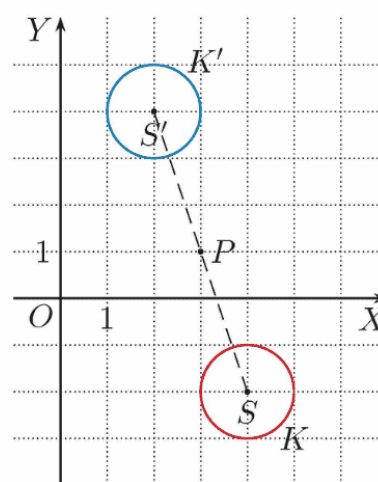
$$\frac{4+x_1}{2} = 3 \quad \text{i} \quad \frac{-2+y_1}{2} = 1$$

$$x_1 = 2 \quad \text{i} \quad y_1 = 4$$

Środkiem okręgu K' jest punkt $S'(2, 4)$.

Ponieważ promienie okręgów K i K' są równe, okrąg K' opisany jest równaniem:

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 1$$



Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu K względem punktu P . Narysuj okręgi K i K' .

- a) $K: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 9$, $P(2,1)$
 b) $K: (x+3)^2 + (y+1)^2 = 4$, $P(3,2)$

Powtórzenie

8. Trójkąty ABC i $A'B'C'$ są symetryczne względem początku układu współrzędnych. Oblicz pole części wspólnej tych trójkątów.
- a) $A(-3, 2)$, $B(3, -4)$, $C(6, 2)$ b) $A(-3, -4)$, $B(3, 2)$, $C(-3, 0)$
9. Wyznacz równanie okręgu K' będącego obrazem okręgu K w symetrii względem początku układu współrzędnych. Narysuj te okręgi.
- a) $K: (x+2)^2 + (y+2)^2 = 16$ b) $K: (x-4)^2 + (y+2)^2 = 25$

2.13. Zagadnienia uzupełniające

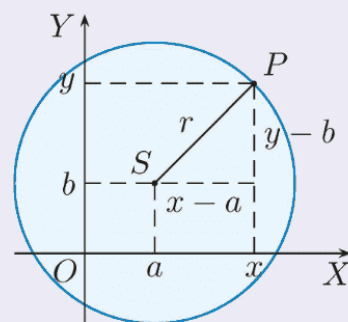
■ Koło w układzie współrzędnych

Przypomnijmy, że kołem o środku w punkcie S i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu S jest mniejsza od r lub równa r (zwróć uwagę, że punkty należące do okręgu ograniczającego koło należą do tego koła).

Punkt $P(x, y)$ należy do koła o środku w punkcie $S(a, b)$ i promieniu r , gdy $|PS| \leq r$.

Koło o środku w punkcie $S(a, b)$ i promieniu $r > 0$ jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają nierówność:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$$



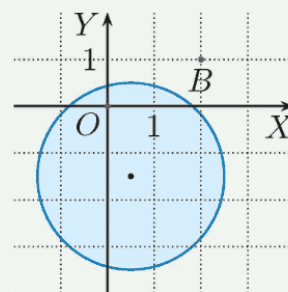
Przykład 1

Sprawdź, czy punkty $O(0, 0)$ i $B(2, 1)$ należą do koła, którego punkty spełniają nierówność $(x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{3}{2})^2 \leq 4$.

Sprawdzamy, czy współrzędne punktów O i B spełniają nierówność opisującą koło.

Punkt O : $(0 - \frac{1}{2})^2 + (0 + \frac{3}{2})^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{5}{2} \leq 4$, czyli punkt O należy do koła.

Punkt B : $(2 - \frac{1}{2})^2 + (1 + \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4} + \frac{25}{4} = \frac{17}{2} > 4$, czyli punkt B leży na zewnątrz koła.



1. Narysuj koła K_1 , K_2 i K_3 opisane nierównościami:

$$K_1: x^2 + y^2 \leq 16, \quad K_2: (x - 2)^2 + y^2 \leq 4, \quad K_3: (x - 2)^2 + (y + 3)^2 \leq 9$$

Do których z tych kół należy punkt P ?

- a) $P(-2, 2)$ b) $P(2, 2)$ c) $P(2, -1)$ d) $P(2, 0)$
2. Wyznacz nierówność opisującą koło o najmniejszym polu i o środku w punkcie $S(1, 1)$, jeżeli do tego koła należy punkt P .
- a) $P(5, -2)$ b) $P(-7, -5)$ c) $P(3, 3)$ d) $P(-3, 0)$

■ Punkty wspólne dwóch okręgów

Przykład 2

Wyznacz punkty wspólne okręgów:

$$K_1: x^2 + y^2 = 5 \text{ i } K_2: (x-3)^2 + (y-3)^2 = 5$$

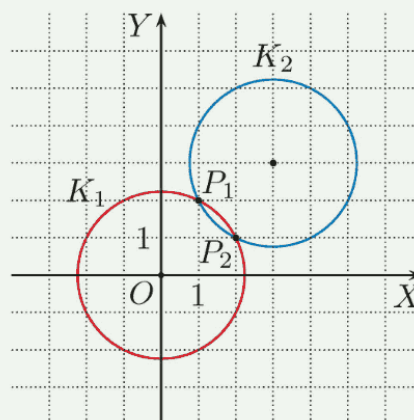
Przekształcamy równanie okręgu K_2 :

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 = 5$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y = -13$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 + y^2 - 6x - 6y = -13 \end{cases}$$



Odejmujemy stronami drugie równanie od pierwszego i otrzymujemy:

$$6x + 6y = 18, \text{ skąd } y = -x + 3$$

Podstawiamy $y = -x + 3$ do równania $x^2 + y^2 = 5$:

$$x^2 + (-x + 3)^2 = 5$$

$$2x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x = 1 \text{ lub } x = 2$$

Dla $x = 1$ otrzymujemy $y = 2$, a dla $x = 2$ otrzymujemy $y = 1$, zatem punktami wspólnymi okręgów są: $P_1(1, 2)$ i $P_2(2, 1)$.

Przykład 3

Wyznacz punkty wspólne okręgów:

$$K_1: x^2 + y^2 = 8 \text{ i } K_2: (x-3)^2 + (y+3)^2 = 2$$

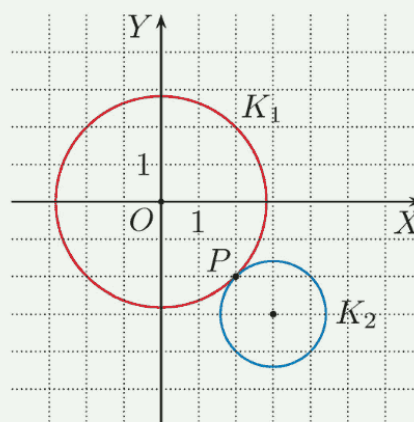
Przekształcamy równanie okręgu K_2 :

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 = 2$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 6y = -16$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x^2 + y^2 - 6x + 6y = -16 \end{cases}$$



Odejmujemy stronami drugie równanie od pierwszego i otrzymujemy:

$$6x - 6y = 24, \text{ skąd } y = x - 4$$

Podstawiamy $y = x - 4$ do równania $x^2 + y^2 = 8$:

$$x^2 + (x - 4)^2 = 8$$

$$2x^2 - 8x + 8 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

$$x = 2$$

Zatem $y = -2$, więc okręgi K_1 i K_2 mają jeden punkt wspólny: $P(2, -2)$.

Przykład 4

Wyznacz punkty wspólne okręgów:

$$K_1: (x + 3)^2 + y^2 = 13 \quad \text{i} \quad K_2: (x - 3)^2 + y^2 = 25$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} (x + 3)^2 + y^2 = 13 \\ (x - 3)^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

Odejmujemy stronami drugie równanie od pierwszego i otrzymujemy:

$$(x + 3)^2 - (x - 3)^2 = -12$$

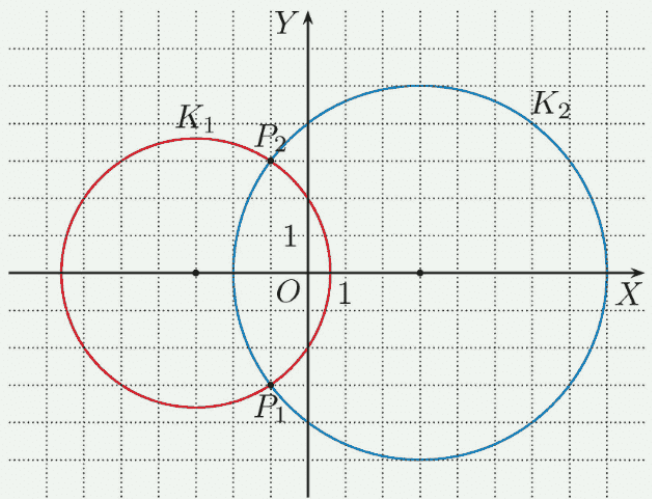
Stosujemy wzór na różnicę kwadratów:

$$2x \cdot 6 = -12$$

$$x = -1$$

Podstawiamy $x = -1$ do równania $(x + 3)^2 + y^2 = 13$ i otrzymujemy równanie kwadratowe $y^2 = 9$, skąd $y = -3$ lub $y = 3$.

Zatem punktami wspólnymi okręgów są: $P_1(-1, -3)$ i $P_2(-1, 3)$.



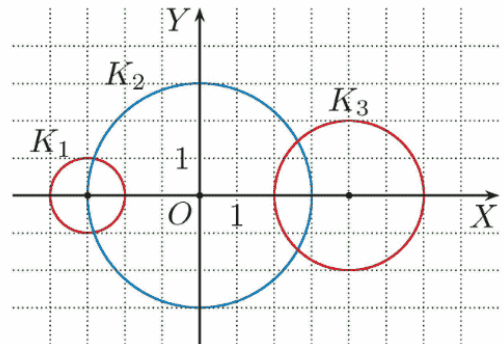
3. Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ (x - 2)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 4)^2 = 9 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} (x - 3)^2 + y^2 = 9 \\ (x + 1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

4. Podaj równania okręgów K_1 , K_2 i K_3 przedstawionych na rysunku. Wyznacz współrzędne punktów, w których przecinają się okręgi:

a) K_1 i K_2 ,

b) K_2 i K_3 .



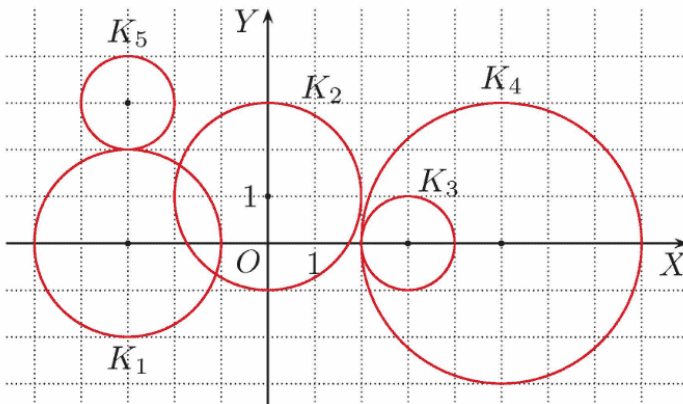


Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

- Oblicz długości odcinków AB , BC i AC . Czy punkty A , B i C są współliniowe?
 - $A(-4, 5)$, $B(0, 2)$, $C(8, -4)$
 - $A(13, 5)$, $B(-3, -3)$, $C(5, 1)$
 - $A(-4, -12)$, $B(2, -4)$, $C(10, 2)$
 - $A(-2\sqrt{2}, 8)$, $B(0, 0)$, $C(\sqrt{2}, -4)$
- Oblicz odległość punktu A od środka odcinka BC .
 - $A(6, 3)$, $B(1, 4)$, $C(3, -2)$
 - $A(-1, 5)$, $B(0, -1)$, $C(6, 5)$
 - $A(-3, 3)$, $B(-5, \frac{3}{2})$, $C(3, -\frac{7}{2})$
 - $A(1, \frac{1}{2})$, $B(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$, $C(\frac{9}{2}, \frac{13}{2})$
- Wyznacz współrzędne punktów dzielących odcinek AB na cztery równe części.
 - $A(-2, 4)$, $B(6, -8)$
 - $A(-1, 3)$, $B(5, 7)$
- Dany jest punkt $A(3, -2)$. Wyznacz współrzędne punktu B , jeśli punkt S jest środkiem odcinka AB .
 - $S(-1, 0)$
 - $S(5, 4)$
 - $S(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$
 - $S(\sqrt{3}, -1)$
-  Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny oraz równoramienny. Wyznacz współrzędne środka okręgu opisanego na tym trójkącie.
 - $A(0, 6)$, $B(2, 0)$, $C(8, 2)$
 - $A(-3, -2)$, $B(5, -2)$, $C(1, 2)$
 - $A(-7, -2)$, $B(2, 1)$, $C(-1, 10)$
 - $A(2, -2)$, $B(4, 6)$, $C(-6, 0)$
- Oblicz obwód prostokąta $ABCD$. Wyznacz współrzędne środka i promień okręgu, do którego należą punkty A , B , C i D .
 - $A(-5, 1)$, $B(-3, -3)$, $C(5, 1)$, $D(3, 5)$
 - $A(-4, 2)$, $B(4, -6)$, $C(8, -2)$, $D(0, 6)$
- W trójkącie o wierzchołkach ABC poprowadzono środkową AD i wysokość AE . Oblicz ich długości.
 - $A(2, -1)$, $B(1, 2)$, $C(-3, 4)$
 - $A(7, 2)$, $B(2, 7)$, $C(-4, -5)$
- Sprawdź, czy prostokąty $ABCD$ i $EFGH$ są przystające lub podobne.
 - $A(-1, -1)$, $B(3, -3)$, $C(7, 5)$, $D(3, 7)$, $E(-8, 1)$, $F(4, -5)$, $G(7, 1)$, $H(-5, 7)$
 - $A(-7, -2)$, $B(-5, -5)$, $C(1, -1)$, $D(-1, 2)$, $E(1, 4)$, $F(5, -2)$, $G(8, 0)$, $H(4, 6)$



9. Podaj równanie okręgu o środku S i promieniu r . Narysuj ten okrąg. Wyznacz jego punkty przecięcia z osiami układu współrzędnych.
- a) $S(-4, 0)$, $r = 5$ c) $S(-1, 2)$, $r = 4$
b) $S(2, 3)$, $r = 5$ d) $S(-3, -4)$, $r = 1$
10. Podaj współrzędne środka i promień okręgu K . Oblicz pole kwadratu wpisanego w ten okrąg.
- a) $K: x^2 + (y - 5)^2 = 64$ c) $K: (x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 20$
b) $K: (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 81$ d) $K: (x + 11)^2 + (y + 13)^2 = 40$
11. Które z punktów: P , Q , R , należą do okręgu K ?
- a) $P(8, 2)$, $Q(-1, -1)$, $R(5, -2)$, $K: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$
b) $P(-4, 6)$, $Q(3, 2)$, $R(-4, 0)$, $K: (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 18$
c) $P(5, -1)$, $Q(1, -4)$, $R(6, -7)$, $K: (x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 10$
12. Wyznacz równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek AB .
- a) $A(-3, -2)$, $B(5, -2)$ d) $A(0, 0)$, $B(4, 4)$
b) $A(-2, -2)$, $B(-2, 6)$ e) $A(-3, -1)$, $B(1, 1)$
c) $A(-2, 0)$, $B(5, 0)$ f) $A(-1, 3)$, $B(5, -1)$
13. Wyznacz punkty wspólne okręgu K z osiami układu współrzędnych. Podaj równanie okręgu K_1 symetrycznego do okręgu K względem początku układu współrzędnych.
- a) $K: (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$ b) $K: (x + 4)^2 + (y - 4)^2 = 16$
14. Podaj równania okręgów K_1 , K_2 , K_3 , K_4 oraz K_5 , przedstawionych na rysunku obok. Dla której pary okręgów odległość między ich środkami jest równa:
- a) sumie ich promieni,
b) bezwzględnej wartości różnicy ich promieni?
- 
15. Dany jest okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = 16$ i okrąg, którego średnicą jest odcinek o końcach $A(0, 4)$ i $B(4, 0)$. Oblicz pola kół ograniczonych przez te okręgi i pole części wspólnej tych kół.

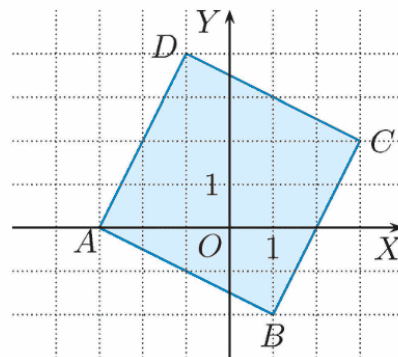


■ Zestaw II

- Oblicz odległość punktu $A(1, -2)$ od prostej:
a) $x + y - 5 = 0$, b) $3x + 4y - 8 = 0$, c) $x - 3y = -3$.
- Oblicz długość odcinka AB , odległość punktu C od prostej AB oraz pole trójkąta ABC .
a) $A(-1, 2)$, $B(3, -2)$, $C(1, 3)$ b) $A(5, 4)$, $B(-2, 3)$, $C(-1, -4)$
- Dany jest równoległobok $ABCD$. Oblicz wysokość opuszczoną z wierzchołka C oraz pole tego równoległoboku.
a) $A(-1, 4)$, $B(5, -2)$, $C(7, 3)$ b) $A(0, -4)$, $B(-1, -6)$, $C(3, 3)$
- Sprawdź, czy proste AB i CD są równoległe. Jeśli są, oblicz odległość między nimi.
a) $A(-2, 0)$, $B(1, 3)$, $C(1, -1)$, $D(4, 2)$
b) $A(-1, 3)$, $B(1, -1)$, $C(5, 1)$, $D(2, 7)$
- Oblicz odległość między prostymi.
a) $x + 2y - 1 = 0$, $x + 2y - 6 = 0$ b) $3x + 4y + 2 = 0$, $3x + 4y - 8 = 0$
- Wyznacz równanie prostej równoległej do podanych prostych oraz równo odległej od każdej z nich.
a) $x - y + 2 = 0$, $x - y - 5 = 0$ b) $2x - y - 3 = 0$, $2x - y + 7 = 0$
- Prosta k jest symetralną odcinka AB . Wyznacz równanie prostej l będącej obrazem prostej k w symetrii względem osi OX oraz prostej m będącej obrazem prostej k w symetrii względem osi OY .
a) $A(-2, -1)$, $B(4, 1)$ b) $A(0, 6)$, $B(4, -2)$ c) $A(-1, 3)$, $B(5, -1)$
- Wyznacz współrzędne wierzchołków B i D czworokąta $ABCD$, jeśli:
a) jest on kwadratem oraz $A(-3, 5)$ i $C(5, 1)$,
b) jest on rombem oraz $A(1, -3)$, $C(9, 5)$ i $|BD| = 2|AC|$.
- Pole rombu $ABCD$ jest równe 32. Wyznacz współrzędne wierzchołków B i D , jeśli wiadomo, że:
a) $A(-4, -2)$, $C(4, 6)$, b) $A(2, 3)$, $C(4, 1)$.
- Punkty $A(2, 0)$ i $C(4, 2)$ są wierzchołkami rombu $ABCD$ o boku długości $2\sqrt{5}$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego rombu i oblicz jego pole.



11. Określ wzajemne położenie okręgów K_1 i K_2 .
- a) $K_1: (x+3)^2 + (y-2)^2 = 25$, $K_2: (x-5)^2 + (y+4)^2 = 25$
b) $K_1: (x+4)^2 + (y+1)^2 = 36$, $K_2: (x+4)^2 + (y+6)^2 = 3$
c) $K_1: (x-2)^2 + (y+5)^2 = 17$, $K_2: (x-5)^2 + (y+1)^2 = 16$
d) $K_1: (x+2)^2 + (y+2)^2 = 5$, $K_2: (x-2)^2 + (y-5)^2 = 20$
12. Okrąg o środku w punkcie S_1 jest styczny do prostej l , a okrąg o środku w punkcie S_2 jest styczny do prostej k . Oblicz promienie tych okręgów oraz odległość między ich środkami. Określ wzajemne położenie tych okręgów.
- a) $S_1(-1, 4)$, $l: x = 1$, $S_2(1, 4)$, $k: x = 3$
b) $S_1(-3, -3)$, $l: y = -2$, $S_2(-3, -4)$, $k: y = -6$
c) $S_1(-2, 5)$, $l: y = -x + 7$, $S_2(4, -1)$, $k: y = x + 3$
d) $S_1(1, 1)$, $l: y = \frac{3}{4}x - 4$, $S_2(8, 9)$, $k: y = -\frac{3}{4}x + 6$
13. Rozwiąż układ równań. Podaj jego interpretację geometryczną.
- a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x - y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} (x-3)^2 + (y-2)^2 = 17 \\ 5x + 3y - 4 = 0 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x - 3y = -10 \end{cases}$ e) $\begin{cases} (x+3)^2 + (y-1)^2 = 25 \\ 3x + y + 3 = 0 \end{cases}$
c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ 5x - 3y = 17 \end{cases}$ f) $\begin{cases} (x-5)^2 + (y-1)^2 = 10 \\ x - 2y = 12 \end{cases}$
14. Oblicz odległość między punktami, których współrzędne (x, y) spełniają układ równań.
- a) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0 \\ x - y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 4y = 12 \\ 3x - 4y = -17 \end{cases}$
15. Dany jest kwadrat o wierzchołkach $A(-3, 0)$, $B(1, -2)$, $C(3, 2)$ i $D(-1, 4)$ (rysunek obok). Wyznacz równanie okręgu:
- a) wpisanego w ten kwadrat,
b) opisanego na tym kwadracie.
16. Prosta równoległa do osi OY przecina okrąg $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 100$ w punktach A i B . Wyznacz równanie tej prostej, jeśli:
- a) $|AB| = 12$, b) $|AB| = 10\sqrt{2}$, c) $|AB| = 10$, d) $|AB| = 20$.



Aby wyznaczyć równanie symetralnej odcinka AB , możemy skorzystać z tego, że jest to prosta:

- prostopadła do tego odcinka i przechodząca przez jego środek,
- będąca zbiorem punktów równo odległych od punktów A i B .

Przykład

Wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach $A(-2, 3)$ i $B(6, -1)$.

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

I sposób

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$, w której zawarty jest odcinek AB :

$$a = \frac{-1-3}{6-(-2)} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Symetralna odcinka AB – prosta l – jest do niego prostopadła, więc jej współczynnik kierunkowy jest równy 2.

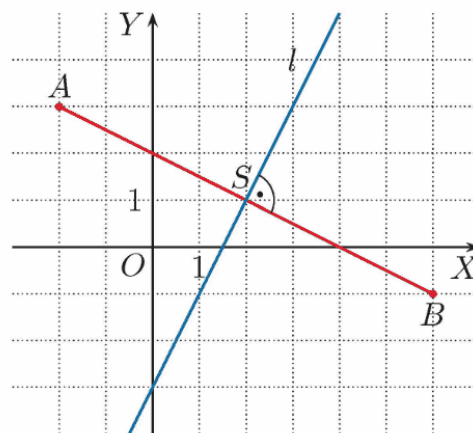
Wyznaczamy środek odcinka AB :

$$S\left(\frac{-2+6}{2}, \frac{3-1}{2}\right) = (2, 1)$$

Podstawiamy współrzędne punktu S do równania prostej $y = 2x + b$:

$$1 = 2 \cdot 2 + b, \text{ stąd } b = -3$$

Prosta l opisana jest równaniem $y = 2x - 3$.



II sposób

Punkt $P(x, y)$ należy do symetralnej odcinka AB , gdy:

$$|PA| = |PB|$$

$$|PA| = \sqrt{(x - (-2))^2 + (y - 3)^2}$$

$$|PB| = \sqrt{(x - 6)^2 + (y - (-1))^2}$$

Zatem:

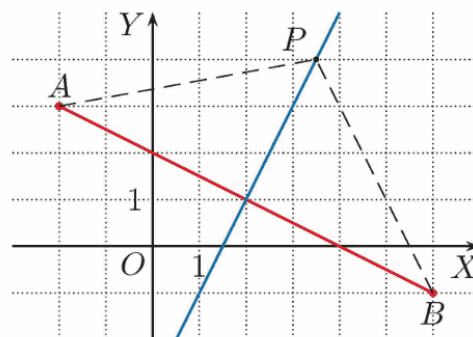
$$\sqrt{(x - (-2))^2 + (y - 3)^2} = \sqrt{(x - 6)^2 + (y - (-1))^2}$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = (x - 6)^2 + (y + 1)^2$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 12x + 36 + y^2 + 2y + 1$$

$$-8y = -16x + 24 \quad / : (-8)$$

$$y = 2x - 3$$



Odpowiedź: Symetralna odcinka AB jest prostą o równaniu $y = 2x - 3$.



Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

- Punkty $A(-3, 2)$, $B(1, 2)$, $C(5, 6)$ i $D(1, 6)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Jego obwód jest liczbą należącą do przedziału:
A. $(13; 16)$, C. $(19; 22)$,
B. $(16; 19)$, D. $(22; 25)$.
- Odległość punktu $P(1, 4)$ od prostej $y = \frac{2}{3}x - 1$ jest równa odległości tego punktu od prostej:
A. $y = \frac{2}{3}x + 1$, C. $y = -\frac{3}{2}x - 1$,
B. $y = \frac{2}{3}x + 8$, D. $y = -\frac{3}{2}x - 8$.
- Dane są wierzchołki $B(5, 3)$ i $C(7, 7)$ równoległoboku $ABCD$. Wierzchołki A i D leżą na prostej $y = 2x + 3$. Pole tego równoległoboku jest równe:
A. 18, B. 20, C. 24, D. 28.
- Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych należy do okręgu opisanego równaniem $x^2 + y^2 = 100$?
A. 4 B. 8 C. 9 D. 12
- Dany jest okrąg o środku w punkcie S_1 i promieniu 3 oraz okrąg o środku w punkcie S_2 i promieniu 2. Okręgi te mają jeden punkt wspólny, jeśli:
A. $S_1(1, 2)$, $S_2(4, 5)$, C. $S_1(-6, 2)$, $S_2(-2, -1)$,
B. $S_1(2, 1)$, $S_2(3, 2)$, D. $S_1(-4, -3)$, $S_2(-2, -2)$.
- Okrąg o środku w punkcie $S(-1, 2)$ i promieniu $\sqrt{10}$ ma dwa punkty wspólne z prostą AB , gdy:
A. $A(-3, -2)$, $B(1, -1)$, C. $A(0, 5)$, $B(3, 4)$,
B. $A(-2, -5)$, $B(2, 2)$, D. $A(2, 1)$, $B(4, 7)$.
- Punkty $A(-4, -4)$, $B(6, -4)$ i $C(14, 2)$ są wierzchołkami rombu $ABCD$. Okrąg, którego środkiem jest punkt przecięcia przekątnych tego rombu, styczny do boku AB , dany jest równaniem:
A. $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 16$, C. $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 16$,
B. $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$, D. $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 9$.
- Punkty $A(-3, 7)$, $B(17, -3)$ i $C(13, 5)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Wierzchołek D ma współrzędne:
A. $(-7, 15)$, B. $(-4, 10)$, C. $(-4, 8)$, D. $(-20, 10)$.



■ Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

Dane są punkty $A(-5, 1)$, $B(-3, 5)$, $C(5, -1)$ i $D(11, -3)$. Oblicz odległość między środkami odcinków AB i CD .

Zadanie 2 (2 pkt)

Oblicz odległość punktu $P(1, 6)$ od prostej $y = \frac{3}{4}x - 1$.

Zadanie 3 (2 pkt)

Wyznacz równanie okręgu o środku $S(4, 1)$ stycznego do prostej $y = -2$.

Zadanie 4 (2 pkt)

Podaj równanie okręgu K' symetrycznego do okręgu $K: (x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 4$ względem osi OX . Oblicz odległość między środkami tych okręgów.

■ Zadania rozszerzonej odpowiedzi

D Zadanie 5 (5 pkt)

Uzasadnij, że czworokąt o kolejnych wierzchołkach $A(-2, -1)$, $B(4, 1)$, $C(6, 7)$ i $D(0, 5)$ jest rombem. Oblicz jego pole i wysokość.

Zadanie 6 (4 pkt)

Punkty $A(4, 2)$ i $B(1, 6)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$, którego przekątne przecinają się w punkcie $S(0, 3)$. Wyznacz równanie symetralnej boku CD .

D Zadanie 7 (3 pkt)

Uzasadnij, że okręgi dane równaniami:

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5 \quad \text{ i } \quad (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 20$$

są styczne zewnętrznie.

Zadanie 8 (5 pkt)

W okrąg $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ wpisano trójkąt prostokątny równoramienny ABC o kącie prostym przy wierzchołku $C(-1, -3)$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego trójkąta.

Zadanie 9 (5 pkt)

W okrąg $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5$ wpisano kwadrat, którego jedna przekątna jest zawarta w prostej $x - 2y + 2 = 0$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego kwadratu.



3 Ciągi

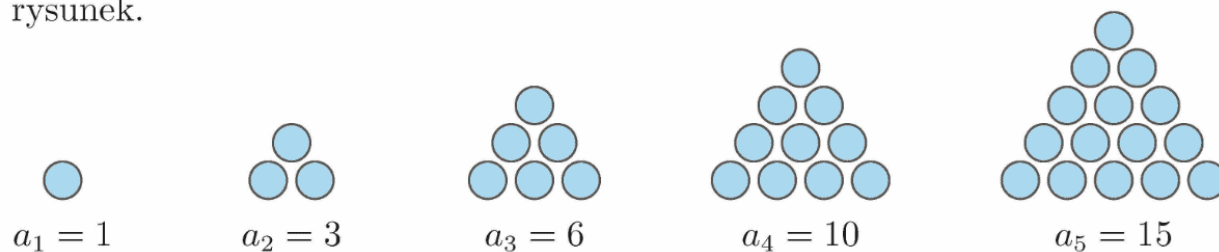
Pojęciem ciągu posługujemy się w sytuacjach, gdy mamy do czynienia z kolejno ustawionymi i ponumerowanymi obiektami. Mogą to być obiekty matematyczne lub inne. W rozdziale tym omawiamy ciągi liczbowe, czyli takie, których kolejnymi wyrazami są liczby. Przykłady ciągów:

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \dots$ – ciąg odwrotności kolejnych liczb pierwszych,

1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, 1,41421, 1,414214, 1,4142136, ... – ciąg kolejnych przybliżeń liczby $\sqrt{2}$.

3.1. Pojęcie ciągu

Liczby: 1, 3, 6, 10, 15, ... to kolejne liczby trójkątne – nazwę wyjaśnia poniższy rysunek.



Mówimy, że liczby trójkątne tworzą **ciąg**. Ciąg jest określony, jeśli kolejnym liczbom naturalnym dodatnim przyporządkowano wartości: $a_1, a_2, a_3, \dots$, które nazywamy **wyrazami ciągu**.

Przykład 1

W ciągu: 1, 4, 9, 16, ... wyrazy są kwadratami kolejnych liczb naturalnych dodatnich. Na przykład wyraz $a_9 = 9^2 = 81$, $a_{10} = 10^2 = 100$.

Ogólnie, n -ty wyraz ciągu ma postać: $a_n = n^2$.

Ćwiczenie 1

Odgadnij regułę, według której mogły powstać wyrazy danego ciągu, i podaj wyrazy a_9 oraz a_{10} tego ciągu.

a) 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...

c) $-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$

b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$

d) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots$

Definicja

Ciągiem nieskończonym nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych dodatnich.

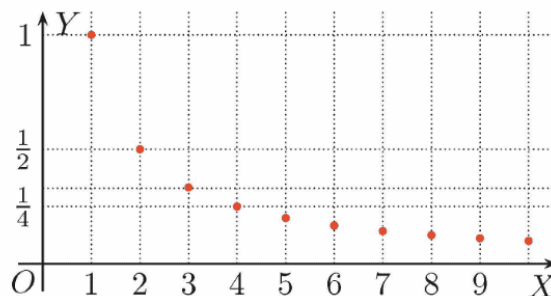
Czasem za dziedzinę ciągu przyjmowany jest zbiór wszystkich liczb naturalnych $\mathbf{N}$.

Uwaga. Zamiast „ciąg nieskończony” będziemy pisać krótko: „ciąg”.

Kiedy mówimy o ciągach, używamy zwykle innych oznaczeń niż do opisu funkcji. I tak ciąg $a: \mathbf{N}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ oznaczamy (a_n) . Kolejne wartości funkcji a , czyli wyrazy ciągu: $a(1), a(2), a(3), \dots$, oznaczamy odpowiednio: $a_1, a_2, a_3, \dots$

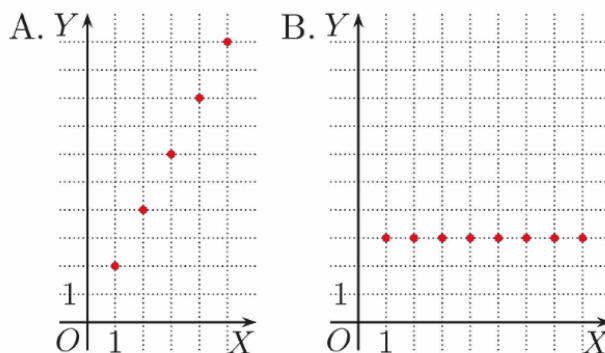
Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono wykres ciągu odwrotności kolejnych liczb naturalnych dodatnich: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$



Ćwiczenie 2

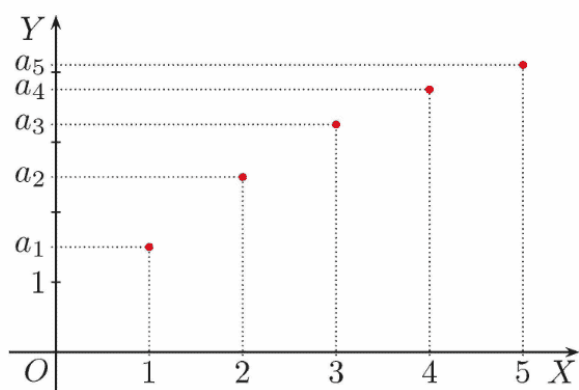
Na rysunku A przedstawiono wykres ciągu kolejnych liczb parzystych: 2, 4, 6, 8, 10, ..., a na rysunku B wykres ciągu stałego o wszystkich wyrazach równych 3. Podaj wyrazy siedemnasty oraz setny każdego z tych ciągów.



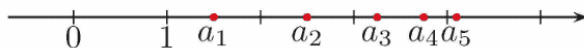
Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres ciągu:

- połówek kolejnych liczb naturalnych: $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \dots$
- kolejnych potęg liczby $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$
- naprzemiennego: 2, -2, 2, -2, 2, -2, ...



Czasami, zamiast rysować wykres ciągu w układzie współrzędnych (rysunek obok), wyrazy ciągu będziemy zaznaczać na osi liczbowej (rysunek poniżej).



Ćwiczenie 4

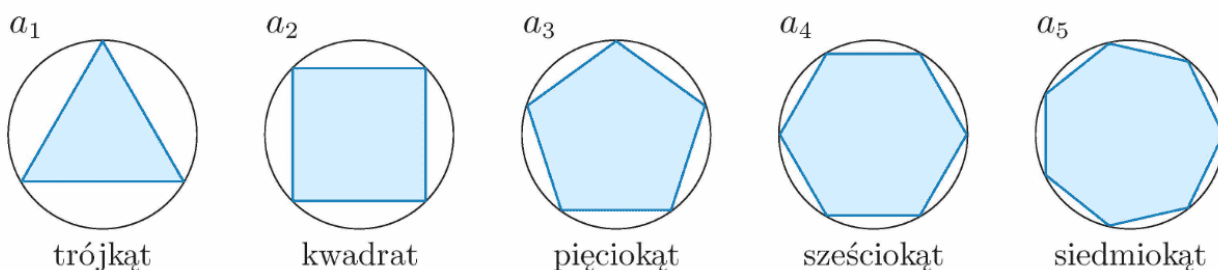
Zaznacz na osi liczbowej pięć początkowych wyrazów danego ciągu.

- $0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{6}{2}, \frac{10}{2}, \frac{15}{2}, \dots$
- $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$
- $1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$

Większość ciągów przez nas rozpatrywanych to ciągi, których wyrazami są liczby – takie ciągi nazywamy **ciągami liczbowymi**. Oprócz ciągów liczbowych rozpatruje się również inne ciągi, np. ciąg prostych, ciąg wielokątów.

Przykład 3

Na poniższych rysunkach przedstawiono pięć początkowych wyrazów ciągu wielokątów foremnych wpisanych w okrąg o promieniu 1.



Rozpatrujemy również **ciągi skończone**, czyli takie, których dziedziną jest zbiór skończony $\{1, 2, \dots, n\}$. Ciąg $a_1, a_2, \dots, a_n$ nazywamy **ciągami n -wyrazowym**.

Przykład 4

W tabeli przedstawiono dwa różne ciągi siedmiowyrazowe: (a_n) – ciąg nazw dni tygodnia ułożonych w kolejności następowania po sobie oraz (b_n) – ciąg nazw dni tygodnia ułożonych w kolejności alfabetycznej.

Zwróć uwagę na to, że w przeciwieństwie do zbiorów kolejność wyrazów w ciągu ma znaczenie. Jeżeli zmienimy kolejność wyrazów w ciągu, to otrzymamy nowy ciąg.

n	(a_n)	(b_n)
1	poniedziałek	czwartek
2	wtorek	niedziela
3	środa	piątek
4	czwartek	poniedziałek
5	piątek	sobota
6	sobota	środa
7	niedziela	wtorek

Zadania

- Podaj wyrazy a_7 , a_8 , a_9 i a_{10} ciągu:
 - kolejnych liczb nieparzystych dodatnich: 1, 3, 5, 7, ...
 - odwrotności kolejnych liczb parzystych dodatnich: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, ...
 - kolejnych liczb pierwszych: 2, 3, 5, 7, ...

- Naszkicuj wykres ciągu o wyrazach:

- $-1, -2, -3, -4, -5, \dots$
- $1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, \dots$
- $-3, 3, -3, 3, -3, 3, \dots$
- $2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{5}, 2\frac{1}{6}, \dots$
- $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots$
- $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{8}, 1, \frac{1}{16}, \dots$

- Wyrazy $a_1, a_2, \dots, a_6$ ciągu są przybliżeniami dziesiętnymi liczby x , do pierwszego, drugiego, ..., szóstego miejsca po przecinku. Wypisz te wyrazy.

- $x = \sqrt{2}$
- $x = \sqrt{3}$
- $x = \pi$

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &\approx 1,41421356237309505 \\ \sqrt{3} &\approx 1,73205080756887729 \\ \pi &\approx 3,14159265358979324\end{aligned}$$

Powtórzenie

- Podaj wyrazy a_1 , a_2 , a_3 , a_4 i a_5 ciągu:
 - sześcianów kolejnych liczb naturalnych dodatnich,
 - odwrotności kwadratów kolejnych liczb nieparzystych dodatnich.
- Naszkicuj wykres ciągu reszt z dzielenia kolejnych liczb naturalnych dodatnich przez 3.

3.2. Sposoby określania ciągu

Ciąg można opisać słownie, podając warunki, jakie spełniają jego wyrazy.

Przykład 1

a) Ciąg kolejnych cyfr występujących w rozwinięciu dziesiętnym liczby π .

Jest to ciąg: 3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, 8, 9, ...

b) Ciąg kolejnych liczb pierwszych większych od 10.

Jest to ciąg: 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, ...

Ćwiczenie 1

Wypisz siedem początkowych wyrazów ciągu:

a) kolejnych liczb naturalnych, których pierwiastek jest liczbą niewymierną,

b) kolejnych liczb pierwszych większych od 30.

Innym sposobem określenia ciągu jest podanie wzoru na n -ty wyraz ciągu – taki wzór nazywamy **wzorem ogólnym ciągu** (zwanym też wzorem jawnym).

Przykład 2

a) Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu o wzorze ogólnym $a_n = \frac{n}{2^n}$.

Po podstawieniu za n kolejno liczb: 1, 2, 3, 4, otrzymujemy:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}, \quad a_4 = \frac{4}{2^4} = \frac{1}{4}$$

b) Oblicz dziesięć początkowych wyrazów ciągu o wzorze ogólnym $a_n = 1 - \frac{1}{n}$.

Po podstawieniu za n kolejno liczb: 1, 2, ..., 10, otrzymujemy:

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}$$

Ćwiczenie 2

Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu (a_n) oraz wyraz a_{10} .

$$\text{a) } a_n = \frac{n^2}{n+1} \quad \text{b) } a_n = \frac{n^2-1}{n^2+1} \quad \text{c) } a_n = \frac{-3}{n(n+2)} \quad \text{d) } a_n = n^3 - n^2$$

Ćwiczenie 3

Oblicz następujące wyrazy ciągu (a_n) : a_1, a_2, a_3, a_4 i a_{10} .

$$\begin{array}{lll} \text{a) } a_n = (-1)^{n+1} & \text{c) } a_n = (-1)^n \cdot n & \text{e) } a_n = (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n+1} \\ \text{b) } a_n = (-1)^{n+1} \cdot 2^n & \text{d) } a_n = (-1)^n \cdot 2^{n+1} & \text{f) } a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} \end{array}$$

Czasem na podstawie kilku początkowych wyrazów ciągu można odgadnąć regułę, według której mogły one powstać, co pozwala zaproponować wzór ogólny tego ciągu.

Przykład 3

Kolejne wyrazy ciągu	Przykładowy wzór ogólny ciągu
3, 5, 7, 9, 11, 13, ...	$a_n = 2n + 1$
4, 7, 12, 19, 28, ...	$a_n = n^2 + 3$
-3, 3, -3, 3, -3, ...	$a_n = (-1)^n \cdot 3$

Ćwiczenie 4

Zaproponuj wzór na n -ty wyraz ciągu.

- | | |
|--------------------------------|--|
| a) 1, 3, 9, 27, 81, 243, ... | e) 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, ... |
| b) 0, 3, 8, 15, 24, 35, ... | f) $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{17}$, $\frac{3}{26}$, $\frac{3}{37}$, ... |
| c) -1, 4, -9, 16, -25, 36, ... | g) $\frac{1}{1 \cdot 2}$, $\frac{1}{2 \cdot 3}$, $\frac{1}{3 \cdot 4}$, $\frac{1}{4 \cdot 5}$, $\frac{1}{5 \cdot 6}$, $\frac{1}{6 \cdot 7}$, ... |
| d) 3, -9, 27, -81, 243, ... | h) $\frac{1}{1 \cdot 4}$, $-\frac{1}{2 \cdot 5}$, $\frac{1}{3 \cdot 6}$, $-\frac{1}{4 \cdot 7}$, $\frac{1}{5 \cdot 8}$, ... |

Zauważmy, że na podstawie kilku początkowych wyrazów ciągu możemy podać różne wzory na n -ty wyraz ciągu.

Ćwiczenie 5

Trzy początkowe wyrazy ciągu (a_n) są równe: -1, 0 i 1. Oblicz wyrazy a_4 , a_5 i a_6 , jeśli:

- a) $a_n = n - 2$, b) $a_n = (n - 2)^3$, c) $a_n = 1 - |n - 3|$.

Przykład 4

Które wyrazy ciągu określonego za pomocą wzoru $a_n = 25 - n^2$ są równe zero?

$$25 - n^2 = 0$$

$$n = -5 \text{ lub } n = 5$$

Z założenia $n \in \mathbf{N}_+$, zatem jedynym wyrazem ciągu (a_n) równym zero jest a_5 .

Ćwiczenie 6

Które wyrazy ciągu (a_n) są równe zero? Które wyrazy tego ciągu są dodatnie?

- | | |
|--------------------|---------------------|
| a) $a_n = 12 - 3n$ | c) $a_n = n^2 - 4$ |
| b) $a_n = 14 - 3n$ | d) $a_n = 40 - n^2$ |

Zadania

1. Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n) .

a) $a_n = 4n - 2$

d) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

g) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$

b) $a_n = 3n - n^2$

e) $a_n = 2 - \frac{(-1)^n}{n}$

h) $a_n = \frac{n[1+(-1)^n]}{2}$

c) $a_n = 2^n - n$

f) $a_n = (-1)^{n+1} + n$

i) $a_n = n^2 + (-n)^{n-1}$

2. Wypisz sześć początkowych wyrazów ciągu (a_n) .

a) $a_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ \frac{1}{n} & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$

c) $a_n = \begin{cases} 2n & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ \frac{n}{n-1} & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$

b) $a_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ 2^n & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$

d) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n+2} & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ n^2 & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$

3. Zaproponuj wzór ogólny ciągu.

a) $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \frac{9}{11}, \frac{11}{13}, \dots$

d) $2, \sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}, \sqrt[5]{6}, \dots$

b) $\frac{1}{1 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 5}, \frac{1}{5 \cdot 7}, \frac{1}{7 \cdot 9}, \frac{1}{9 \cdot 11}, \dots$

e) $\frac{1}{6}, \frac{4}{11}, \frac{7}{16}, \frac{10}{21}, \frac{13}{26}, \dots$

c) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, -\frac{1}{243}, \dots$

f) $0, \frac{1}{9}, 0, \frac{1}{81}, 0, \frac{1}{729}, \dots$

4. Które wyrazy ciągu (a_n) są równe zeru?

a) $a_n = n^2(n-3)$

c) $a_n = n^3 - 4n^2 + 4n$

e) $a_n = n^4 - 13n^2 + 36$

b) $a_n = \frac{n^2 - 4n + 3}{n+1}$

d) $a_n = \frac{n^3 - 3n^2 + 4n}{2n^2 + 4}$

f) $a_n = \frac{(n^3 - 64)(64 - n^2)}{3n - 1}$

5. Które wyrazy ciągu (a_n) są ujemne?

a) $a_n = n^2 - 5n - 10$

b) $a_n = n^2 - 11n + 10$

c) $a_n = 3n^2 - 10n + 8$

6. Które wyrazy ciągu (a_n) są równe jeden?

a) $a_n = n^2 - 2n - 14$

b) $a_n = \frac{2n-3}{n+1}$

c) $a_n = \frac{n^2 - 6n + 15}{n+3}$

7. Dla jakich n wyrazy ciągu (a_n) są mniejsze od wyrazów ciągu (b_n) ?

a) $a_n = n(n-5), b_n = \frac{n}{n+5}$

b) $a_n = 2n+6, b_n = (n^2-9)(n-5)$

8. Wyznacz wyrazy ciągu (a_n) , które są liczbami całkowitymi.

a) $a_n = \frac{n+4}{n}$

b) $a_n = \frac{2n+8}{n+1}$

c) $a_n = \frac{36-n^2}{n^2}$

D 9. Uzasadnij, że wykresy ciągów (a_n) i (b_n) nie mają punktów wspólnych.

a) $a_n = 2n^2 - n + 9, b_n = 6 - 8n$

b) $a_n = 4n^3, b_n = 4n^2 - n$

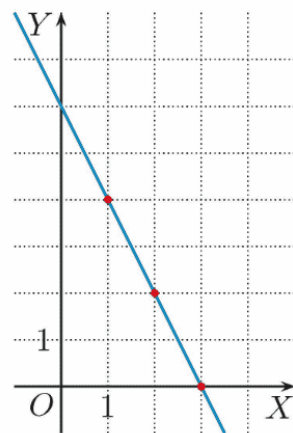
10. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w wykresie funkcji liniowej przedstawionym na rysunku obok. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.

Punkty $(1, 4)$ i $(3, 0)$ należą do wykresu funkcji liniowej $y = ax + b$. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 4 = a + b \\ 0 = 3a + b \end{cases}$$

i otrzymujemy $a = -2$ i $b = 6$. Zatem $y = -2x + 6$, czyli wzór ogólny ciągu ma postać $a_n = -2n + 6$.

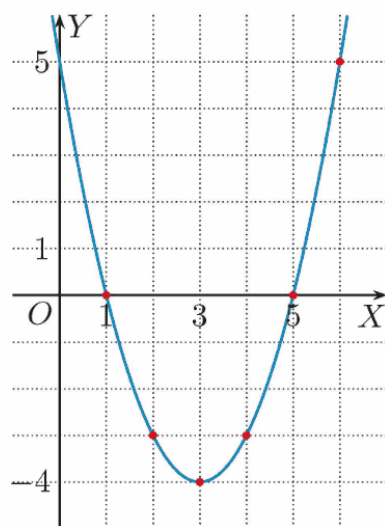


Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n) , jeśli jego wykres zawiera się w prostej:

- przechodzącej przez punkty $(2, 2)$ i $(6, 0)$,
- równoległej do prostej $y = -\frac{2}{3}x + 4$ oraz największy wyraz tego ciągu jest równy $\frac{1}{3}$,
- prostopadłej do prostej $y = 3x$ oraz $a_6 = 7$.

11. Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n) , jeżeli jego wykres jest zawarty w paraboli przedstawionej na rysunku obok. Które wyrazy ciągu (a_n) spełniają nierówność $a_n \leq 12$?

12. Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w paraboli przechodzącej przez początek układu współrzędnych i mającej wierzchołek w punkcie $(2, 8)$. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.



Powtórzenie

13. Oblicz sześć początkowych wyrazów ciągu (a_n) .

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------------|----------------------------|
| a) $a_n = 6 - \frac{3}{2}n$ | c) $a_n = (-1)^n(2n + 1)$ | e) $a_n = n - 5 - 3$ |
| b) $a_n = n^2 - 2n$ | d) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot n + 1$ | f) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ |

D 14. Uzasadnij, że ciąg (a_n) ma dwa wyrazy równe zeru.

- | | | |
|----------------------------|-------------------------------|---|
| a) $a_n = n^2 - 7n + 12$ | c) $a_n = (n^2 - 1)(n^2 - 9)$ | e) $a_n = n - 4 - 2$ |
| b) $a_n = n^3 - 6n^2 + 5n$ | d) $a_n = n^4 - 5n^2 + 4$ | f) $a_n = \frac{n^2 - 8n + 15}{n + 15}$ |

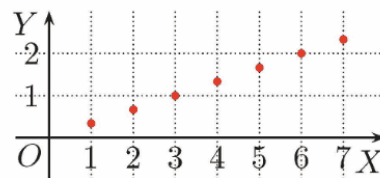
15. Ile wyrazów dodatnich ma ciąg (a_n) ?

- | | | |
|---------------------|--------------------------|-----------------------------------|
| a) $a_n = 7n - n^2$ | b) $a_n = 18 + 7n - n^2$ | c) $a_n = \frac{60 - n^2}{n + 4}$ |
|---------------------|--------------------------|-----------------------------------|

3.3. Ciągi monotoniczne

Przykład 1

Kolejne wyrazy ciągu o wzorze ogólnym $a_n = \frac{n}{3}$ (wykres obok) to: $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \frac{7}{3}, \dots$. Każdy wyraz tego ciągu (oprócz pierwszego) jest większy od wyrazu poprzedniego, zatem ciąg (a_n) jest rosnący.

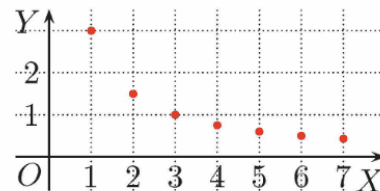


Ciąg (a_n) nazywamy **ciągami rosnącym**, jeżeli dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$ spełniona jest nierówność $a_{n+1} > a_n$ (czyli $a_{n+1} - a_n > 0$).

Zauważmy, że jeśli ciąg (a_n) jest rosnący, to dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}_+$ takich, że $m > n$, zachodzi nierówność $a_m > a_n$.

Przykład 2

Kolejne wyrazy ciągu o wzorze ogólnym $a_n = \frac{3}{n}$ (wykres obok) to: $\frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{3}{7}, \dots$. Każdy wyraz tego ciągu (oprócz pierwszego) jest mniejszy od wyrazu poprzedniego, zatem ciąg (a_n) jest malejący.



Ciąg (a_n) nazywamy **ciągami malejącym**, jeżeli dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$ spełniona jest nierówność $a_{n+1} < a_n$ (czyli $a_{n+1} - a_n < 0$).

Zauważmy, że jeśli ciąg (a_n) jest malejący, to dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}_+$ takich, że $m > n$, zachodzi nierówność $a_m < a_n$.

Ćwiczenie 1

Podaj przykład ciągu:

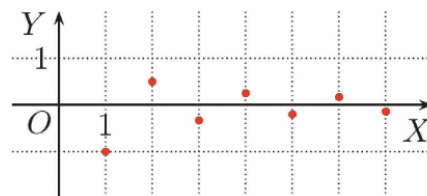
- a) malejącego o wszystkich wyrazach większych od 10,
- b) rosnącego o wszystkich wyrazach ujemnych.

D Przykład 3

Uzasadnij, że ciąg $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ (wykres obok) nie jest ani rosnący, ani malejący.

Kolejne wyrazy ciągu (a_n) to:

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$



Aby stwierdzić, że ciąg ten nie jest ani rosnący, ani malejący, wystarczy zauważyć, że na przykład drugi wyraz jest większy od pierwszego ($a_2 > a_1$), natomiast trzeci wyraz jest mniejszy od drugiego ($a_3 < a_2$).

D Ćwiczenie 2

Uzasadnij, że podany ciąg nie jest monotoniczny.

a) $1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots$

b) $-1, -1\frac{1}{2}, -2, -2\frac{1}{2}, -\sqrt{5}, -3, -3\frac{1}{2}, \dots$

Ćwiczenie 3

Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n) . Czy jest to ciąg monotoniczny?

a) $a_n = (n-3)^2$

b) $a_n = -n^2 + 4n$

c) $a_n = n^2 - 7n + 5$

Aby wykazać, że ciąg (a_n) jest monotoniczny, nie wystarczy obliczenie kilku jego początkowych wyrazów. Należy zbadać znak różnicy $a_{n+1} - a_n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$.

Przykład 4

Dany jest ciąg o wzorze ogólnym $a_n = \frac{2n}{n+3}$. Wyznacz wyraz a_{n+1} .

$$a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{(n+1)+3} = \frac{2n+2}{n+4}$$

Wyraz a_{n+1} otrzymujemy, wstawiając we wzorze ogólnym $n+1$ w miejsce n .

Ćwiczenie 4

Wyznacz wyraz a_{n+1} ciągu (a_n) .

a) $a_n = \frac{n}{2n+1}$

b) $a_n = \frac{-2n}{3n-2}$

c) $a_n = \frac{n-3}{n^2+1}$

d) $a_n = \frac{n^2-1}{2n-5}$

D Przykład 5

Wykaż, że ciąg $a_n = \frac{n}{n+1}$ jest rosnący.

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

Wyznaczymy wyraz a_{n+1} .

Wyznaczymy różnicę $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

Zauważmy, że $a_{n+1} - a_n > 0$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, zatem ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym.

D Ćwiczenie 5

Wykaż, że ciąg (a_n) jest rosnący.

a) $a_n = n^2 - n$

b) $a_n = \frac{n}{n+4}$

c) $a_n = \frac{2n-2}{2n+1}$

d) $a_n = \frac{4n+1}{3n+1}$

D Ćwiczenie 6

Wykaż, że ciąg (a_n) jest malejący.

a) $a_n = \frac{n+2}{n+1}$

b) $a_n = \frac{4n+2}{5n-1}$

c) $a_n = \frac{n+2}{2n+3}$

d) $a_n = \frac{1}{n^2+1}$

Ciągami monotonicznymi, oprócz ciągów rosnących i ciągów malejących, są ciągi stałe, ciągi niemalejące i ciągi nierosnące.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągami stałym**, jeżeli wszystkie wyrazy tego ciągu są równe.

Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem **niemalejącym**, jeśli dla każdej liczby $n \in \mathbf{N}_+$ spełniona jest nierówność $a_{n+1} \geq a_n$ (czyli $a_{n+1} - a_n \geq 0$).

Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem **nierosnącym**, jeśli dla każdej liczby $n \in \mathbf{N}_+$ spełniona jest nierówność $a_{n+1} \leq a_n$ (czyli $a_{n+1} - a_n \leq 0$).

Uwaga. Każdy ciąg rosnący jest ciągiem niemalejącym, a każdy ciąg malejący jest ciągiem nierosnącym.

Ćwiczenie 7

Jakie liczby można wstawić w miejsce $?$, aby otrzymać ciąg niemalejący?

a) 1, 2, 3, 4, $?$, $?$, 4, 5, 6, ...

b) 1, $\frac{3}{2}$, $?$, 2, $?$, $?$, 3, 3, 3, ...

Ćwiczenie 8

Wypisz osiem początkowych wyrazów dowolnego nierosnącego ciągu (a_n) , dla którego: a) $a_2 = a_3 = 2$, $a_5 = 1$, b) $a_4 = a_6 = -1$, $a_7 = -2$.

Zadania

1. Wyznacz wyraz a_{n+1} ciągu o podanym wzorze ogólnym.

a) $a_n = n^2 - 1$ c) $a_n = \frac{3+n}{n}$ e) $a_n = \frac{3n-4}{2n+1}$ g) $a_n = \frac{2n^2+3}{2n+6}$
b) $a_n = 2n - n^2$ d) $a_n = \frac{2n}{n+5}$ f) $a_n = \frac{2-3n}{4n-5}$ h) $a_n = \frac{4-2n^2}{2n^2-1}$

D 2. Wykaż, że ciąg (a_n) jest monotoniczny.

a) $a_n = n^2 - 2n$ b) $a_n = 1 - n^2$ c) $a_n = 3 + \frac{7}{n}$ d) $a_n = -4 + \frac{2}{n^2}$

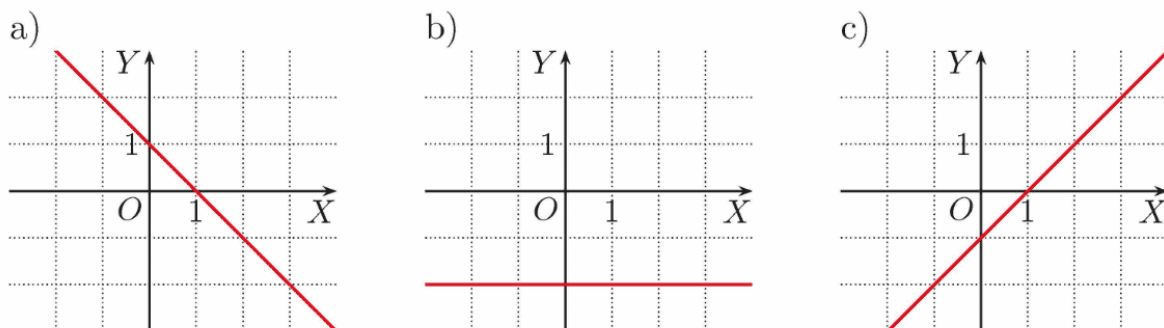
D 3. Wykaż, że ciąg (a_n) jest monotoniczny.

a) $a_n = \frac{1-n}{n+1}$ c) $a_n = \frac{n}{2n-1}$ e) $a_n = \frac{2n-4}{3n+5}$ g) $a_n = \frac{n^2-1}{n}$
b) $a_n = \frac{3n}{n+2}$ d) $a_n = \frac{3n+2}{4n+1}$ f) $a_n = \frac{2-3n}{3-4n}$ h) $a_n = \frac{n^2}{n+1}$

D 4. Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n) . Uzasadnij, że ten ciąg nie jest monotoniczny.

a) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ c) $a_n = |n - 4|$ e) $a_n = (n - 1)(n - 3)$
b) $a_n = 4 - \frac{(-1)^n}{n}$ d) $a_n = |n^2 - 4|$ f) $a_n = 8n - n^2$

5. Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w prostej przedstawionej na rysunku. Określ monotoniczność tego ciągu.



6. Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w prostej $y = (k-1)x$. Dla jakich wartości parametru k ciąg (a_n) jest:

a) malejący, b) rosnący, c) stały?

7. Dla jakich wartości parametru k ciąg (a_n) jest rosnący?

a) $a_n = (2k-3)n-6$ b) $a_n = (k^2-1)n+4$ c) $a_n = (3-k^2)n$

8. Dla jakich wartości parametru t ciąg (a_n) jest nierosnący, a dla jakich niemalejący?

a) $a_n = (3 - \frac{1}{3}t)n + 2$ b) $a_n = (t^2 - 9)(n + 1)$ c) $a_n = -n(t^2 - 2t)$

9. a) Podaj przykład ciągu malejącego (a_n) takiego, że ciąg (b_n) określony za pomocą wzoru $b_n = a_n^2$ jest rosnący.

b) Podaj przykład ciągu rosnącego (a_n) takiego, że ciąg (b_n) określony za pomocą wzoru $b_n = a_n^2$ jest malejący.

Powtórzenie

- D** 10. Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n) . Uzasadnij, że ciąg ten nie jest monotoniczny.

a) $a_n = (2-n)^2$ b) $a_n = n^2 - 6n$ c) $a_n = |n-4|$ d) $a_n = |n^2 - 4n|$

11. Wyznacz wyraz a_{n+1} ciągu (a_n) oraz różnicę $a_{n+1} - a_n$.

a) $a_n = \frac{n-1}{n}$ b) $a_n = \frac{3n-3}{n+1}$ c) $a_n = \frac{2n-4}{2n+1}$ d) $a_n = \frac{2n-4}{3n+2}$

12. Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest monotoniczny.

a) $a_n = 4n - 2$ c) $a_n = n^2 - 8$ e) $a_n = 2 + \frac{5}{n}$ g) $a_n = \frac{n+3}{n+1}$
b) $a_n = -n + 7$ d) $a_n = 3n - n^2$ f) $a_n = 4 - \frac{2}{n}$ h) $a_n = \frac{4-n}{n+2}$

3.4. Ciągi określone rekurencyjnie

Ciąg (a_n) możemy określić, podając jego pierwszy wyraz a_1 (lub kilka początkowych wyrazów) oraz wzór na wyraz a_{n+1} , wyrażony za pomocą poprzedniego wyrazu (lub kilku poprzednich). Taki sposób określenia ciągu nazywamy **rekurencyjnym**.

Przykład 1

Oblicz wyrazy a_2 , a_3 i a_4 ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n^2 + 1 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Podstawiamy za n kolejno: 1, 2, 3 i otrzymujemy:

$$a_2 = a_1^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$$

$$a_3 = a_2^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$$

$$a_4 = a_3^2 + 1 = 5^2 + 1 = 26$$

Ćwiczenie 1

Poniżej podano rekurencyjne określenie ciągu (a_n) i obliczono wyrazy a_2 i a_3 . Oblicz wyrazy a_4 , a_5 i a_6 .

a)	$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = a_n^2 - 1 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$	$a_2 = a_1^2 - 1 = (-1)^2 - 1 = 0$ $a_3 = a_2^2 - 1 = 0 - 1 = -1$
b)	$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$	$a_2 = 2a_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ $a_3 = 2a_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$
c)	$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2a_n + (-1)^n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$	$a_2 = 2a_1 + (-1)^1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ $a_3 = 2a_2 + (-1)^2 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

Ćwiczenie 2

Oblicz wyrazy $a_2, a_3, \dots, a_6$ ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie.

a) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n - 3 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{64} \\ a_{n+1} = 2^n \cdot a_n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_{n+1} = 2a_n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n^2 - n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 3a_n - 2n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n^2 - a_n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$

Przykład 2

Oblicz wyrazy $a_3, a_4, \dots, a_{10}$ ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie.

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

Zauważmy, że każdy wyraz ciągu (z wyjątkiem pierwszego i drugiego) jest sumą dwóch poprzednich wyrazów. Jego dziesięć początkowych wyrazów to:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$$

Ciąg ten znany jest jako **ciąg Fibonacciego** [czyt. fibonacczkiego] nazwany tak na cześć Leonarda z Pizy (ok. 1180–1250), zwanego Fibonaccim.

Ćwiczenie 3

Oblicz wyrazy a_3, a_4, a_5 i a_6 ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie.

- a) $\begin{cases} a_1 = 0, a_2 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 1 \\ a_{n+1} = a_n^2 - a_{n-1} \quad \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} a_1 = 2, a_2 = 1 \\ a_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1} - n \quad \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$

D Przykład 3

Uzasadnij, że ciąg (a_n) jest monotoniczny.

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n - n^2 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Wyznaczamy różnicę $a_{n+1} - a_n$ i określamy jej znak:

$a_{n+1} - a_n = a_n - n^2 - a_n = -n^2 < 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest malejący.

D Ćwiczenie 4

Uzasadnij, że ciąg (a_n) jest monotoniczny.

- a) $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = a_n + 4n^2 - 1 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = n^2 \cdot a_n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2^n} \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{3n+1}{n+2} \cdot a_n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$

Rekurencji używa się do definiowania niektórych pojęć matematycznych. Jednym z przykładów jest $n!$ (n **silnia**). Dla $n > 1$ symbol $n!$ oznacza iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n : $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.

Przyjmuje się również, że $0! = 1$ oraz $1! = 1$. Rekurencyjna definicja $n!$:

$$\begin{cases} 0! = 1, 1! = 1 \\ (n+1)! = n!(n+1) \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Podanie wzoru ogólnego ciągu, który jest określony rekurencyjnie, może być trudne. Natomiast jeśli znamy wzór ogólny ciągu, to ciąg ten możemy zdefiniować rekurencyjnie.

Przykład 4

Dany jest ciąg o wzorze ogólnym $a_n = n(n+1)$. Określ ten ciąg rekurencyjnie.

Wyznaczamy wyrazy: $a_1 = 1 \cdot 2 = 2$ oraz $a_{n+1} = (n+1)(n+2)$.

- Ciąg możemy określić rekurencyjnie na podstawie różnicy:

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)(n+2) - n(n+1) = 2n+2$$

Stąd otrzymujemy rekurencyjne określenie ciągu (a_n) :

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 2 \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

- Rekurencyjne określenie ciągu możemy również wyznaczyć na podstawie ilorazu:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = \frac{n+2}{n}$$

Stąd otrzymujemy inne rekurencyjne określenie ciągu (a_n) :

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{n+2}{n} \cdot a_n \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Ćwiczenie 5

Określ rekurencyjnie ciąg (a_n) na dwa sposoby. Skorzystaj najpierw z różnicy $a_{n+1} - a_n$, a następnie z ilorazu $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

- | | | |
|--------------------|------------------------|-----------------------------|
| a) $a_n = 2n + 1$ | c) $a_n = 2 \cdot 3^n$ | e) $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ |
| b) $a_n = n^2 + 1$ | d) $a_n = (-1)^n$ | f) $a_n = \sqrt{n+1}$ |

Zadania

1. Oblicz wyrazy a_2 , a_3 , a_4 i a_5 ciągu (a_n) . Ile liczb dodatnich jest wśród dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu?

a) $\begin{cases} a_1 = -5 \\ a_{n+1} = 2a_n + 10, \quad n \geq 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = a_n + (n-1)^2, \quad n \geq 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_{n+1} = a_n - 2^n, \quad n \geq 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} a_1 = -\frac{1}{2} \\ a_{n+1} = \left(a_n + \frac{1}{2}\right)^2, \quad n \geq 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + (-2)^n, \quad n \geq 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = na_n^2 - 1, \quad n \geq 1 \end{cases}$

2. Ile jest liczb ujemnych wśród sześciu początkowych wyrazów ciągu (a_n) ?

a) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n - n^2, \quad n \geq 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = a_n^2 + 4a_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = 2 - na_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n^2 - na_n - 4, \quad n \geq 1 \end{cases}$

3. Oblicz wyraz a_5 ciągu (a_n) .

a) $\begin{cases} a_1 = 1, \quad a_2 = 2 \\ a_{n+2} = a_n - a_{n+1}, \quad n \geq 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 = 1, \quad a_2 = 1 \\ a_{n+2} = (-1)^n a_n - a_{n+1}, \quad n \geq 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = 32, \quad a_2 = 64 \\ a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}, \quad n \geq 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_1 = a_2 = a_3 = 1 \\ a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$

4. Oblicz x , jeśli $a_2 + a_5 = 9$. Czy ciąg (a_n) jest monotoniczny?

a) $\begin{cases} a_1 = x \\ a_{n+1} = a_n - n^2, \quad n \geq 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = x \\ a_{n+1} = 2a_n + (-1)^{n-1}, \quad n \geq 1 \end{cases}$

D 5. Dla $n \geq 1$ wyrazy ciągu określone są za pomocą wzoru:

a) $a_{n+1} = a_n^2 - na_n,$

b) $a_{n+1} = a_n^2 - (n+1)a_n.$

Wykaż, że niezależnie od tego, którą z liczb: $-1, 1, 2$ przyjmiemy za a_1 , otrzymamy tę samą wartość wyrazu a_4 .

6. Ciąg (a_n) jest określony za pomocą wzoru $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{n(n+1)}$ dla $n \geq 1$. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu, jeśli:

a) $a_2 = -\frac{1}{2},$

b) $a_2 = \frac{3}{2},$

c) $a_3 = 1,$

d) $a_4 = 1\frac{1}{4}.$

Powtórzenie

7. Oblicz wyrazy a_3, a_4, a_5 i a_6 ciągu (a_n) .

a) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n^2 - 2n, \quad n \geq 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 = 1, \quad a_2 = 2 \\ a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad n \geq 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 3a_n - n^2, \quad n \geq 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_1 = a_2 = 3 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$

8. Dla $n \geq 1$ wyrazy ciągu określone są za pomocą wzoru $a_{n+1} = a_n^2 + na_n$. Którą z liczb: $-2, -1, 0, 1, 2$ należy wybrać jako a_1 , aby:

a) $a_3 = 0,$

b) $a_3 = 8?$

Ciąg Fibonacciego

Pierwsze dwa wyrazy ciągu Fibonacciego są równe 1, a każdy następny wyraz jest sumą dwóch poprzednich wyrazów.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765 ...

Złota liczba a ciąg Fibonacciego

Niech ciąg (f_n) będzie ciągiem Fibonacciego. Rozpatrzmy kolejne ilorazy $\frac{f_{n+1}}{f_n}$.

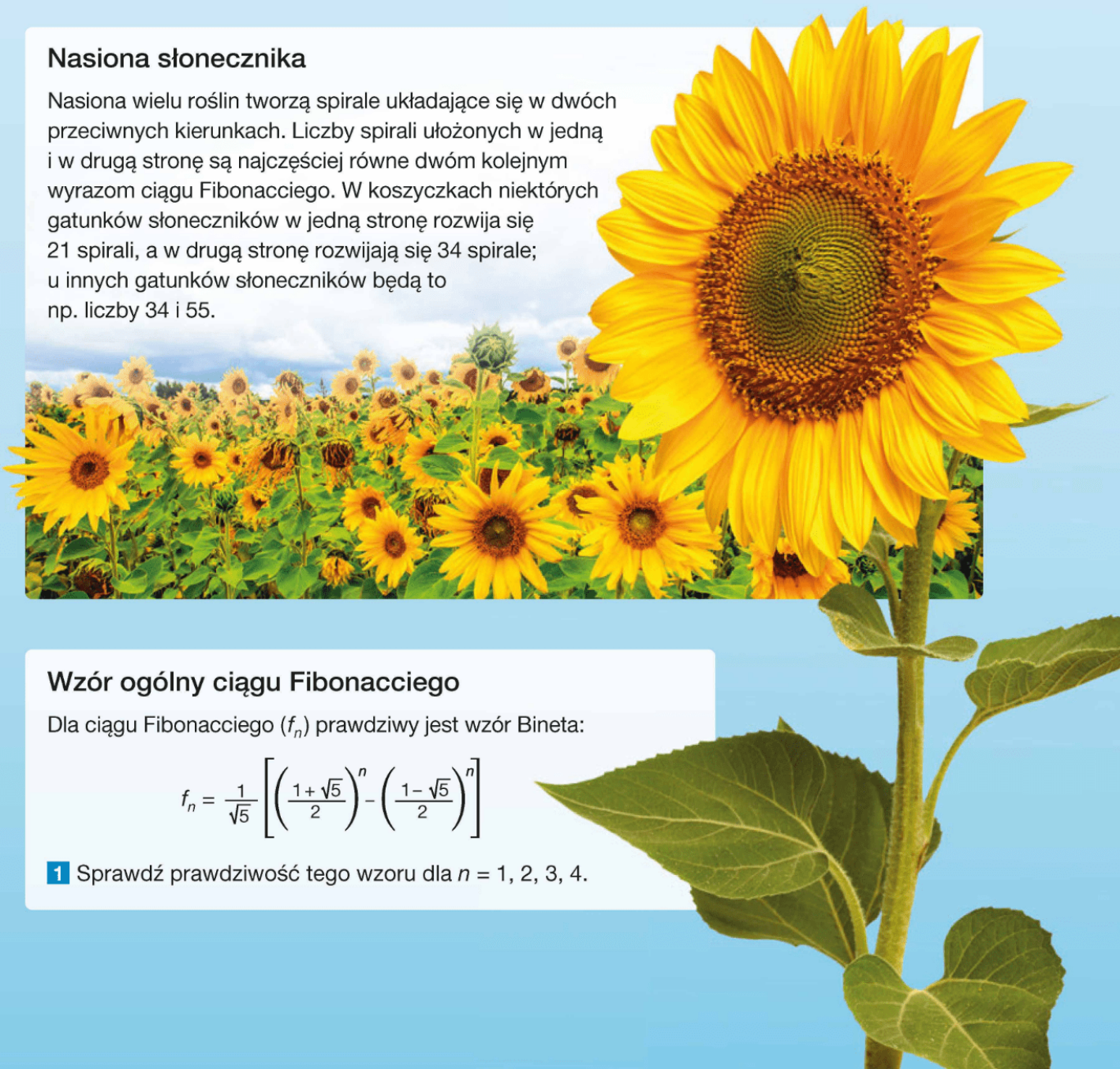
$$\frac{1}{1} = 1; \quad \frac{2}{1} = 2; \quad \frac{3}{2} = 1,5; \quad \frac{5}{3} = 1,6; \quad \frac{8}{5} = 1,6; \quad \frac{13}{8} = 1,625; \quad \frac{21}{13} = 1,61538...$$

Wartości tych ułamków są coraz bliższe złotej liczbie:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339887$$

Nasiona słonecznika

Nasiona wielu roślin tworzą spirale układające się w dwóch przeciwnych kierunkach. Liczby spirali ułożonych w jedną i w drugą stronę są najczęściej równe dwóm kolejnym wyrazom ciągu Fibonacciego. W koszyczkach niektórych gatunków słoneczników w jedną stronę rozwija się 21 spirali, a w drugą stronę rozwijają się 34 spirale; u innych gatunków słoneczników będą to np. liczby 34 i 55.



Wzór ogólny ciągu Fibonacciego

Dla ciągu Fibonacciego (f_n) prawdziwy jest wzór Bineta:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

1 Sprawdź prawdziwość tego wzoru dla $n = 1, 2, 3, 4$.

3.5. Ciąg arytmetyczny (1)

Przykład 1

Pani Jola postanowiła kupić sprzęt narciarski za 2100 zł. W tym celu w pierwszym miesiącu odłożyła 450 zł, a w każdym następnym odkładała po 150 zł. W tabeli podano stan oszczędności pani Joli w kolejnych miesiącach.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
450	600	750	900	1050	1200	1350	1500	1650	1800	1950	2100

Zauważ, że każda z wymienionych w tabeli kwot (oprócz pierwszej) jest większa od poprzedniej o tę samą stałą wartość. Wymienione liczby stanowią przykład ciągu arytmetycznego.

Definicja

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy **ciągą arytmetyczną**, jeżeli istnieje taka liczba r , że każdy wyraz ciągu, oprócz pierwszego, powstaje przez dodanie tej liczby do wyrazu poprzedniego:

$$a_{n+1} = a_n + r$$

dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$.

Liczbę r nazywamy **różnicą** ciągu (a_n) .

Ćwiczenie 1

Podaj różnicę ciągu arytmetycznego i wypisz jego dwa następne wyrazy.

a) $3, 12, 21, \dots$

b) $1\frac{2}{3}, 2\frac{1}{3}, 3, \dots$

c) $7, 3, -1, \dots$

Przykład 2

Oblicz jedenasty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) , jeśli $a_1 = 6$ oraz $r = 5$.

$$a_1 = 6$$

$$a_2 = 6 + 5 = 11$$

$$a_3 = 6 + 2 \cdot 5 = 16$$

$$a_4 = 6 + 3 \cdot 5 = 21$$

$\vdots$

$$a_{11} = 6 + 10 \cdot 5 = 56$$

Wypisujemy kilka początkowych wyrazów ciągu.

Aby otrzymać wyraz a_{11} ciągu arytmetycznego, obliczamy $a_1 + (11 - 1)r$.

Wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r ma postać:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Jeśli znamy pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego i jego różnicę, to korzystając ze wzoru ogólnego tego ciągu, możemy obliczyć jego dowolny wyraz.

Przykład 3

Podaj wzór ogólny ciągu arytmetycznego: 1, 11, 21, 31, 41, ... Oblicz trzydziesty wyraz tego ciągu.

Jest to ciąg o pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i różnicy $r = a_2 - a_1 = 11 - 1 = 10$, zatem wzór ogólny ma postać $a_n = a_1 + (n - 1)r = 1 + (n - 1) \cdot 10 = 10n - 9$. Obliczamy trzydziesty wyraz: $a_{30} = 10 \cdot 30 - 9 = 291$.

Ćwiczenie 2

Podaj wzór ogólny ciągu arytmetycznego. Oblicz dwudziesty wyraz tego ciągu.

- a) 2, 4, 6, 8, 10, ... b) $4, 4\frac{1}{2}, 5, 5\frac{1}{2}, 6, \dots$ c) 3, 2, 1, 0, -1, -2, ...

Ćwiczenie 3

Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego, w którym:

- a) $a_1 = 4, a_4 = 10$, b) $a_1 = -5, a_6 = 20$, c) $a_1 = 5, a_{10} = 2\frac{3}{4}$.

Ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy r jest:

- **rosnący**, gdy $r > 0$, ■ **malejący**, gdy $r < 0$, ■ **stały**, gdy $r = 0$.

Ćwiczenie 4

Oblicz różnicę ciągu arytmetycznego i określ jego monotoniczność. Wyznacz wzór na n -ty wyraz tego ciągu.

- a) 9, 3, -3, -9, -15, -21, ... b) $1\frac{3}{4}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{4}, 4, \dots$ c) 2, 2, 2, 2, ...

Ćwiczenie 5

Dla jakiej wartości parametru k liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego?

- a) $a = 3, b = k + 1, c = 3k - 6$

Liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, gdy:
$$b - a = c - b$$

- b) $a = 1, b = k^2, c = k^2 + 2k + 2$

Ćwiczenie 6

Dane są wyrazy a_1, a_2, a_3 ciągu arytmetycznego (a_n) . Wyznacz wyrazy a_4 i a_5 . Określ monotoniczność tego ciągu w zależności od parametru m .

- a) $a_1 = 4, a_2 = m + 6, a_3 = 2m + 8$ c) $a_1 = 1, a_2 = m^2, a_3 = 2m^2 - 1$
b) $a_1 = \frac{1}{2}m, a_2 = m - 3, a_3 = \frac{3}{2}m - 6$ d) $a_1 = m^2, a_2 = m, a_3 = 2m - m^2$

Przykład 4

Jaką liczbę należy wstawić między liczby a i b , aby otrzymany w ten sposób ciąg był arytmetyczny?

Oznaczmy szukaną liczbę przez x . Wówczas:

$$\begin{aligned}x - a &= b - x \\ x &= \frac{a+b}{2}\end{aligned}$$

Szukaną liczbą jest więc **średnia arytmetyczna** liczb a i b . Otrzymujemy zatem ciąg: $a, \frac{a+b}{2}, b$.

W ciągu arytmetycznym (a_n) każdy wyraz, oprócz pierwszego, jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \text{ dla } n \geq 2$$

Dowód

Dla $n \geq 2$ wyrazy a_{n-1} i a_{n+1} ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r możemy zapisać w postaci: $a_{n-1} = a_n - r$ i $a_{n+1} = a_n + r$. Zatem:

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_n - r + a_n + r}{2} = \frac{2a_n}{2} = a_n$$

Ćwiczenie 7

Oblicz x , jeśli podane liczby tworzą ciąg arytmetyczny.

a) $9, x, 37$

b) $4, x, -8$

c) $\frac{1}{2}, x, \frac{1}{3}$

Zadania

1. Oblicz n -ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r . Określ monotoniczność tego ciągu.

a) $a_1 = -5, r = 3, n = 14$

c) $a_1 = 1, r = \frac{1}{2}, n = 20$

b) $a_1 = 4, r = -4, n = 11$

d) $a_1 = -2, r = 0,1, n = 35$

2. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) .

a) $a_1 = 6, a_3 = 20$

b) $a_1 = -4, a_4 = 5$

c) $a_1 = 9, a_6 = 6\frac{1}{2}$

3. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r .

a) $r = 2, a_3 = 5$

b) $r = -3, a_5 = 0$

c) $r = \frac{1}{2}, a_7 = -4$

4. Wyznacz liczby:

a) a, b tak, aby ciąg: $1, a, b, 10$ był arytmetyczny,

b) a, b, c tak, aby ciąg: $2, a, b, c, 100$ był arytmetyczny.

5. Wstaw między liczby 1 i 25:
- pięć liczb tak, aby otrzymać ciąg arytmetyczny,
 - siedem liczb tak, aby otrzymać ciąg arytmetyczny.
6. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) i oblicz a_{12} .
- $\begin{cases} a_6 = 20 \\ a_{10} = 4 \end{cases}$
 - $\begin{cases} a_3 = -9 \\ a_{15} = -3 \end{cases}$
 - $\begin{cases} a_5 = 4 \\ a_{21} = 8 \end{cases}$
7. Oblicz pierwszy wyraz i różnicę ciągu arytmetycznego (a_n) spełniającego podane warunki.
- $\begin{cases} a_2 + a_4 = 22 \\ \frac{a_1}{a_5} = 21 \end{cases}$
 - $\begin{cases} a_2^2 + a_4^2 = 16 \\ a_3 + a_5 = 8 \end{cases}$
 - $\begin{cases} \frac{a_5}{a_1} = -1 \\ a_2 \cdot a_7 = -1 \end{cases}$
 - $\begin{cases} a_1 + a_4 = 11 \\ a_7 - a_3 = 20 \end{cases}$
 - $\begin{cases} a_3 + a_5 = 4 \\ a_2 \cdot a_4 = 6 \end{cases}$
 - $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 3 \\ a_3 = \frac{5}{a_4} + 2 \end{cases}$
8. Oblicz x , jeśli wiadomo, że podane liczby są kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu arytmetycznego:
- $-2, 2 + x, 4 + x^2,$
 - $2x - 3, 3x - 5, \frac{1}{4}x^2 + x - 2.$
9. Suma drugiego i czwartego wyrazu ciągu arytmetycznego wynosi 2, a różnica szóstego i trzeciego wyrazu jest równa 9. Który wyraz tego ciągu jest równy 40?
10. Wyznacz cztery liczby tworzące ciąg arytmetyczny, jeśli wiadomo, że różnica tego ciągu jest równa 1, a iloczyn trzech ostatnich wyrazów jest równy -60 .

Powtórzenie

11. a) Liczby 3, x , y , 15 tworzą ciąg arytmetyczny. Wyznacz liczby x i y .
 b) Liczby 4, x , y , z , 50 tworzą ciąg arytmetyczny. Wyznacz liczby x , y i z .
12. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) i oblicz a_6 .
- $\begin{cases} a_3 = 5 \\ a_8 = 20 \end{cases}$
 - $\begin{cases} a_5 = 0 \\ a_8 = -12 \end{cases}$
 - $\begin{cases} a_{10} = -1 \\ a_{16} = 2 \end{cases}$
13. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) spełniającego poniższe warunki. Który wyraz tego ciągu jest równy 0?
- $\begin{cases} a_1 + a_3 = 0 \\ a_2 + a_4 = -8 \end{cases}$
 - $\begin{cases} a_1 + a_4 = 12 \\ a_2 + a_4 + a_6 = 27 \end{cases}$
 - $\begin{cases} a_1 + a_2 = 5 \\ a_1 + a_3 = -4 \end{cases}$

3.6. Ciąg arytmetyczny (2)

Przykład 1

Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu (a_n) . Czy jest to ciąg arytmetyczny?

a) $a_n = n^2 + n + 1$

Obliczamy początkowe wyrazy tego ciągu:

$$a_1 = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

$$a_2 = 2^2 + 2 + 1 = 7$$

$$a_3 = 3^2 + 3 + 1 = 13$$

$$a_4 = 4^2 + 4 + 1 = 21$$

Aby pokazać, że ciąg nie jest arytmetyczny, wystarczy wskazać wyrazy a_k , a_{k+1} oraz a_n , a_{n+1} takie, że $a_{k+1} - a_k \neq a_{n+1} - a_n$.

Obliczamy różnice: $a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4$ oraz $a_3 - a_2 = 13 - 7 = 6$, zatem $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$, więc nie jest to ciąg arytmetyczny.

b) $a_n = (n - 2)^3 + 2$

Obliczamy początkowe wyrazy tego ciągu:

$$a_1 = (1 - 2)^3 + 2 = 1$$

$$a_3 = (3 - 2)^3 + 2 = 3$$

$$a_2 = (2 - 2)^3 + 2 = 2$$

$$a_4 = (4 - 2)^3 + 2 = 10$$

Obliczamy różnice: $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = 1$, ale $a_4 - a_3 \neq a_3 - a_2$, więc nie jest to ciąg arytmetyczny.

D Ćwiczenie 1

Uzasadnij, że ciąg o podanych początkowych wyrazach nie jest arytmetyczny.

a) 2, 4, 6, 8, 12, 14, 16, 18, ...

b) $1, -\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}, -3, -4\frac{1}{2}, -5, -6\frac{1}{2}, \dots$

Aby wykazać, że ciąg (a_n) jest arytmetyczny, nie wystarczy sprawdzić różnicy między kilkoma początkowymi wyrazami tego ciągu. Należy sprawdzić, czy różnica $a_{n+1} - a_n$ jest stała dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$.

D Przykład 2

Wykaż, że ciąg $a_n = \frac{3n+2}{2}$ jest ciągiem arytmetycznym.

Wyznaczamy różnicę $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)+2}{2} - \frac{3n+2}{2} = \frac{3n+5}{2} - \frac{3n+2}{2} = \frac{3}{2}$$

Różnica ta jest stała dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest arytmetyczny.

D Ćwiczenie 2

Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

a) $a_n = 6n - 2$ b) $a_n = \frac{2n-5}{3}$ c) $a_n = \sqrt{2}n$ d) $a_n = 13 - \frac{n}{10}$

Przykład 3

Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego:

$$-3, -1, 1, 3, 5, \dots$$

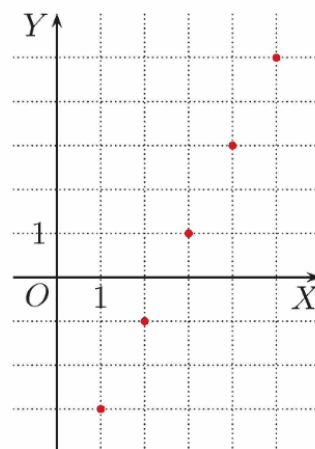
Narysuj wykres tego ciągu.

Różnica tego ciągu jest równa 2.

Wyznaczamy wzór ogólny:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)r = -3 + (n-1) \cdot 2 = \\ &= 2n - 5 \end{aligned}$$

Zauważmy, że wykres tego ciągu jest zawarty w prostej $y = 2x - 5$.



Ćwiczenie 3

- Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego: $6, 4, 2, 0, -2, \dots$. Naszkicuj wykres tego ciągu i podaj równanie prostej, w której się on zawiera.
- Wykres ciągu arytmetycznego jest zawarty w prostej $y = 3x - 2$. Podaj pięć początkowych wyrazów tego ciągu oraz jego wzór ogólny.
- Wyznacz równanie prostej, w której zawiera się wykres ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie $a_1 = 3$ i różnicy $r = 2$.

D Ćwiczenie 4

Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy jego wykres zawiera się w pewnej prostej $y = ax + b$.

Zadania

1. Dany jest ciąg $a_n = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) + n$.

a) Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n) .

- D b) Uzasadnij, że ciąg (a_n) nie jest ciągiem arytmetycznym.

- D 2. Wykaż, że ciąg (a_n) nie jest ciągiem arytmetycznym.

a) $a_n = n^2 - 3n$ b) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ c) $a_n = \frac{1}{2}n(n+1)(7-n)$

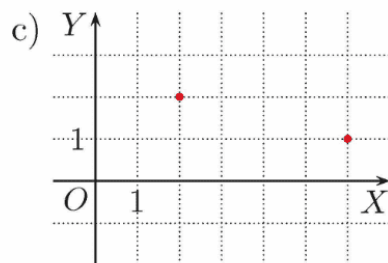
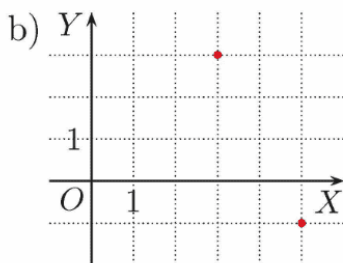
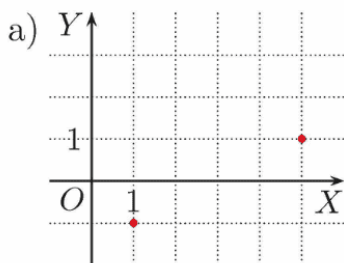
- D 3. Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

a) $a_n = 3n - 1$ c) $a_n = \frac{n+2}{6}$ e) $a_n = \frac{\sqrt{5}n+1}{2}$
b) $a_n = 4 - 2n$ d) $a_n = \frac{1}{2}(n-7)$ f) $a_n = \frac{9n^2-4}{3n+2}$

4. Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w podanej prostej. Podaj wzór ogólny tego ciągu i oblicz jego cztery początkowe wyrazy.

a) $y = 5x - 4$ b) $y = -3x + 1$ c) $y = \sqrt{3}x - 2$

5. Na rysunku przedstawiono dwa punkty należące do wykresu ciągu arytmetycznego (a_n) . Wyznacz wzór ogólny tego ciągu. Które wyrazy ciągu (a_n) są większe od zera?



- D** 6. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie. Uzasadnij, że jest on arytmetyczny i rosnący. Zapisz wzór ogólny tego ciągu i oblicz jego dziesiąty wyraz.

a) $\begin{cases} a_1 = -5 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \end{cases} \text{ dla } n \geq 1$ b) $\begin{cases} a_1 = 3\sqrt{2} \\ a_{n+1} = a_n + \sqrt{2} \end{cases} \text{ dla } n \geq 1$

- D** 7. a) Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Wykaż, że ciąg (a_n) , określony za pomocą wzoru $a_n = f(n+1) - f(n)$, jest arytmetyczny.

b) Wykaż, że dla dowolnej funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ ciąg (a_n) , określony za pomocą wzoru $a_n = f(n+1) - f(n)$, jest arytmetyczny.

8. a) Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 3. Oblicz obwód tego trójkąta.

b) Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz długości przyprostokątnych, jeżeli przeciwprostokątna ma długość 10.

- D** 9. a) Wykaż, że długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt ten jest podobny do trójkąta o bokach 3, 4, 5.

b) Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz pole tego trójkąta, jeśli jego obwód jest równy 18.

Powtórzenie

10. Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

a) $a_n = 4n - 7$ c) $a_n = 1 - 2n$ e) $a_n = n^2 - 1$
 b) $a_n = \frac{1}{2}n + 3$ d) $a_n = \frac{n+1}{3}$ f) $a_n = 8 - n^3$

11. Wyznacz równanie prostej, w której zawiera się wykres ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r . Który wyraz ciągu (a_n) jest równy 0?

a) $a_1 = 5, r = 2$ b) $a_6 = 8, r = -\frac{1}{3}$ c) $a_{10} = -4, r = 1$

Suma, różnica, iloczyn i iloraz ciągów

Ciąg (c_n) nazywamy **sumą** ciągów (a_n) i (b_n) , jeśli dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi równość $c_n = a_n + b_n$.

Podobnie definiujemy **różnicę** i **iloczyn** ciągów (a_n) i (b_n) oraz ich **iloraz** $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ przy założeniu, że $b_n \neq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$.

Przykład 1

Dane są ciągi $a_n = 3n + 5$ i $b_n = 2n + 1$.

- Ciąg (c_n) będący sumą ciągów (a_n) i (b_n) dany jest wzorem:

$$c_n = (3n + 5) + (2n + 1) = 5n + 6$$

- Ciąg (d_n) będący iloczynem ciągów (a_n) i (b_n) dany jest wzorem:

$$d_n = (3n + 5) \cdot (2n + 1) = 6n^2 + 13n + 5$$

1. Dane są ciągi $a_n = 2n - 1$ i $b_n = n + 1$. Podaj wzór ogólny ciągu (c_n) oraz oblicz jego cztery początkowe wyrazy.

$$\text{a) } c_n = a_n + b_n \quad \text{b) } c_n = a_n - b_n \quad \text{c) } c_n = a_n \cdot b_n \quad \text{d) } c_n = \frac{a_n}{b_n}$$

- D** 2. Dane są ciągi $a_n = n^2$ i $b_n = \frac{12}{n}$. Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu (c_n) . Czy jest to ciąg monotoniczny? Odpowiedź uzasadnij.

$$\text{a) } c_n = a_n + b_n \quad \text{b) } c_n = a_n - b_n \quad \text{c) } c_n = a_n \cdot b_n \quad \text{d) } c_n = \frac{a_n}{b_n}$$

D Przykład 2

Dane są ciągi rosnące (a_n) i (b_n) . Uzasadnij, że ciąg (c_n) będący sumą ciągów (a_n) i (b_n) też jest rosnący.

Ciągi (a_n) i (b_n) są rosnące, zatem $a_{n+1} - a_n > 0$ i $b_{n+1} - b_n > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$. Wyznaczamy różnicę $c_{n+1} - c_n$:

$$c_{n+1} - c_n = (a_{n+1} + b_{n+1}) - (a_n + b_n) = (a_{n+1} - a_n) + (b_{n+1} - b_n)$$

Zatem $c_{n+1} - c_n > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$, czyli ciąg (c_n) jest rosnący.

- D** 3. Uzasadnij, że suma ciągów malejących jest ciągiem malejącym.

4. Podaj przykład takich ciągów rosnących (a_n) i (b_n) , że ciąg (c_n) określony za pomocą wzoru $c_n = a_n \cdot b_n$:

$$\text{a) jest stały,} \quad \text{b) jest malejący,} \quad \text{c) nie jest monotoniczny.}$$

- D** 5. Dane są ciągi arytmetyczne (a_n) i (b_n) . Wykaż, że ciąg $c_n = 2a_n + 3b_n$ też jest ciągiem arytmetycznym.

3.7. Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (1)

Sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n) oznaczamy symbolem S_n :

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Przykład 1

Oblicz sumę S_{100} wszystkich liczb naturalnych od 1 do 100.

Zapisujemy sumę S_{100} na dwa sposoby i dodajemy równości stronami:

$$\begin{array}{r} S_{100} = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100 \\ S_{100} = 100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 4 + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2S_{100} = 101 + 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101 + 101 \end{array}$$

Zatem $2S_{100} = 101 \cdot 100$, czyli $S_{100} = \frac{101 \cdot 100}{2} = 5050$.

Ćwiczenie 1

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych:

a) od 1 do 50,

b) od 1 do n .

Twierdzenie

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa średniej arytmetycznej wyrazów pierwszego i ostatniego pomnożonej przez liczbę wyrazów:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Dowód

Jeśli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r , to sumę jego n początkowych wyrazów możemy zapisać w postaci:

$$S_n = a_1 + (a_1 + r) + \dots + (a_1 + (n-2)r) + (a_1 + (n-1)r)$$

oraz możemy zapisać sumowane wyrazy w odwrotnej kolejności:

$$S_n = (a_1 + (n-1)r) + (a_1 + (n-2)r) + \dots + (a_1 + r) + a_1$$

Dodajemy do siebie stronami powyższe równania i otrzymujemy:

$$2S_n = (2a_1 + (n-1)r) + (2a_1 + (n-1)r) + \dots + (2a_1 + (n-1)r) + (2a_1 + (n-1)r)$$

$$2S_n = (2a_1 + (n-1)r) \cdot n$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Przykład 2

Oblicz sumy S_5 i S_8 ciągu arytmetycznego: 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

$$S_5 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = \frac{2+10}{2} \cdot 5 = 30$$

$$S_8 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 = \frac{2+16}{2} \cdot 8 = 72$$

Ćwiczenie 2

a) Oblicz wyraz a_6 , a następnie sumę S_6 ciągu arytmetycznego: 1, 4, 7, 10, ...

b) Oblicz wyraz a_{20} , a następnie sumę S_{20} ciągu arytmetycznego: $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2, ...

W obliczeniach wykorzystuje się również podaną niżej postać wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r wyraża się wzorem:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Przykład 3

Oblicz sumę S_{21} ciągu arytmetycznego: 3, 8, 13, 18, ...

Jest to ciąg o pierwszym wyrazie $a_1 = 3$ i różnicy $r = 5$, zatem:

$$S_{21} = \frac{2 \cdot 3 + (21-1) \cdot 5}{2} \cdot 21 = \frac{6+100}{2} \cdot 21 = 53 \cdot 21 = 1113$$

Ćwiczenie 3

a) Oblicz sumę S_{31} ciągu arytmetycznego: 3, 7, 11, ...

b) Oblicz sumę S_{13} ciągu arytmetycznego: -5, -8, -11, ...

Przykład 4

Ustal, ile wyrazów ma skończony ciąg arytmetyczny: 6, 10, 14, ..., 86, oraz oblicz ich sumę.

Zauważmy, że liczby: 6, 10, 14, ..., 86 tworzą ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie $a_1 = 6$, ostatnim wyrazie $a_n = 86$ i różnicy $r = 4$.

Liczbę wyrazów ciągu wyznaczamy ze wzoru $a_n = a_1 + (n-1)r$:

$$86 = 6 + (n-1) \cdot 4$$

skąd otrzymujemy $n = 21$. Zatem $S_{21} = \frac{6+86}{2} \cdot 21 = 46 \cdot 21 = 966$.

Ćwiczenie 4

Ustal, ile wyrazów ma podany skończony ciąg arytmetyczny, i oblicz ich sumę.

a) 6, 11, 16, ..., 101 b) -4, -7, -10, ..., -37 c) $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{7}{3}$, ..., $\frac{25}{3}$

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 100, których reszta z dzielenia przez 6 jest równa 1.

Liczby, których reszta z dzielenia przez 6 jest równa 1, mają postać $6n + 1$, gdzie $n \in \mathbf{N}$. Warunki zadania spełniają zatem liczby:

$$6 \cdot 0 + 1 = 1, \quad 6 \cdot 1 + 1 = 7, \quad 6 \cdot 2 + 1 = 13, \quad \dots, \quad 6 \cdot 16 + 1 = 97$$

Tworzą one 17-wyrazowy ciąg arytmetyczny o różnicy $r = 6$, pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i ostatnim wyrazie $a_{17} = 97$. Zatem:

$$S_{17} = \frac{1+97}{2} \cdot 17 = 49 \cdot 17 = 833$$

Ćwiczenie 5

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 100, których reszta z dzielenia przez 6 jest równa 5.

Ćwiczenie 6

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 200, których reszta z dzielenia:

- a) przez 4 jest równa 1, b) przez 3 jest równa 2.

Zadania

1. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r .
a) $a_1 = -2$ i $r = 3$ b) $a_1 = 4$ i $r = -5$ c) $a_1 = 1,5$ i $r = -0,1$
2. Oblicz wyrazy a_1 i a_{10} oraz sumę S_{10} ciągu arytmetycznego (a_n) .
a) $a_4 = 6$ i $a_8 = 14$ b) $a_6 = 1$ i $a_8 = 3$ c) $a_2 = 12$ i $a_4 = 0$
3. Ustal, ile wyrazów ma podany niżej skończony ciąg arytmetyczny, oraz oblicz ich sumę.
a) $4, 7, 10, \dots, 34$ b) $\frac{1}{3}, 1, 1\frac{2}{3}, \dots, 9\frac{2}{3}$ c) $-3, -5, -7, \dots, -41$
4. a) Oblicz sumę wszystkich liczb parzystych zawartych między 13 a 2021.
b) Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych nieparzystych dodatnich.
5. Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych dodatnich podzielnych przez:
a) 3, b) 5, c) 7.
6. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych niepodzielnych przez 3, które:
a) są dwucyfrowe, b) są trzycyfrowe, c) są mniejsze od 500.

7. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych, których reszta z dzielenia:
- przez 5 jest równa 1 i które są mniejsze od 100,
 - przez 4 jest równa 3 i które są większe od 10 oraz mniejsze od 80,
 - przez 6 jest równa 4 i które są większe od 30 oraz mniejsze od 120.
8. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych dodatnich podzielnych przez 4 lub 5.

Najmniejszą liczbą dwucyfrową dodatnią podzielną przez 4 jest liczba $12 = 3 \cdot 4$, a największą taką liczbą jest $96 = 24 \cdot 4$. Są 22 takie liczby. Ich suma $S_1 = \frac{12+96}{2} \cdot 22 = 1188$.

Najmniejszą liczbą dwucyfrową dodatnią podzielną przez 5 jest liczba $10 = 2 \cdot 5$, a największą taką liczbą jest $95 = 19 \cdot 5$. Jest 18 takich liczb. Ich suma $S_2 = \frac{10+95}{2} \cdot 18 = 945$.

Rozpatrzmy liczby dwucyfrowe dodatnie podzielne przez 4 i 5 – są to liczby podzielne przez 20. Ich suma $S_3 = 20 + 40 + 60 + 80 = 200$.

Suma S wszystkich liczb spełniających warunki zadania jest równa $S = S_1 + S_2 - S_3$ (dlaczego?). Zatem $S = 1188 + 945 - 200 = 1933$.

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 1001, które są podzielne przez: a) 2 lub 3, b) 3 lub 5, c) 5 lub 9.

Powtórzenie

9. Oblicz sumy S_9 i S_{18} danego ciągu arytmetycznego.
- $1, 3, 5, 7, \dots$
 - $5, 2, -1, -4, \dots$
 - $-\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}, 4, \dots$
10. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r .
- $a_1 = 23, r = -2$
 - $a_1 = -5, r = 4$
 - $a_1 = 2,5, r = -0,2$
11. Oblicz sumę, której składnikami są kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego.
- $7 + 11 + 15 + \dots + 47 + 51$
 - $-\frac{1}{2} + 1 + 1\frac{1}{2} + \dots + 99\frac{1}{2} + 100$
 - $-5 - 7 - 9 - \dots - 29 - 31$
 - $-18 - 15 - 12 - \dots + 15 + 18$
12. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 100, których reszta z dzielenia przez 5 jest równa:
- 3,
 - 4,
 - 3 lub 4.

3.8. Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (2)

D Przykład 1

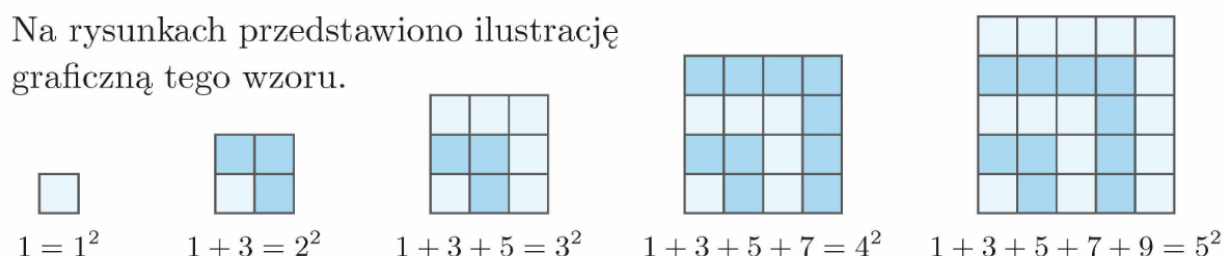
Uzasadnij wzór na sumę n początkowych liczb nieparzystych dodatnich:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Korzystamy ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, w którym $a_1 = 1$ oraz $a_n = 2n - 1$. Zatem dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1 + (2n - 1)}{2} \cdot n = \frac{2n}{2} \cdot n = n^2$$

Na rysunkach przedstawiono ilustrację graficzną tego wzoru.



D Przykład 2

Uzasadnij wzór $1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{3n^2 - n}{2}$ dla $n \in \mathbf{N}_+$.

Podane składniki sumy tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $r = 3$, pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i wyrazie $a_n = 3n - 2$. Zatem dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$:

$$S_n = \frac{1 + (3n - 2)}{2} \cdot n = \frac{3n^2 - n}{2}$$

D Ćwiczenie 1

Uzasadnij wzór dla $n \in \mathbf{N}_+$.

$$\text{a) } n + 2n + 3n + \dots + n^2 = \frac{n^3 + n^2}{2} \qquad \text{b) } 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) = \frac{n^2 - n}{2}$$

D Przykład 3

Ile początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego: 5, 8, 11, ... należy dodać, aby otrzymać sumę 185?

W danym ciągu mamy: $a_1 = 5$, $r = 3$, $S_n = 185$, zatem:

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot 5 + (n-1) \cdot 3}{2} \cdot n &= 185 \quad / \cdot 2 \\ 3n^2 + 7n &= 370 \\ 3n^2 + 7n - 370 &= 0 \\ \Delta &= 4489, \quad \sqrt{\Delta} = 67 \\ n_1 &= \frac{-7-67}{6} \notin \mathbf{N}_+, \quad n_2 = \frac{-7+67}{6} = 10 \end{aligned}$$

Należy dodać 10 początkowych wyrazów.

Ćwiczenie 2

Ile początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego: 3, 5, 7, 9, ... należy dodać, aby otrzymać sumę 255?

Zadania

- Ile początkowych wyrazów podanego ciągu arytmetycznego należy dodać, aby otrzymać sumę 546?
a) 6, 8, 10, ... b) 13, 17, 21, ... c) -24, -22, -20, ...
- Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy r . Wyznacz największą wartość n , dla której $S_n < 100$.
a) $a_1 = 4, r = 8$ b) $a_1 = -5, r = 5$ c) $a_1 = 1, r = \sqrt{2}$
- Suma pięciu początkowych wyrazów rosnącego ciągu arytmetycznego jest równa 30, a iloczyn drugiego i czwartego wyrazu jest równy 11. Ile co najmniej początkowych wyrazów tego ciągu trzeba dodać, aby otrzymać sumę większą od 100?
- Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) .
a) $a_n = \frac{5 + 10 + 15 + \dots + 5n}{n + 3}$ c) $a_n = \frac{4 + 8 + 12 + \dots + 4n}{n + 2}$
b) $a_n = \frac{3 + 6 + 9 + \dots + 3n}{n + 5}$ d) $a_n = \frac{6 + 12 + 18 + \dots + 6n}{n^2}$
- Rozwiąż równanie.
a) $(1 + x) + (3 + x) + (5 + x) + \dots + (25 + x) = 130$
b) $(1 + x) + (2 + 3x) + (3 + 5x) + (4 + 7x) + \dots + (50 + 99x) = 275$
c) $(1 + x) + (5 + 2x) + (9 + 3x) + \dots + (61 + 16x) = -48$
- Ciąg arytmetyczny składa się z dziesięciu wyrazów. Iloczyn wyrazów skrajnych jest równy 7, a suma dwóch wyrazów środkowych jest równa 8. Oblicz pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu oraz sumę wszystkich jego wyrazów.

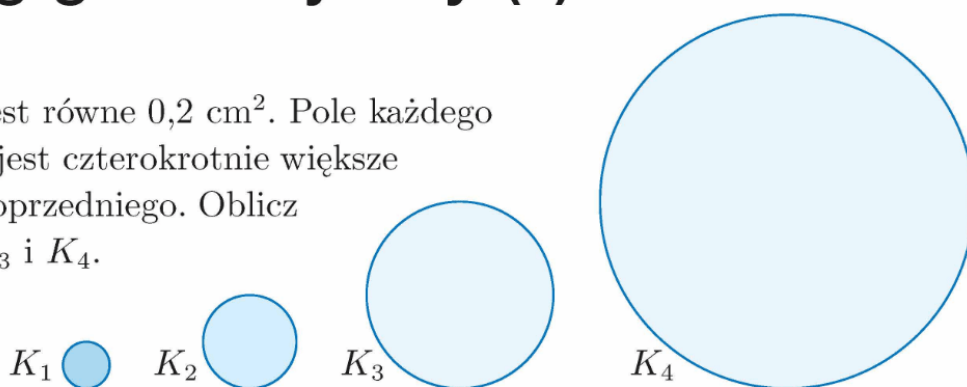
Powtórzenie

- Ile co najmniej początkowych wyrazów danego ciągu arytmetycznego należy dodać, aby otrzymać sumę większą od 200?
a) -9, -7, -5, -3, -1, 1, ... b) -4, -3, -2, -1, 0, 1, ...
-  8. Uzasadnij wzór dla $n \in \mathbf{N}^+$.
a) $6 + 12 + 18 + \dots + 6n = 3n(n + 1)$
b) $4 + 10 + 16 + \dots + (6n - 2) = n(3n + 1)$

3.9. Ciąg geometryczny (1)

Ćwiczenie 1

Pole koła K_1 jest równe $0,2 \text{ cm}^2$. Pole każdego kolejnego koła jest czterokrotnie większe od pola koła poprzedniego. Oblicz pola kół K_2 , K_3 i K_4 .



Definicja

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy **ciągami geometrycznym**, jeżeli istnieje taka liczba q , że każdy wyraz ciągu, oprócz pierwszego, powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez tę liczbę:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$.

Liczbę q nazywamy **ilorazem** ciągu (a_n) .

Ćwiczenie 2

Podaj iloraz ciągu geometrycznego i wypisz jego dwa następne wyrazy.

a) $3, 6, 12, \dots$

c) $4, 2, 1, \dots$

e) $1, -2, 4, \dots$

b) $\frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \dots$

d) $64, 16, 4, \dots$

f) $-27, 9, -3, \dots$

Ćwiczenie 3

Oblicz wyrazy a_2 , a_3 , a_4 i a_5 ciągu geometrycznego (a_n) .

a) $a_1 = 1, q = 3$

c) $a_1 = 5, q = -1$

e) $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, q = \sqrt{2}$

b) $a_1 = 16, q = \frac{1}{2}$

d) $a_1 = \frac{1}{4}, q = -2$

f) $a_1 = \sqrt{2}, q = \sqrt{6}$

Twierdzenie

Ciąg (a_n) o wyrazach różnych od zera jest ciągiem geometrycznym, jeśli dla dowolnego $n \geq 1$ iloraz dwóch kolejnych wyrazów $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stały.

Ćwiczenie 4

Oblicz iloraz ciągu geometrycznego, wiedząc, że jego dwa kolejne wyrazy to:

a) 27 i 243 ,

c) -216 i -36 ,

e) $\sqrt{2}$ i -4 ,

b) $\frac{8}{9}$ i $\frac{4}{3}$,

d) $-\frac{6}{5}$ i $\frac{9}{10}$,

f) $2\sqrt{3}$ i $3\sqrt{2}$.

D Ćwiczenie 5

Uzasadnij, że podany ciąg nie jest ciągiem geometrycznym.

- a) 4, 8, 16, 32, 60, 120, ... b) 1, -2, 4, -8, 16, 32, ... c) $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{9}{16}, \frac{27}{32}, \frac{81}{64}, \dots$

Przykład 1

Oblicz jedenasty wyraz ciągu geometrycznego (a_n) , jeśli $a_1 = 3$ oraz iloraz ciągu $q = 2$.

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 3 \cdot 2 = 6$$

$$a_3 = 3 \cdot 2^2 = 12$$

$$a_4 = 3 \cdot 2^3 = 24$$

$\vdots$

$$a_{11} = 3 \cdot 2^{10} = 3072$$

Wypisujemy kilka początkowych wyrazów ciągu.

Aby otrzymać wyraz a_{11} ciągu geometrycznego, obliczamy $a_1 \cdot q^{11-1}$.

Twierdzenie

Wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q ma postać:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Ćwiczenie 6

Oblicz n -ty wyraz ciągu geometrycznego (a_n) , jeśli:

a) $a_1 = \frac{1}{8}, q = 2, n = 6,$

e) $a_1 = -2, q = -3, n = 5,$

b) $a_1 = 25, q = \frac{1}{5}, n = 7,$

f) $a_1 = -7, q = -1, n = 15,$

c) $a_1 = 8, q = \frac{2}{3}, n = 4,$

g) $a_1 = 5, q = \sqrt{2}, n = 9,$

d) $a_1 = \frac{1}{10}, q = 2\frac{1}{2}, n = 6,$

h) $a_1 = \sqrt{3}, q = -\frac{\sqrt{3}}{3}, n = 8.$

Ćwiczenie 7

Oblicz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) , jeśli:

a) $a_4 = 1, q = \frac{1}{2},$

b) $a_6 = 16, q = -2,$

c) $a_8 = 81, q = 3.$

Zadania

1. Oblicz iloraz ciągu geometrycznego (a_n) o podanych wyrazach początkowych. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu i oblicz a_7 .

a) 128, 64, 32, ...

c) $\frac{1}{243}, -\frac{1}{81}, \frac{1}{27}, \dots$

e) $\sqrt{2}, -2, 2\sqrt{2}, \dots$

b) $\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, 1, \dots$

d) $\frac{625}{256}, \frac{125}{64}, \frac{25}{16}, \dots$

f) $\frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \dots$

2. Oblicz wyrazy czwarty i piąty podanego ciągu geometrycznego.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}, 2 + \sqrt{2}, 2\sqrt{2} + 2, \dots$ b) $\sqrt{2} - 1, 1, \sqrt{2} + 1, \dots$

3. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) , jeżeli wiadomo, że $a_4 = 6$ oraz $a_6 = 54$.

Jeżeli q jest ilorazem ciągu (a_n) , to $a_4 = a_1 \cdot q^3$ oraz $a_6 = a_1 \cdot q^5$, zatem otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} a_1 \cdot q^3 = 6 \\ a_1 \cdot q^5 = 54 \end{cases}$$

Dzielimy stronami drugie równanie przez pierwsze:

$$\frac{a_1 \cdot q^5}{a_1 \cdot q^3} = \frac{54}{6}$$

Stąd $q^2 = 9$, czyli $q = -3$ lub $q = 3$.

Dla $q = -3$ mamy $a_1 = -\frac{2}{9}$, zatem wzór ogólny ciągu: $a_n = -\frac{2}{9} \cdot (-3)^{n-1}$ (kolejne wyrazy ciągu: $-\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, -2, 6, -18, \dots$).

Dla $q = 3$ mamy $a_1 = \frac{2}{9}$, zatem wzór ogólny ciągu: $a_n = \frac{2}{9} \cdot 3^{n-1}$ (kolejne wyrazy ciągu: $\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, 2, 6, 18, \dots$).

Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) , jeżeli wiadomo, że:

a) $a_2 = \frac{5}{12}, a_3 = \frac{2}{15}$, c) $a_2 = 7, a_4 = 28$, e) $a_6 = 32, a_{10} = 2$,
b) $a_3 = 1\frac{1}{2}, a_4 = 1\frac{1}{4}$, d) $a_3 = -3, a_6 = -24$, f) $a_6 = 1, a_8 = 9$.

4. Oblicz brakujące wyrazy ciągu geometrycznego.

a) $?, ?, -27, -9, ?$ c) $?, 6, ?, ?, 48, ?$ e) $8, ?, ?, ?, ?, \frac{1}{4}$
b) $?, ?, ?, ?, 3, -6$ d) $?, ?, 3, ?, ?, -81$ f) $\frac{5}{9}, ?, ?, ?, ?, 135$

Powtórzenie

5. Oblicz iloraz ciągu geometrycznego (a_n) oraz wyrazy a_3, a_4 i a_5 .

a) $a_1 = 8, a_2 = 24$ c) $a_1 = \frac{3}{4}, a_2 = 1$ e) $a_1 = -12, a_2 = -8$
b) $a_1 = 2, a_2 = -6$ d) $a_1 = -\frac{1}{3}, a_2 = 2$ f) $a_1 = 2, a_2 = \sqrt{2}$

6. Oblicz wyrazy a_2 i a_3 ciągu geometrycznego (a_n) .

a) $a_1 = 15, a_4 = 5$ b) $a_1 = \frac{2}{3}, a_4 = \frac{3}{2}$ c) $a_1 = -\frac{1}{10}, a_4 = 10$

7. Oblicz wyrazy a_2 i a_3 ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q .

a) $a_1 = \frac{1}{8}, q = 2$ b) $a_1 = 64, q = -\frac{1}{2}$ c) $a_1 = -\frac{1}{256}, q = -4$

3.10. Ciąg geometryczny (2)

Przykład 1

Pani Kasia ulokowała 2000 zł na koncie o stałym oprocentowaniu 5% w skali roku. W tabeli obok przedstawiono stan oszczędności pani Kasi po upływie kolejnych lat. I tak po upływie roku stan konta wyniesie:

$$2000 \cdot 105\% = 2000 \cdot 1,05 = 2100 \text{ [zł]}$$

Po upływie dwóch lat:

$$2100 \cdot 105\% = 2100 \cdot 1,05 = 2205 \text{ [zł]}$$

Wpłata:	2000,00
$2000,00 \cdot 1,05 =$	2100,00
$2100,00 \cdot 1,05 =$	2205,00
$2205,00 \cdot 1,05 =$	2315,25
$2315,25 \cdot 1,05 \approx$	2431,01
$2431,01 \cdot 1,05 \approx$	2552,56

Otrzymany ciąg jest przykładem rosnącego ciągu geometrycznego.

Ciąg geometryczny (a_n) o pierwszym wyrazie $a_1 > 0$ i ilorazie q jest:

■ **rosnący**, gdy $q > 1$, ■ **malejący**, gdy $0 < q < 1$, ■ **stały**, gdy $q = 1$.

Ćwiczenie 1

- D** a) Sformułuj i uzasadnij analogiczne twierdzenie o monotoniczności ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie ujemnym.
b) Przerysuj do zeszytu tabelę i ją uzupełnij. Podaj przykłady odpowiednich ciągów geometrycznych i określ ich monotoniczność.

	$a_1 < 0$	$a_1 > 0$
$q < 0$	?	1, -2, 4, -8, 16, ... nie jest monotoniczny
$q = 0$	-3, 0, 0, 0, 0, ... niemalejący	?
$0 < q < 1$	?	?
$q > 1$	?	?

Uwaga. Stałym ciągiem geometrycznym jest również ciąg: 0, 0, 0, 0, ... Jego pierwszy wyraz $a_1 = 0$, a iloraz może być dowolną liczbą rzeczywistą.

Ćwiczenie 2

Wyznacz wzór ogólny monotonicznego ciągu geometrycznego (a_n) , jeżeli:

- a) $a_3 = 2$, $a_5 = 4,5$, b) $a_1 = -8$, $a_5 = -\frac{1}{2}$, c) $a_2 = -4$, $a_6 = -64$.

Aby wykazać, że ciąg (a_n) jest geometryczny, należy sprawdzić, czy iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stały dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$.

D Przykład 2

Wykaż, że ciąg o wzorze ogólnym $a_n = 3 \cdot 4^n$ jest ciągiem geometrycznym. Określ jego monotoniczność.

Wyznaczamy iloraz ciągu:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3 \cdot 4^{n+1}}{3 \cdot 4^n} = 4$$

Iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stały dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest geometryczny. Jest to ciąg rosnący, ponieważ $a_1 > 0$ i $q = 4 > 1$.

D Ćwiczenie 3

Wykaż, że ciąg (a_n) jest geometryczny. Określ monotoniczność tego ciągu.

a) $a_n = \frac{5}{2^n}$

c) $a_n = -\frac{1}{3} \cdot 2^n$

e) $a_n = 6 \cdot (\sqrt{2})^{n-1}$

b) $a_n = \left(-\frac{1}{7}\right)^n$

d) $a_n = -2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$

f) $a_n = 4^{2n+1}$

D Ćwiczenie 4

Uzasadnij podane obok twierdzenie.

Liczby a, b, c , różne od zera, tworzą ciąg geometryczny wtedy i tylko wtedy, gdy $b^2 = a \cdot c$.

Ćwiczenie 5

Podane liczby są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Oblicz x .

a) $x, x+1, x-3$

b) $\frac{1}{x+1}, x, 3x^2$

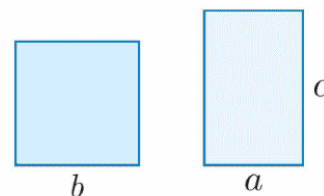
c) $x^2-1, x+1, 2x-1$

■ Średnia geometryczna

Jeśli liczby a, b, c tworzące ciąg geometryczny są dodatnie, to $b = \sqrt{a \cdot c}$.

Liczbę $\sqrt{a \cdot c}$ nazywamy **średnią geometryczną** liczb a i c .

Pole kwadratu o boku b jest równe polu prostokąta o bokach a i c , jeśli b jest równe średniej geometrycznej liczb a i c .



Twierdzenie

W ciągu geometrycznym (a_n) o wyrazach dodatnich każdy wyraz, oprócz pierwszego, jest średnią geometryczną wyrazów sąsiednich:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} \quad \text{dla } n \geq 2$$

- D** 2. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Obliczamy kolejne wyrazy ciągu: 2, 4, 8, 14, ... Badamy ilorazy:

Zatem ciąg (a_n) nie jest geometryczny.

a) $a_n = n^2 - 2n + 2$ b) $a_n = -n^2 + 4n - 2$

- $$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \begin{cases} a_6 = -4 \\ a_{10} = -\frac{1}{64} \end{cases} & \text{c)} \quad \begin{cases} a_1 \cdot a_5 = 1 \\ a_2^2 = 25a_3^2 \end{cases} & \text{e)} \quad \begin{cases} a_2 \cdot a_4 = 1 \\ a_2^2 + a_3^2 = 5 \end{cases} \\ \text{b)} \quad \begin{cases} a_4 = 3a_2 \\ a_1 \cdot a_3 = \frac{1}{4} \end{cases} & \text{d)} \quad \begin{cases} a_2 + a_3 = 30 \\ a_4 - a_2 = 120 \end{cases} & \text{f)} \quad \begin{cases} a_1 \cdot a_3 = 6 \\ a_3^2 - a_2^2 = 12 \end{cases} \end{array}$$

- ## Powtórzenie

- a) $a_1 = \frac{1}{15}, q = \frac{6}{5}$ c) $a_1 = -6, q = \frac{2}{3}$ e) $a_1 = -\frac{1}{6}, q = -9$
b) $a_1 = 10, q = 0,49$ d) $a_1 = -4, q = \sqrt{2}$ f) $a_1 = -3, q = \sqrt[3]{-1}$

- a) $2, x, 32, y$ b) $1, x, 2, y$ c) $18, x, 8, y$ d) $x, \frac{1}{10}, y, 10$

3.11. Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Przykład 1

Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego:

$$1, 2, 4, 8, 16, \dots$$

$$S_{10} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 = 1023$$

Aby obliczyć sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, można skorzystać z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie $q \neq 1$ wyraża się wzorem:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Dowód

Kolejne wyrazy ciągu to: $a_1, a_2 = a_1q, a_3 = a_1q^2, \dots, a_n = a_1q^{n-1}$, zatem:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1}$$

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^n$$

Mnożymy obie strony równania przez q .

Odejmujemy równania stronami i otrzymujemy:

$$S_n - qS_n = a_1 - a_1q^n$$

$$S_n(1 - q) = a_1(1 - q^n)$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Dzielimy obie strony równania przez $1 - q$ (z założenia $q \neq 1$).

Uwaga. Jeśli iloraz ciągu geometrycznego (a_n) jest równy 1, to suma n początkowych wyrazów tego ciągu dana jest wzorem $S_n = n \cdot a_1$.

Ćwiczenie 1

Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, korzystając z podanego wzoru. Sprawdź otrzymany wynik, dodając wyrazy ciągu.

a) $1, 3, 9, 27, \dots$

b) $1, -2, 4, -8, \dots$

c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

Ćwiczenie 2

Oblicz sumę S_5 ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_1 = \frac{1}{32}$ oraz:

a) $q = 2$,

b) $q = 4$,

c) $q = 1$.

Ćwiczenie 3

Oblicz sumę S_n ciągu geometrycznego (a_n) , jeśli wiadomo, że:

- a) $a_1 = 3, a_2 = -6, n = 6,$ b) $a_1 = -4, a_2 = -12, n = 5.$

Przykład 2

Dany jest ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 4 i ilorazie 3. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać 1456?

Niech n będzie szukaną liczbą wyrazów. Wówczas:

$$4 \cdot \frac{1-3^n}{1-3} = 1456$$

$$1 - 3^n = -728$$

$$3^n = 729$$

$$n = 6$$

Należy dodać sześć początkowych wyrazów tego ciągu.

Ćwiczenie 4

- a) Dany jest ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 5 i ilorazie 2. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać 635?
- b) Dany jest ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 2 i ilorazie $\frac{3}{2}$. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać $16\frac{1}{4}$?

Ćwiczenie 5

Suma pierwszego i czwartego wyrazu ciągu geometrycznego jest równa 26, a suma drugiego i piątego wyrazu jest równa -78 . Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać -61 ?

Ciąg (b_n) nazywamy **podciągiem** ciągu (a_n) , jeśli możemy go otrzymać poprzez wybranie jego wyrazów spośród wyrazów ciągu (a_n) bez zmiany ich kolejności. Na przykład podciągami ciągu geometrycznego $1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$ są:

$2, 8, 32, 128, 512, \dots$ – podciąg wyrazów o numerach parzystych,

$1, 4, 16, 64, 256, \dots$ – podciąg wyrazów o numerach nieparzystych,

$512, 1024, 2048, 4096, \dots$ – podciąg wyrazów podzielnych przez 512.

Ćwiczenie 6

Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 3, a iloraz jest równy -2 . Oblicz sumę pięciu początkowych wyrazów jego podciągu złożonego z wyrazów o numerach:

- a) nieparzystych, b) parzystych.

Zadania

1. Oblicz sumę S_8 ciągu geometrycznego (a_n) , jeśli jego wyrazy pierwszy i drugi są odpowiednio równe:

a) $\frac{1}{16}, \frac{1}{8}$, b) 18, 6, c) 15, -30, d) -7, -7.

2. Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q , jeśli:

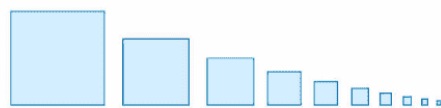
a) $a_1 = -1, q = 2, n = 8$, c) $a_1 = 3, q = -\sqrt{2}, n = 10$,

b) $a_1 = \frac{2}{9}, q = \frac{3}{2}, n = 5$, d) $a_1 = 5, q = 1, n = 20$.

3. Ciąg (a_n) jest geometryczny. Przerysuj do zeszytu tabelę i ją uzupełnij.

a_1	q	n	a_n	S_n
2	3	?	?	242
?	$\frac{1}{2}$	7	$-\frac{1}{2}$	?
$\sqrt{8}$	$-\sqrt{2}$	8	?	?

4. Pola dziesięciu kwadratów (rysunek obok) tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{1}{2}$. Największy spośród tych kwadratów ma pole równe 1 cm^2 . Oblicz sumę ich:



a) pól, b) obwodów.

5. Oblicz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q , jeśli:

a) $q = 2, S_4 = 60$, c) $q = 3, S_6 = 728$, e) $q = -\sqrt{2}, S_6 = -7$,

b) $q = \frac{1}{2}, S_4 = 2046$, d) $q = -\frac{1}{2}, S_5 = 33$, f) $q = -1, S_{13} = 9$.

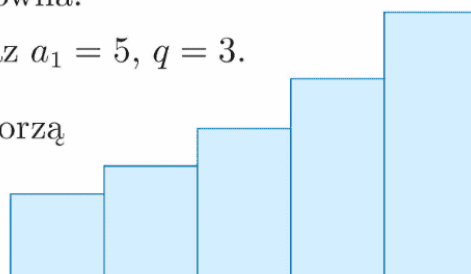
6. Ile początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie równym 5 i ilorazie 2 należy dodać, aby otrzymać:

a) 315, b) 2555, c) 5115?

7. Wyznacz liczbę wyrazów skończonego ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q , jeśli suma wszystkich wyrazów jest równa:

a) 258 oraz $a_1 = 6, q = -2$, b) 1000 oraz $a_1 = 5, q = 3$.

8. Pola pięciu prostokątów (rysunek obok) tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{4}{3}$. Suma tych pól jest równa $\frac{781}{90} \text{ cm}^2$. Oblicz pole najmniejszego prostokąta.



9. Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) , jeśli wiadomo, że:
 - a) $S_3 = 35$, a różnica wyrazów pierwszego i czwartego jest równa 17,5,
 - b) $S_4 = 20$, a różnica wyrazów pierwszego i trzeciego jest równa 8.
10. Suma pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) wynosi 33, a różnica wyrazów pierwszego i szóstego jest równa 99. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu.
11. Wyznacz sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie $a_1 = x$ i ilorazie $q = -1$, jeśli wiadomo, że n jest liczbą:
 - a) parzystą,
 - b) nieparzystą.
12. Ciąg geometryczny (a_n) spełnia warunki: $S_5 - S_3 = 72$ i $a_4 - a_3 = 12$. Oblicz sumę siedmiu początkowych wyrazów tego ciągu.
13. Suma czterech początkowych wyrazów monotonicznego ciągu geometrycznego jest równa 8, a suma kolejnych czterech jest równa 72. Oblicz piąty wyraz tego ciągu.
14. Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 6, a stosunek sumy pięciu początkowych wyrazów tego ciągu do sumy kolejnych pięciu wyrazów wynosi $\frac{3}{4}$. Oblicz szósty wyraz tego ciągu.
15. Dany jest dziesięciowyrazowy ciąg geometryczny (a_n) o ilorazie q . Suma jego wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 341, a suma wyrazów o numerach parzystych jest równa 682. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.

Powtórzenie

16. Oblicz sumę S_5 podanego ciągu geometrycznego.
 - a) 2, 8, 32, ...
 - b) -2, -6, -18, ...
 - c) 4, -6, 9, ...
17. Oblicz sumy S_6 i S_7 ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q .
 - a) $a_1 = 2, q = -3$
 - b) $a_1 = 7, q = -1$
 - c) $a_1 = 81, q = -\frac{1}{3}$
18. Kartki pocztowe ułożono w stosy. W pierwszym stosie ułożono 4 kartki, a w każdym następnym dwukrotnie więcej kartek niż w poprzednim. Ile kartek było w największym stosie, jeżeli łącznie ułożono:
 - a) 60 kartek,
 - b) 1020 kartek,
 - c) 4092 kartki?
19. Pierwszy odcinek łamanej ma długość 64 cm, a każdy następny jest 2 razy krótszy od poprzedniego. Z ilu odcinków składa się ta łamana, jeśli ma ona długość: a) 124 cm, b) 127,5 cm, c) 127,875 cm?

3.12. Ciągi arytmetyczne i ciągi geometryczne – zadania

Przykład 1

Suma trzech liczb tworzących rosnący ciąg arytmetyczny jest równa 12, a suma ich kwadratów jest równa 56. Wyznacz te liczby.

Rozpatrujemy ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy $r > 0$, dla którego spełnione są warunki:

$$\begin{cases} a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) = 12 \\ a_1^2 + (a_1 + r)^2 + (a_1 + 2r)^2 = 56 \end{cases}$$

Z pierwszego równania otrzymujemy $3a_1 + 3r = 12$, czyli $a_1 = 4 - r$.

Podstawiamy do drugiego równania:

$$\begin{aligned} (4 - r)^2 + 4^2 + (4 + r)^2 &= 56 \\ 16 - 8r + r^2 + 16 + 16 + 8r + r^2 &= 56 \\ 2r^2 &= 8 \\ r &= -2 \text{ lub } r = 2 \end{aligned}$$

Zgodnie z założeniem $r > 0$, czyli $a_1 = 4 - r = 4 - 2 = 2$.

Zatem szukane liczby to 2, 4 i 6.

Przykład 2

Trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny, a ich suma jest równa 21. Jeśli od pierwszej i drugiej liczby odejmiemy 3, a od trzeciej odejmiemy 1, to otrzymamy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Wyznacz te liczby.

Zapisujemy trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego: $a - r$, a , $a + r$. Ich suma:

$$\begin{aligned} a - r + a + a + r &= 21 \\ a &= 7 \end{aligned}$$

Zatem szukane liczby mają postać: $7 - r$, 7 , $7 + r$.

Zgodnie z warunkami zadania liczby $4 - r$, 4 , $6 + r$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, zatem zachodzi równość:

$$\begin{aligned} 4^2 &= (4 - r)(6 + r) \\ r^2 + 2r - 8 &= 0 \\ r &= -4 \text{ lub } r = 2 \end{aligned}$$

Dla $r = -4$ otrzymujemy liczby: 11, 7, 3.

Dla $r = 2$ otrzymujemy liczby: 5, 7, 9.

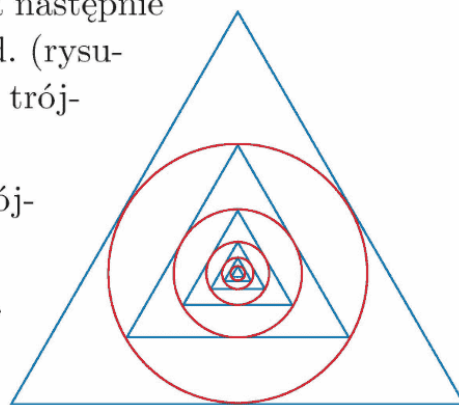
Ćwiczenie 1

- a) Suma trzech liczb tworzących malejący ciąg arytmetyczny jest równa 15, a suma ich kwadratów jest równa 93. Wyznacz te liczby.
- b) Liczby a , b , c , których suma jest równa 12, są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, a liczby $a + 1$, $b + 2$, $c + 6$ – kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Wyznacz liczby a , b , c .

Zadania

- a) Szósty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 0. Oblicz sumę jedenastu początkowych wyrazów tego ciągu.
b) Jedenasty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 20. Oblicz sumę jedenastu początkowych wyrazów tego ciągu o numerach nieparzystych.
- Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) . Stosunek sumy dziesięciu początkowych wyrazów o numerach parzystych do sumy dziesięciu początkowych wyrazów o numerach nieparzystych jest równy $\frac{9}{8}$. Suma wyrazów trzeciego i siódmego jest równa 12. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.
- Wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) spełniają warunki:
$$a_1 + a_5 = 68 \quad \text{ i } \quad a_2 + a_6 = 136$$
Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać 2044?
- W sześciowyrazowym ciągu geometrycznym suma pięciu początkowych wyrazów jest równa 11, a suma pięciu ostatnich – jest równa 33. Oblicz iloraz oraz wyrazy pierwszy i szósty tego ciągu.
- Trzy liczby, których suma jest równa 21, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli od drugiej z nich odejmiemy 1, a do trzeciej dodamy 6, to otrzymamy ciąg geometryczny. Wyznacz te liczby.
- Trzy liczby, których suma jest równa 28, tworzą ciąg geometryczny. Liczby te są również kolejno wyrazami pierwszym, drugim i czwartym ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.
- a) W dziewięciowyrazowym ciągu arytmetycznym, którego pierwszy wyraz jest równy 4, wyrazy pierwszy, trzeci i siódmy tworzą ciąg geometryczny. Oblicz sumę wyrazów tego ciągu arytmetycznego.
b) W sześciowyrazowym malejącym ciągu arytmetycznym, którego pierwszy wyraz jest równy -1 , wyrazy pierwszy, drugi i piąty tworzą ciąg geometryczny. Oblicz sumę wyrazów tego ciągu arytmetycznego.

8. Suma trzech liczb tworzących ciąg arytmetyczny jest równa 15. Jeśli pierwszą i drugą z tych liczb zwiększymy o 1, a trzecią – o 4, to otrzymamy ciąg geometryczny. Wyznacz te liczby.
9. Trzy liczby, których suma jest równa 13, tworzą malejący ciąg geometryczny. Jeśli od ostatniej liczby odejmiemy 4, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Wyznacz te liczby.
10. a) Wstaw między liczby 5 i 30 dwie takie liczby, aby pierwsze trzy tworzyły ciąg geometryczny, a ostatnie trzy – ciąg arytmetyczny.
b) Wstaw między liczby -4 i 32 dwie takie liczby, aby pierwsze trzy tworzyły ciąg arytmetyczny, a ostatnie trzy – ciąg geometryczny.
11. Z czterech zapisanych kolejno liczb pierwsze trzy tworzą ciąg geometryczny, a ostatnie trzy – ciąg arytmetyczny. Wyznacz te liczby, jeśli suma pierwszej i ostatniej jest równa 1, a suma drugiej i trzeciej jest równa $\frac{3}{4}$.
12. W trójkąt równoboczny wpisujemy okrąg, a następnie w okrąg wpisujemy trójkąt równoboczny itd. (rysunek obok). Otrzymujemy w ten sposób ciąg trójkątów równobocznych i ciąg okręgów.
- D** a) Uzasadnij, że ciąg obwodów kolejnych trójkątów jest geometryczny. Podaj jego iloraz.
b) Bok największego trójkąta ma długość 4. Oblicz sumę obwodów pięciu największych trójkątów oraz sumę ich pól.



Powtórzenie

13. Suma trzech liczb tworzących ciąg arytmetyczny jest równa 12, a suma ich kwadratów wynosi 56. Wyznacz te liczby.
14. Trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli do pierwszej z nich dodamy 8, a drugą i trzecią zostawimy bez zmian, to tak otrzymany ciąg będzie ciągiem geometrycznym. Wyznacz te liczby, jeśli suma wyrazów ciągu geometrycznego wynosi 26.
15. Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny, a ich suma jest równa 52. Jeśli pierwszą i drugą liczbę zostawimy bez zmian, a od trzeciej odejmiemy 16, to otrzymamy kolejne wyrazy rosnącego ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.

3.13. Procent składany

Kapitał w wysokości k , złożony w banku na rok przy oprocentowaniu rocznym r , wzrośnie po roku do kwoty $k(1 + r)$.

Przykład 1

Pani Kowalska wpłaciła do banku 1000 zł na lokatę oprocentowaną 6% w skali roku. Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał pani Kowalskiej po trzech latach, a do jakiej po dwudziestu?

Kwota po roku: $1000 + 6\% \cdot 1000 = 1060$ [zł]

Kwota po 2 latach: $1060 + 6\% \cdot 1060 = 1060 + 63,6 = 1123,6$ [zł]

Kwota po 3 latach: $1123,6 + 6\% \cdot 1123,6 = 1123,6 + 67,416 \approx 1191,02$ [zł]

Zauważ, że w kolejnych latach doliczane są odsetki w wysokości 6% do kapitału powiększonego o odsetki z poprzednich lat.

Wyznaczenie powyższą metodą kwoty, do jakiej wzrośnie kapitał pani Kowalskiej po dwudziestu latach, jest bardzo pracochłonne. Zauważmy jednak, że każdego roku do każdej złotówki bank dopisuje 6% odsetek, czyli co roku kapitał powiększa się 1,06 razy.

Kapitał wynosi więc:

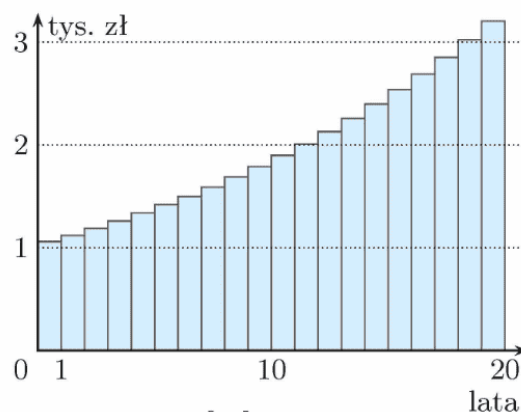
po roku: $k \cdot 1,06$

po 2 latach: $k \cdot (1,06)^2$

po 3 latach: $k \cdot (1,06)^3$

⋮

po 20 latach: $k \cdot (1,06)^{20} \approx 1000 \cdot 3,20714 = 3207,14$ [zł]



Jeżeli w kolejnych latach odsetki dopisywane są do kapitału powiększonego o wcześniej nagromadzone odsetki, to mówimy, że kapitał został złożony na **procent składany**.

Kapitał w wysokości k , złożony w banku na n lat na procent składany przy oprocentowaniu rocznym r , po n latach wzrośnie do kwoty $k(1 + r)^n$.

Ćwiczenie 1

Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał po n latach, jeżeli złożymy w banku 5000 zł na procent składany przy oprocentowaniu rocznym r ?

a) $n = 5$, $r = 4,5\%$

b) $n = 8$, $r = 5,5\%$

c) $n = 10$, $r = 3\%$

Dopisywanie odsetek do kapitału nazywa się **kapitalizacją odsetek** lub krótko **kapitalizacją**, a czas, po jakim ona następuje, nazywa się **okresem kapitalizacji**.

Przykład 2

Rodzice Basi złożyli w banku 5000 zł na trzy lata. W pierwszym roku oprocentowanie wynosiło 6%, w ostatnich dwóch latach 5%, a kapitalizacja odsetek następowała co rok. Do jakiej kwoty wzrósłby ten kapitał po trzech latach, gdyby odsetki nie były opodatkowane, a do jakiej – gdyby od naliczanych odsetek pobierany był co roku podatek w wysokości 20%?

Jeśli odsetki nie byłyby opodatkowane, to oszczędności po trzech latach wyniosłyby:

$$5000 \cdot 1,06 \cdot (1,05)^2 = 5843,25 \text{ [zł]}$$

Jeśli od naliczanych odsetek byłby pobierany podatek, to odsetki te byłyby pomniejszane o 20%, zatem w pierwszym roku wpłacona kwota wzrosłaby o:

$$0,06 \cdot 0,8 = 0,048 = 4,8\%$$

a w drugim i trzecim roku o:

$$0,05 \cdot 0,8 = 0,04 = 4\%$$

Zatem po trzech latach kapitał wzrósłby do:

$$5000 \cdot (1,048) \cdot (1,04)^2 \approx 5667,58 \text{ [zł]}$$

Uwaga. W Polsce podatek od odsetek wynosi 19%. W tym rozdziale, dla ułatwienia obliczeń, podatek ten pomijamy lub przyjmujemy, że wynosi 20%. Zwróć uwagę na to, że podatek płaci się tylko od dopisywanych odsetek, a nie zgromadzonego kapitału.

Ćwiczenie 2

Kapitał 5000 zł złożono w banku na dziesięć lat przy oprocentowaniu wynoszącym 5% i rocznej kapitalizacji odsetek. Oblicz wysokość dopisanych odsetek. Jak zmieni się wielkość kapitału, jeśli od odsetek naliczany jest podatek w wysokości 20% w skali roku?

Ćwiczenie 3

Kapitał w wysokości 800 zł złożono w banku na pięć lat. Oblicz wielkość kapitału po upływie tego czasu, jeśli kapitalizacja odsetek była roczna, od odsetek naliczano podatek w wysokości 20% w skali roku, a oprocentowanie:

- a) w pierwszych dwóch latach wynosiło 8%, w ostatnich trzech – 4%,
- b) w pierwszych trzech latach wynosiło 4%, w ostatnich dwóch – 8%,
- c) w pierwszych dwóch latach wynosiło 7%, w kolejnych dwóch – 5%, w ostatnim roku – 2%.

Odsetki mogą być dopisywane częściej niż co rok. Jeżeli dopisywane są co kwartał, mówimy o kapitalizacji kwartalnej, jeśli co miesiąc – o kapitalizacji miesięcznej.

Twierdzenie

Kapitał w wysokości k , złożony w banku na n lat przy oprocentowaniu rocznym r i kapitalizacji m razy w roku, po n latach wzrośnie do:

$$k \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \cdot n}$$

Przykład 3

W bankach A , B i C lokaty terminowe są oprocentowane 6% w skali roku. Odsetki są kapitalizowane: w banku A – co rok, w banku B – co kwartał, a w banku C – co miesiąc. Do każdego z tych banków wpłacono 1000 zł. W którym banku odsetki od tej kwoty po roku będą największe? O jaki procent wzrośnie kapitał w każdym z tych banków po roku?

Kapitał po roku wyniesie:

w banku A : $1000 \cdot (1 + 0,06) = 1060$ [zł],

w banku B : $1000 \cdot \left(1 + \frac{0,06}{4}\right)^4 = 1000 \cdot (1,015)^4 \approx 1000 \cdot 1,06136 = 1061,36$ [zł],

w banku C : $1000 \cdot \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{12} = 1000 \cdot (1,005)^{12} \approx 1000 \cdot 1,06168 = 1061,68$ [zł].

Zatem odsetki dopisane w tych bankach to kolejno: 60 zł, 61,36 zł i 61,68 zł. Kapitał wzrośnie więc: w banku A – o 6%, w banku B – o $\frac{61,36}{1000} = 0,06136 \approx 6,14\%$, a w banku C – o $\frac{61,68}{1000} = 0,06168 \approx 6,17\%$.

Roczną stopę procentową r taką, że odsetki w wysokości $\frac{r}{m}$ kapitalizowane są m razy w roku, nazywa się **nominalną stopą** procentową. Rzeczywisty przyrost kapitału pokazuje **efektywna stopa** procentowa p , przy której odsetki kapitalizowane są raz, na koniec roku. Między tymi stopami zachodzi następująca zależność:

$$1 + p = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m$$

Ćwiczenie 4

Bank X oferuje kapitalizację półroczną przy rocznej stopie 8%, a bank Y – kapitalizację kwartalną przy rocznej stopie r . Dla jakiej wartości stopy r oprocentowanie w skali roku jest w obu bankach najbardziej zbliżone?

A. $r = 4\%$

B. $r = 7,92\%$

C. $r = 8\%$

Ćwiczenie 5

Pani Katarzyna złożyła w banku kwotę 10 000 zł na lokatę oprocentowaną 4% rocznie. Oblicz, do jakiej kwoty wzrośnie jej kapitał po pięciu latach, jeśli odsetki będą kapitalizowane:

- a) co rok, b) co pół roku, c) co kwartał, d) co miesiąc.

Ćwiczenie 6

Przeczytaj podany w ramce przykład.

Rodzice założyli konto trzynastoletniej córce. Postanowili wpłacać na nie 200 zł na początku każdego roku przez pięć lat. Oprocentowanie roczne w całym tym okresie wynosi 5%, a kapitalizacja następuje co rok. Jaką kwotę będzie miała na koncie ich córka w wieku 18 lat?

Pierwsza wpłata w wysokości 200 zł będzie kapitalizowana pięć razy, druga – wpłacona rok później – cztery razy i każda kolejna wpłata będzie kapitalizowana o jeden raz mniej. Zatem kapitał po pięciu latach będzie wynosił:

$$\begin{aligned} & 200 \cdot 1,05^5 + 200 \cdot 1,05^4 + 200 \cdot 1,05^3 + 200 \cdot 1,05^2 + 200 \cdot 1,05 = \\ & = 200(1,05 + 1,05^2 + 1,05^3 + 1,05^4 + 1,05^5) = \text{Korzystamy ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego.} \\ & = 200 \cdot 1,05 \cdot \frac{1-(1,05)^5}{1-1,05} \approx 1160,38 \text{ [zł]} \end{aligned}$$

Jaka kwota byłaby na koncie opisanym w powyższym przykładzie, gdyby okres oszczędzania był dłuższy o pięć lat?

Ćwiczenie 7

a) Pani Ania zamierza wpłacać 500 zł na konto na początku każdego roku. Oprocentowanie konta wynosi 4% w skali roku, a odsetki są kapitalizowane co rok. Jakie środki zostaną zgromadzone na koncie pani Ani po 8 latach, a jakie – po 20 latach oszczędzania?

b) Jaki kapitał znajdzie się na koncie osiemnastolatka, jeżeli rodzice, począwszy od dnia jego urodzenia, wpłacali mu do banku co rok 300 zł? Oprocentowanie wynosiło 6% w skali roku, a odsetki były kapitalizowane co miesiąc.

Ćwiczenie 8

Paweł, który ma 25 lat, zamierza wpłacać 100 zł na fundusz emerytalny na początku każdego miesiąca. Oprocentowanie funduszu wynosi 6% w skali roku, a kapitalizacja odsetek jest miesięczna. Jaki kapitał zostanie zgromadzony przez Pawła, gdy będzie on w wieku: a) 60 lat, b) 65 lat, c) 67 lat?

Zadania

1. Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał po n latach, jeżeli złożymy w banku na procent składany 2000 zł przy oprocentowaniu rocznym r ?
a) $n = 2, r = 5\%$ b) $n = 5, r = 5\%$ c) $n = 10, r = 3\%$
2. Kapitał w wysokości 600 zł został złożony w banku na pięć lat. Oblicz wielkość kapitału po upływie tego okresu, jeżeli kapitalizacja była roczna, a oprocentowanie wynosiło:
a) w pierwszym roku 6%, w drugim roku – 5,5%, a w trzech ostatnich latach – 4%,
b) w pierwszym roku 5,5%, w trzech kolejnych latach – 4%, a w ostatnim roku – 6%.
3. Oprocentowanie lokat w banku A wynosiło w kolejnych czterech latach 9%, 8%, 7% i 6%. Stopa procentowa w banku B była w tym czasie stała i wynosiła r . Oblicz r , jeśli wpłacenie kapitału na cztery lata było w obu bankach równie opłacalne i oba banki kapitalizowały odsetki rocznie.
4. Jaką kwotę należy ulokować na koncie, aby po pięciu latach uzyskać 1217 zł, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 4%, a odsetki kapitalizowane są co rok? Jaką kwotę należałoby wpłacić, aby uzyskać taki sam kapitał końcowy po trzech latach?
5. Do banku wpłacono 3000 zł na trzy lata przy rocznej stopie procentowej 6%. Ile będzie wynosił kapitał po upływie tego okresu, jeśli odsetki są kapitalizowane: a) co pół roku, b) co kwartał, c) co miesiąc, d) codziennie?
6. Firma X zaciągnęła w banku kredyt w wysokości 10 000 zł. Co roku bank nalicza odsetki w wysokości 10%. Kredyt wraz z odsetkami ma być spłacony jednorazowo po n latach. Na ile lat został zaciągnięty kredyt, jeżeli wiadomo, że firma X będzie musiała spłacić 13 310 zł?
7. Dziadkowie w dniu narodzin wnuka zdeponowali dla niego w banku kwotę k zł na osiemnaście lat, oprocentowaną 5% w skali roku z roczną kapitalizacją odsetek. Obecnie chłopiec ma dziewięć lat i kwota ta wzrosła do 7757 zł. Ile wynosił kapitał początkowy k zł? Do jakiej kwoty wzrośnie ten kapitał na koniec okresu oszczędzania?
8. Kuba zamierza kupić samochód, który kosztuje 40 000 zł. Zakup finansuje ze środków własnych i zaciągniętego na ten cel kredytu. Kredyt wraz z odsetkami, które wyniosą 1200 zł, ma być spłacony po roku. Ile środków własnych ma Kuba, jeżeli oprocentowanie kredytu wynosi 8% w skali roku?

9. Kapitał w wysokości 1000 zł wpłacono do banku na lokatę z miesięczną kapitalizacją odsetek. Po ilu latach kapitał ten się podwoi, jeżeli wiadomo, że oprocentowanie w skali roku wynosi: a) 6%, b) 3%?
10. Pan Lech na budowę domu zaciągnął kredyt w wysokości 100 000 zł, oprocentowany 10% w skali roku. Kredyt będzie spłacany w równych ratach po 30 000 zł na koniec każdego roku, przy czym ostatnia rata może być mniejsza. Odsetki naliczane są rocznie tylko od niespłaconej części kredytu. W tabeli przedstawiono sposób obliczania stanu zadłużenia po kolejnych latach.

Rok	Doliczone odsetki	Stan zadłużenia
1.	$0,1 \cdot 100\,000 = 10\,000$	$100\,000 + 10\,000 - 30\,000 = 80\,000$
2.	$0,1 \cdot 80\,000 = 8\,000$	$80\,000 + 8\,000 - 30\,000 = 58\,000$
3.	$0,1 \cdot 58\,000 = 5\,800$	$58\,000 + 5\,800 - 30\,000 = 33\,800$
4.	$0,1 \cdot 33\,800 = 3\,380$	$33\,800 + 3\,380 - 30\,000 = 7\,180$
5.	$0,1 \cdot 7\,180 = 718$	$7\,180 + 718 - 7\,898 = 0$

Zatem łącznie trzeba spłacić $4 \cdot 30\,000 + 7\,898 = 127\,898$ [zł].

- a) Sporządź analogiczną tabelę dla kredytu w wysokości 100 000 zł, oprocentowanego 20% w skali roku, spłacanego na tych samych zasadach co kredyt pana Lecha. Jaką kwotę trzeba łącznie spłacić?
- b) Ile czasu trwałoby spłacanie takiego kredytu, gdyby oprocentowanie wynosiło 25% w skali roku?

Powtórzenie

11. Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał po n latach, jeżeli złożymy w banku na procent składany 4000 zł przy oprocentowaniu rocznym r ?
- a) $n = 2$, $r = 4\%$ b) $n = 5$, $r = 3\%$ c) $n = 10$, $r = 4\%$
12. Bank przyjął kwotę 50 000 zł na 5% rocznie, a następnie pożyczył ją na 6% rocznie. Ile zyskał bank w ciągu pięciu lat, a ile by zyskał w ciągu dziesięciu lat?
13. Warunki oferowane przez banki dla lokat dwuletnich są następujące:
 bank A – 5,44% rocznie, odsetki kapitalizowane co miesiąc,
 bank B – 5,5% rocznie, odsetki kapitalizowane co kwartał,
 bank C – 5,6% rocznie, odsetki kapitalizowane co pół roku,
 bank D – 5,65% rocznie, odsetki kapitalizowane co rok.
 Który z tych banków oferuje najkorzystniejsze warunki?

3.14. Zagadnienia uzupełniające

■ Średnia arytmetyczna i średnia geometryczna

Rozpatrzmy liczby nieujemne x i y . Między średnią arytmetyczną tych liczb $S_A = \frac{x+y}{2}$ a ich średnią geometryczną $S_G = \sqrt{xy}$ zachodzi zależność:

$$S_G \leq S_A$$

Aby udowodnić tę nierówność, przekształcamy ją równoważnie:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

$$xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$$

$$4xy \leq x^2 + 2xy + y^2$$

$$0 \leq x^2 - 2xy + y^2$$

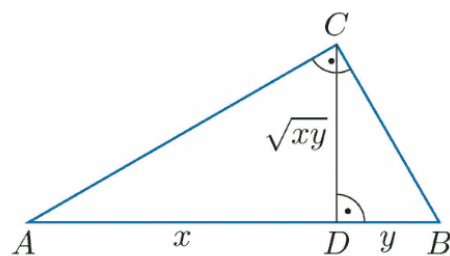
$$0 \leq (x - y)^2$$

Obie strony nierówności są nieujemne.

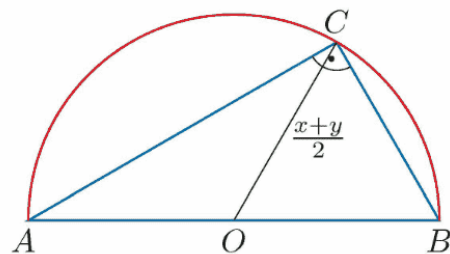
Ostatnia nierówność jest zawsze prawdziwa, zatem udowodniliśmy nierówność wyjściową dla dowolnych nieujemnych liczb x i y .

Nierówność $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ można również udowodnić geometrycznie, rozważając odpowiednie odcinki w trójkącie prostokątnym.

- D** 1. a) Uzasadnij, że wysokość trójkąta prostokątnego poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest średnią geometryczną długości odcinków, na jakie dzieli ona przeciwprostokątną (skorzystaj z podobieństwa odpowiednich trójkątów).

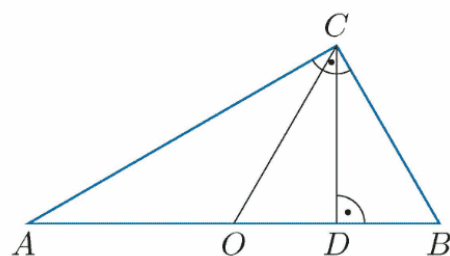


- b) Uzasadnij, że jeśli przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość $x + y$, to odcinek łączący środek przeciwprostokątnej z wierzchołkiem kąta prostego tego trójkąta ma długość $\frac{x+y}{2}$.



- c) Punkt O jest środkiem przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego ABC , punkt D – spodkiem wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną. Uzasadnij, że zachodzi nierówność:

$$|CD| \leq |CO|$$



Wykres ciągu geometrycznego

Wykres ciągu geometrycznego:

$$q, q^2, q^3, \dots$$

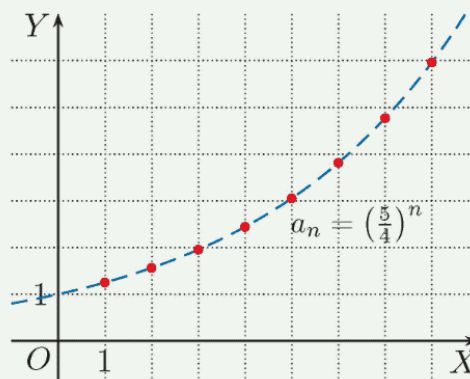
jest zawarty w wykresie funkcji wykładniczej $y = q^x$.

Na rysunku obok przedstawiono wykres ciągu $a_n = \left(\frac{5}{4}\right)^n$.

Ogólnie, wykres ciągu geometrycznego:

$$a, aq, aq^2, aq^3, \dots$$

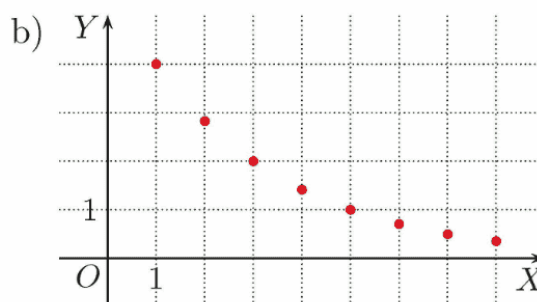
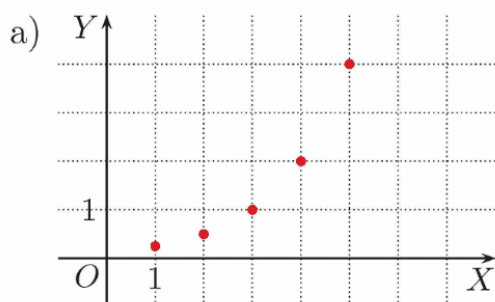
jest zawarty w wykresie funkcji $y = aq^{x-1}$.



2. Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu geometrycznego, którego wykres jest zawarty w wykresie funkcji f . Podaj iloraz tego ciągu.

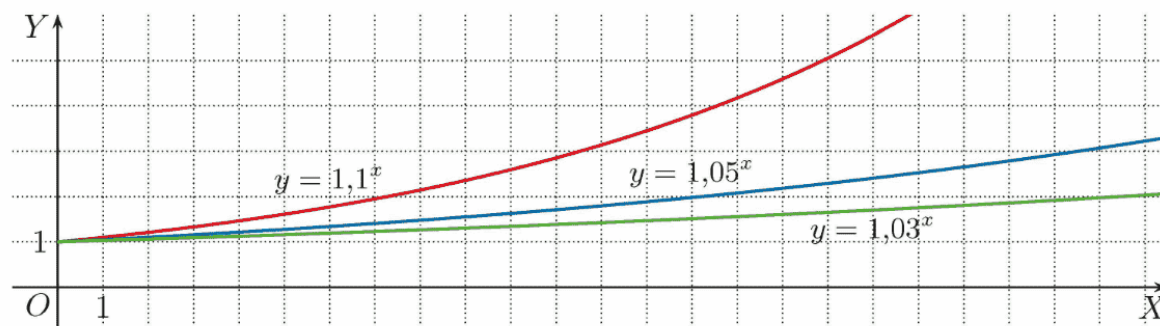
a) $f(x) = 3 \cdot 2^{x-1}$ b) $f(x) = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$ c) $f(x) = \frac{16}{4^x}$ d) $f(x) = 2^{x-5}$

3. Na rysunku poniżej przedstawiono wykres ciągu geometrycznego (a_n) . Zapisz w postaci $f(x) = a \cdot q^{x-1}$ wzór funkcji, w której wykresie jest zawarty wykres tego ciągu.



4. Podaj przybliżoną liczbę lat, po której nastąpi podwojenie kwoty złożonej na lokatę bankową z kapitalizacją roczną o oprocentowaniu w skali roku: a) 3%, b) 5%, c) 10%.

Skorzystaj z wykresów przedstawionych poniżej.



Sprawdź otrzymane wyniki, korzystając z kalkulatora.

■ Ciągi liczb całkowitych

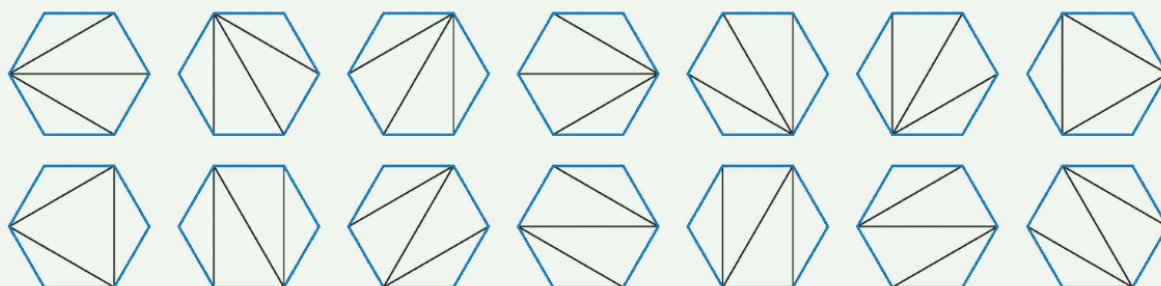
Ponad pięćdziesiąt lat temu amerykański matematyk Neil Sloane [czyt. nil słon] stworzył katalog ciągów liczb całkowitych obecnie funkcjonujący jako **Encyklopedia ciągów liczb całkowitych w wersji on-line** (oeis.org). Opisanych jest w niej ponad ćwierć miliona różnych ciągów. Aby znaleźć informacje o ciągu, należy podać jego numer w katalogu, nazwę lub początkowe wyrazy. Na przykład:

- pod numerem A000045 znajduje się ciąg Fibonacciego (patrz str. 124),
- pod numerem A000108 znajduje się ciąg liczb Catalana [czyt. katalana]:
1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, ...

Ciąg liczb Catalana określony jest wzorem $c_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$. Zatem:

$$c_1 = \frac{2!}{2!1!} = 1, c_2 = \frac{4!}{3!2!} = 2, c_3 = \frac{6!}{4!3!} = 5, c_4 = \frac{8!}{5!4!} = 14, \dots$$

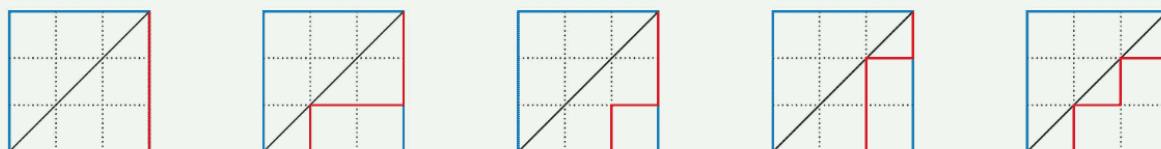
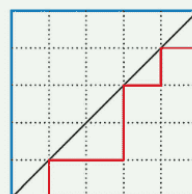
Ciąg ten ma wiele interpretacji geometrycznych, np. dla $(n+2)$ -kąta wypukłego liczba jego możliwych podziałów na trójkąty nieprzecinającymi się przekątnymi jest równa n -tej liczbie Catalana. Dla sześciokąta istnieje 14 takich podziałów:



Rozważmy teraz kwadrat o wymiarach $n \times n$ z siatką całkowitą, jak na rysunku poniżej, oraz drogi prowadzące z lewego dolnego rogu tego kwadratu do jego prawego górnego rogu spełniające warunki:

- poruszamy się po siatce całkowitej w prawo albo w górę,
- nie przechodzimy nad przekątną kwadratu.

Okazuje się, że liczba takich dróg jest n -tą liczbą Catalana. Na poniższych rysunkach przedstawiono wszystkie możliwe drogi dla $n = 3$ ($c_3 = 5$).



5. Narysuj odpowiednie rysunki i sprawdź, czy dla kwadratu 4×4 istnieje $c_4 = 14$ różnych dróg spełniających warunki opisane wyżej.



Zestawy powtórzeniowe

■ Zestaw I

- Oblicz $a_{10} - b_8$.
 - $a_n = 2n + 1, b_n = 3n$
 - $a_n = \frac{8-n}{4}, b_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{2}$
 - $a_n = \frac{n^2+5}{n}, b_n = \frac{5n-8}{n^2}$
 - $a_n = \sqrt[3]{2-n}, b_n = n^{\frac{2}{3}}$
- Oblicz $4a_2 - 6b_4$.
 - $a_n = \log_4 n, b_n = \log_5(2n-3)$
 - $a_n = (-1)^{n^2-1}, b_n = (\sqrt{2})^{n-6}$
- Czy ciąg (b_n) jest ciągiem arytmetycznym? Określ jego monotoniczność.
 - $b_n = n + 1$
 - $b_n = n^2$
 - $b_n = -2n + 3$
 - $b_n = \frac{n+3}{n}$
 - $b_n = \frac{1}{n}$
 - $b_n = 4 - \frac{n}{2}$
- Oblicz wyrazy a_6 i a_9 ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r .
 - $a_1 = 2, r = 2$
 - $a_1 = -5, r = -5$
 - $a_1 = 3, r = 1$
 - $a_1 = 5, r = -2$
 - $a_1 = 0, r = 10$
 - $a_1 = 8, r = -\frac{1}{2}$
- Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) i oblicz wyraz a_8 .
 - $a_2 = 2, a_4 = 6$
 - $a_2 = 0, a_5 = 9$
 - $a_4 = 2, a_{10} = -10$
- Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) .
 - $\begin{cases} a_1 + a_2 = 7 \\ a_1 \cdot a_2 = 10 \end{cases}$
 - $\begin{cases} a_4 - a_2 = 4 \\ a_2 \cdot a_4 = 32 \end{cases}$
 - $\begin{cases} a_1 \cdot a_2 = 6 \\ a_2 + a_4 = 8 \end{cases}$
- Oblicz sumę S_{12} ciągu arytmetycznego (a_n) .
 - $a_1 = 2, a_{10} = 29$
 - $a_1 = 3, r = 2$
 - $a_2 = 5, a_{10} = 21$
 - $a_2 = -8, r = 3$
 - $a_1 = 16, S_4 = 52$
 - $a_3 = -4, S_{10} = -15$
- Oblicz sumę S_{100} ciągu arytmetycznego (a_n) .
 - $a_1 = \frac{1}{3}, a_{100} = \frac{2}{3}$
 - $a_{10} = -1, a_{100} = -11$
 - $a_1 = 5, a_{99} + a_{101} = 150$
 - $a_3 + a_6 = 4\frac{1}{2}, a_{10} - a_4 = 3$
- Kula tocząca się po równi pochyłej w pierwszej sekundzie przebyła drogę 0,5 m, a w każdej następnej sekundzie – drogę o 1 m dłuższą niż w poprzedniej. Oblicz drogę, którą przebyła kula w ciągu początkowych dziesięciu sekund.



- D** 10. Oblicz wyrazy a_1 , a_2 , a_3 i a_8 ciągu $a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. Uzasadnij, że każdy wyraz tego ciągu jest liczbą naturalną.
11. Czy ciąg (b_n) jest ciągiem geometrycznym? Określ jego monotoniczność.
a) $b_n = 2^{-n}$ b) $b_n = 3 \cdot 5^n$ c) $b_n = 2^{3n-1}$
12. Oblicz wyrazy od czwartego do ósmego ciągu geometrycznego (a_n) .
a) $a_1 = 3$, $q = 2$ b) $a_1 = -4$, $q = \frac{1}{2}$ c) $a_2 = -25$, $a_3 = 5$
13. Oblicz wyraz a_5 ciągu geometrycznego (a_n) .
a) $a_1 = 2$, $a_4 = 250$ b) $a_1 = 64$, $a_6 = 2$
14. Oblicz wyrazy a_3 i a_5 ciągu geometrycznego (a_n) .
a) $a_6 = 100$, $q = 10$ c) $a_4 = 1$, $a_3 \cdot a_4 = 3$
b) $a_2 = 4$, $a_7 = 128$ d) $a_1 + a_3 = 10$, $a_3 = -8a_6$
15. Oblicz sumę S_5 ciągu geometrycznego (a_n) .
a) $a_1 = 3$, $q = \frac{1}{2}$ c) $a_1 = 1$, $a_2 + a_3 = 20$
b) $a_1 = -10$, $q = -\frac{1}{2}$ d) $a_1 = -4$, $S_3 = -12$
16. Suma wyrazów skończonego ciągu geometrycznego jest równa 765. Pierwszy wyraz tego ciągu $a_1 = 9$, a iloraz $q = 4$. Ile wyrazów ma ten ciąg?
17. Suma trzech początkowych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa 21, a suma trzech następnych jest równa 168. Który wyraz tego ciągu jest równy 192?
18. Który z ciągów ma większy czwarty wyraz?
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + n + 1 \text{ dla } n \geq 1, \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 2 \\ b_{n+1} = (b_n)^2 - n \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$$
19. Oblicz $2a_5 - b_7$.
a) $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = (-2)^n \cdot a_n \text{ dla } n \geq 1, \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 0 \\ b_{n+1} = b_n - (-1)^n \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$
b) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + n^2 \text{ dla } n \geq 1, \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = b_n + \frac{1}{n(n+1)} \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$
20. Podaj rekurencyjne określenie ciągu (a_n) .
a) $a_n = n^2 - 3n + 1$ b) $a_n = 4 + \frac{1}{n}$ c) $a_n = \log n$



Zestaw II

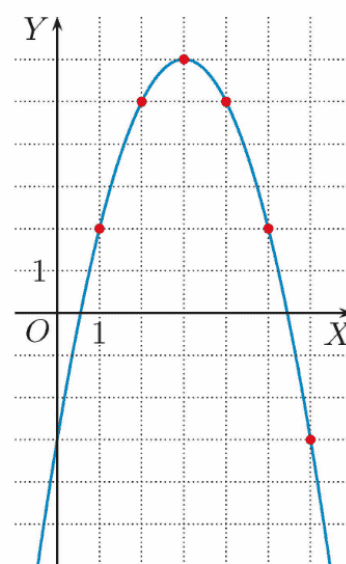
1. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) .

a) $a_n = \frac{-n+2}{3}$ b) $a_n = \frac{2n+1}{2n+3}$ c) $a_n = \frac{2n^2+1}{2n^2}$ d) $a_n = \frac{5-3n}{2n+1}$

2. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) .

a) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 1 \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 1 - a_n \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$
b) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n - 2 \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2a_n \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$

3. Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n) , jeżeli jego wykres jest zawarty w paraboli przedstawionej na rysunku obok. Które wyrazy ciągu (a_n) spełniają nierówność $a_n \leq -18$?



4. Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w paraboli przechodzącej przez początek układu współrzędnych i mającej wierzchołek w punkcie $(3, -3)$. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu. Oblicz wyrazy a_9 i a_{18} .

5. Oblicz sumę wszystkich liczb trzycyfrowych dodatnich, które są:

a) podzielne przez 3, b) podzielne przez 6.

6. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych niepodzielnych przez 5, które:

a) są dwucyfrowe, b) są trzycyfrowe.

7. Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych dodatnich, których reszta z dzielenia przez k jest równa r .

a) $k = 4, r = 3$ b) $k = 7, r = 2$

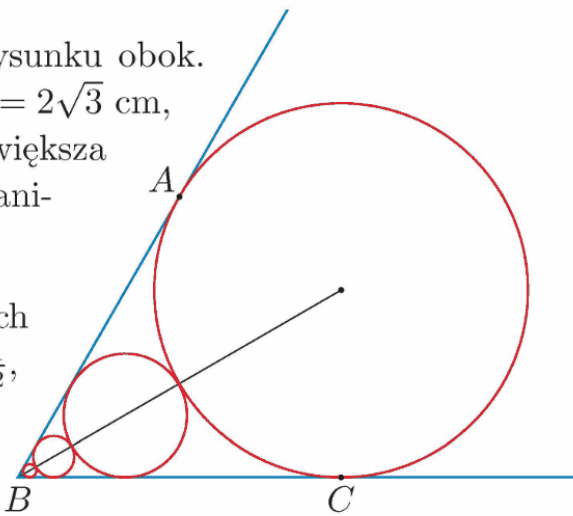
8. Lewa strona równania jest sumą kilku początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego. Oblicz x .

a) $3 + 5 + 7 + \dots + x = 48$ c) $2 + 7 + 12 + \dots + x = 156$
b) $8 + 6 + 4 + \dots + x = -220$ d) $-7 - 3 + 1 + \dots + x = 110$

9. Dla jakich wartości x liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego?

a) $a = x - 2, b = \frac{x+1}{3}, c = 5x$ b) $a = -16, b = 3x, c = x^2$



- D** 10. Uzasadnij, że jeśli liczby a , b , c tworzą jednocześnie ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny, to jest to ciąg stały.
11. a) Trzy liczby, których suma jest równa 6, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli do ostatniej z nich dodamy 1, to otrzymamy ciąg geometryczny. Wyznacz te liczby.
b) Trzy liczby, których suma jest równa 7, tworzą ciąg geometryczny. Jeśli od ostatniej z nich odejmiemy 1, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Wyznacz te liczby.
12. a) Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) o wyrazach całkowitych. Suma pierwszego, drugiego i piątego wyrazu tego ciągu jest równa 27, natomiast liczby $a_1 - 1$, $a_2 - 1$ i $a_5 - 4$ tworzą rosnący ciąg geometryczny. Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n) .
b) Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) o wyrazach całkowitych. Suma pierwszego, drugiego i czwartego wyrazu tego ciągu jest równa 40, natomiast liczby a_1 , $a_2 - 1$ i a_4 tworzą ciąg geometryczny. Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n) .
13. Suma trzech wyrazów a_1 , a_2 , a_3 ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 0. Jeśli do pierwszego wyrazu dodamy 1, do drugiego dodamy 2, a od trzeciego odejmiemy 6, to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Oblicz a_1 , a_2 , a_3 .
- D** 14. Cztery okręgi położone są jak na rysunku obok. Wykaż, że jeśli $\angle ABC = 60^\circ$ i $|AB| = 2\sqrt{3}$ cm, to suma długości tych okręgów jest większa od 18,6 cm. Oblicz sumę pól kół ograniczonych tymi okręgami.
15. Pola pięciu trójkątów równobocznych tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{1}{2}$, a suma tych pól jest równa $31\sqrt{3}$. Oblicz obwód największego spośród tych trójkątów.
- 
-  16. Kapitał w wysokości 800 zł został złożony w banku oferującym kapitalizację miesięczną. Oblicz wysokość kapitału po roku, jeśli przez sześć pierwszych miesięcy roczna stopa procentowa wynosiła:
a) 6%, a przez sześć pozostałych miesięcy – 3%,
b) 3%, a przez sześć pozostałych miesięcy – 6%.



Aby wykazać, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, należy sprawdzić, czy różnica $a_{n+1} - a_n$ jest stała dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$.

Przykład 1

Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) dana jest za pomocą wzoru $S_n = 2n^2$. Czy jest to ciąg arytmetyczny?

Obliczamy pierwszy wyraz ciągu: $a_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 = 2$.

Dla $n > 1$ wyraz a_n możemy wyznaczyć ze wzoru $a_n = S_n - S_{n-1}$:

$$a_n = 2n^2 - 2(n-1)^2 = 2n^2 - 2(n^2 - 2n + 1) = 4n - 2$$

Stąd $a_{n+1} = 4(n+1) - 2 = 4n + 2$.

Różnica $a_{n+1} - a_n = 4n + 2 - (4n - 2) = 4$ dla $n > 1$.

Należy jeszcze obliczyć różnicę $a_2 - a_1$:

$$a_2 - a_1 = (4 \cdot 2 - 2) - 2 = 4$$

Różnica $a_{n+1} - a_n = 4$ dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$, więc ciąg (a_n) jest arytmetyczny.

Odpowiedź: Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

Przykład 2

Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) dana jest za pomocą wzoru $S_n = n^2 - 4$. Czy jest to ciąg arytmetyczny?

Obliczamy pierwszy wyraz ciągu: $a_1 = S_1 = 1^2 - 4 = -3$.

Wyznaczamy wyraz a_n dla $n > 1$:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 - 4) - ((n-1)^2 - 4) = 2n - 1$$

Stąd $a_{n+1} = 2(n+1) - 1 = 2n + 1$.

Różnica $a_{n+1} - a_n = 2n + 1 - (2n - 1) = 2$ dla $n > 1$.

Obliczmy $a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ oraz różnicę $a_2 - a_1 = 3 - (-3) = 6 \neq 2$.

Otrzymaliśmy $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$.

Odpowiedź: Ciąg (a_n) nie jest ciągiem arytmetycznym.

Przykład 3

Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) dana jest za pomocą wzoru $S_n = 2n + 3$. Czy jest to ciąg arytmetyczny?

Obliczamy pierwszy wyraz ciągu: $a_1 = S_1 = 2 \cdot 1 + 3 = 5$.

Wyznaczamy wyraz a_n dla $n > 1$:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (2n + 3) - (2(n-1) + 3) = 2$$

Zatem dla $n > 1$ wszystkie wyrazy są równe 2, ale $a_1 = 5$.

Odpowiedź: Ciąg (a_n) nie jest ciągiem arytmetycznym.



Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. Liczba 6 jest piątym wyrazem ciągu:
A. $a_n = (n - 1)^2 + 5$, C. $a_n = (n - 3)^2 + 5$,
B. $a_n = (n - 2)^2 + 5$, D. $a_n = (n - 4)^2 + 5$.
2. Dany jest ciąg (a_n) o wzorze ogólnym $a_n = \frac{2n+6}{n}$. Żaden wyraz tego ciągu nie jest równy:
A. 8, B. 6, C. 5, D. 3.
3. Ciągiem malejącym jest ciąg:
A. $a_n = n(2 - n)$, C. $a_n = n(4 - n)$,
B. $a_n = n(3 - n)$, D. $a_n = n(5 - n)$.
4. Dany jest ciąg (a_n) o wzorze ogólnym $a_n = 7(n - 1) + 4$. Jest to ciąg arytmetyczny o różnicy równej:
A. -4, B. -3, C. 4, D. 7.
5. Dany jest ciąg (a_n) o wzorze ogólnym $a_n = \sqrt{2} \cdot n - 1$. Suma S_5 tego ciągu jest równa:
A. $5\sqrt{2} - 1$, B. $10\sqrt{2} - 1$, C. $10\sqrt{2} - 5$, D. $15\sqrt{2} - 5$.
6. Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym, w którym wyraz $a_4 = 36$ i iloraz $q = 3$. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy:
A. $\frac{4}{9}$, B. $1\frac{1}{3}$, C. 4, D. 12.
7. Dany jest ciąg geometryczny $a_n = 54 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n$. Suma czterech początkowych wyrazów tego ciągu jest liczbą należącą do przedziału:
A. $\langle -18; -16 \rangle$, B. $\langle -16; -14 \rangle$, C. $\langle -14; -12 \rangle$, D. $\langle -12; -10 \rangle$.
8. Ciąg (a_n) jest ciągiem kolejnych liczb naturalnych, których reszta z dzielenia przez 4 jest równa 2. Suma wyrazów a_{11} i a_{21} tego ciągu jest równa:
A. 120, B. 124, C. 128, D. 132.
9. Ciąg (a_n) jest ciągiem kolejnych liczb naturalnych, których reszta z dzielenia przez 3 jest równa 1. Suma wyrazów ciągu (a_n) większych od 10 i mniejszych od 100 jest równa:
A. 1535, B. 1540, C. 1595, D. 1760.



■ Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)

Zbadaj monotoniczność ciągu $a_n = -\frac{n+3}{n+2}$.



Zadanie 2 (2 pkt)

Wykaż, że ciąg (a_n) określony wzorem rekurencyjnym jest monotoniczny.

$$\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_{n+1} = a_n + n^2 - n + 3 \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Zadanie 3 (2 pkt)

Suma wyrazów skończonego ciągu geometrycznego jest równa 765. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy 9, a iloraz 4. Z ilu wyrazów składa się ten ciąg?

■ Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 4 (4 pkt)

Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) dana jest wzorem $S_n = 6n - 2n^2$. Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

Zadanie 5 (4 pkt)

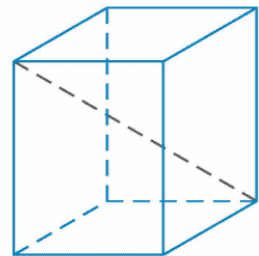
Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 24. Oblicz długości boków tego trójkąta, jeśli wiadomo, że tworzą one ciąg arytmetyczny.

Zadanie 6 (4 pkt)

Suma trzech liczb tworzących ciąg arytmetyczny jest równa 12, a suma ich kwadratów jest równa 56. Wyznacz te liczby.

Zadanie 7 (5 pkt)

Długości trzech krawędzi prostopadłościanu wychodzących z tego samego wierzchołka tworzą ciąg geometryczny. Przekątna prostopadłościanu ma długość $\sqrt{84}$ cm, a jego objętość jest równa 64 cm^3 . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu.



Zadanie 8 (5 pkt)

Suma pięciu początkowych wyrazów rosnącego ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 30 oraz $a_2 \cdot a_4 = 11$. Ile co najmniej początkowych wyrazów tego ciągu trzeba dodać, aby otrzymać sumę większą od 100?

Zadanie 9 (4 pkt)

Suma trzech początkowych wyrazów monotonicznego ciągu geometrycznego jest równa 13. Drugi wyraz jest o 5 mniejszy od różnicy między trzecim i pierwszym wyrazem. Oblicz czwarty wyraz tego ciągu.



4 Statystyka

Poniższa tabela zawiera szacunkowe dane dotyczące liczebności populacji bobra na terenie Polski w wybranych latach. Dane te pokazują, że od ostatniego ćwierćwiecza XX wieku następuje ciągły przyrost populacji bobra w naszym kraju.

Rok	1976	1980	1982	1986	1992	1994	2003	2020
Liczebność	500	1000	1800	3000	6000	7400	20 660	137 000

Na podstawie: *Krajowy plan ochrony gatunku. Bóbr europejski*,
oprac. Andrzej Czech, Kraków 2007; www.wody.gov.pl

W tym rozdziale poznajemy pojęcia statystyczne związane z analizą danych. Wykorzystuje się je do opisu różnych zjawisk, także przy podejmowaniu kluczowych decyzji gospodarczych i społecznych.

4.1. Średnia arytmetyczna

Przykład 1

W tabeli podano, ile punktów zdobyli dwaj zawodnicy A i B w sześciu kolejnych meczach koszykówki.

A	8	18	10	20	16	12
B	24	18	4	0	0	2

Średnia liczba punktów zdobytych przez zawodnika A :

$$\frac{8 + 18 + 10 + 20 + 16 + 12}{6} = 14$$

Średnia liczba punktów zdobytych przez zawodnika B :

$$\frac{24 + 18 + 4 + 0 + 0 + 2}{6} = 8$$

Definicja

Średnią arytmetyczną n liczb: $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy liczbę:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Zamiast „średnia arytmetyczna” będziemy czasami pisać krótko: „średnia”.

Ćwiczenie 1

W tabeli podano oceny z wybranych przedmiotów otrzymane przez troje uczniów klasy III na koniec semestru. Oblicz średnie ocen uzyskanych przez Basię i Tomka (zauważ, że Tomek nie uczy się języka francuskiego).

	J. polski	J. angielski	J. francuski	Historia	Matematyka	Biologia	Fizyka	Chemia	Geografia	WF	Średnia ocen
Agnieszka	6	5	5	5	4	5	4	3	5	4	4,6
Basia	2	1	2	3	4	3	4	3	2	5	?
Tomek	5	4	—	5	3	3	4	4	5	3	?

Ćwiczenie 2

Wynagrodzenia miesięczne pracowników pewnej firmy wyniosły (w złotych): 3300, 3250, 5500, 3350, 7500, 3300, 3000, 3100 i 2700. Ilu pracowników tej firmy otrzymało wynagrodzenie poniżej średniej?

Ćwiczenie 3

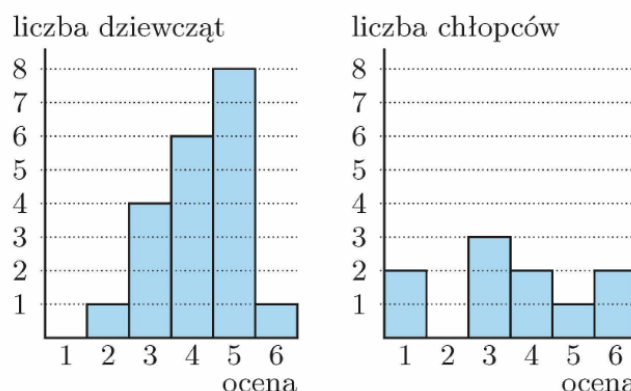
Oblicz średnie arytmetyczne zestawów danych A , B i C . Sformułuj wniosek.

$$A = \{7, 7, 3, 4, 4, 11\}, \quad B = \{17, 17, 13, 14, 14, 21\}, \quad C = \{27, 27, 23, 24, 24, 31\}$$

Przykład 2

Na diagramach przedstawiono zestawienia ocen semestralnych z matematyki w klasie III (z podziałem na dziewczęta i chłopców).

Średnia ocen z matematyki w grupie dziewcząt:



$$\bar{x}_d = \frac{1 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 8 \cdot 5 + 1 \cdot 6}{1 + 4 + 6 + 8 + 1} = \frac{84}{20} = 4,2$$

Średnia ocen z matematyki w grupie chłopców:

$$\bar{x}_c = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6}{2 + 3 + 2 + 1 + 2} = \frac{36}{10} = 3,6$$

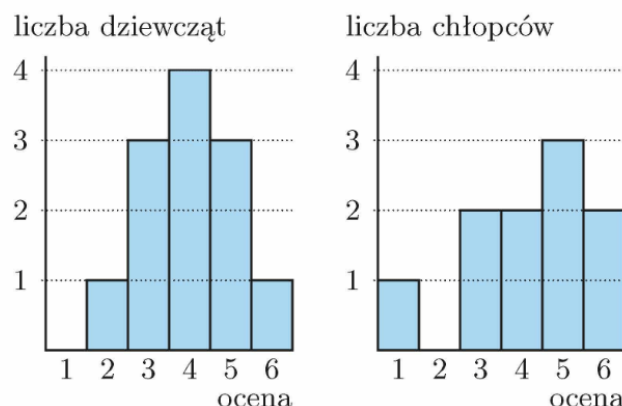
Średnią ocen z matematyki dla całej klasy możemy obliczyć, korzystając z obliczonych wcześniej średnich:

$$\bar{x}_k = \frac{20 \cdot \bar{x}_d + 10 \cdot \bar{x}_c}{10 + 20} = \frac{84 + 36}{30} = \frac{120}{30} = 4$$

Zwróć uwagę na to, że $\bar{x}_k$ nie jest równe $\frac{\bar{x}_d + \bar{x}_c}{2}$. Jak sądzisz, dlaczego?

Ćwiczenie 4

Na diagramach przedstawiono zestawienia ocen semestralnych z biologii w pewnej klasie (z podziałem na dziewczęta i chłopców). Oblicz średnie ocen z biologii dla grupy dziewcząt, grupy chłopców oraz dla całej klasy.



Ćwiczenie 5

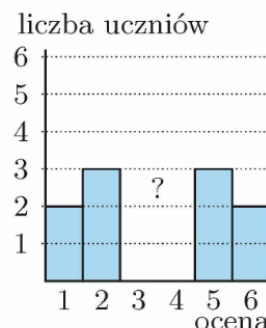
a) Średnia arytmetyczna liczb: $x_1, x_2, \dots, x_8$ jest równa 16, a średnia arytmetyczna liczb: $x_2, \dots, x_8$ jest równa 17. Oblicz x_1 .

b) Średnia arytmetyczna liczb: $x_1, x_2, \dots, x_7$ jest równa 120, a średnia arytmetyczna liczb: x_2, x_4, x_6 jest równa 100. Oblicz średnią arytmetyczną liczb: x_1, x_3, x_5, x_7 .

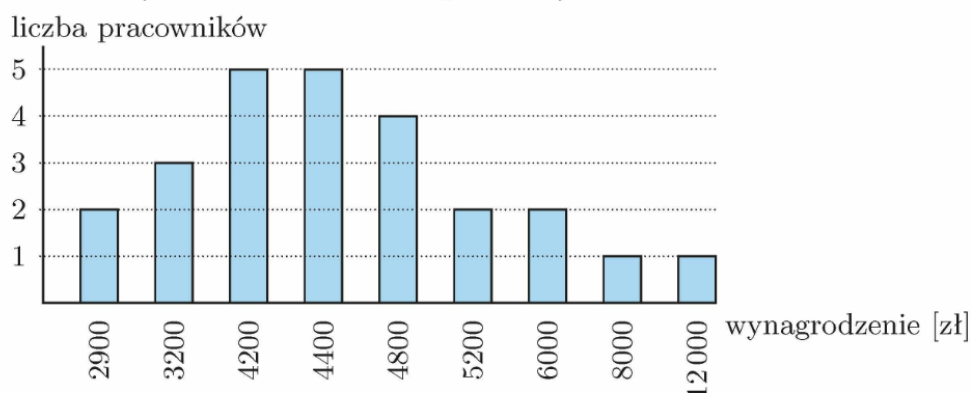
Zadania

1. Klub zrzeszający dwunastu hodowców gołębi podał, że każdy z jego członków ma średnio 50 gołębi. Dane te okazały się nieaktualne, gdy jeden z klubowiczów sprzedał połowę swoich gołębi – ma ich teraz 36. Ile gołębi przypada średnio na jednego członka klubu obecnie?

2. Na diagramie przedstawiającym zestawienie ocen semestralnych z geografii w dwudziestoosobowej klasie nie zaznaczono liczby ocen dobrych i dostatecznych. Przerysuj do zeszytu i uzupełnij diagram, jeśli wiadomo, że średnia ocen z geografii w tej klasie wynosi: a) 3,5, b) 3,25, c) 3,65.



3. W pewnej firmie zatrudniającej 15 pracowników średnie miesięczne wynagrodzenie wynosi 3800 zł. Jakie będzie średnie miesięczne wynagrodzenie, jeśli firma dodatkowo zatrudni:
 - a) stażystę z wynagrodzeniem miesięcznym 2200 zł,
 - b) trzech stażystów, każdego z wynagrodzeniem miesięcznym 2300 zł?
4. Średnie miesięczne wynagrodzenie w pewnej firmie zatrudniającej 20 osób wynosiło 3200 zł. Zatrudniono nowego pracownika. Ile zarabia ten pracownik, jeśli obecnie średnie miesięczne wynagrodzenie w firmie jest:
 - a) o 2% wyższe niż poprzednio,
 - b) o 1% niższe niż poprzednio?
5. Na diagramie przedstawiono dane dotyczące miesięcznego wynagrodzenia pracowników banku (12 000 zł zarabia dyrektor).



- a) Ile wynosi średnie miesięczne wynagrodzenie w tym banku?
- b) Ile wynosi średnie miesięczne wynagrodzenie 10 najlepiej zarabiających pracowników, a ile – 10 zarabiających najgorzej?
- c) Jaką podwyżkę otrzymał dyrektor, jeśli wszyscy pozostali pracownicy dostali po 400 zł podwyżki, a średnie miesięczne wynagrodzenie wzrosło o 10%?

Czy wiesz, że...

Średnia arytmetyczna jest „wrażliwa” na dane bardzo odbiegające od pozostałych, dlatego czasem obliczamy ją po odrzuceniu z zestawu pewnej liczby danych największych i najmniejszych. Tak obliczona średnia nosi nazwę **średniej obciętej**.

Średnia obcięta ma swoje zastosowania np. w sporcie. Obliczenie ostatecznej oceny w jeździe figurowej na lodzie czy gimnastyce sportowej polega na odrzuceniu dwóch skrajnych ocen i obliczeniu średniej obciętej pozostałych.

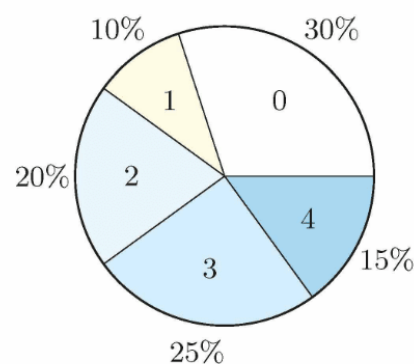


6. Oblicz średnią podanego zestawu liczb oraz zestawu otrzymanego przez usunięcie dwóch liczb skrajnych (najmniejszej i największej).
- a) 0, 2, 3, 4, 6, 9, 9, 127 b) 11, 12, 12, 13, 15, 17, 82
7. Oblicz średnią arytmetyczną zestawu liczb będących kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego: $2, 2^2, \dots, 2^{12}$ oraz zestawu otrzymanego przez usunięcie dwóch liczb najmniejszych i dwóch liczb największych.
8. Czy w zamieszczonym obok kwadracie można skreślić jeszcze jedną liczbę tak, aby średnia arytmetyczna wszystkich skreślonych liczb:
- a) wzrosła o 1, b) zmalała o 1, c) wzrosła o $33\frac{1}{3}\%$?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Powtórzenie

9. W grupie 240 osób przeprowadzono sondaż. Każdej osobie zadano pytanie: „Ile godzin dziennie spędzasz, oglądając seriale telewizyjne?”. Wyniki sondażu przedstawiono na diagramie kołowym. Oblicz średnią arytmetyczną uzyskanych danych.
10. Oblicz x , jeśli wiadomo, że średnia arytmetyczna podanego zestawu liczb jest równa 4,5.
- a) 2, 2, 3, 3, 3, x , 8, 8 b) 0, 1, 1, 1, 2, 2, x , x , 13, 15



4.2. Mediana, skala centylowa i dominanta

Poza średnią arytmetyczną rozpatrujemy też inne wielkości służące do analizy danych. Jedną z nich jest wartość środkowa – **mediana**. Aby ją wyznaczyć, porządkujemy dane od wartości najmniejszej do największej, na przykład:

1, 2, 2, 2, 5, 5, 6 – medianą jest liczba 2,

–3, –3, 0, 0, 2, 7, 9, 11, 13, 17, 18 – medianą jest liczba 7.

Medianą nieparzystej liczby danych jest wartość środkowa. W przypadku parzystej liczby danych medianą jest średnia arytmetyczna dwóch sąsiednich wartości środkowych, na przykład:

1, 2, 3, 8, 9, 14 – mediana jest równa $\frac{3+8}{2} = 5,5$.

Zauważ, że mediana dzieli dane na dwie równoliczne grupy. Dane w jednej grupie są od niej mniejsze lub jej równe, dane w drugiej – większe lub równe.

Ćwiczenie 1

Wyznacz medianę podanych liczb.

- a) 1, 2, 3, 10, 20 b) 6, 10, 11, 11, 20, 7 c) 18, 6, 4, 10, 5, 4

Ćwiczenie 2

W stadninie zważono wszystkie konie i otrzymano następujące wyniki (w kilogramach):

– ogiery: 530, 550, 550, 590, 565, 570, 560, 540;

– klacze: 490, 500, 510, 540, 505, 500.

Wyznacz mediany wagi: a) ogierów, b) klaczy, c) wszystkich koni w stadninie.

Ćwiczenie 3

Rzucono 20 razy kostką. Na diagramie obok przedstawiono, ile razy otrzymano poszczególne liczby oczek.

Wyznacz medianę uzyskanych wyników.



Ćwiczenie 4

Podaj przykład pięciu liczb, których mediana jest:

- a) większa od ich średniej arytmetycznej,
b) mniejsza od ich średniej arytmetycznej.

Ćwiczenie 5

Średnia arytmetyczna zestawu liczb: 8, 6, 3, x , 8, $x+4$, 4, 6, 7, 8 jest równa 7. Ile wynosi mediana tego zestawu liczb?

Aby wskazać położenie wybranej danej względem innych danych, używa się **skali centylowej**. Podając centyl, któremu odpowiada liczba x (mówimy też: w którym mieści się liczba x), określamy, jaki jest procent liczb mniejszych lub równych tej liczbie.

Przykład 1

W poniższej tabeli podano, jakie wartości centyli odpowiadają poszczególnym wynikom procentowym uzyskanym na egzaminie maturalnym z matematyki na poziomie podstawowym przeprowadzonym w maju 2019 roku.

Wynik procentowy	Wartość centyla	Wynik procentowy	Wartość centyla	Wynik procentowy	Wartość centyla
0	1	34	21	68	64
2	1	36	23	70	66
4	1	38	26	72	69
6	1	40	28	74	71
8	1	42	30	76	74
10	2	44	33	78	76
12	3	46	35	80	78
14	4	48	38	82	80
16	5	50	40	84	82
18	7	52	43	86	85
20	8	54	45	88	87
22	10	56	48	90	89
24	12	58	51	92	91
26	13	60	53	94	93
28	15	62	56	96	96
30	17	64	58	98	98
32	19	66	61	100	100

Źródło: <https://cke.gov.pl>

Z tabeli można odczytać, że:

- Jeśli maturzysta uzyskał na egzaminie 30% punktów możliwych do zdobycia, to wynik ten odpowiada 17. centylowi, co oznacza, że 17% maturzystów podchodzących do tego egzaminu uzyskało wynik niższy lub taki sam, natomiast 83% maturzystów uzyskało wynik wyższy.
- Jeśli maturzysta uzyskał na egzaminie 70% możliwych do zdobycia punktów, to wynik ten odpowiada 66. centylowi, co oznacza, że 66% maturzystów podchodzących do tego egzaminu uzyskało wynik niższy lub taki sam, natomiast 34% maturzystów uzyskało wynik wyższy.

Ćwiczenie 6

- a) Ile procent maturzystów podchodzących do egzaminu maturalnego z matematyki podstawowej w maju 2019 roku uzyskało wynik lepszy od maturzysty, który zdobył na tym egzaminie 50% punktów?
- b) Jaki procentowy wynik z egzaminu maturalnego z matematyki podstawowej w maju 2019 roku odpowiada 40. centylowi, a jaki – 80. centylowi wyników egzaminu?

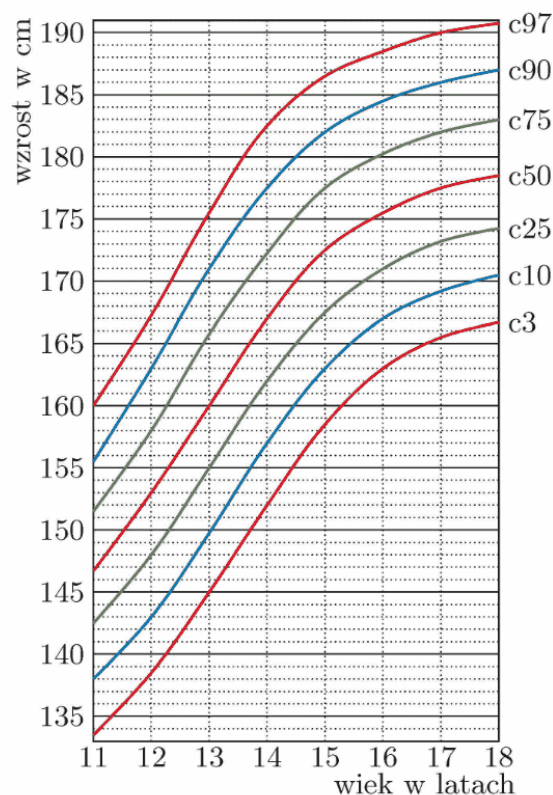
Przykład 2

Przedstawiona obok siatka jest siatką centylową wzrostu chłopców w wieku 11–18 lat. Zaznaczone linie opisują centyle: 3, 10, 25, 50, 75, 90 i 97.

- W wieku 13 lat chłopiec o wzroście 160 cm mieści się w 50. centylu.
- W wieku 16 lat chłopiec o wzroście większym (lub równym) od 75% swoich rówieśników mierzy ponad 180 cm.

Ćwiczenie 7

- a) Czternastoletni chłopiec ma 167 cm wzrostu. W którym centylu mieści się jego wzrost?
- b) Siedemnastolatek ma 186 cm wzrostu. Ile procent jego rówieśników jest od niego wyższych?



Siatka centylowa wzrostu chłopców w wieku 11–18 lat

Źródło: <http://www.czd.pl>

Kolejną wielkością przydatną podczas analizy danych jest **dominanta** – wartość, która występuje wśród danych najczęściej (dominanta bywa również nazywana **wartością modalną** lub **modą**).

Na przykład dla liczb: 1, 1, 2, 2, 2, 3, 5, 5, 6 dominantą jest liczba 2.

Jeśli w zestawie danych kilka liczb występuje z tą samą, najwyższą częstością, to przyjmujemy, że każda z tych liczb jest dominantą. Jeżeli natomiast wszystkie liczby występują tak samo często, to przyjmujemy, że nie ma dominanty.

Ćwiczenie 8

Sprzedawca zanotował rozmiary butów męskich, które sprzedał pewnego dnia: 42, 44, 41, 42, 43, 42, 44, 42, 45, 43, 45, 46. Wyznacz medianę i dominantę tych danych. Który rozmiar butów był kupowany najczęściej?

Ćwiczenie 9

Nauczyciel biologii zrobił zestawienie wyników trzech sprawdzianów przeprowadzonych w dwudziestoposobowej klasie (tabela obok). Po

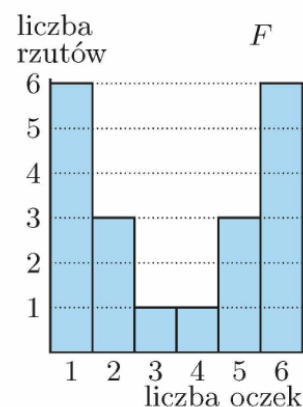
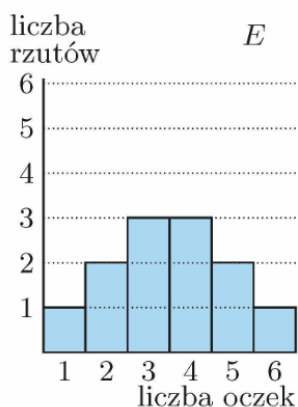
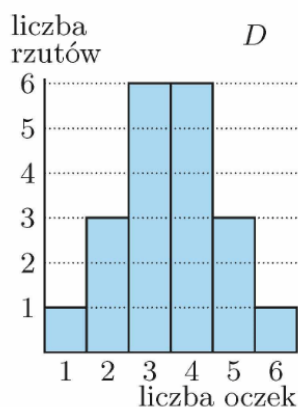
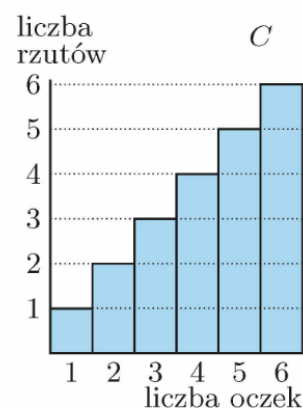
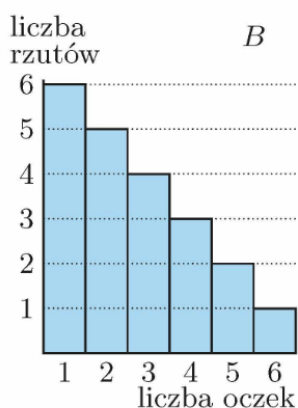
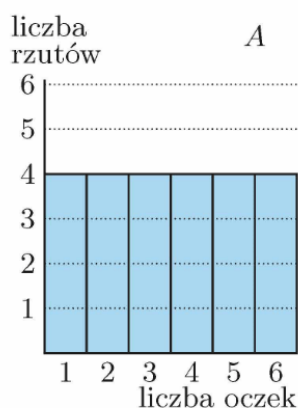
Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba ocen	4	10	23	2	19	2

kolejnym sprawdzianie dopisał do niego nowe oceny. Wyznacz dominantę i medianę ocen w nowym zestawieniu, jeśli wiadomo, że z tego sprawdzianu:

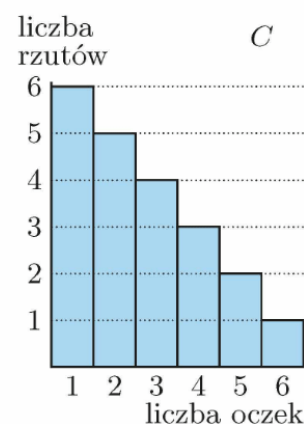
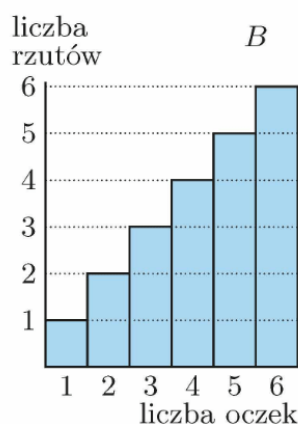
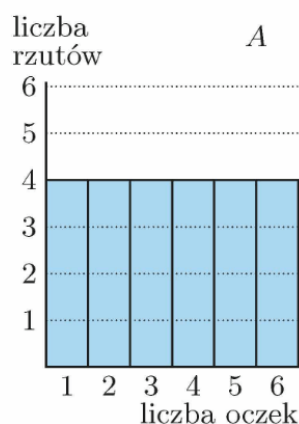
- wszyscy uczniowie otrzymali ocenę dobrą,
- połowa uczniów otrzymała ocenę bardzo dobrą, a pozostali – niedostateczną.

Zadania

- Oznaczmy przez $\bar{x}$, M i D odpowiednio średnią arytmetyczną, medianę i dominantę zestawu liczb: 1, 2, 3, 4, c , 2, 3, 4, 4, 4. Oblicz c , jeśli:
 - $\bar{x} = D$,
 - $\bar{x} = M$.
- Każda z osób A, B, C, D, E, F wykonała serię rzutów kostką. Na diagramach przedstawiono, ile razy wypadły poszczególne liczby oczek w seriach. Wyznacz medianę, dominantę i średnią arytmetyczną liczb oczek wyrzucanych w każdej serii.



3. Każda z osób A , B , C wykonała serię rzutów kostką. Na diagramach przedstawiono, ile razy wypadły poszczególne liczby oczek w seriach. Wyznacz medianę, dominantę i średnią arytmetyczną liczb oczek wyrzuconych łącznie przez osoby: a) A i B , b) A i C , c) B i C .



Czy wiesz, że...

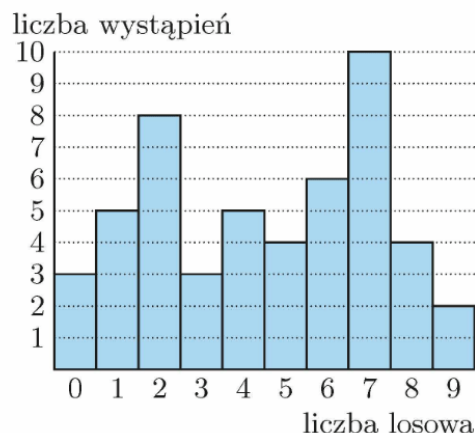
W niektórych zagadnieniach (np. w kryptografii) wykorzystuje się liczby losowe. Liczby te można wygenerować za pomocą programu komputerowego lub można skorzystać z odpowiednich tablic. Poniżej podano osiem wierszy tablicy liczb losowych, w której występują liczby od 0 do 9 odpowiednio pogrupowane.

1.	46016	24742	21311	88342	67778	20741	26755	55382	96777	06729
2.	89311	86439	32128	17700	90725	01936	23678	54622	27342	96439
3.	09006	57476	64080	47646	68020	32924	68500	81779	17120	57784
4.	84642	87958	96983	80086	19451	53725	82606	54516	62617	67000
5.	88645	63989	45783	33657	54733	68580	97232	98073	27454	36174
6.	75815	34604	83791	91421	09176	49317	17045	79972	65081	32075
7.	37019	94048	44462	48948	29999	19107	51184	89352	00122	07222
8.	01324	69795	95403	20891	89075	82476	02147	19961	84203	02724

4. Wykonano diagram dla liczb z pierwszego wiersza powyższej tablicy liczb losowych.

a) Oblicz ich średnią arytmetyczną oraz medianę. Któremu centylowi odpowiada liczba 2, a któremu liczba 7?

b) Wykonaj analogiczny diagram dla liczb z drugiego wiersza tablicy. Wyznacz ich średnią arytmetyczną, medianę i dominantę. Któremu centylowi odpowiada liczba 3?



5. Poniżej przedstawiono tabelę zawierającą skalę centylową wyników egzaminu maturalnego z historii (poziom rozszerzony, maj 2019 roku).

Wynik procentowy	Wartość centyla	Wynik procentowy	Wartość centyla	Wynik procentowy	Wartość centyla
0	1	34	53	68	90
2	2	36	56	70	91
4	3	38	59	72	92
6	6	40	62	74	93
8	10	42	65	76	95
10	13	44	67	78	95
12	17	46	69	80	96
14	20	48	71	82	97
16	24	50	74	84	98
18	27	52	76	86	98
20	31	54	78	88	99
22	34	56	80	90	99
24	38	58	82	92	99
26	41	60	84	94	99
28	44	62	85	96	100
30	47	64	87	98	100
32	50	66	88	100	100

Źródło: <https://cke.gov.pl>

- a) Jaki wynik procentowy gwarantował znalezienie się w gronie 16% maturzystów, którzy uzyskali najlepsze wyniki na tym egzaminie?
- b) Wynik procentowy pewnego maturzysty równy jest medianie wyników egzaminu, a wynik jego kolegi odpowiada 80. centylowi. O ile punktów procentowych różnią się ich wyniki z tego egzaminu?

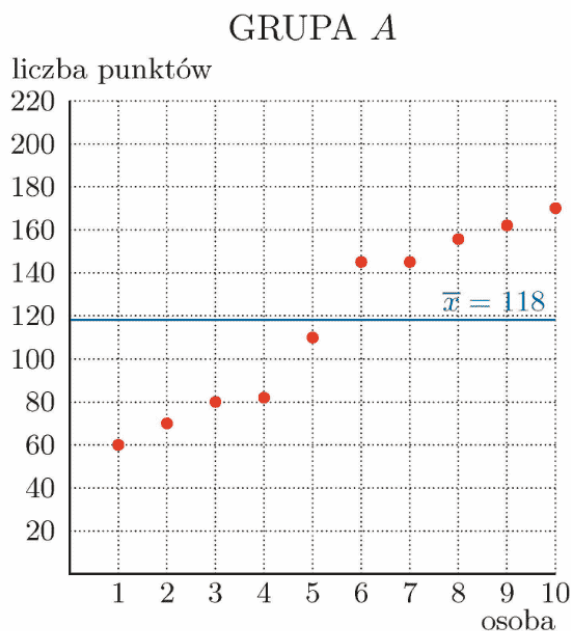
Powtórzenie

6. W klasie Marty 10% uczniów otrzymało ze sprawdzianu ocenę bardzo dobrą, a pozostali uzyskali ocenę dobrą albo dostateczną. Średnia wszystkich ocen wyniosła 3,6. Wyznacz medianę i dominantę ocen z tego sprawdzianu.
7. Znajdź taką liczbę całkowitą x , aby poniższy zestaw danych miał tylko jedną dominantę i aby była ona równa jego średniej arytmetycznej.
- a) 4, x , 2, 5, 4, 4, 5, 12, 6, 5, 3 b) 1, x , 2 x , 1, 6, 9, 1, 6, 9, 6, 9
8. Skorzystaj z tabeli zamieszczonej przy zadaniu 5. i podaj, ile procent maturzystów podchodzących do egzaminu z historii w maju 2019 roku uzyskało wynik lepszy od maturzysty, który zdobył na tym egzaminie 68% punktów.

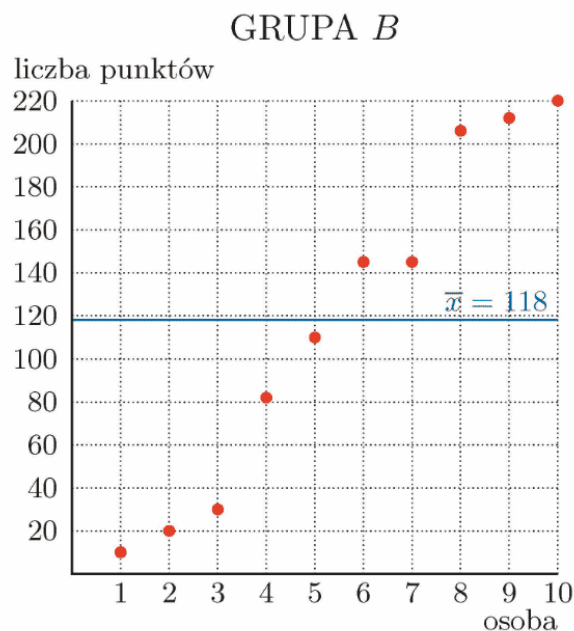
4.3. Odchylenie standardowe

Przykład 1

W dwóch dziesięcioosobowych grupach studentów przeprowadzono ten sam egzamin oceniany w skali 0–220 punktów. Wyniki otrzymane w grupach A i B przedstawiono na diagramach.



Wyniki w grupie A: 60, 70, 80, 82, 110, 145, 145, 156, 162, 170



Wyniki w grupie B: 10, 20, 30, 82, 110, 145, 145, 206, 212, 220

Obydwa zestawy danych mają średnią arytmetyczną równą 118, medianę – 127,5 oraz dominantę – 145. Jednak rozproszenie wyników w grupie B jest znacznie większe niż w grupie A. Jako miarę rozproszenia danych wokół ich średniej przyjmuje się **odchylenie standardowe**.

Definicja

Wariancją liczb: $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy liczbę:

$$\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

gdzie $\bar{x}$ jest średnią arytmetyczną liczb: $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Odchyleniem standardowym liczb: $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy liczbę σ określoną za pomocą wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

Uwaga. Wariancja jest równa σ^2 i jest w ten sposób oznaczana.

Przykład 2

Oblicz wariancję i odchylenie standardowe danych: 4, 9, 11, 13, 13.

Obliczamy średnią i wariancję:

$$\bar{x} = \frac{4 + 9 + 11 + 13 + 13}{5} = 10$$
$$\sigma^2 = \frac{(4-10)^2 + (9-10)^2 + (11-10)^2 + (13-10)^2 + (13-10)^2}{5} = \frac{56}{5} = 11,2$$

Zatem odchylenie standardowe $\sigma = \sqrt{11,2} \approx 3,35$.

Ćwiczenie 1

Oblicz wariancję i odchylenie standardowe danych:

a) 4, 5, 6, 7, 8;

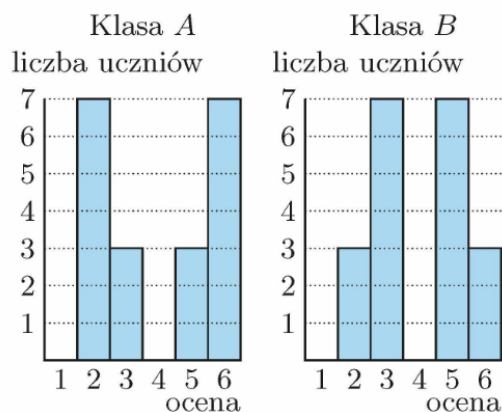
b) 3, 6, 6, 6, 9;

c) 8, 12, 13, 13, 14.

Przykład 3

Na diagramach przedstawiono oceny semestralne z muzyki w dwóch dwudziestoosobowych klasach. Średnia ocen w obu klasach jest równa 4. Pokaż, że odchylenie standardowe ocen jest większe w klasie A.

Obliczając wariancję w klasie A, wykorzystujemy pogrupowanie danych:



$$\sigma_A^2 = \frac{7 \cdot (2-4)^2 + 3 \cdot (3-4)^2 + 3 \cdot (5-4)^2 + 7 \cdot (6-4)^2}{20} = \frac{62}{20} = 3,1$$

Odchylenie standardowe $\sigma_A = \sqrt{3,1} \approx 1,76$.

Analogicznie obliczamy wariancję w klasie B:

$$\sigma_B^2 = \frac{3 \cdot (2-4)^2 + 7 \cdot (3-4)^2 + 7 \cdot (5-4)^2 + 3 \cdot (6-4)^2}{20} = \frac{38}{20} = 1,9$$

Odchylenie standardowe $\sigma_B = \sqrt{1,9} \approx 1,38$. Zatem $\sigma_A > \sigma_B$.

Ćwiczenie 2

Sprawdź, dla którego zestawu danych, A czy B, odchylenie standardowe jest większe.

A: 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5

B: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5

Ćwiczenie 3

Oblicz odchylenia standardowe zestawów liczb A i B. Sformułuj wniosek.

A: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4

B: 11, 12, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14

Ćwiczenie 4

Dane są zbiory: $X = \{1, -1, 2, -2, 3, -3\}$ i $Y = \{10, -10, 20, -20, 30, -30\}$. Ile razy odchylenie standardowe liczb ze zbioru Y jest większe od odchylenia standardowego liczb ze zbioru X ?

Ćwiczenie 5

W tabeli przedstawiono dane dotyczące miesięcznego wynagrodzenia w dwóch firmach. Oblicz wariancję oraz odchylenie standardowe wynagrodzeń w firmie X i w firmie Y .

	Firma X			Firma Y		
Liczba pracowników	2	16	2	16	2	2
Wynagrodzenie [zł]	3000	3500	4000	3000	5000	6000

Uwaga. Odchylenie standardowe jest wyrażane w tej samej jednostce co analizowane dane, a wariancja – w tej jednostce podniesionej do kwadratu.

Wariancję liczb można również obliczyć, korzystając z podanego niżej wzoru.

Wariancja liczb: $x_1, x_2, \dots, x_n$, których średnia arytmetyczna jest równa $\bar{x}$, wyraża się za pomocą wzoru:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2$$

Przykład 4

Oblicz wariancję i odchylenie standardowe danych: 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4.

Obliczamy średnią arytmetyczną, a następnie wariancję:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{4 + 3 + 2 + 1} = \frac{4 + 6 + 6 + 4}{10} = \frac{20}{10} = 2 \\ \sigma^2 &= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2}{10} - (\bar{x})^2 = \frac{4 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 4^2}{10} - 2^2 = \\ &= \frac{4 + 12 + 18 + 16}{10} - 4 = \frac{50}{10} - 4 = 1\end{aligned}$$

Wariancja: $\sigma^2 = 1$, odchylenie standardowe: $\sigma = \sqrt{1} = 1$.

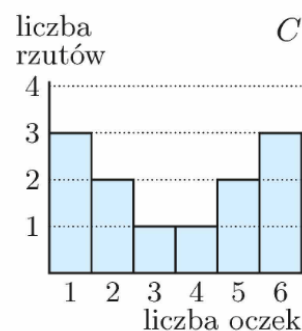
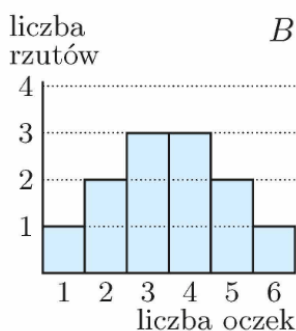
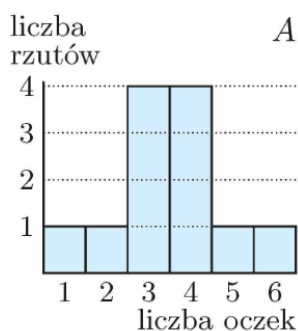
Ćwiczenie 6

W pewnej firmie analizowano staż pracy pracowników – dane zestawiono w tabeli. Oblicz średni staż pracy pracowników tej firmy oraz wariancję i odchylenie standardowe.

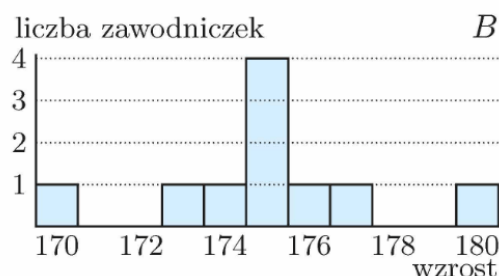
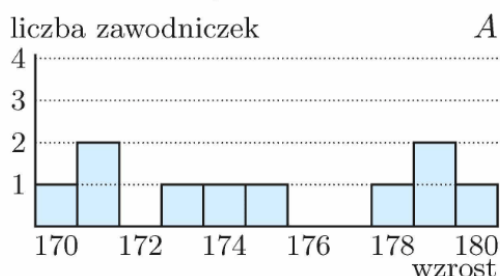
Staż pracy w latach	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Liczba pracowników	6	5	3	2	4	2	3	2	0	1

Zadania

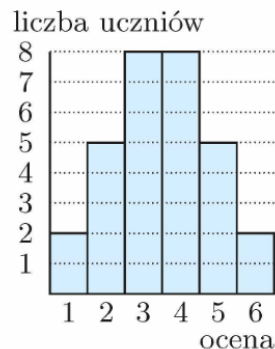
- Oblicz średnią arytmetyczną, wariancję i odchylenie standardowe danych:
 - 5, 5, 5, 5, 5, 5;
 - 4, 4, 4, 6, 6, 6;
 - 3, 3, 3, 7, 7, 7;
 - 3, 4, 5, 5, 6, 7;
 - 2, 2, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 9;
 - 4, 5, 9, 9, 9, 9, 10.
- Przed rozpoczęciem zawodów sumo zważono sześciu zawodników i otrzymano następujące wyniki (w kilogramach): 170, 190, 160, 170, 180, 150. Oblicz średnią arytmetyczną, wariancję i odchylenie standardowe otrzymanych danych.
- Każda z osób A , B , C wykonała serię rzutów kostką. Na diagramach przedstawiono, ile razy wypadły poszczególne liczby oczek w seriach. Oblicz odchylenie standardowe liczb oczek wyrzuconych w każdej serii.



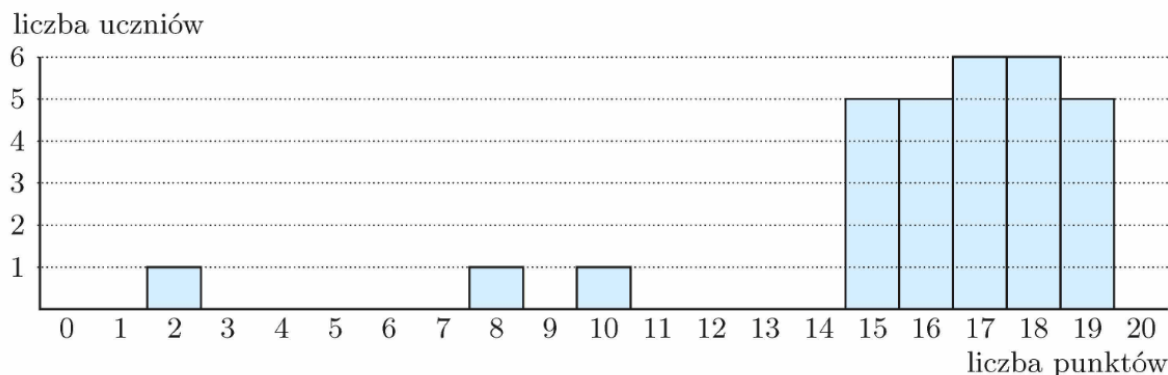
- Na diagramach poniżej przedstawiono dane dotyczące wzrostu (w centymetrach) zawodniczek dwóch szkolnych drużyn piłki ręcznej A i B (łącznie z rezerwowymi). Oblicz odchylenia standardowe dla każdej drużyny oraz dla obu drużyn razem.



- Na diagramie przedstawiono zestawienie ocen semestralnych z fizyki w klasie IIIc.
 - Oblicz odchylenie standardowe tych ocen.
 - Ilu uczniów otrzymało ocenę różniącą się od średniej ocen o mniej niż odchylenie standardowe?
 - Ilu uczniów otrzymało ocenę mieszczącą się w przedziale $(\bar{x} - 2\sigma; \bar{x} + 2\sigma)$?



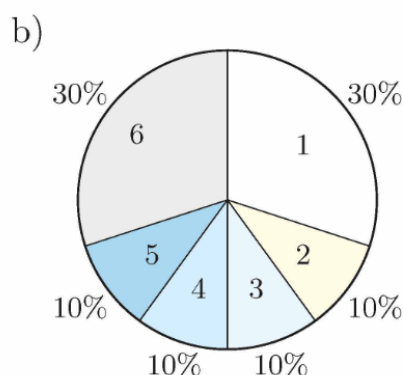
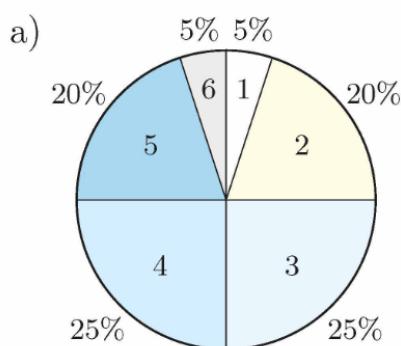
6. Sprawdzian ze statystyki przeprowadzony w klasie IIIa był punktowany w skali od 0 do 20 punktów. Jego wyniki przedstawiono na poniższym diagramie.



- a) Ilu uczniów otrzymało wynik spoza przedziału $(\bar{x} - \sigma; \bar{x} + \sigma)$?
 b) Czy któryś uczeń otrzymał wynik spoza przedziału $(\bar{x} - 3\sigma; \bar{x} + 3\sigma)$?
7. Rozpatrzmy dane: $x_1, x_2, \dots, x_n$ o średniej arytmetycznej $\bar{x}$, medianie M , dominancie D i odchyleniu standardowym σ . Wyznacz średnią arytmetyczną, medianę, dominantę i odchylenie standardowe danych:
- a) $x_1 + 2, x_2 + 2, \dots, x_n + 2$, b) $2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n$.

Powtórzenie

8. Grupę dziesięciorga uczniów zapytano o to, ile minut każdy z nich jedzie do szkoły. Dziewczęta podały odpowiedzi: 60, 30, 20, 10, natomiast chłopcy: 30, 35, 20, 35, 25, 35. Oblicz średni czas dojazdu oraz wariancję i odchylenie standardowe dla:
- a) grupy dziewcząt,
 b) grupy chłopców,
 c) całej dziesięcioosobowej grupy.
9. Wykonano serię 60 rzutów kostką. Na diagramie przedstawiono otrzymane wyniki. Oblicz ich wariancję i odchylenie standardowe.



Korelacja

O dodatniej korelacji między dwiema zmiennymi w statystyce mówimy, gdy wzrost jednej z nich powiązany jest ze wzrostem drugiej.

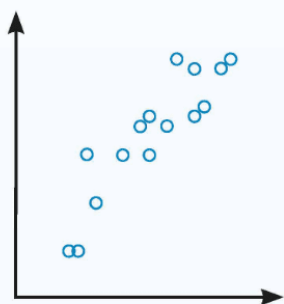
Na przykład zbierając dane dotyczące czasu spędzonego na bieganiu i liczby spalonych kalorii, możemy oczekiwać dodatniej korelacji tych danych.

Aby zmierzyć korelację między zmiennymi x i y na podstawie par danych: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, których średnie arytmetyczne wynoszą odpowiednio $\bar{x}$ i $\bar{y}$, oblicza się współczynnik korelacji r Pearsona [czyt. pirsona]:

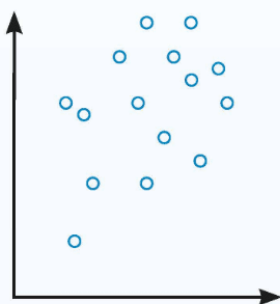
$$r = \frac{(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \dots + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})}{\sqrt{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{(y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \dots + (y_n - \bar{y})^2}}$$

Wartość tego współczynnika dla korelacji dodatnich jest liczbą z przedziału $(0; 1)$.

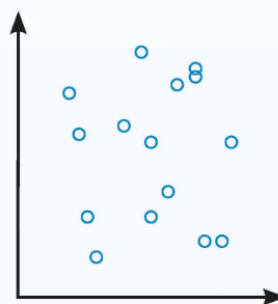
Poniższe wykresy przedstawiają zestawy danych o silnej, słabej i zerowej korelacji.



silna korelacja dodatnia,
 $r = 0,9$



słaba korelacja dodatnia,
 $r = 0,4$



korelacja zerowa,
 $r = 0$

- 1 W tabeli zestawiono informacje o wzroście (x , w cm) i masie ciała (y , w kg) 10 osób. Oblicz współczynnik korelacji dla tych danych.

x	167	169	172	174	175	176	177	178	180	184
y	69	67	74	70	70	74	78	76	82	80



Inne miary rozrzutu danych

Miarą rozrzutu danych jest również **rozstęp**, czyli różnica między największą i najmniejszą z danych liczb.

1. W poniższej tabeli podano wyniki pomiarów temperatury powietrza (w °C) przeprowadzonych w ciągu czterech kolejnych dni listopada.

Dzień \ Godzina	6	8	10	12	14	16	18	20
13 listopada	−4	−2	−1	0	3	5	4	3
14 listopada	−1	0	1	3	5	5	2	1
15 listopada	2	3	6	9	11	10	9	6
16 listopada	4	6	8	10	10	8	6	4

Oblicz rozstęp i odchylenie standardowe:

- a) wyników uzyskanych każdego dnia,
 - b) wszystkich wyników uzyskanych w ciągu czterech dni.
2. Zbierz dane dotyczące wzrostu uczniów w twojej klasie. Oblicz rozstęp i odchylenie standardowe tych danych.

Jako miary rozrzutu danych używa się też odchylenia przeciętnego.

Odchyleniem przeciętnym (bezwzględnym) liczb: $x_1, x_2, \dots, x_n$ o średniej arytmetycznej $\bar{x}$ nazywamy liczbę określoną za pomocą wzoru:

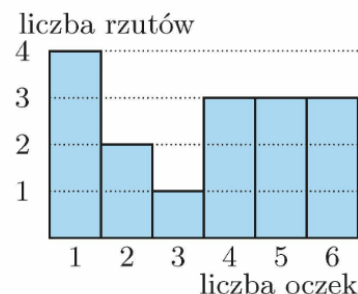
$$d = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

Odchylenia przeciętnego używał Pierre Simon de Laplace [czyt. pier simą de laplas] (1749–1827).

3. Sprawdź, czy odchylenie przeciętne dla podanych liczb jest mniejsze, równe czy większe od odchylenia standardowego.

a) 5, 10 b) 2, 4, 6, 12 c) 2, 4, 6, 8, 15

4. Na diagramie obok przedstawiono, ile razy wypadły poszczególne liczby oczek podczas serii rzutów kostką. Oblicz średnią arytmetyczną, odchylenie standardowe i odchylenie przeciętne tych danych.



4.4. Średnia ważona

Przykład 1

Podczas egzaminu z języka obcego wypowiedź studenta oceniano w dwóch kategoriach: x_1 – ocena za umiejętność komunikacji, x_2 – ocena za poprawność gramatyczną. Ostateczną ocenę z egzaminu ustalano, korzystając ze wzoru:

$$\frac{3x_1 + x_2}{3 + 1}$$

W ten sposób zwiększono znaczenie (wagę) oceny za umiejętność komunikacji w stosunku do oceny za poprawność gramatyczną. W tabeli podano oceny, które otrzymali Agata, Marek i Tomek.

	x_1	x_2	$\frac{3x_1 + x_2}{4}$	Ocena z egzaminu
Agata	5	3	$\frac{3 \cdot 5 + 3}{4} = \frac{18}{4}$	4,5
Marek	6	2	$\frac{3 \cdot 6 + 2}{4} = \frac{20}{4}$	5,0
Tomek	3	5	$\frac{3 \cdot 3 + 5}{4} = \frac{14}{4}$	3,5

W powyższym przykładzie obliczyliśmy średnią ważoną.

Definicja

Średnią ważoną liczb: $x_1, x_2, \dots, x_k$ z odpowiadającymi im wagami: $n_1, n_2, \dots, n_k$, będącymi liczbami dodatnimi, określamy wzorem:

$$\bar{x}_w = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}$$

Ćwiczenie 1

Oblicz średnią ważoną liczb $x_1 = 4$ i $x_2 = 6$ z podanymi wagami.

- a) $n_1 = 3, n_2 = 1$ b) $n_1 = 1, n_2 = 1$ c) $n_1 = 0,5, n_2 = 0,5$

Zauważ, że jeśli wszystkie wagi są równe, to średnia ważona liczb jest równa ich średniej arytmetycznej.

Ćwiczenie 2

Oblicz średnią ważoną liczb z podanymi wagami.

a)

Liczba	6	9	12	8
Waga	2	1	3	4

b)

Liczba	7	3	4	5
Waga	0,2	0,3	0,5	0,4

Ćwiczenie 3

Uczestnikom kursu języka angielskiego wystawiono oceny za cztery umiejętności: x_1 – za rozumienie ze słuchu, x_2 – za rozumienie tekstu pisanego, x_3 – za wypowiedzi pisemne, x_4 – za wypowiedzi ustne. Aby wystawić ocenę końcową, postanowiono obliczyć średnią ważoną z następującymi wagami: $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 4$, $n_4 = 3$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	Ocena końcowa
Asia	4	5	3	4	3,8
Basia	6	5	2	4	?
Kasia	2	6	5	4	?

- a) Oblicz końcowe oceny Basi i Kasi.
- b) Czy gdyby przyjęto $n_1 = 4$, a pozostałe wagi zostawiono bez zmian, to Basia miałaby wyższą ocenę końcową od swoich koleżanek?

Przykład 2

Oblicz średnią arytmetyczną liczb:

2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 9, 9, 9

Sprawdzamy, ile razy wystąpiła każda z liczb 2, 7, 9, a następnie obliczamy średnią arytmetyczną:

Liczba x_i	2	7	9
Liczba wystąpień n_i	12	5	3

$$\frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3}{n_1 + n_2 + n_3} = \frac{12 \cdot 2 + 5 \cdot 7 + 3 \cdot 9}{20} = \frac{86}{20} = 4,3$$

Zauważ, że średnia arytmetyczna podanego zestawu danych jest średnią ważoną liczb 2, 7, 9 z wagami równymi liczbie wystąpień tych liczb.

Ćwiczenie 4

W pewnej grupie studentów zebrano dane dotyczące wysokości otrzymywanego stypendium i przedstawiono je w tabeli.

x_i – wysokość stypendium [zł]	0	300	600	800
n_i – liczba studentów	20	10	15	5

- a) Oblicz średnią wysokość stypendium przypadającą na jednego studenta.
- b) Studentom, którzy do tej pory nie otrzymywali stypendium, postanowiono wypłacać je w wysokości 250 zł. Ile obecnie wyniesie średnia wysokość stypendium?

Zadania

1. Konkurs składa się z czterech etapów ocenianych w skali od 0 do 10 punktów. W tabeli podano liczby punktów, które zdobyli finaliści. Ostateczny wynik jest średnią ważoną. Który zawodnik wygrał konkurs?

Etap	I	II	III	IV
Waga	0,2	0,8	0,4	0,6
Adam	10	5	8	7
Marek	5	8	6	7
Piotr	9	4	10	8

2. Dane są liczby x_1, x_2, x_3 i x_4 . Sprawdź, czy w przykładach A i B średnia ważona jest taka sama.

A:

Liczba	x_1	x_2	x_3	x_4
Waga	3	2	5	2

B:

Liczba	x_1	x_2	x_3	x_4
Waga	0,6	0,4	1	0,4

3. Oblicz t , jeśli średnia ważona danych liczb jest równa 6,5.

a)

Liczba	t	4	8
Waga	0,3	0,3	0,9

b)

Liczba	15	9	3
Waga	2	3	t

4. Oblicz w , jeśli średnia ważona danych liczb jest równa 5.

a)

Liczba	3	9	w
Waga	0,7	0,3	0,1

b)

Liczba	10	8	6	2
Waga	w	3	5	8

5. Ocena semestralna z matematyki jest średnią ważoną ocen z wagami podanymi w tabeli. Tomek otrzymał następujące oceny:

- prace domowe: 1, 1, 1,
- kartkówki: 3, 1, 2,
- klasówki: 3, 6, 6.

Dla jakiej wartości n średnia ważona tych ocen jest równa: a) 3, b) 4?

Kategoria	Waga
praca domowa	1
kartkówka	2
klasówka	n

Powtórzenie

6. Oblicz średnią ważoną liczb z podanymi wagami.

a)

Liczba	11	12	13
Waga	0,1	0,3	0,6

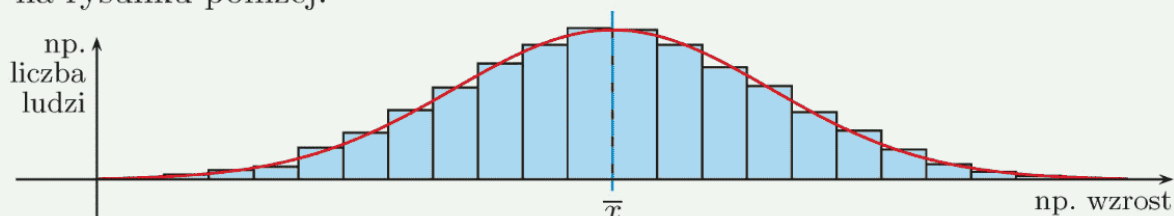
b)

Liczba	3	5	8	11
Waga	0,8	0,1	0,4	0,3

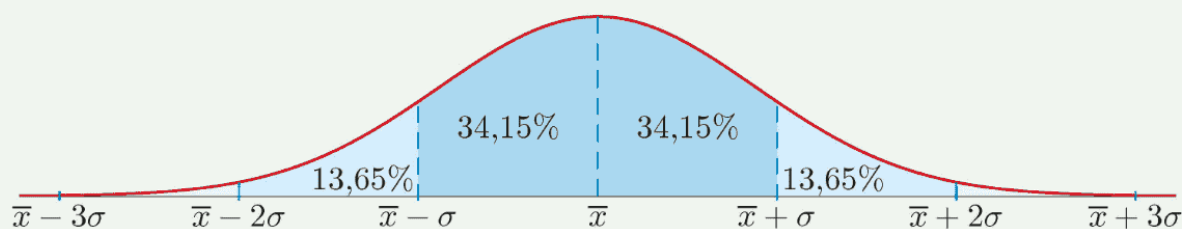
4.5. Zagadnienia uzupełniające

Rozkład normalny

Przy analizie wielu zjawisk, gdy mamy do dyspozycji dużą liczbę danych, diagram, za pomocą którego je porządkujemy, często ma taki kształt jak na rysunku poniżej:



Zdarza się to m.in. wówczas, gdy porządkujemy takie dane, jak wzrost i waga ludzi czy długość liści określonego drzewa. Taki rozkład danych nosi nazwę **rozkładu normalnego**. Krzywa (zaznaczona na rysunku kolorem czerwonym) jest nazywana **krzywą Gaussa**. Jest ona symetryczna względem prostej pionowej poprowadzonej przez średnią arytmetyczną danych. Jeśli rozkład danych jest rozkładem normalnym, to około 68,3% danych różni się od średniej o mniej niż odchylenie standardowe σ , a około 95,6% danych różni się od średniej o mniej niż 2σ . **Reguła trzech sigma** mówi, że do przedziału $(\bar{x} - 3\sigma; \bar{x} + 3\sigma)$ należy około 99,7% danych.



1. Przyjmijmy, że wyniki testu IQ przeprowadzonego w grupie 500 osób mają rozkład normalny ze średnią $\bar{x} = 100$ i odchyleniem standardowym $\sigma = 15$. Oszacuj, ile osób z tej grupy uzyskało wynik testu:
a) między 85 a 115, b) większy od 115, c) większy od 130.
2. Zebrano dane dotyczące wzrostu 200 uczniów liceum sportowego. Mają one rozkład normalny o średniej $\bar{x} = 177$ cm i odchyleniu standardowym $\sigma = 6$ cm. Oszacuj, ilu uczniów ma wzrost powyżej 171 cm.
3. Żarówki produkowane przez pewną firmę przepalają się średnio po 2000 godzin. Przyjmując, że zebrane dane mają rozkład normalny, oszacuj, ile żarówek z partii liczącej 20 000 sztuk przepali się przed upływem 1400 godzin, a ile przed upływem 1100 godzin, jeżeli odchylenie standardowe $\sigma = 300$ godzin.



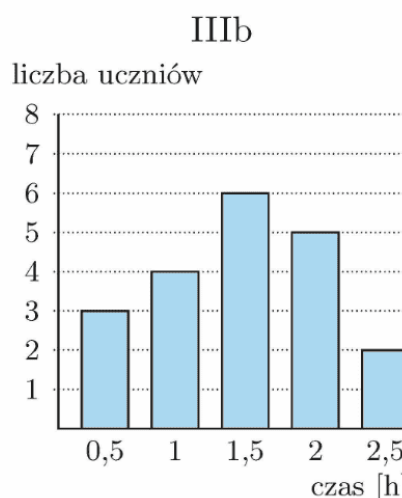
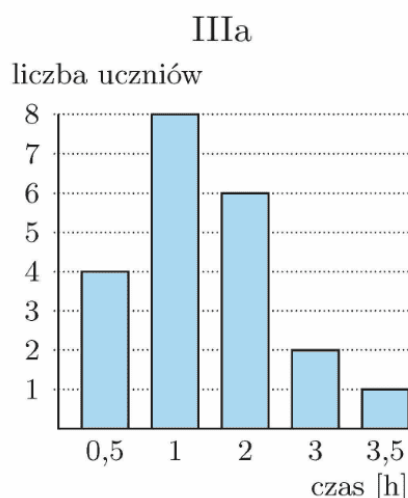
Zestawy powtórzeniowe

■ Zestaw I

1. Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę danych liczb.
a) 5, 4, 3, 2, 4, 3, 5, 4 c) 8, 8, 1, 3, 4, 6, 1, 6, 8
b) 9, 12, 9, 12, 7, 9, 94, 8, 20 d) 4, 16, 13, 5, 7, 16, 15, 4
2. Studenci matematyki zdawali egzamin w dwóch grupach. W tabeli podano liczby poszczególnych ocen, jakie otrzymali. Oblicz średnią ocen z egzaminu dla każdej grupy.

Ocena	2	3	3,5	4	4,5	5
Grupa I	3	6	5	3	3	2
Grupa II	0	3	4	6	4	3

3. W ciągu kolejnych siedmiu dni szkolnego rajdu rowerowego przebyto trasy długości: 26 km, 34 km, 40 km, 44 km, 45 km, 37 km, 26 km. Oblicz średnią długość trasy przebytej jednego dnia oraz odchylenie standardowe.
4. Wagi urodzeniowe sześciu noworodków urodzonych jednego dnia na oddziale pewnego szpitala były równe (w gramach): 3500, 3100, 2850, 3300, 3550, 4700. Oblicz średnią wagę noworodków oraz odchylenie standardowe.
5. W klasach IIIa oraz IIIb pewnej szkoły przeprowadzono ankietę. Każdy uczeń odpowiedział na pytanie: „Ile godzin dziennie oglądasz telewizję?”. Wyniki ankiety przedstawiono na poniższych diagramach. Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę zebranych danych dla każdej klasy oraz dla obu klas razem.



6. Oblicz średnią ważoną liczb z podanymi wagami.

a)

Liczba	2	9	6	8
Waga	5	1	2	3

b)

Liczba	5	10	12	20
Waga	0,1	1,1	0,3	0,5

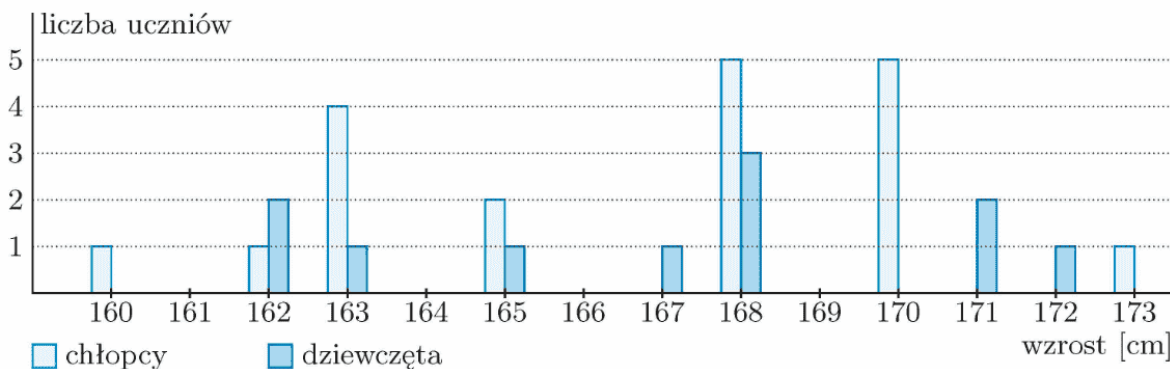
7. Ocena roczna jest średnią ważoną (zaokrągloną do liczby całkowitej) ocen: za pierwszy semestr z wagą 0,4 i za drugi semestr z wagą 0,6. Jakie oceny roczne otrzymali uczniowie, których oceny semestralne podano w tabeli?

Uczeń	A	B	C	D	E
I semestr	5	6	3	2	5
II semestr	6	5	5	5	2

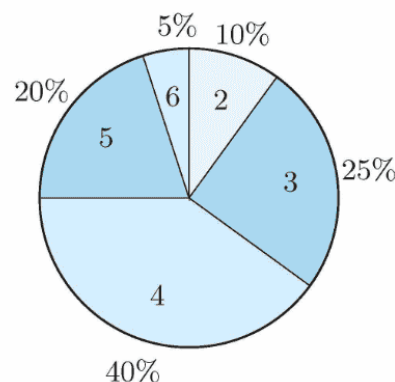
Zestaw II

- Średnia arytmetyczna liczb: a, b, c, d jest równa 8. Które z poniższych zdań są prawdziwe?
 - Średnia arytmetyczna liczb: $a, b, c, d, 0$ jest równa 8.
 - Średnia arytmetyczna liczb: $a, b, c, d, 13$ jest równa 9.
 - Średnia arytmetyczna liczb: a, a, b, b, c, c, d, d jest równa 16.

2. Na poniższym diagramie przedstawiono dane dotyczące wzrostu dziewcząt i chłopców w pewnej klasie liceum.

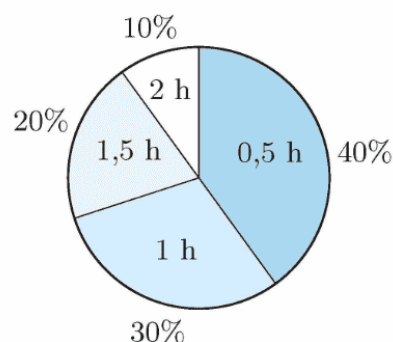


- Ile dziewcząt ma wzrost większy niż średni wzrost w grupie dziewcząt?
 - Ilu chłopców ma wzrost większy niż średni wzrost wszystkich uczniów w klasie?
3. Na diagramie kołowym podano procentowy rozkład ocen semestralnych z matematyki w pewnej szkole. Oblicz średnią ocen z matematyki w tej szkole. Ile wynosi odchylenie standardowe przedstawionych danych?





4. Grupie uczniów zadano pytanie: „Ile godzin dziennie poświęcasz na czytanie książek?”. Wyniki ankiety przedstawiono na zamieszczonym obok diagramie. Oblicz wariancję i odchylenie standardowe tych wyników.



5. a) Średnia arytmetyczna liczb: 2, 1, 5, a , 4, 1 jest równa ich wariancji. Oblicz a .
b) Średnia arytmetyczna liczb: 7, 3, x , y , 8, 5, 6 jest równa 5, a odchylenie standardowe jest równe 2. Oblicz x i y , jeśli $x < y$.
6. Uczniów klasy IIIa podzielono na grupy według pierwszych liter nazwisk: grupa I – od A do K, grupa II – od L do P, grupa III – od R do Ż. Średnią ocen semestralnych z języka polskiego w każdej z grup przedstawiono w tabeli.

	Grupa I	Grupa II	Grupa III
Liczba uczniów	12	8	10
Średnia ocen w grupie	3,5	3,25	4,3

Troje uczniów w grupie I otrzymało na koniec semestru ocenę niedostateczną. O ile byłaby wyższa średnia ocen w tej grupie, a o ile w całej klasie, gdyby uczniowie ci na koniec semestru otrzymali ocenę dopuszczającą, a oceny reszty uczniów pozostały bez zmian?

7. W pewnej kuracji stosuje się lek X lub lek Y . Lek X podano jednej grupie pacjentów, a lek Y – drugiej. Poniżej przedstawiono dane dotyczące skuteczności każdego z nich (z podziałem na płeć pacjentów). Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij. Który lek jest skuteczniejszy?

Lek X		Kobiety	Mężczyźni	Razem
Liczba osób		200	300	500
Lek skuteczny	liczba osób	30	?	?
	procent osób	15%	40%	?

Lek Y		Kobiety	Mężczyźni	Razem
Liczba osób		400	?	?
Lek skuteczny	liczba osób	80	45	?
	procent osób	?	?	25%

W przykładzie będziemy korzystać z poniższego wzoru na wariancję liczb: $x_1, x_2, \dots, x_n$, których średnia arytmetyczna jest równa $\bar{x}$:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2$$

Przykład

Grupę siedmiorga uczniów zapytano o to, ile czasu każdemu z nich zajmuje powrót ze szkoły do domu. Wyniki przedstawiono w poniższej tabeli. Oblicz odchylenie standardowe czasu powrotu dla całej siedmioosobowej grupy.

	Dziewczeta	Chłopcy
Liczba pytaných	4	3
Średni czas [min]	40	35
Odchylenie standardowe [min]	4	2

Niech x_1, x_2, x_3 i x_4 będą czasami powrotu dziewcząt ze szkoły do domu, a y_1, y_2 i y_3 – czasami powrotu chłopców. Oznaczmy średnie czasy dziewcząt i chłopców odpowiednio przez $\bar{x}_d$ i $\bar{y}_c$. Wówczas $\bar{x}_d = 40$ i $\bar{y}_c = 35$.

Obliczamy średni czas $\bar{x}$ powrotu ze szkoły do domu dla całej grupy uczniów (jest on średnią ważoną liczb $\bar{x}_d$ i $\bar{y}_c$):

$$\bar{x} = \frac{4 \cdot \bar{x}_d + 3 \cdot \bar{y}_c}{4 + 3} = \frac{4 \cdot 40 + 3 \cdot 35}{7} = \frac{265}{7} \approx 37,86$$

Wariancja dla czworga dziewcząt dana jest wzorem:

$$\sigma_d^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}{4} - (\bar{x}_d)^2$$

Zatem:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 4(\sigma_d^2 + (\bar{x}_d)^2) = 4(4^2 + 40^2) = 6464$$

Wariancja dla trzech chłopców dana jest wzorem:

$$\sigma_c^2 = \frac{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}{3} - (\bar{y}_c)^2$$

Zatem:

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 3(\sigma_c^2 + (\bar{y}_c)^2) = 3(2^2 + 35^2) = 3687$$

Obliczamy wariancję dla całej siedmioosobowej grupy:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}{7} - (\bar{x})^2 \approx \frac{6464 + 3687}{7} - (37,86)^2 \approx 16,76$$

Zatem odchylenie standardowe: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} \approx 4,09$ min

Odpowiedź: Odchylenie standardowe dla całej grupy wynosi 4,09 min.



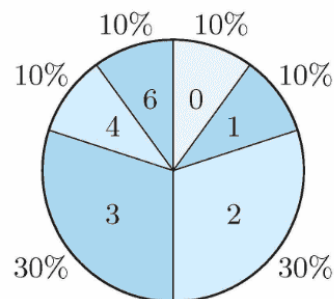
Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. W pewnej firmie jest zatrudnionych 10 osób. Ich miesięczne wynagrodzenia wynoszą: 2900 zł, 3100 zł, 3100 zł, 3240 zł, 3290 zł, 3300 zł, 3320 zł, 3750 zł, 5800 zł, 8000 zł. Ilu pracowników tej firmy ma wynagrodzenie wyższe od wynagrodzenia średniego?

A. 6 B. 4 C. 3 D. 2

2. Grupie 50 losowo wybranych osób w pewnym mieście zadano pytanie: „Ile godzin w tygodniu poświęcasz na uprawianie sportu?”. Wyniki ankiety przedstawiono na diagramie. O ile mediana otrzymanych danych jest niższa od ich średniej arytmetycznej?

A. 0,1 C. 0,3
B. 0,2 D. 0,4



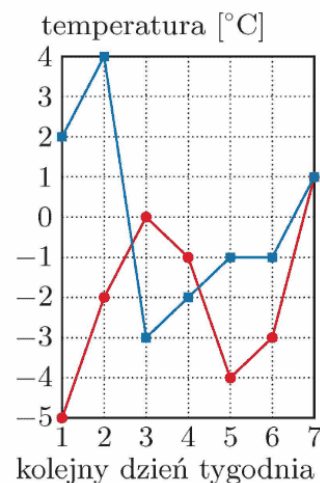
3. Liczby a, b, c, d ustawiono w kolejności rosnącej, a ich mediana jest równa 7. Jeśli $bc = 24$, to:

A. $(b - c)^2 = 0$, C. $(b - c)^2 = 100$,
B. $(b - c)^2 = 25$, D. $(b - c)^2 = 144$.

4. Rafał przez dwa tygodnie ferii, codziennie o godzinie 12, mierzył temperaturę powietrza. Wyniki pomiarów przedstawił na wykresie (kolorem niebieskim zaznaczył wyniki z pierwszego tygodnia, a kolorem czerwonym – z drugiego).

Niech $\bar{x}_1$ oznacza średnią temperaturę w pierwszym tygodniu, $\bar{x}_2$ – w drugim, a $\bar{x}_3$ – w obu tygodniach. Wówczas:

A. $\bar{x}_2 < \bar{x}_1 < \bar{x}_3$, C. $\bar{x}_1 < \bar{x}_3 < \bar{x}_2$,
B. $\bar{x}_3 < \bar{x}_1 < \bar{x}_2$, D. $\bar{x}_2 < \bar{x}_3 < \bar{x}_1$.



5. W tabeli podano liczby z dwoma zestawami wag. Niech $\bar{x}_1$ oznacza średnią tych liczb z wagami X , a $\bar{x}_2$ – ich średnią z wagami Y . Wówczas $\bar{x}_2 - \bar{x}_1$ jest równe:

A. 6, B. 4, C. 2, D. 0.

Liczba	10	15	20
Waga X	0,5	0,4	0,1
Waga Y	0,3	1,2	1,5

**Zadania krótkiej odpowiedzi****Zadanie 1 (2 pkt)**

Karolina ma z chemii następujące oceny: 5, 2, 3, x , 5, $x + 1$, 5, 3, 2. Oblicz x , jeśli wiadomo, że średnia ocen wynosi 4. Wyznacz ich medianę i dominantę.

Zadanie 2 (2 pkt)

Wynik egzaminu jest średnią ważoną punktów uzyskanych z testów: z matematyki z wagą 0,5, z geografii z wagą 0,2 oraz z języka obcego z wagą 0,3. Ile może wynosić wynik z matematyki kandydata X , jeśli zdał on egzamin lepiej od kandydata Y , ale gorzej od kandydata Z ?

Kandydat	X	Y	Z
Matematyka	x	40	60
Geografia	40	50	40
Język obcy	60	60	50

Zadania rozszerzonej odpowiedzi**Zadanie 3 (4 pkt)**

Uczniowie pisali sprawdzian w trzech grupach A , B i C , liczących odpowiednio 8, 10 i 6 osób. Średnia ocen w grupach A i B łącznie wyniosła 4, a w grupach B i C łącznie wyniosła 3. Oblicz średnią ocen dla każdej z grup, jeśli średnia całej klasy była równa 3,5.

Zadanie 4 (4 pkt)

Pewna firma ma trzy zakłady produkcyjne. W tabeli podano informacje o średnich zarobkach w tych zakładach.

	Zakład I	Zakład II	Zakład III
Liczba pracowników	20	15	15
Średnie wynagrodzenie	4000 zł	3600 zł	4400 zł
Odchylenie standardowe	400 zł	500 zł	σ_3

Oblicz odchylenie standardowe zarobków w zakładzie III, jeśli odchylenie standardowe zarobków wszystkich pracowników tych zakładów jest równe 600 zł.

Zadanie 5 (4 pkt)

W fokarium zważono wszystkie foki: osiem samców i cztery samice. Średnia waga samców była równa 250 kg z odchyleniem standardowym 50 kg. Średnia waga samic była równa 150 kg z odchyleniem standardowym 30 kg. Do fokarium przybyły dwie samice ważące po 170 kg. Oblicz średnią wagę oraz odchylenie standardowe wag wszystkich fok przebywających teraz w fokarium.

Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań

Potęga o wykładniku całkowitym

- a) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024
b) 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729
- a) 81 b) -32 c) -216 d) 1
- a) $\frac{1}{16}$ b) $\frac{1}{625}$ c) $\frac{1}{216}$ d) $\frac{1}{729}$
e) $-\frac{1}{4}$ f) $\frac{1}{25}$ g) $\frac{1}{16}$ h) $-\frac{1}{243}$
- a) $\frac{1}{64}$ b) $\frac{16}{81}$ c) $11\frac{25}{64}$ d) 1
e) $1\frac{4}{5}$ f) $3\frac{3}{8}$ g) $\frac{64}{125}$ h) $\frac{81}{10\,000}$
- a) x b) y c) y d) x
- a) 2^{10} b) 2^8 c) 2^4 d) 2^7 e) 2^2
f) 2^{10} g) 2^2 h) 2^7 i) 2^{13} j) 2^{-16}
- a) 2^9 b) 2^{22} c) 2^{-3} d) 2^6 e) 2^0 f) 2^6
- np.: a) 3^{12} b) 5^{16} c) 10^2
d) 6^{-6} e) 2^{-31} f) $(\frac{3}{2})^{-5}$

1.1. Potęga o wykładniku wymiernym – powtórzenie

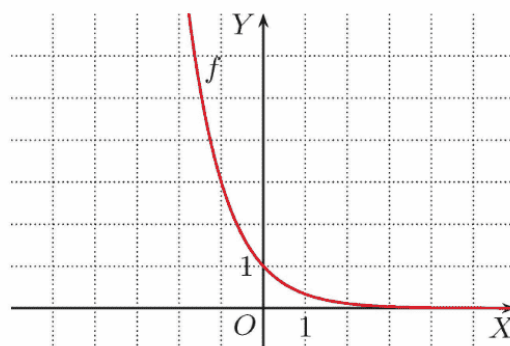
- C** 1. a) 9 b) 10 c) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{1}{11}$ e) 13 f) 21
g) 2 h) 3 i) 3 j) 2 k) 4 l) 2
2. a) 4 b) 16 c) 59 049 d) $\frac{1}{5}$
e) $\frac{1}{16}$ f) 729
3. a) 4 b) $\frac{1}{2}$ c) 3 d) 5 e) 3
f) 2 g) 36 h) $\sqrt[6]{7}$
- Z** 1. a) $5^{\frac{1}{2}}$ b) $5^{\frac{1}{3}}$ c) $5^{\frac{3}{2}}$ d) $5^{\frac{2}{3}}$ e) $5^{\frac{3}{4}}$
2. a) $3^{\frac{1}{4}}$ b) $3^{\frac{4}{3}}$ c) $3^{-\frac{1}{5}}$ d) $3^{-\frac{3}{2}}$ e) $3^{\frac{5}{4}}$
3. a) $5^{\frac{1}{8}}$ b) $5^{\frac{3}{2}}$ c) $3^{\frac{1}{12}}$ d) $3^{\frac{5}{6}}$
e) 2^{-1} f) $2^{\frac{3}{2}}$ g) $3^{\frac{7}{8}}$ h) $3^{\frac{5}{3}}$
4. a) 243 b) 625 c) 8 d) $\frac{1}{4}$
e) $\frac{1}{81}$ f) $\frac{1}{5}$ g) 100 000 h) $\frac{\sqrt{3}}{9}$
i) $\frac{1}{12}$ j) $\frac{1}{3}$ k) 16 l) 25
5. a) 0,027 b) 2 c) 0,04 d) $\frac{1000}{27}$
e) 8 f) 0,0016 g) 1 h) 64
6. np.: a) 3^{12} b) 5^{16} c) 10^2 d) 6^{-6}
e) 2^{-31} f) 1^1
7. a) 1024 b) 9 c) 16 d) 5
8. np.: a) $7^{\frac{5}{6}}$ b) $3^{\frac{13}{4}}$ c) $(\frac{2}{3})^{\frac{1}{6}}$ d) $5^{-\frac{5}{3}}$
e) $3^{\frac{10}{3}}$ f) 5^{-3}

1.2. Potęga o wykładniku rzeczywistym

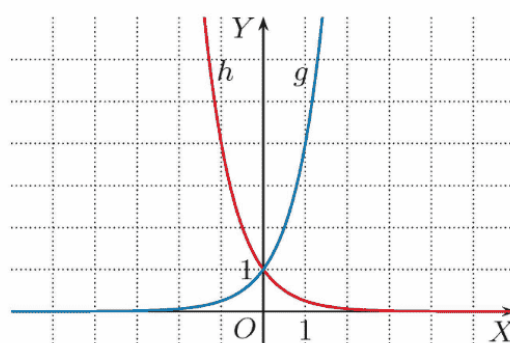
- C** 1. $5^{\sqrt{3}} \approx 16,2425$, $5^{\sqrt{5}} \approx 36,5548$
2. a) $3^\pi \approx 31,5443$ b) $5^\pi \approx 156,9925$
c) $\pi^\pi \approx 36,4622$
3. a) 3. b) 5. c) 4. d) 1.
4. a) 125 b) 81 c) 25 d) 32 e) 1
f) 3 g) 32 h) 6
- Z** 1. a) $3^{5-\sqrt{2}}$ b) $3^{1+\sqrt{2}}$ c) 3^4 d) $3^{\sqrt{3}-3}$
e) $3^{\sqrt{7}}$ f) 3^π
2. a) 36 b) 125 c) $\frac{125}{27}$ d) 1 e) 1
f) 343 g) 3 h) 64 i) 216
3. a) $2^{\sqrt{7}+4}$ b) $2^{\sqrt{3}+\frac{1}{2}}$ c) $3^{\sqrt{5}-3}$
d) $3^{3-2\sqrt{3}}$ e) $3^{-6\pi}$ f) $7^{-4\sqrt{2}-2\pi}$
4. a) nie b) tak c) nie d) nie
5. a) y, z b) x, z c) y, z
6. a) $5^{\sqrt{3}}$ b) $4^{\sqrt{2}}$ c) $7^{\sqrt{5}}$ d) $9^{\sqrt{7}}$ e) $9^{\sqrt{5}}$ f) $16^{\sqrt{3}}$
7. a) 125 b) 16 c) 64 d) 625 e) 1 f) 49

1.3. Funkcja wykładnicza

- C** 1. (0, 1)
2. a) zielony – f , czerwony – g ,
niebieski – h
b) $a = \frac{81}{16}$, $b = \frac{4}{9}$, $c = 3$ c) B, C
3. a)



b)



4. zielony – f , niebieski – g , czerwony – h , brązowy – k

5. a) $5^{0,3} < 5^{0,33} < 5^{\frac{1}{3}} < 5^{\frac{1}{2}}$
 b) $7^{\sqrt{5}} < 7^{3,1} < 7^\pi < 7^{3,2}$
 c) $0,6^{\frac{1}{2}} < 0,6^{\frac{3}{7}} < 0,6^{\frac{3}{8}} < 0,6^{0,35} < 0,6^{\frac{1}{3}}$
 d) $(\frac{1}{3})^2 < (\frac{1}{3})^{\sqrt{3}} < (\frac{1}{3})^{\frac{\pi}{2}} < (\frac{1}{3})^{1,5} < (\frac{1}{3})^{\sqrt{2}}$

- Z** 1. a) $f(-4) = \frac{1}{81}$, $f(-3) = \frac{1}{27}$,
 $f(-\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{3}$, $f(3) = 27$,
 $f(4) = 81$
 b) $f(-4) = \frac{1}{256}$, $f(-3) = \frac{1}{64}$, $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$,
 $f(\frac{1}{2}) = 2$, $f(3) = 64$, $f(4) = 256$
 c) $f(-4) = 256$, $f(-3) = 64$, $f(-\frac{1}{2}) = 2$,
 $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $f(3) = \frac{1}{64}$, $f(4) = \frac{1}{256}$
 d) $f(-4) = 16$, $f(-3) = 8$, $f(-\frac{1}{2}) = \sqrt{2}$,
 $f(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f(3) = \frac{1}{8}$, $f(4) = \frac{1}{16}$

2. a) tak b) tak c) nie d) tak

3. a) nie b) tak c) nie d) tak

4. a) $f(x) = (\frac{1}{3})^x$
 b) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$
 c) $f(x) = 4^x$
 d) $f(x) = (\frac{3}{2})^x$

5. a) $f(x) = g(x)$ dla $x = 0$
 b) $f(x) = g(x)$ dla $x = 0$

6. a) $2^{\frac{7}{5}} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{\frac{3}{2}} < 2^{\sqrt{3}}$
 b) $(\frac{3}{4})^6 < (\frac{3}{4})^{\sqrt{26}} < (\frac{3}{4})^5 < (\frac{3}{4})^{2\sqrt{6}}$
 c) $\pi^{\frac{1}{\pi}} < \sqrt[3]{\pi} < \pi^{\frac{3}{7}} < \pi^{\frac{1}{2}}$
 d) $9^{-2} < 9^{-\sqrt{\pi}} < 9^{-\sqrt{3}} < 9^0$

1.4. Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej

- C** 1. a) $g(D) = (-2; \infty)$,
 asymptota: $y = -2$
 b) $g(D) = (1; \infty)$, asymptota: $y = 1$
 c) $g(D) = (2; \infty)$, asymptota: $y = 2$
2. a) $a = 3$ b) $a = -6$ c) $a = -0,25$
3. a) $x = 1$ b) $x = -2$ c) $x = 2$
4. a) $a = 2$ b) $b = 1$
5. a) przesunąć o 1 jednostkę w prawo
 b) przesunąć o 3 jednostki w prawo
 c) przesunąć o 1 jednostkę w lewo
 d) przesunąć o $\frac{1}{2}$ jednostki w lewo

6. a), b) funkcja malejąca

c), d) funkcja rosnąca

7. a) $A - h$, $B - g$, $C - f$

b) $h(x) > -1$ dla $x \in (-\infty; 1)$,

$g(x) > -1$ dla $x \in (-\infty; 1)$,

$f(x) > -1$ dla $x \in (-\infty; -1)$

- Z** 1. a) $f(D) = (2; \infty)$, brak miejsc zerowych,
 asymptota: $y = 2$

b), c) $f(D) = (-1; \infty)$,

$f(x) = 0$ dla $x = 0$, asymptota: $y = -1$

d) $f(D) = (1; \infty)$, brak miejsc zerowych,
 asymptota: $y = 1$

e) $f(D) = (-4; \infty)$, $f(x) = 0$ dla
 $x = -1$, asymptota: $y = -4$

f) $f(D) = (-3; \infty)$, $f(x) = 0$ dla
 $x = -1$, asymptota: $y = -3$

2. $a = -3$

3. a) $a = -4$ b) $a = 3$ c) $a = -16$

4. a) przesunąć o 4 jednostki w prawo
 b) przesunąć o 10 jednostek w prawo
 c) przesunąć o 3 jednostki w lewo
 d) przesunąć o $\frac{1}{2}$ jednostki w lewo

5. a) $x \in \langle 1; \infty \rangle$
 b) $x \in \langle -3; \infty \rangle$
 c) $x \in \langle -2; \infty \rangle$
 d) $x \in \langle 3; \infty \rangle$
 e) $x \in (-\infty; 3)$
 f) $x \in (-\infty; -2)$

6. a) $x \in (-\infty; 2)$
 b) $x \in (-\infty; -1)$
 c) $x \in \langle -3; \infty \rangle$

7. a) $f(x) = 0$ dla $x = 2$, $f(D_f) = (-4; \infty)$
 b) brak miejsc zerowych, $f(D_f) = (1; \infty)$
 c) brak miejsc zerowych, $f(D_f) = (0; \infty)$
 d) brak miejsc zerowych, $f(D_f) = (0; \infty)$
 e) $f(x) = 0$ dla $x = 1$, $f(D_f) = (-\infty; 2)$
 f) $f(x) = 0$ dla $x = 0$, $f(D_f) = (-\infty; 1)$

8. a) $y = -3$ b) $y = 0$
 c) $y = 1$

9. a) $f(D_f) = (-3; \infty)$, $g(D_g) = (-\infty; 3)$
 b) $f(D_f) = (1; \infty)$, $g(D_g) = (-\infty; -1)$
 c) $f(D_f) = (-2; \infty)$, $g(D_g) = (-\infty; 2)$

1.5. Logarytm

- C** 1. a) 5 b) 1 c) 0 d) -2 e) -6
f) $\frac{1}{2}$ g) $\frac{3}{2}$ h) $\frac{2}{3}$
2. a) 4 b) -2 c) -3 d) $-\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{2}$ f) $-\frac{3}{2}$
g) $\frac{3}{2}$ h) 3 i) $-\frac{1}{2}$ j) -4 k) $\frac{2}{3}$ l) 3
4. a) 100 b) 15 c) 10 d) -3
e) 3 f) 7 g) 10 h) 1
5. a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $\frac{1}{3}$ d) -1 e) $-\frac{1}{2}$ f) -1
- Z** 1. a) 6 b) 9 c) -5 d) -10 e) -3 f) $\frac{1}{2}$
g) $\frac{3}{2}$ h) -5
2. a) $b = 2^{\frac{5}{2}}$, $\log_2 b = \frac{5}{2}$
b) $b = 2^{\frac{13}{3}}$, $\log_2 b = \frac{13}{3}$
c) $b = 2^{-\frac{5}{2}}$, $\log_2 b = -\frac{5}{2}$
d) $b = 2^{-\frac{14}{3}}$, $\log_2 b = -\frac{14}{3}$
3. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $-\frac{1}{4}$ d) $\frac{3}{4}$
e) 4 f) 10 g) $\frac{3}{2}$ h) $\frac{7}{3}$
4. a) -1 b) -6 c) 7 d) -2 e) -3
f) 3 g) $-\frac{1}{2}$ h) $-\frac{3}{2}$
5. a) 9 b) 5 c) $\frac{1}{9}$ d) 3 e) 81 f) $\frac{1}{16}$
g) 3 h) 4
6. a) 6 b) -8 c) $-\frac{35}{4}$
7. a) $\frac{1}{2}$ b) 11 c) $-\frac{5}{3}$ d) 0 e) 2 f) 2
8. a) $a = 5$ b) $a = \frac{1}{2}$ c) $a = 4$ d) $a = \frac{1}{4}$
9. a) $b = 32$ b) $b = 2$ c) $b = 9$ d) $b = 1$
e) $b = 8$ f) $b = \frac{1}{8}$ g) $b = 27$ h) $b = \frac{4}{3}$
10. a) 1 b) -1 c) $-\frac{1}{2}$ d) 4 e) $-\frac{1}{2}$ f) $-\frac{1}{3}$
11. a) $x = \log_2 27$, $y = \log_3 27 \in \mathbf{Z}$
b) $x = \log_2 1000$, $y = \log_{10} 1000 \in \mathbf{Z}$
c) $x = \log_6 216 \in \mathbf{Z}$, $y = \log_8 216$
d) $x = \log_3 \frac{1}{3} \in \mathbf{Z}$, $y = \log_9 \frac{1}{3}$
12. a) $a = 8$ b) $a = 16\sqrt{2}$
c) $a = 1024$ d) $a = \frac{1}{4}$
13. a) $x = 3$ b) $x = 4$ c) $x = 6$
d) $x = -1$ e) $x = 5$ f) $x = 2$
g) $x = 2$ h) $x = -\frac{2}{3}$
14. a) dodatnia dla $x > 1$,
ujemna dla $0 < x < 1$,
b) dodatnia dla $0 < x < 1$,
ujemna dla $x > 1$
15. a) 7 b) 6 c) 3 d) -2 e) 4 f) -1
16. a) 0 b) -5 c) $1\frac{1}{2}$ d) $\frac{5}{6}$ e) 2 f) $3\frac{1}{2}$

17. a) $a = 2$ b) $a = 4$
c) $a = 16$ d) $a = 256$
e) $a = \frac{1}{16}$ f) $a = \frac{1}{4}$

1.6. Logarytm dziesiętny

- C** 1. a) 3 b) -1 c) 6 d) -4 e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{3}{2}$
2. a) 0,301 b) 0,1761 c) 0,2504 d) 0,3598
3. a) 2 b) 1,5 c) 1,01 d) 2,25
- Z** 1. a) 1 b) 0 c) 10 d) -5 e) $-\frac{5}{3}$
f) $-\frac{1}{2}$ g) $\frac{1}{6}$ h) 3 i) $-\frac{3}{2}$
2. a) 2 b) 1 c) $-\frac{1}{2}$ d) 4 e) $-\frac{1}{2}$ f) $-\frac{1}{3}$
3. a) y b) x c) y d) x e) y f) y
4. a) 3 b) 10,01 c) 3,48
5. a), d) całkowita f) niewymierna
b), c), e) wymierna, ale nie całkowita
6. a) 2 b) 0 c) -1 d) $-\frac{1}{2}$ e) 80 f) 3

1.7. Logarytm iloczynu i logarytm ilorazu

- C** 2. Wszystkie równości są prawdziwe.
3. a) 2 b) 2 c) -2
d) 0 e) 1 f) -3
4. a) $\log_3 45$ b) $\log_2 5$ c) $\log_3 \frac{9}{4}$
- Z** 1. a) 2 b) -3 c) 1 d) 2
2. a) 1,7 b) 2,7 c) -1,3 d) -0,7
3. a) 3,8 b) 4,8 c) 1,8 d) 0,8
4. a) 1,64 b) 2,64 c) -0,57 d) -0,22
5. a) $\log_2 30$ b) $\log_3 4$ c) $\log_4 12$
6. a) 2 b) 2 c) -1 d) 1 e) 1 f) 2
7. a) 1 b) 3 c) 2 d) 3 e) 1 f) -1

1.8. Logarytm potęgi

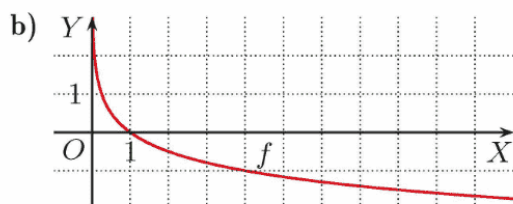
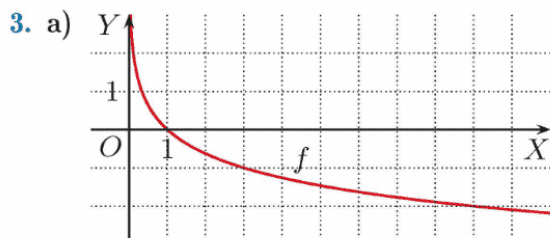
- C** 1. a) 2 b) -1 c) $\frac{1}{6}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) $\frac{5}{6}$
2. a) $\log_2 40$ b) $\log_3 \frac{16}{3}$ c) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{27}{2}$ d) $\log_3 \frac{9}{4}$
3. a) 1,26 b) 2,26 c) 4,15 d) 3,89
- Z** 1. a) 0,6 b) 1,2 c) -1,4 d) 3,2
2. a) 1,4 b) 1,8 c) -0,2
d) 0,4 e) 0,1 f) 1,3
4. a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) -5 d) $1\frac{1}{2}$
6. a) $2 + p$ b) $p - 2$ c) $2p - 2$ d) $4p + 2$
8. a) $a = 5$ b) $a = 100$ c) $a = 4$
d) $a = 5$ e) $a = 4$ f) $a = 3$

9. a) $x = 8$ b) $x = 9$ c) $x = 125$
 d) $x = 1\,000\,000$ e) $x = 2$ f) $x = 9$
 10. a) 0,96 b) 1,44 c) -0,04 d) -0,08

1.9. Funkcja logarytmiczna

Ć 1. (1, 0)

2. a) h b) f c) g



4. a) $f(x) > 0$ dla $x \in (1; \infty)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (0; 1)$
 b) $f(x) > 0$ dla $x \in (0; 1)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (1; \infty)$
 5. a) $x \in \langle 4; \infty \rangle$ b) $x \in (0; 4)$
 c) $x \in (8; \infty)$ d) $x \in (0; 8)$
 6. a) $x \in (3; \infty)$ b) $x \in (0; 3)$
 c) $x \in \langle \frac{1}{9}; \infty \rangle$ d) $x \in (9; \infty)$
 e) $x \in (0; 3)$ f) $x \in (\frac{1}{3}; \infty)$
 g) $x \in (\frac{1}{9}; \infty)$ h) $x \in (0; \frac{1}{9})$

Z 1. a), d) g b), c) f

2. a) $a = 3$ b) $a = 5$
 c) $a = \frac{1}{2}$ d) $a = \sqrt{2}$
 3. a) $\langle -1; 0 \rangle$ b) $\langle -3; 2 \rangle$
 c) $\langle -\frac{3}{2}; \frac{1}{2} \rangle$ d) $\langle -\frac{1}{3}; \frac{1}{6} \rangle$
 4. a) $x \in \langle \frac{1}{4}; \infty \rangle$ b) $x \in (0; \frac{1}{48})$
 c) $x \in (0; 4)$ d) $x \in (2; \infty)$
 5. a) $x \in \langle \frac{1}{4}; 2 \rangle$ b) $x \in (\frac{1}{8}; \frac{1}{2})$
 6. a) $x \in \langle \frac{1}{4}; 2 \rangle$ b) $x \in (\frac{1}{2}; 4)$
 7. a), c) malejąca b) rosnąca
 8. a) $m \in (\frac{1}{2}; \infty)$ b) $m \in (4; \infty)$
 c) $m \in (0; \infty)$
 9. a) $m \in (0; \frac{1}{3})$ b) $m \in (0; 2)$
 c) $m \in (-2; -1)$

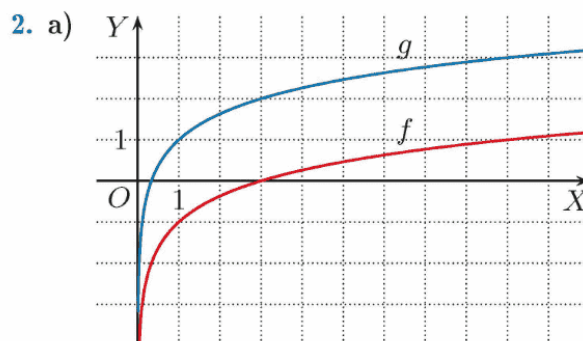
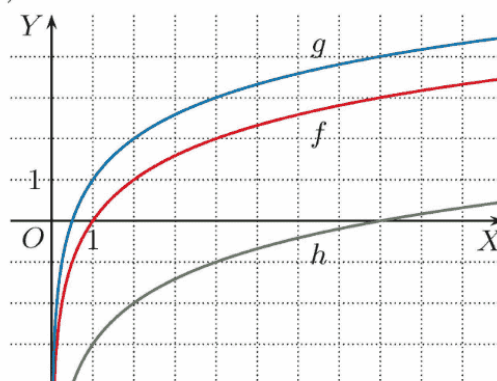
10. a) $x > 10$ b) $x > 100$
 c) $x > 1000$ d) $x > 10^6$
 11. a) $x \in \langle \frac{1}{10}; 10 \rangle$ b) $x \in \langle \frac{1}{10\,000}; 10\,000 \rangle$
 c) $x \in \langle \frac{1}{100}; 100 \rangle$ d) $x \in \langle \frac{1}{1000}; 1000 \rangle$
 12. a) $x \in \langle \frac{1}{4}; 4 \rangle$
 b) $x \in (0; \frac{1}{4}) \cup (4; \infty)$
 c) $x \in \langle \frac{1}{16}; 16 \rangle$
 d) $x \in (0; \frac{1}{16}) \cup \langle 16; \infty \rangle$
 13. a) $y < z < x$ b) $z < x < y$
 14. a) $(-\infty; 0)$ b) $\langle 1; \infty \rangle$
 c) $\langle -1; 3 \rangle$ d) $\langle -\frac{1}{2}; 10 \rangle$
 15. np.: (1, 0), (3, 2), (9, 4), (27, 6)
 a) $x \in (3; \infty)$ b) $x \in (0; 3)$
 c) $x \in (0; 9)$ d) $x \in \langle 9; \infty \rangle$

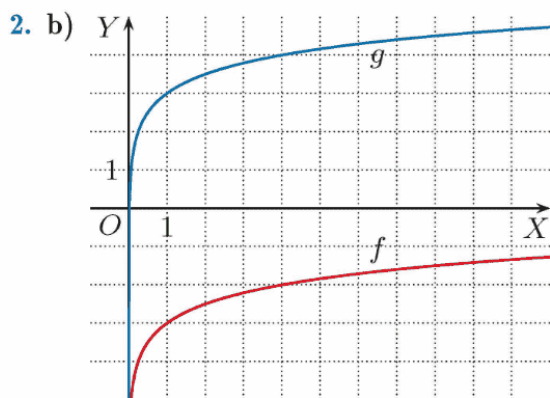
Skala logarytmiczna

1. o 3 dB

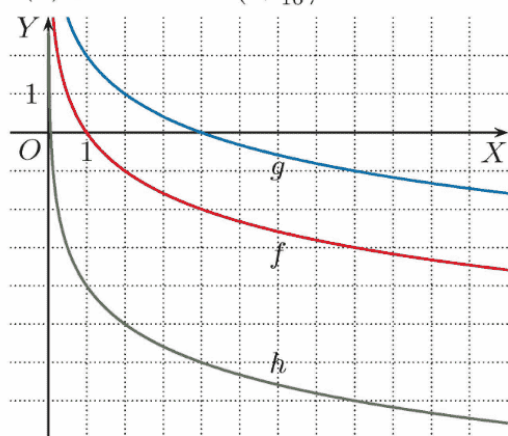
1.10. Przekształcenia wykresu funkcji logarytmicznej

Ć 1. $f(\frac{1}{2}) = -1$, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$, $f(4) = 2$,
 $f(8) = 3$, $g(\frac{1}{2}) = 0$, $g(1) = 1$, $g(2) = 2$,
 $g(4) = 3$, $g(8) = 4$, $h(\frac{1}{2}) = -4$,
 $h(1) = -3$, $h(2) = -2$, $h(4) = -1$,
 $h(8) = 0$





3. $f(x) \geq 0$ dla $x \in (0; 1)$,
 $g(x) \geq 0$ dla $x \in (0; 4)$,
 $h(x) \geq 0$ dla $x \in (0; \frac{1}{16})$



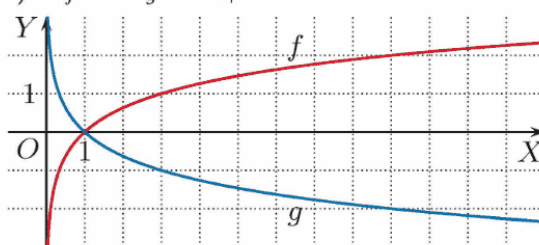
4. a) $a = 1$ b) $a = -2$ c) $a = -2$ d) $a = 1$

5. a) $D = (1; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = 2$,
 asymptota: $x = 1$
 b) $D = (3; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = 4$,
 asymptota: $x = 3$
 c) $D = (2; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = 3$,
 asymptota: $x = 2$
 d) $D = (4; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = 5$,
 asymptota: $x = 4$
 e) $D = (2; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = 3$,
 asymptota: $x = 2$
 f) $D = (1; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = 2$,
 asymptota: $x = 1$
6. a) $D = (-1; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = 0$,
 asymptota: $x = -1$, $f(x) \geq 1$ dla $x \geq 1$
 b) $D = (-2; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = -1$,
 asymptota: $x = -2$, $f(x) \geq 1$ dla $x \geq 0$
 c) $D = (-1; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = 0$,
 asymptota: $x = -1$,
 $f(x) \geq 1$ dla $x \in (-1; -\frac{1}{2})$

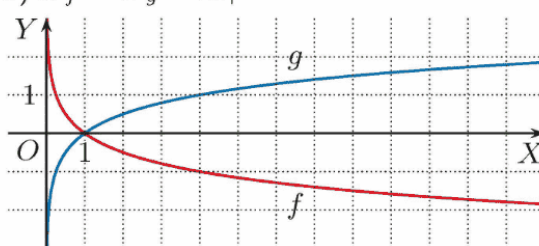
- d) $D = (-4; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = -3$,
 asymptota: $x = -4$,
 $f(x) \geq 1$ dla $x \in (-4; -3\frac{1}{2})$
 e) $D = (-2; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = -1$,
 asymptota: $x = -2$, $f(x) \geq 1$ dla $x \geq 1$
 f) $D = (-3; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = -2$,
 asymptota: $x = -3$,
 $f(x) \geq 1$ dla $x \in (-3; -2\frac{2}{3})$

7. a) $a = 6$ b) $a = 4$ c) $a = 1$

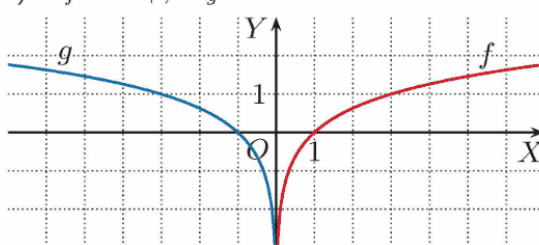
8. a) $D_f = D_g = \mathbf{R}_+$



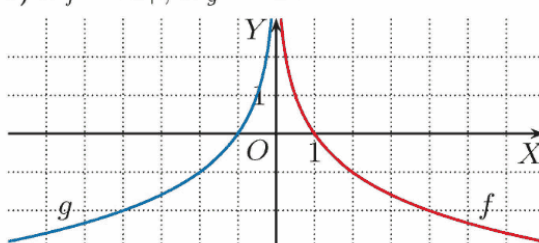
- b) $D_f = D_g = \mathbf{R}_+$



9. a) $D_f = \mathbf{R}_+$, $D_g = \mathbf{R}_-$



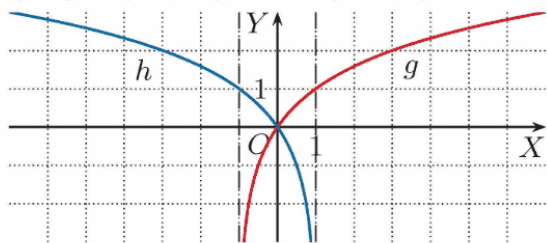
- b) $D_f = \mathbf{R}_+$, $D_g = \mathbf{R}_-$



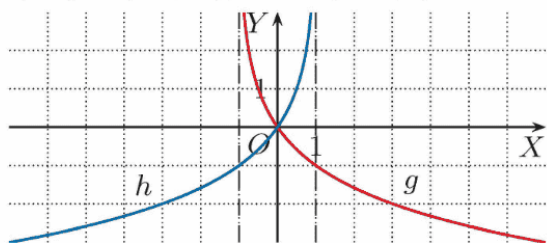
- [Z]** 1. a) 4 b) 2 c) $\frac{1}{3}$ d) 9 e) 16 f) 16

2. a) $D = (-3; \infty)$, asymptota: $x = -3$
 b) $D = (4; \infty)$, asymptota: $x = 4$
 c) $D = (1; \infty)$, asymptota: $x = 1$
 d), e) $D = (-2; \infty)$, asymptota: $x = -2$
 f) $D = (3; \infty)$, asymptota: $x = 3$

3. a) $g(x) = \log_{\sqrt{2}} x - 2$,
 $g(x) = 0$ dla $x = 2$
 b) $g(x) = \log_{\sqrt{2}} x + 1$,
 $g(x) = 0$ dla $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 c) $g(x) = \log_{\sqrt{2}} x - 1$,
 $g(x) = 0$ dla $x = \sqrt{2}$
4. a) $D = (-1; \infty)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-1; 3)$
 b) $D = (1; \infty)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (\frac{3}{2}; \infty)$
 c) $D = (2; \infty)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (2; \frac{55}{27})$
 d) $D = (-3; \infty)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (-3; 0)$
 e) $D = (-4; \infty)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-2; \infty)$
 f) $D = (1; \infty)$, $f(x) < 0$ dla $x \in (\frac{28}{27}; \infty)$
5. $D = \mathbf{R}_+$ a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{4}$ c) 4 d) 3
6. $D = \mathbf{R}_-$ a) $-\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) -9 d) -8
7. a) $D = (2; \infty)$, asymptota: $x = 2$
 b) $D = (1; \infty)$, asymptota: $x = 1$
 c) $D = (-2; \infty)$, asymptota: $x = -2$
 d) $D = (-3; \infty)$, asymptota: $x = -3$
 e) $D = (1; \infty)$, asymptota: $x = 1$
 f) $D = (-2; \infty)$, asymptota: $x = -2$
8. a) $D_g = (-1; \infty)$, $D_h = (-\infty; 1)$



b) $D_g = (-1; \infty)$, $D_h = (-\infty; 1)$



1.11. Funkcje wykładnicza i logarytmiczna – zastosowania

- Ć 1. $y_0 = 400$, po 10 godzinach: 97 200
2. a) po 4800 latach b) po 16 000 lat
3. o 75% po 56 latach, o 87,5% po 84 latach
4. a) 5700 lat b) 11 400 lat
5. 17 100 lat

- Z 1. $y_0 = 6,4 \cdot 10^4$, $a = 1,5625$,
 $9,00 - 6,4 \cdot 10^4$, $9,30 - 8 \cdot 10^4$,
 $9,45 - 8,94 \cdot 10^4$, $10,30 - 1,25 \cdot 10^5$,
 $11,45 - 2,18 \cdot 10^5$, $12,00 - 2,44 \cdot 10^5$
2. a) 8 dni b) $2\frac{1}{3}$ dnia
3. 50 000 lat
4. a) 1835 lat b) 13 235 lat
5. a) około 67% b) około 13%
6. $\frac{1}{4} - 25$, $\frac{1}{8} - 12,5$, $\frac{1}{16} - 6,25$, $\frac{1}{64} - 1,5625$
7. $y(1) \approx 1260$, $y(2) \approx 1587$, po 3 godzinach

1.12. Zagadnienia uzupełniające

1. a) $\log_2 \sqrt[4]{3}$ b) $\log_2 \frac{1}{7}$ c) $\log_2 121$
 d) $\log_2 9^{-\frac{1}{3}}$ e) $\log_2 6^{\frac{5}{6}}$ f) $\log_2 3^{-\frac{11}{6}}$
2. a) $\log \frac{1}{7}$ b) $\log_2 \sqrt[3]{3}$ c) $\log_{49} 121$
 d) $\log_{0,1} \frac{1}{625}$ e) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{6}$ f) $\log_3 \frac{1}{12}$
4. a) $a = \frac{1}{2}p$ b) $a = -\frac{1}{3}p$
 c) $a = 4p$ d) $a = \frac{1}{8}p$
 e) $a = -2 - p$ f) $a = 3 + 3p$
 g) $a = -\frac{1}{3} - \frac{4}{3}p$ h) $a = -\frac{1}{3}p$
5. a) $x = 5$ b) $x = 81$ c) $x = 9$
 d) $x = 10^6 \cdot \sqrt[3]{100}$
7. a) 3,170 b) 1,771 c) 0,613 d) 1,161
 e) -3,170 f) -1,955 g) 2,262 h) 2,161
8. a) około 6310 cm b) około 31,6 razy

Zestaw powtórzeniowy I

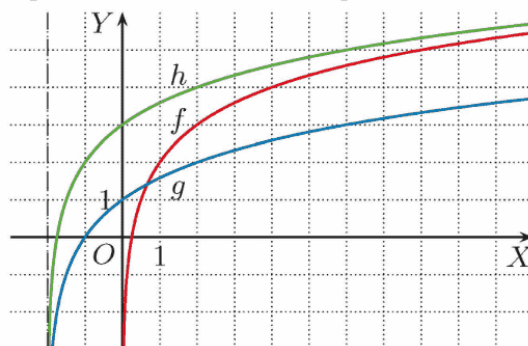
1. a) $\frac{1}{64}$ b) $\frac{1}{81}$ c) -8 d) $1\frac{7}{9}$ e) 4
 f) $\frac{1}{5}$ g) 27 h) 216
2. a) 5 b) -6 c) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{3}{4}$ e) 13
 f) $124\frac{3}{4}$ g) 0 h) $1\frac{1}{25}$
3. a) 9 b) $\sqrt[12]{5}$ c) 3 d) 3 e) 2 f) 1
 g) 4 h) 27
4. a) $5^{\frac{3}{2}}$ b) $7^{2\frac{1}{2}}$ c) $5^{3\frac{1}{3}}$ d) $5^{1\frac{2}{3}}$ e) $2^{5\frac{1}{2}}$
 f) $2^{4\frac{1}{3}}$ g) $2^{1\frac{2}{3}}$ h) $2^{-1\frac{1}{6}}$
5. a) $256^{\frac{1}{4}} > 4^{\frac{\sqrt{3}}{2}} > 32^{\frac{\pi}{10}} > 8^{\frac{1}{2}} > 16^{\frac{\sqrt{2}}{4}}$
 b) $(\frac{1}{3})^{3\sqrt{2}} > (\frac{1}{27})^{\frac{3}{2}} > \frac{1}{243} > (\frac{1}{9})^{2,6} > (\frac{1}{81})^{\frac{3}{2}}$
6. a), b) y
7. a) $x > 0$, $2x^{\frac{2}{3}}$ b) $x \neq 0$, $\frac{4}{x}$
 c) $x > 0$, $x\sqrt{x}$ d) $x > 0$, x
8. a) $x \in \{0, 2\}$ b) $x \in \{0, 2\}$
 c) $x = -1$ d) $x = -1$

9. a) $x \in (-\infty; 0)$ b) $x \in (0; \infty)$
 c) $x \in (-\infty; -2)$
 10. a) 3 b) $\frac{1}{3}$ c) -3 d) $-\frac{1}{3}$ e) -3
 f) $\frac{1}{6}$ g) 6 h) $\frac{1}{2}$
 11. a) 3 b) 1 c) $\frac{11}{2}$ d) $\frac{2}{3}$
 12. a) 2 b) 4 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{1}{32}$
 13. a) $x = 2$ b) $x = 0$
 c) $x = 1$ d) $x = -1$
 14. a) 4 b) 2 c) 2
 d) -2 e) -2 f) -1
 15. a) -1,523, -0,523, 0,477
 b) -1,268, -2,268, 0,732
 c) 1,431, 0,602

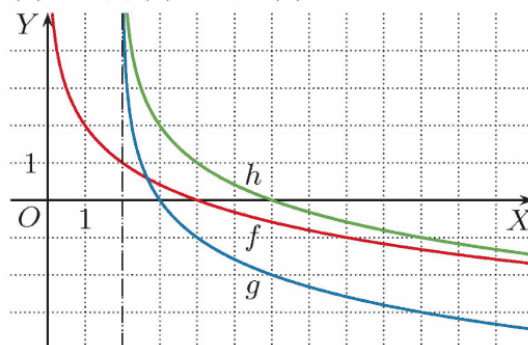
Zestaw powtórzeniowy II

1. a) $\frac{1}{81}$ b) 16 c) 1 d) 3
 e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{1}{4}$ g) $\frac{4}{27}$ h) $\frac{1}{80}$
 2. a) 25 b) 1 c) 2 d) 1
 e) 25 f) 4 g) $\frac{1}{2}$ h) 3
 3. a) 7 b) 1 c) 2 d) $\frac{1}{3}$ e) 20 f) $\frac{4}{121}$
 4. a) $2^{\frac{7}{2}}$ b) $2^{\frac{7}{3}}$ c) $3^{-\frac{1}{2}}$
 d) $3^{\frac{3}{8}}$ e) $5^{\frac{7}{8}}$ f) $2^{\frac{53}{24}}$
 5. a), f) – mniejsza
 b), c), d), e) – większa
 6. a) $25^{1,1} < 5^{\sqrt{5}} < 125^{\frac{4}{5}} < 25\sqrt{5}$
 b) $\frac{1}{\sqrt{8}} < 16^{-\frac{1}{3}} < 0,5 < (\sqrt{2})^{-\frac{3}{2}}$
 c) $(\sqrt[3]{3})^{-2} < \frac{1}{\sqrt{3}} < 9^{\frac{1}{3}} < \sqrt[4]{27}$
 d) $(4,5)^{-2} < 0,064 < (2,5)^{-2,4} < \sqrt{0,4}^{\sqrt{12}}$
 7. a) 12,5893 b) 0,1259
 c) 0,0126 d) 0,0013
 8. a) $y = 4^x$ b) $y = (\frac{1}{2})^x$ c) $y = (\frac{1}{3})^x$
 9. a) $f(D) = (-2; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = 1$
 b) $f(D) = (2; \infty)$, brak miejsc zerowych
 c) $f(D) = (2; \infty)$, brak miejsc zerowych
 d) $f(D) = (-\infty; 4)$, $f(x) = 0$ dla $x = 2$
 e) $f(D) = (-\infty; 0)$,
 brak miejsc zerowych
 f) $f(D) = (-4; \infty)$, $f(x) = 0$ dla $x = 1$
 10. a) 4 b) 8
 11. a) $x = 16$ b) $x = 8$ c) $x = -3$, $x = 3$
 d) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $x = -27$, $x = 27$
 f) $x = -64$, $x = 64$

12. a) $x = 36$ b) $x = 9$
 c) $x = 100$ d) $x = 10$
 13. a) $a = 4$ b) $a = \sqrt{2}$ c) $a = \frac{1}{2}$
 14. a) II b) IV
 15. a) 0 b) 1 c) -2 d) -3
 16. a) $g(x) = (\frac{1}{2})^x - 2$
 b) $g(x) = (\frac{1}{2})^{x+1}$
 c) $g(x) = 2^x$
 d) $g(x) = -(\frac{1}{2})^x$
 17. a) asymptota $f: x = 0$, g i $h: x = -2$,
 $f(\frac{1}{4}) = 0$, $g(-1) = 0$, $h(-\frac{7}{4}) = 0$



- b) asymptota $f: x = 0$, g i $h: x = 2$,
 $f(4) = 0$, $g(3) = 0$, $h(6) = 0$



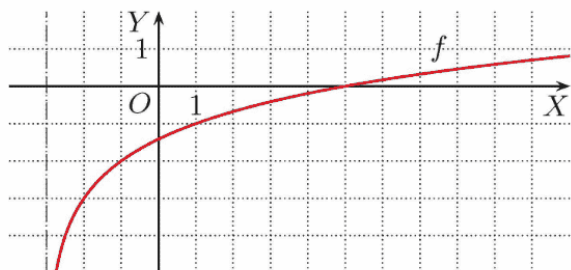
18. a) $a = 2$ b) $a = 4$ c) $a = 3$ d) $a = \sqrt{2}$
 19. a) $D = (3; \infty)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (3; 5)$
 b) $D = (-1; \infty)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (3; \infty)$
 c) $D = (-1; \infty)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-\frac{1}{2}; \infty)$
 d) $D = (-3; \infty)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (6; \infty)$

Zadania testowe

1. C 2. B 3. D 4. B 5. A 6. A 7. B 8. B
 9. A 10. B

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. 10
2. $p = \frac{1}{4}$
6. 1021
7. $|PQ| = 2$
8. $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 2$
10. $a = b = -3$



Twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie do niego odwrotne

1. a) $2(2 + \sqrt{2} + \sqrt{6})$
b) $3(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})$ c) 6
2. a) $x = 6$ b) $x = 2\sqrt{10}$
3. 48 cm^2
4. a) $3(5 + 3\sqrt{5})$ b) $3(5 + \sqrt{5})$
5. a), b), c), e) jest d), f) nie jest

2.1. Odległość między punktami w układzie współrzędnych

- Ć** 1. a) 2 b) 13 c) $\frac{\sqrt{5}}{6}$ d) 5
2. 30
3. $Ob_{\triangle ABC} = 15 + 3\sqrt{5}$,
 $Ob_{\triangle DEF} = \sqrt{26} + 5\sqrt{2}$
4. a), d) nie jest b), c) jest
5. a) równoramienny i prostokątny
b) równoramienny
c) nie jest równoramienny i nie jest prostokątny
d) prostokątny

- Z** 1. PQRS
2. a), b) CD c) $|AB| = |CD|$
3. a) jest b) nie jest
4. a) przystające b) podobne
5. a) $Ob = 2\sqrt{5} + 4\sqrt{2} + 6$,
wysokości: 4, $3\sqrt{2}$, $\frac{12\sqrt{5}}{5}$

b) $Ob = 2\sqrt{10} + 6\sqrt{2} + 4$,
wysokości: 6, $2\sqrt{2}$, $\frac{6\sqrt{10}}{5}$

6. a) $Ob = 4\sqrt{10}$, $|AC| = 4\sqrt{2}$,
 $|BD| = 2\sqrt{2}$, $h = \frac{4\sqrt{10}}{5}$
b) $Ob = 20\sqrt{2}$, $|AC| = 6\sqrt{5}$,
 $|BD| = 2\sqrt{5}$, $h = 3\sqrt{2}$

7. a) (2, 2), (4, 6) b) (1, 5), (6, 0)

8. B(4, 0), D(-1, 5)

9. D(-6, 8) lub $D(\frac{6}{5}, \frac{28}{5})$

10. a) $7\sqrt{5}$ b) $9 + \sqrt{13} + \sqrt{74}$

11. $Ob = 4\sqrt{10}$, $|AC| = 2\sqrt{5}$

12. a) $Ob = 12 + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{2}$, $P = 24$
b) $Ob = 18 + 6\sqrt{5}$, $P = 36$

13. a) jest, $P = \frac{45}{2}$ b) nie jest, $P = 9$

2.2. Środek odcinka

- Ć** 1. a) $S(2, 1)$ b) $S(\frac{1}{2}, -\frac{7}{2})$ c) $S(\frac{7}{4}, -\frac{5}{6})$

2. a) B(-7, -14) b) $2\sqrt{34}$ c) $2\sqrt{10}$

3. a) $2\sqrt{5}$, $4\sqrt{2}$, $2\sqrt{17}$
b) $2\sqrt{5}$, $5\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$

- Z** 1. a) 5 b) $2\sqrt{5}$ c) 2,5

2. a) B(-8, 1) b) B(8, 9) c) B(-10, -3)

3. a) $2\sqrt{10}$ b) $6\sqrt{2}$

4. $|BO| = 6\sqrt{2}$, $|AC| = 2\sqrt{2}$, $P = 6$

5. a) $16\sqrt{5}$ b) $20\sqrt{2}$

6. a) $S_{AC}(8, 2)$, $S_{BD}(8, 2)$, jest
b) $S_{AC}(4\frac{1}{2}, 2)$, $S_{BD}(4\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$, nie jest

7. S(3, 2), D(7, 5)

8. a) $P = 20$, $Ob = 8\sqrt{5}$ b) (4, 3) lub (4, 9)

9. a) A(5, 5), B(1, 1) lub A(1, 1), B(5, 5)
b) A(16, 14), B(8, 8) lub A(8, 8), B(16, 14)

10. a), b) należy

11. a) II b) III c) I d) IV

12. (-1, 1), (2, 2), (1, 5), (-2, 4)

13. a) $2\sqrt{5}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{29}$
b) $2\sqrt{2}$, $4\sqrt{5}$, $2\sqrt{26}$

14. a) (-1, -2), $r = 5$ b) (-1, 1), $r = 2\sqrt{10}$

15. $|AB| = 6\sqrt{5}$, $|CD| = 2\sqrt{5}$, $|PQ| = 4\sqrt{5}$

Prosta w układzie współrzędnych

1. $AB: y = x + 3$, $AC: y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$,
 $BC: y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$
2. a) $y = x + 3$, nie
b) $y = -2x + 5$, tak
3. a) $y = 4x - 1$ b) $y = -\frac{1}{5}x + 13$
4. a) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ b) $y = \frac{1}{6}x + 5$
5. a) $y = -2x + 7$ b) $y = \frac{3}{2}x + 4$
c) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$
6. a) $y = 3x - 4$ b) $y = 2x - \frac{5}{2}$
c) $y = -\frac{3}{2}x + 9$
7. a) $y = -\frac{1}{2}x + 7$ b) $y = \frac{1}{6}x - \frac{13}{12}$

2.3. Odległość punktu od prostej

- C** 1. a) $2\sqrt{2}$ b) 5
2. a) $d_A = \sqrt{2}$, $d_B = 0$, $d_C = \frac{3\sqrt{2}}{2}$
b) $d_A = \sqrt{10}$, $d_B = \sqrt{10}$,
 $d_C = \frac{13\sqrt{10}}{10}$
c) $d_A = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $d_B = \frac{6\sqrt{5}}{5}$, $d_C = 0$
 3. a) $d = \frac{8\sqrt{5}}{5}$, $P = 16$
b) $d = \sqrt{13}$, $P = 13$
 4. 94
 5. a) $2\sqrt{2}$ b) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{16\sqrt{5}}{5}$ d) $\frac{6\sqrt{13}}{13}$
- Z** 1. a) $d_A = \frac{48\sqrt{29}}{29}$, $d_B = \frac{45\sqrt{29}}{29}$, nie jest
b) $d_A = d_B = 5$, jest
c) $d_A = 5$, $d_B = \frac{54}{13}$, nie jest
2. $d_{AB} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$, $d_{AD} = 3$,
 $d_{BC} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $d_{CD} = \frac{9}{4}$
 3. $d = 2\sqrt{10}$, $P = 60$
 4. a) $8\frac{1}{2}$ b) 15
 5. a) 5π b) 25π
 6. a) $AB \parallel CD$, $d = \frac{7\sqrt{2}}{2}$, $P = 38,5$
b) $AB \parallel CD$, $d = 3\sqrt{10}$, $P = 75$
 7. a) $y = x + 10\sqrt{2}$ lub $y = x - 10\sqrt{2}$
b) $y = x + 3 - 10\sqrt{2}$
lub $y = x + 3 + 10\sqrt{2}$
 8. a) 6 b) 20
 9. a) $2\sqrt{29}$ b) 0
 10. a) $d = \frac{25\sqrt{17}}{17}$, $P = 25$
b) $d = 2\sqrt{5}$, $P = 10$
 11. a) $2\sqrt{5}$ b) 1

Pole trójkąta w układzie współrzędnych

1. a) 14 b) 26

2.4. Okrąg w układzie współrzędnych (1)

- C** 1. a) $x^2 + y^2 = 4$, 4 punkty
b) $x^2 + y^2 = 16$, 4 punkty
c) $x^2 + y^2 = 25$, 12 punktów
d) $x^2 + y^2 = 49$, 4 punkty
2. $x^2 + y^2 = 5$,
(1, 2), (2, 1), (-1, 2), (-2, 1),
(-2, -1), (-1, -2), (1, -2), (2, -1)
 3. a) $x^2 + y^2 = 8$,
(2, 2), (-2, 2), (-2, -2), (2, -2)
b) $x^2 + y^2 = 18$,
(3, 3), (-3, 3), (-3, -3), (3, -3)
c) $x^2 + y^2 = 10$,
(3, 1), (1, 3), (-1, 3), (-3, 1),
(-3, -1), (-1, -3), (1, -3), (3, -1)
d) $x^2 + y^2 = 17$,
(4, 1), (1, 4), (-1, 4), (-4, 1),
(-4, -1), (-1, -4), (1, -4), (4, -1)
 4. a) $x^2 + y^2 = 36$
b) $x^2 + y^2 = 64$
c) $x^2 + y^2 = 3$
d) $x^2 + y^2 = 50$
 5. a) $r = 13$, $x^2 + y^2 = 169$
b) $r = 3\sqrt{2}$, $x^2 + y^2 = 18$
c) $r = \sqrt{41}$, $x^2 + y^2 = 41$
d) $r = 2\sqrt{2}$, $x^2 + y^2 = 8$
 6. a) $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 9$
b) $(x + 7)^2 + (y - 6)^2 = 4$
c) $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 2$
 7. a) $S(2, 5)$, $r = 4$
b) $S(4, -5)$, $r = 3$
c) $S(-3, 2)$, $r = 10$
d) $S(-5, -9)$, $r = 15$
e) $S(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, $r = \frac{5}{3}$
f) $S(0, -\frac{9}{4})$, $r = \sqrt{10}$
g) $S(1\frac{1}{6}, 0)$, $r = 3\sqrt{5}$
h) $S(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $r = 2\sqrt{2}$
 8. a) $x^2 + (y + 1)^2 = 5$
b) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 20$
c) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 10$

Z 1. a) $x^2 + y^2 = 100$, A i B należą

b) $x^2 + y^2 = 34$, B należy

c) $x^2 + y^2 = 16$, A należy

d) $x^2 + y^2 = 20$, A należy

2. a) 5π b) 4π

3. a) $S(-3, 6)$, $r = 2\sqrt{2}$ b) $S(0, 1)$, $r = \sqrt{3}$

c) $S(1, -5)$, $r = 4$ d) $S(\sqrt{2}, 0)$, $r = 3\sqrt{2}$

4. K_1 – III, K_2 – IV, K_3 – II, K_4 – I

5. a) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$

b) $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 49$

c) $(x+6)^2 + (y-2)^2 = \frac{9}{16}$

d) $(x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{4})^2 = \frac{25}{4}$

e) $(x+5)^2 + (y+1)^2 = 20$

f) $(x - \sqrt{3})^2 + y^2 = 27$

6. a) $(x-2)^2 + y^2 = 10$

b) $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 25$

c) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 8$

d) $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 32$

e) $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 25$

f) $(x+4)^2 + (y+2)^2 = 13$

7. a) $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 9$

b) $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 16$

c) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 20$

d) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$

e) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$

f) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 17$

9. a) $(x - \frac{5}{2})^2 + y^2 = \frac{65}{4}$

b) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 20$

c) $(x + \frac{1}{2})^2 + (y+2)^2 = \frac{125}{4}$

d) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 40$

10. a) opisany: $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 20$,
wpisany: $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 10$

b) opisany: $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 10$,
wpisany: $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5$

11. a) $(x - \frac{1}{2})^2 + (y-1)^2 = \frac{65}{4}$

b) $(x + \frac{7}{2})^2 + (y-1)^2 = \frac{125}{4}$

12. a) $K_1: (x-4)^2 + y^2 = 1$,

$K_2: (x-4)^2 + y^2 = 4$,

$K_3: (x-4)^2 + y^2 = 9$,

$K_4: (x-4)^2 + y^2 = 16$

b) $A \in K_3$, $B \in K_4$, $C \in K_1$

c) 62,5% d) $(x-1)^2 + y^2 = 1$

lub $(x-1)^2 + y^2 = 49$

13. a) $\sqrt{2}\pi$ b) 4π c) 2π

14. $K_1: x^2 + y^2 = 4$, $K_2: x^2 + y^2 = 16$,

$K_3: (x-5)^2 + (y-3)^2 = 1$,

$K_4: (x-4)^2 + (y+1)^2 = 9$,

$K_5: (x+3)^2 + y^2 = 1$,

$K_6: (x+2)^2 + (y-3)^2 = 2$

15. a) $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 20$, $A(-1, -3)$

b) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$, $A(-5, -3)$

2.5. Okrąg w układzie współrzędnych (2)

Ć 1. a) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 10$

b) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 20$

2. a) $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 20$

b) $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 65$

3. $(1, 1 + 2\sqrt{2})$ lub $(1, 1 - 2\sqrt{2})$

Z 1. a) $(x+1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{145}{4}$

b) $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 50$

c) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 25$

d) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 26$

2. a) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 40$

b) $x^2 + (y-2)^2 = 20$

c) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 50$

d) $(x + \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{65}{2}$

e) $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 25$

f) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 10$

3. a) 32 b) 8

4. $6(\sqrt{10} + 1)$ lub $2(\sqrt{10} + 3)$

5. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 34$

6. a) 29 b) 20 c) $2(\sqrt{29} + 5)$ d) $5(\sqrt{29} - 2)$

Postać ogólna równania okręgu

1. a) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$, tak

b) $(x+1)^2 + (y+3)^2 = -2$, nie

c) $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 10$, tak

d) $(x - \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = 0$, nie

e) $x^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = \frac{1}{4}$, tak

f) $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 25$, tak

2.6. Wzajemne położenie dwóch okręgów

Ć 1. a) $|S_1 S_2| = 2$, brak punktów wspólnych

b) $|S_1 S_2| = 5$, 1 punkt wspólny

c) $|S_1 S_2| = 4$, 1 punkt wspólny

d) $|S_1 S_2| = 2\sqrt{2}$, 2 punkty wspólne

2. a) 1 b) 0 c) 2 d) 1

3. a) $r \in \{3, 11\}$ b) $r \in \{4 - \sqrt{5}, 4 + \sqrt{5}\}$

4. $r \in (10; 20)$

- [Z]** 1. a) $d = 6$, styczne zewnętrznie
 b) $d = 5$, styczne wewnętrznie
 c) $d = 5$, przecinają się
 d) $d = 5\sqrt{2}$, przecinają się
 e) $d = 2\sqrt{2}$, rozłączne wewnętrznie
 f) $d = 13$, rozłączne zewnętrznie
2. a) $d = 13$, 1 punkt dla $r \in \{5, 21\}$,
 2 punkty dla $r \in (5; 21)$
 b) $d = \sqrt{41}$,
 1 punkt dla $r \in \{\sqrt{41} - 4, \sqrt{41} + 4\}$,
 2 punkty dla $r \in (\sqrt{41} - 4; \sqrt{41} + 4)$
 c) $d = 4\sqrt{5}$,
 1 punkt dla $r \in \{4\sqrt{5} - 7, 4\sqrt{5} + 7\}$,
 2 punkty dla $r \in (4\sqrt{5} - 7; 4\sqrt{5} + 7)$
3. a) $K_1: (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 8$,
 $K_2: (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 2$,
 styczne zewnętrznie
 b) $K_1: (x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 8$,
 $K_2: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$,
 przecinają się
 c) $K_1: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$,
 $K_2: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2$,
 przecinają się
4. $(\frac{9}{5}, \frac{12}{5})$
5. a) 0 b) 0 c) 2 d) 1
6. a) 1 punkt dla $r \in \{3, 7\}$,
 2 punkty dla $r \in (3; 7)$
 b) 1 punkt dla $r \in \{3\sqrt{5} - 5, 3\sqrt{5} + 5\}$,
 2 punkty dla $r \in (3\sqrt{5} - 5; 3\sqrt{5} + 5)$

2.7. Wzajemne położenie okręgu i prostej

- [C]** 1. a) 0 punktów dla $r \in (0; 4)$,
 1 punkt dla $r = 4$,
 2 punkty dla $r \in (4; \infty)$
 b) 0 punktów dla $r \in (0; 2 + \sqrt{3})$,
 1 punkt dla $r = 2 + \sqrt{3}$,
 2 punkty dla $r \in (2 + \sqrt{3}; \infty)$
 c) 0 punktów dla $r \in (0; \frac{3}{2} - \sqrt{2})$,
 1 punkt dla $r = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$,
 2 punkty dla $r \in (\frac{3}{2} - \sqrt{2}; \infty)$
 d) 0 punktów dla $r \in (0; \sqrt{2})$,
 1 punkt dla $r = \sqrt{2}$,
 2 punkty dla $r \in (\sqrt{2}; \infty)$

2. a) $2\sqrt{21}$ b) 8 c) $\frac{22\sqrt{5}}{5}$

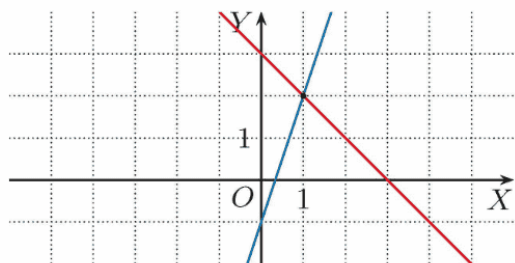
3. a) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$
 b) $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 18$

4. a) 1 b) 0 c) 2 d) 1

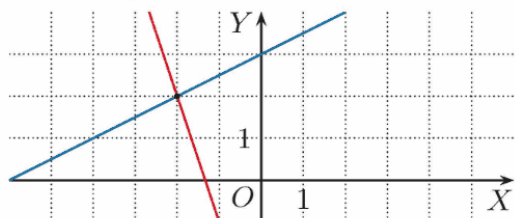
- [Z]** 1. a) 0 punktów dla $r \in (0; 4)$,
 1 punkt dla $r = 4$,
 2 punkty dla $r \in (4; \infty)$
 b) 0 punktów dla $r \in (0; 8)$,
 1 punkt dla $r = 8$,
 2 punkty dla $r \in (8; \infty)$
 c) 0 punktów dla $r \in (0; \frac{5}{2})$,
 1 punkt dla $r = \frac{5}{2}$,
 2 punkty dla $r \in (\frac{5}{2}; \infty)$
2. a) $\sqrt{5}$ b) 5 c) $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ d) $2\sqrt{10}$
3. a) $d = \sqrt{5}$, 2 punkty
 b) $d = 2\sqrt{5}$, 0 punktów
 c) $d = 2\sqrt{2}$, 2 punkty
 d) $d = \sqrt{13}$, 0 punktów
 e) $d = \frac{7\sqrt{10}}{10}$, 2 punkty
 f) $d = 3$, 1 punkt
4. a) 0 punktów dla $r \in (0; 2)$,
 1 punkt dla $r = 2$,
 2 punkty dla $r \in (2; \infty)$
 b) 0 punktów dla $r \in (0; 2\sqrt{5})$,
 1 punkt dla $r = 2\sqrt{5}$,
 2 punkty dla $r \in (2\sqrt{5}; \infty)$
 c) 0 punktów dla $r \in (0; \frac{23}{5})$,
 1 punkt dla $r = \frac{23}{5}$,
 2 punkty dla $r \in (\frac{23}{5}; \infty)$
 d) 0 punktów dla $r \in (0; \frac{8\sqrt{5}}{5})$,
 1 punkt dla $r = \frac{8\sqrt{5}}{5}$,
 2 punkty dla $r \in (\frac{8\sqrt{5}}{5}; \infty)$
 e) 0 punktów dla $r \in (0; 2\sqrt{6})$,
 1 punkt dla $r = 2\sqrt{6}$,
 2 punkty dla $r \in (2\sqrt{6}; \infty)$
 f) 0 punktów dla $r \in (0; \frac{11}{2})$,
 1 punkt dla $r = \frac{11}{2}$,
 2 punkty dla $r \in (\frac{11}{2}; \infty)$
5. a) 1 b) 2 c) 0 d) 2
7. a) 2 b) 1 c) 0
8. a) $y = -8, y = 6$ b) $x = -4, x = 10$

2.8. Układy równań – powtórzenie

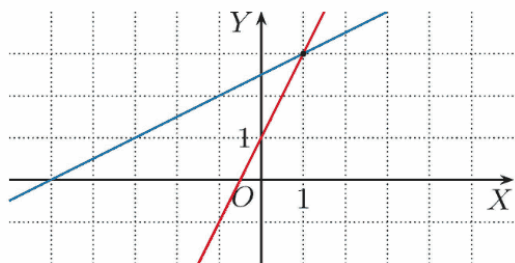
Ć 1. a) $x = 1, y = 2$



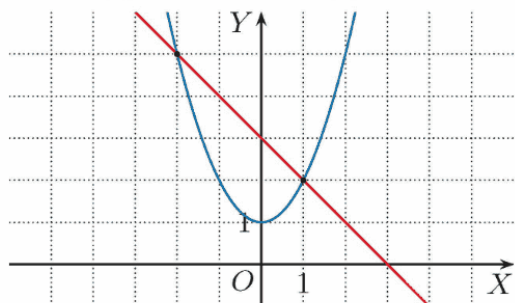
b) $x = -2, y = 2$



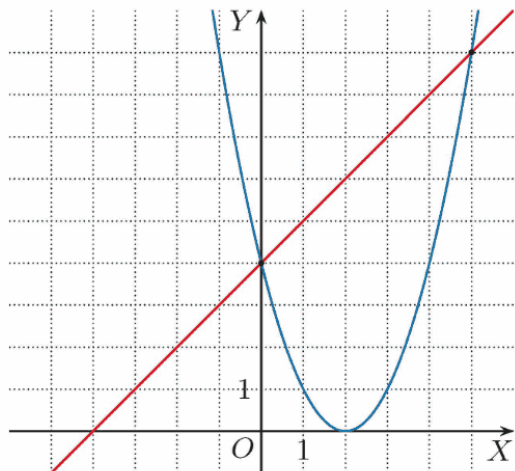
c) $x = 1, y = 3$



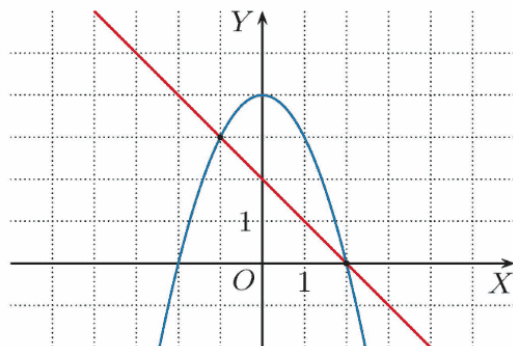
2. a) $x = -2, y = 5$ lub $x = 1, y = 2$



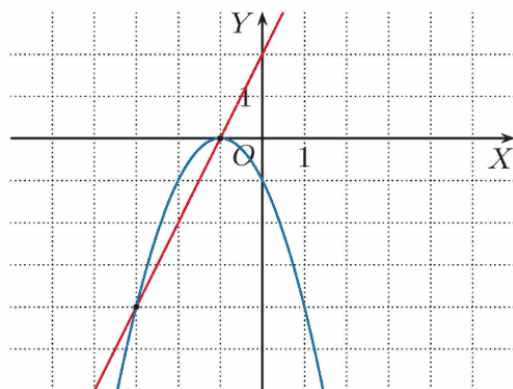
b) $x = 0, y = 4$ lub $x = 5, y = 9$



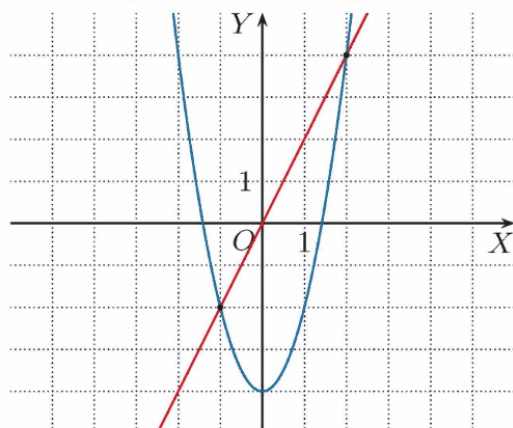
c) $x = -1, y = 3$ lub $x = 2, y = 0$



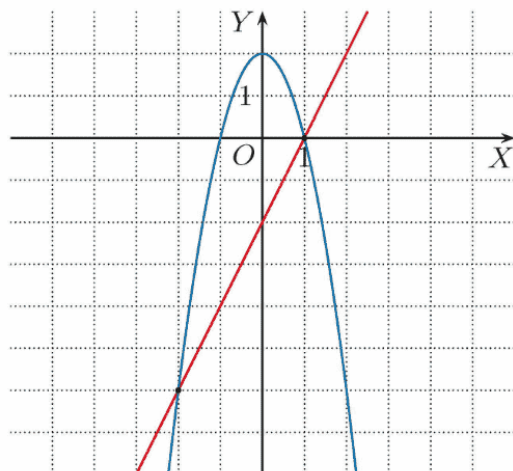
d) $x = -3, y = -4$ lub $x = -1, y = 0$



e) $x = -1, y = -2$ lub $x = 2, y = 4$



f) $x = -2, y = -6$ lub $x = 1, y = 0$



1. a) $x = -1, y = -3$

b) $x = -3, y = 1$

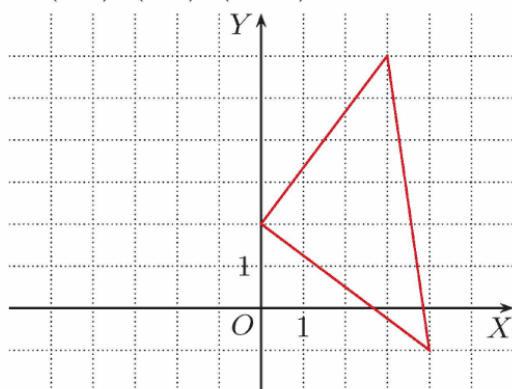
c) $x = 1, y = 0$

d) $x = -\frac{9}{7}, y = -\frac{8}{7}$

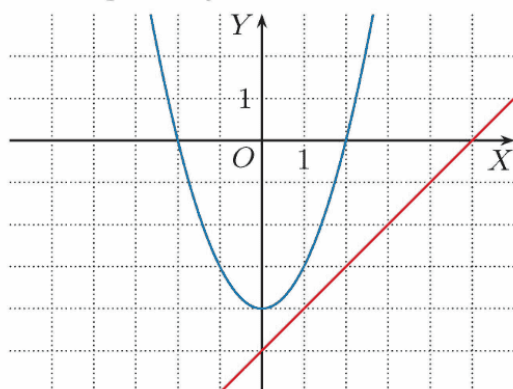
e) $x = -1, y = 2$

f) $x = 2, y = 4$

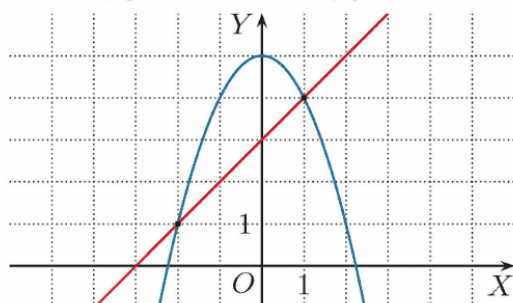
2. $(0, 2), (3, 6), (4, -1)$



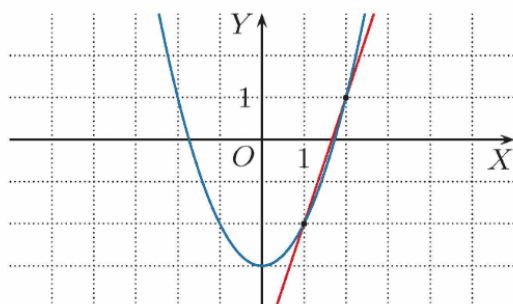
3. a) układ sprzeczny



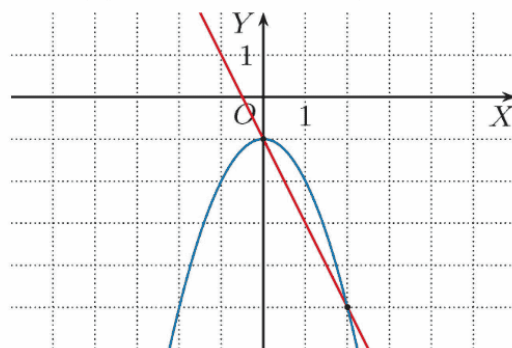
b) $x = -2, y = 1$ lub $x = 1, y = 4$



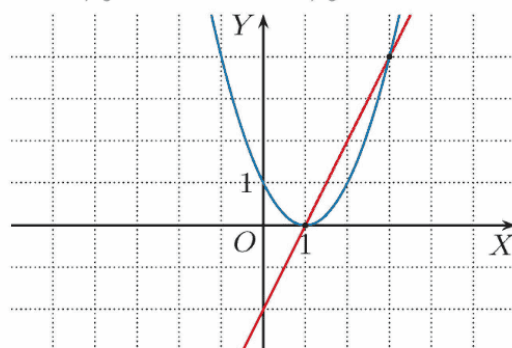
c) $x = 1, y = -2$ lub $x = 2, y = 1$



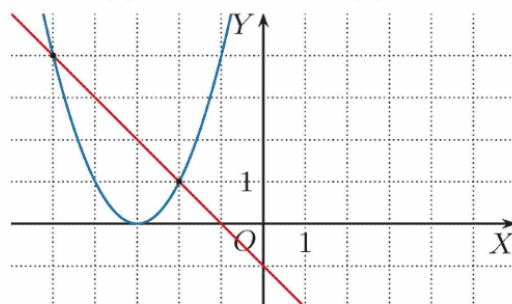
d) $x = 0, y = -1$ lub $x = 2, y = -5$



e) $x = 1, y = 0$ lub $x = 3, y = 4$



f) $x = -5, y = 4$ lub $x = -2, y = 1$



4. a) $x = -2, y = 6$ lub $x = 1, y = 0$

b) $x = 0, y = 2$ lub $x = 3, y = 8$

c) $x = -2, y = -2$

d) $x = -4, y = -6$ lub $x = 2, y = 0$

e) $x = 4, y = 4$

f) układ sprzeczny

5. a) $x = 2, y = -1$ b) $x = -2, y = 2$

c) $x = 1, y = 3$

6. a) $x = -2, y = -1$ lub $x = 1, y = 2$

b) $x = -1, y = 2$ lub $x = 2, y = -1$

c) $x = -3, y = -6$ lub $x = 1, y = 2$

d) $x = -2, y = -1$ lub $x = 0, y = 3$

e) $x = -2, y = -1$ lub $x = 3, y = -6$

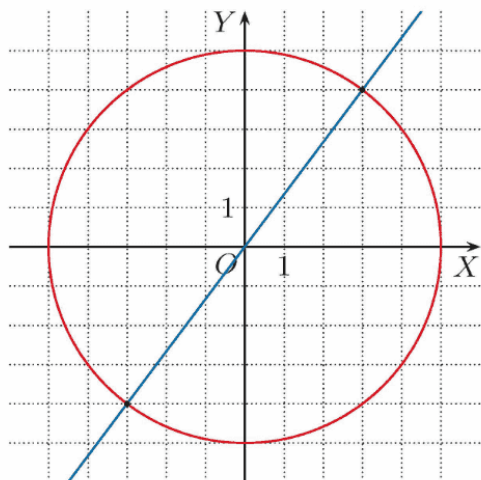
f) $x = -1, y = 2$

7. a) $x = 0, y = 0$ lub $x = 3, y = 6$

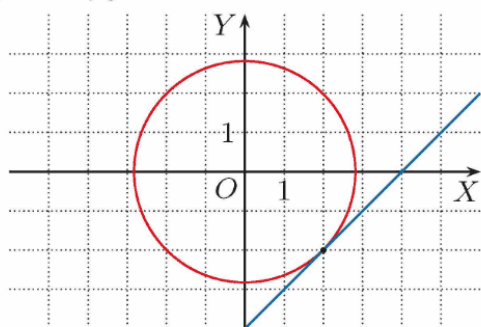
b) $x = 0, y = 4$ lub $x = 2, y = 0$

2.9. Punkty wspólne prostej i okręgu (1)

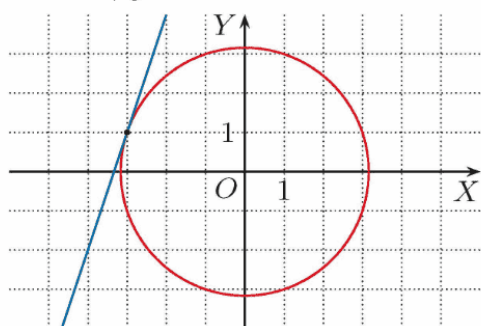
Ć 1. a) $x = -3, y = -4$ lub $x = 3, y = 4$



b) $x = 2, y = -2$



c) $x = -3, y = 1$



2. a) $3\sqrt{2}$
b) $2\sqrt{10}$

3. $(-3, -2), (-2, -3), (3, 2), (2, 3)$

Z 1. a) $x = -1, y = -1$ lub $x = 1, y = 1$

b) $x = -2, y = 3$ lub $x = 2, y = -3$

c) $x = -2, y = 1$

d) $x = -3, y = -1$ lub $x = 1, y = 3$

e) $x = -4, y = 1$ lub $x = 1, y = -4$

f) $x = 3, y = -1$

g) $x = 1, y = -5$ lub $x = 5, y = 1$

h) $x = -2, y = -3$ lub $x = 3, y = -2$

i) układ sprzeczny

2. $(-3, -3), (3, 3)$

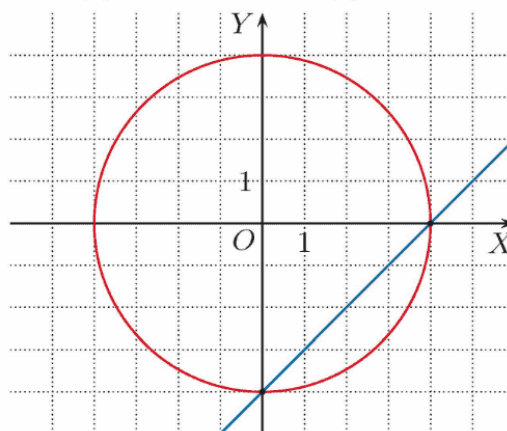
3. $(-4, 2), (-2, -4), (4, -2), (2, 4),$
 $Ob = 8\sqrt{10}$

4. $(6, 2), (2, -6), (-6, -2), (-2, 6), P = 80$

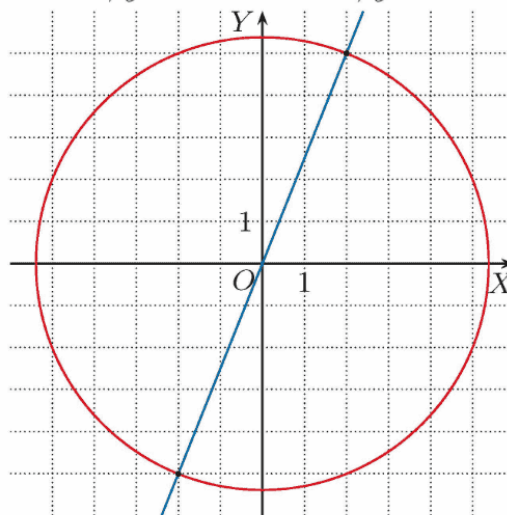
5. a) $(1, 4), (4, 1), (-1, -4), (-4, -1)$

b) $(-1, 5), (5, -1), (1, -5), (-5, 1)$

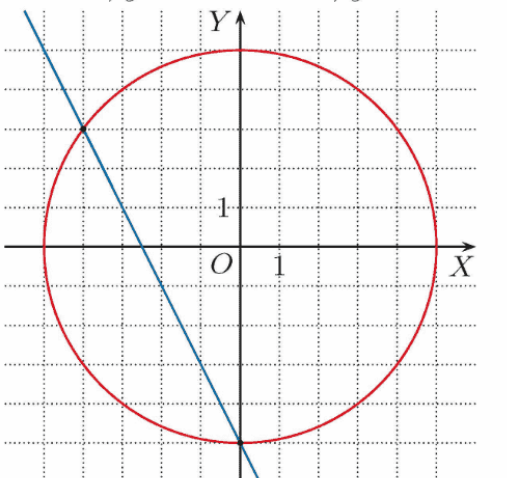
6. a) $x = 0, y = -4$ lub $x = 4, y = 0$



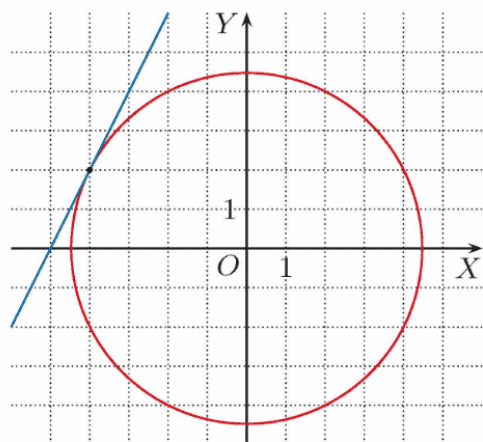
b) $x = -2, y = -5$ lub $x = 2, y = 5$



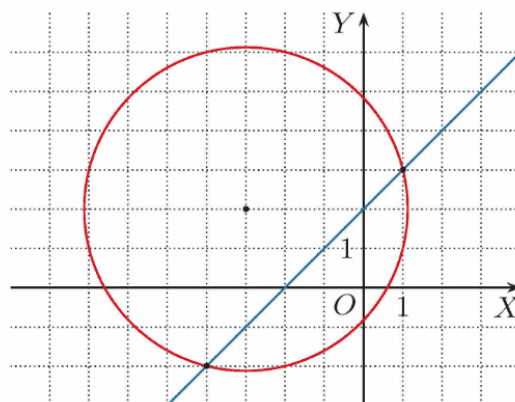
c) $x = -4, y = 3$ lub $x = 0, y = -5$



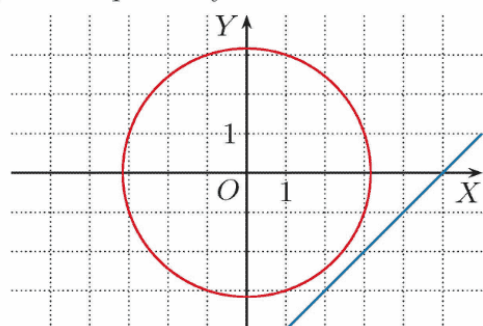
6. d) $x = -4, y = 2$



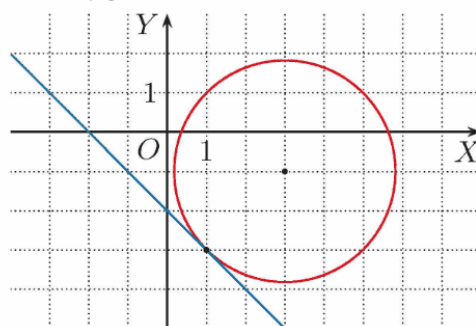
b) $x = -4, y = -2$ lub $x = 1, y = 3$



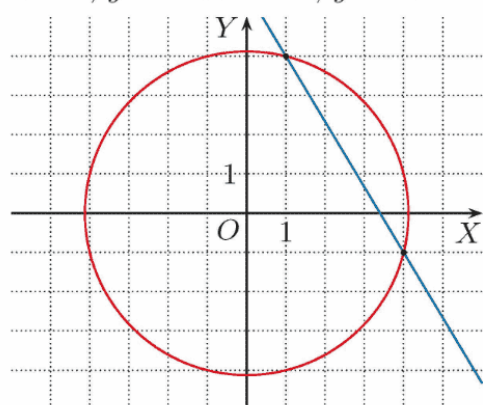
e) układ sprzeczny



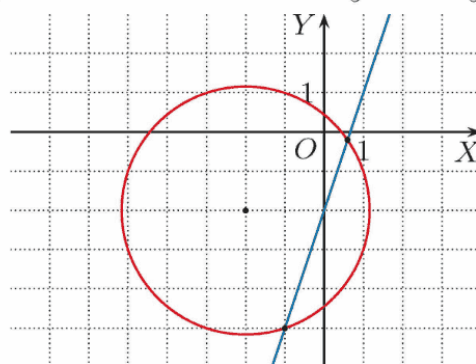
3. a) $x = 1, y = -3$



f) $x = 1, y = 4$ lub $x = 4, y = -1$



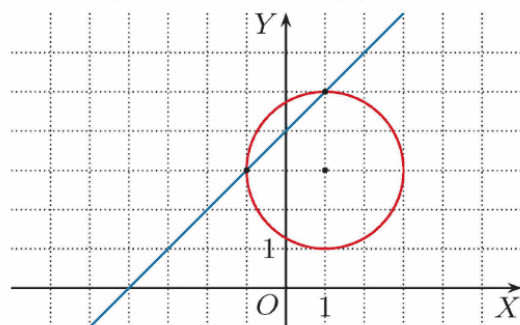
b) $x = -1, y = -5$ lub $x = \frac{3}{5}, y = -\frac{1}{5}$



7. $(3, 4), (3, -4), (-4, -3), (-4, 3)$

2.10. Punkty wspólne prostej i okręgu (2)

1. a) $x = -1, y = 3$ lub $x = 1, y = 5$



4. a) $(-5, 4), (-2, 5), (-1, 2), (-4, 1)$

b) $(5, 4), (-2, 3), (-1, -4), (6, -3)$

5. a) $x = -1, y = 3$ lub $x = 1, y = 5$

b) $x = -3, y = -1$

lub $x = \frac{27}{5}, y = \frac{9}{5}$

c) $x = -4, y = -1$

lub $x = -\frac{8}{5}, y = -\frac{1}{5}$

d) $x = 0, y = -3$ lub $x = 6, y = 1$

e) $x = -1, y = -1$

f) układ sprzeczny

1. a) $\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{5}$

2. $(0, 4), (5, 3), (4, -2), (-1, -1), P = 26$

3. $A(-6, 0), B(2, 4), C(0, -2)$ lub $C(-4, 6)$

4. a) $(-3, 1), (1, 5), (5, -7), (9, -3)$
 b) $(1, 3), (-1, 9), (-7, 7), (-5, 1)$
5. a) $x = 0, y = 1$ lub $x = 4, y = -3$
 b) $x = -3, y = 0$
 c) $x = 1, y = -2$ lub $x = 2, y = 1$
 d) $x = 0, y = -2$
 e) $x = 0, y = -2$
 f) $x = -5, y = -1$ lub $x = 3, y = 3$
6. a) $x = -2, y = -2$
 b) $x = 1, y = 1$ lub $x = \frac{17}{5}, y = \frac{9}{5}$
7. a) $x = 0, y = 1$ lub $x = 1, y = 6$
 b) $x = -8, y = -4$ lub $x = 0, y = 2$

2.11. Symetria osiowa

- Ć 2. kwadrat: 4, trójkąt równoboczny: 3, prostokąt: 2, koło: nieskończenie wiele
3. a) $A'(0, -3), B'(3, 0), A''(0, 3), B''(-3, 0)$
 b) $A'(1, 2), B'(-4, -3), A''(-1, -2), B''(4, 3)$
 c) $A'(-5, -1), B'(1, -4), A''(5, 1), B''(-1, 4)$
5. a) $A'(-2, -1), B'(2, 3), C'(4, 1), D'(0, -3)$
 b) $A''(2, 1), B''(-2, -3), C''(-4, -1), D''(0, 3)$
6. $K': (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4,$
 $K'': (x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$
7. a) $K': (x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 16,$
 $K'': (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$
 b) $K': (x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 13,$
 $K'': (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 13$
 c) $K': (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 1,$
 $K'': (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$
 d) $K': (x + 1)^2 + (y - 6)^2 = 49,$
 $K'': (x - 1)^2 + (y + 6)^2 = 49$
- Z 1. a) OX b) OY
 c), d) nie są
3. a) 8 b) 2
4. a) 26
 b) $P = 14, Ob = 2(2\sqrt{10} + \sqrt{5}),$
 18 punktów
5. a) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 25,$ należy
 b) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 41,$ nie należy

- c) $(x + 3)^2 + y^2 = 4,$ należy
 d) $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 40,$ należy

6. a) $K': (x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 25,$
 $(0, 1), (0, -5), P = 24$
 b) $K': (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 8,$
 $(0, 3), (0, -1), P = 8$
 c) $K': (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 13,$
 $(0, 3), (0, -1), P = 12$
 d) $K': (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 20,$
 $(0, 7), (0, -1), P = 16$
7. a) $K': (x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 18,$
 $P = 9(\pi - 2)$
 b) $K': x^2 + (y + 3\sqrt{3})^2 = 36,$
 $P = 6(2\pi - 3\sqrt{3})$
8. a) $A'(-3, 1), B'(6, 4), C'(0, 0)$
 b) $A'(3, -1), B'(-6, -4), C'(0, 0)$
9. a) $K': (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4,$
 $K'': (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$
 b) $K': (x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 18,$
 $K'': (x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 18$
 c) $K': (x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 25,$
 $K'': (x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 25$
 d) $K': (x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 13,$
 $K'': (x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 13$

2.12. Symetria środkowa

- Ć 2. równoległobok, prosta, kwadrat, odcinek
3. a) $A'(-3, 2), B'(2, 1), C'(1, -4)$
 b) $A'(-2, 2), B'(-1, -3), C'(3, -1)$
4. a) 24 b) 6
5. $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 16$
6. a) $K': (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 9$
 b) $K': (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$
 c) $K': (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$
 d) $K': (x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$
7. a) $K': (x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 16$
 c) $8(\pi - 2)$
- Z 1. a) 10 b) $2\sqrt{17}$ c) 20 d) $2\sqrt{2}|a|$
3. 22,4
4. a) $K': (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 9$
 b) $K': (x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 17$
 c) $K': (x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 20$
 d) $K': (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 10$

5. $K': (x-3)^2 + (y+3)^2 = 36$,
 $P = 18(\pi - 2)$

7. a) $K': (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$
 b) $K': (x-9)^2 + (y-5)^2 = 4$

8. a) 8 b) 6

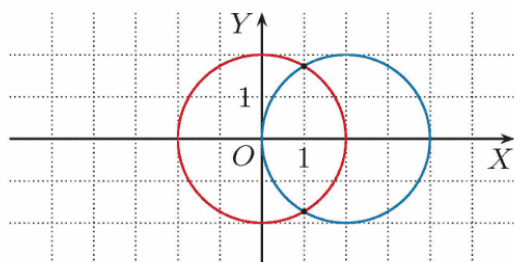
9. a) $K': (x-2)^2 + (y-2)^2 = 16$
 b) $K': (x+4)^2 + (y-2)^2 = 25$

2.13. Zagadnienia uzupełniające

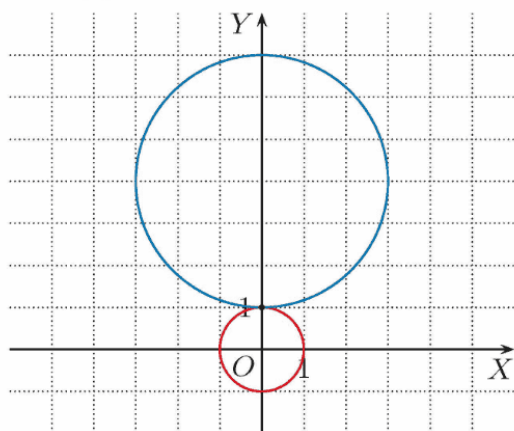
1. a) K_1 b) K_1, K_2
 c), d) K_1, K_2, K_3

2. a) $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 25$
 b) $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 100$
 c) $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 8$
 d) $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 17$

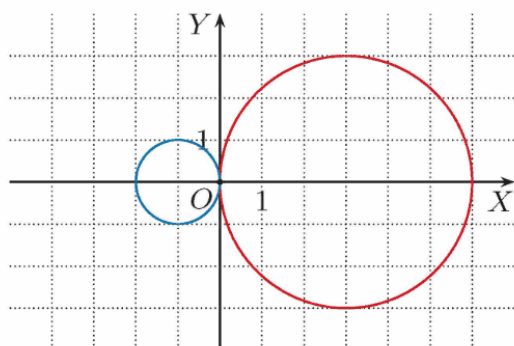
3. a) $x = 1, y = -\sqrt{3}$ lub $x = 1, y = \sqrt{3}$



b) $x = 0, y = 1$



c) $x = 0, y = 0$



4. $K_1: (x+3)^2 + y^2 = 1$,
 $K_2: x^2 + y^2 = 9$,
 $K_3: (x-4)^2 + y^2 = 4$
 a) $\left(-\frac{17}{6}, -\frac{\sqrt{35}}{6}\right), \left(-\frac{17}{6}, \frac{\sqrt{35}}{6}\right)$
 b) $\left(\frac{21}{8}, -\frac{3\sqrt{15}}{8}\right), \left(\frac{21}{8}, \frac{3\sqrt{15}}{8}\right)$

Zestaw powtórzeniowy I

1. a) $|AB| = 5, |BC| = 10, |AC| = 15$,
 współliniowe

b) $|AB| = 8\sqrt{5}, |BC| = 4\sqrt{5}$,
 $|AC| = 4\sqrt{5}$, współliniowe

c) $|AB| = 10, |BC| = 10$,
 $|AC| = 14\sqrt{2}$, niewspółliniowe

d) $|AB| = 6\sqrt{2}, |BC| = 3\sqrt{2}$,
 $|AC| = 9\sqrt{2}$, współliniowe

2. a) $2\sqrt{5}$ b) 5
 c) $2\sqrt{5}$ d) 2,5

3. a) $(0, 1), (2, -2), (4, -5)$
 b) $\left(\frac{1}{2}, 4\right), (2, 5), \left(\frac{7}{2}, 6\right)$

4. a) $B(-5, 2)$
 b) $B(7, 10)$
 c) $B(-2, -1)$
 d) $B(2\sqrt{3} - 3, 0)$

5. a) $S(4, 4)$
 b) $S(1, -2)$
 c) $S(-4, 4)$
 d) $S(-1, 3)$

6. a) $Ob = 12\sqrt{5}, S(0, 1), r = 5$
 b) $Ob = 24\sqrt{2}, S(2, 0), r = 2\sqrt{10}$

7. a) $|AD| = 5, |AE| = \sqrt{5}$
 b) $|AD| = \sqrt{65}, |AE| = 3\sqrt{5}$

8. a) podobne
 b) przystające

9. a) $(x+4)^2 + y^2 = 25$,
 $(1, 0), (-9, 0), (0, 3), (0, -3)$
 b) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$,
 $(-2, 0), (6, 0), (0, 3 - \sqrt{21}), (0, 3 + \sqrt{21})$
 c) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 16$,
 $(-2\sqrt{3} - 1, 0), (2\sqrt{3} - 1, 0), (0, 2 - \sqrt{15}),$
 $(0, 2 + \sqrt{15})$
 d) $(x+3)^2 + (y+4)^2 = 1$,
 nie ma punktów wspólnych z osiami
 układu współrzędnych

10. a) $S(0, 5)$, $r = 8$, $P = 128$
 b) $S(3, -4)$, $r = 9$, $P = 162$
 c) $S(2, 5)$, $r = 2\sqrt{5}$, $P = 40$
 d) $S(-11, -13)$, $r = 2\sqrt{10}$, $P = 80$

11. a) P , Q b) P , R c) Q

12. a) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$
 b) $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 16$
 c) $(x - \frac{3}{2})^2 + y^2 = 12\frac{1}{4}$
 d) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$
 e) $(x + 1)^2 + y^2 = 5$
 f) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 13$

13. a) $(3, 0)$, $(0, 3)$,
 $K_1: (x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$
 b) $(-4, 0)$, $(0, 4)$,
 $K_1: (x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 16$

14. $K_1: (x + 3)^2 + y^2 = 4$,
 $K_2: x^2 + (y - 1)^2 = 4$,
 $K_3: (x - 3)^2 + y^2 = 1$,
 $K_4: (x - 5)^2 + y^2 = 9$,
 $K_5: (x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 1$

a) K_1 i K_5

b) K_3 i K_4

15. $P_1 = 16\pi$, $P_2 = 8\pi$, $P = 8(\pi - 1)$

Zestaw powtórzeniowy II

1. a) $3\sqrt{2}$ b) $\frac{13}{5}$ c) $\sqrt{10}$
 2. a) $|AB| = 4\sqrt{2}$, $d = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $P = 6$
 b) $|AB| = 5\sqrt{2}$, $d = 5\sqrt{2}$, $P = 25$

3. a) $h = \frac{7\sqrt{2}}{2}$, $P = 42$

- b) $h = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $P = 1$

4. a) $2\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{5}$

5. a) $\sqrt{5}$ b) 2

6. a) $y = x - \frac{3}{2}$ b) $y = 2x + 2$

7. a) $l: y = 3x - 3$,

$$m: y = 3x + 3$$

$$b) l: y = -\frac{1}{2}x - 1,$$

$$m: y = -\frac{1}{2}x + 1$$

$$c) l: y = -\frac{3}{2}x + 2,$$

$$m: y = -\frac{3}{2}x - 2$$

8. a) $B(-1, -1)$, $D(3, 7)$

- b) $B(13, -7)$, $D(-3, 9)$

9. a) $B(2, 0)$, $D(-2, 4)$

- b) $B(-5, -6)$, $D(11, 10)$

10. $B(6, -2)$, $D(0, 4)$, $P = 12$

11. a) styczne zewnętrznie

- b), c) przecinają się

- d) rozłączne zewnętrznie

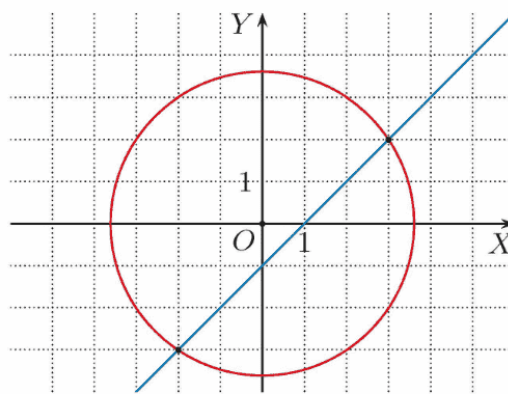
12. a) $r_1 = 2$, $r_2 = 2$, $|S_1S_2| = 2$,
 przecinają się

- b) $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $|S_1S_2| = 1$,
 styczne wewnętrznie

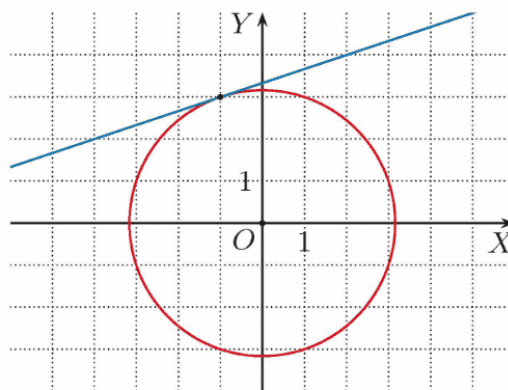
- c) $r_1 = 2\sqrt{2}$, $r_2 = 4\sqrt{2}$, $|S_1S_2| = 6\sqrt{2}$,
 styczne zewnętrznie

- d) $r_1 = \frac{17}{5}$, $r_2 = \frac{36}{5}$, $|S_1S_2| = \sqrt{113}$,
 rozłączne zewnętrznie

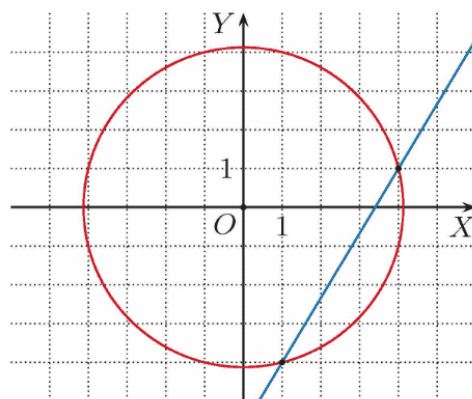
13. a) $x = -2$, $y = -3$ lub $x = 3$, $y = 2$



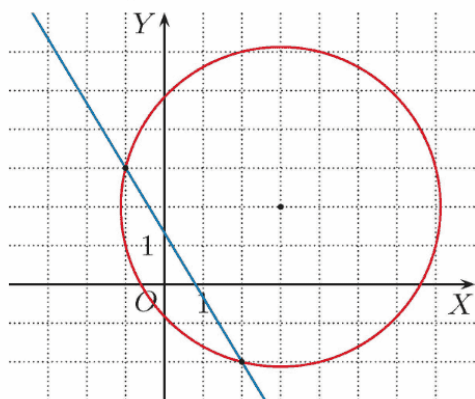
- b) $x = -1$, $y = 3$



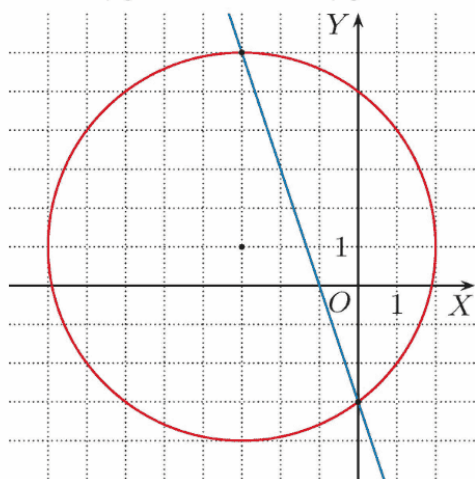
- c) $x = 1$, $y = -4$ lub $x = 4$, $y = 1$



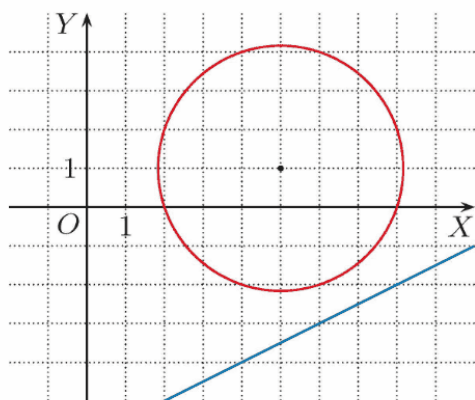
13. d) $x = -1, y = 3$ lub $x = 2, y = -2$



- e) $x = -3, y = 6$ lub $x = 0, y = -3$



- f) układ sprzeczny



14. a) $4\sqrt{2}$ b) 10

15. a) $x^2 + (y - 1)^2 = 5$
b) $x^2 + (y - 1)^2 = 10$

16. a) $x = -9$ lub $x = 7$
b) $x = -5\sqrt{2} - 1$ lub $x = 5\sqrt{2} - 1$
c) $x = -5\sqrt{3} - 1$ lub $x = 5\sqrt{3} - 1$
d) $x = -1$

Zadania testowe

1. C 2. C 3. B 4. D 5. C 6. B 7. D 8. A

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. 13
2. 5
3. $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 9$
4. $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 4, d = 6$
5. $P = 32, h = \frac{8\sqrt{10}}{5}$
6. $y = \frac{3}{4}x + \frac{31}{8}$
8. $A(6, -2), B(-2, 4)$
9. $(2, 2), (5, 1), (6, 4), (3, 5)$

3.1. Pojęcie ciągu

1. a) $a_n = 2^n, a_9 = 512, a_{10} = 1024$

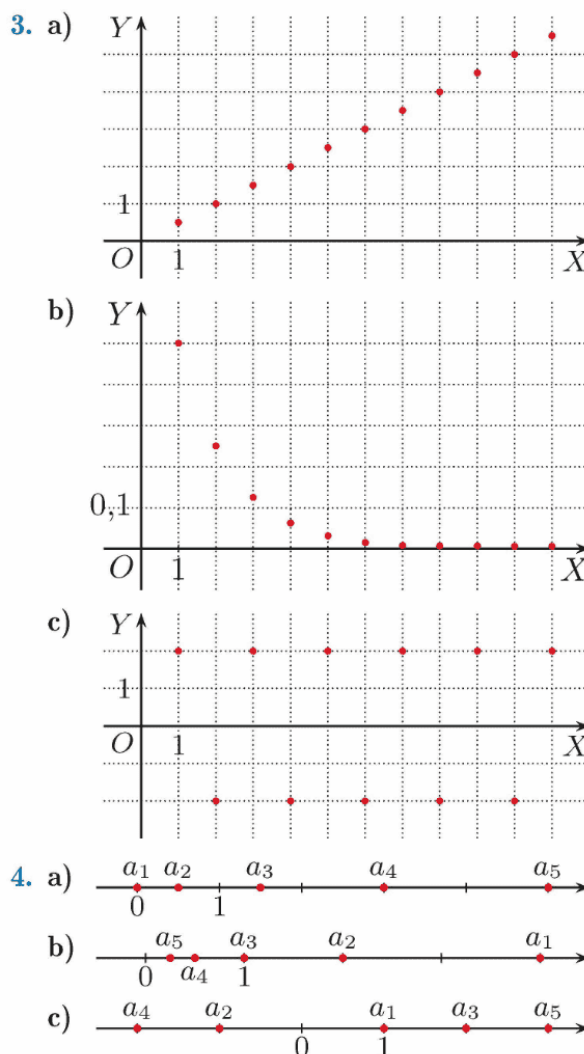
b) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, a_9 = \frac{1}{512}, a_{10} = \frac{1}{1024}$

c) $a_n = (-1)^n, a_9 = -1, a_{10} = 1$

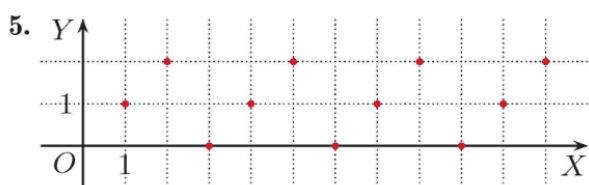
d) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, a_9 = \frac{1}{9}, a_{10} = -\frac{1}{10}$

2. A: $a_{17} = 34, a_{100} = 200$

B: $a_{17} = 3, a_{100} = 3$



- Z** 1. a) $a_7 = 13, a_8 = 15, a_9 = 17, a_{10} = 19$
 b) $a_7 = \frac{1}{14}, a_8 = \frac{1}{16}, a_9 = \frac{1}{18}, a_{10} = \frac{1}{20}$
 c) $a_7 = 17, a_8 = 19, a_9 = 23, a_{10} = 29$
3. a) $a_1 = 1,4, a_2 = 1,41, a_3 = 1,414,$
 $a_4 = 1,4142, a_5 = 1,41421, a_6 = 1,414214$
 b) $a_1 = 1,7, a_2 = 1,73, a_3 = 1,732,$
 $a_4 = 1,7321, a_5 = 1,73205, a_6 = 1,732051$
 c) $a_1 = 3,1, a_2 = 3,14, a_3 = 3,142,$
 $a_4 = 3,1416, a_5 = 3,14159, a_6 = 3,141593$
4. a) $a_1 = 1, a_2 = 8, a_3 = 27, a_4 = 64,$
 $a_5 = 125$
 b) $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{9}, a_3 = \frac{1}{25}, a_4 = \frac{1}{49},$
 $a_5 = \frac{1}{81}$



3.2. Sposoby określania ciągu

- Ć** 1. a) 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10
 b) 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59
2. a) $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{4}{3}, a_3 = \frac{9}{4}, a_4 = \frac{16}{5},$
 $a_{10} = \frac{100}{11}$
 b) $a_1 = 0, a_2 = \frac{3}{5}, a_3 = \frac{4}{5}, a_4 = \frac{15}{17},$
 $a_{10} = \frac{99}{101}$
 c) $a_1 = -1, a_2 = -\frac{3}{8}, a_3 = -\frac{1}{5},$
 $a_4 = -\frac{1}{8}, a_{10} = -\frac{1}{40}$
 d) $a_1 = 0, a_2 = 4, a_3 = 18, a_4 = 48,$
 $a_{10} = 900$
3. a) $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 1, a_4 = -1,$
 $a_{10} = -1$
 b) $a_1 = 2, a_2 = -4, a_3 = 8, a_4 = -16,$
 $a_{10} = -1024$
 c) $a_1 = -1, a_2 = 2, a_3 = -3, a_4 = 4,$
 $a_{10} = 10$
 d) $a_1 = -4, a_2 = 8, a_3 = -16, a_4 = 32,$
 $a_{10} = 2048$
 e) $a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = -\frac{1}{2}, a_4 = \frac{3}{5},$
 $a_{10} = \frac{9}{11}$
 f) $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = -\frac{3}{5}, a_3 = \frac{5}{7}, a_4 = -\frac{7}{9},$
 $a_{10} = -\frac{19}{21}$
4. a) $a_n = 3^{n-1}$
 b) $a_n = n^2 - 1$

- c) $a_n = (-1)^n \cdot n^2$
 d) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot 3^n$
 e) $a_n = \sqrt{n}$
 f) $a_n = \frac{3}{n^2+1}$
 g) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$
 h) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+3)}$

5. a) $a_4 = 2, a_5 = 3, a_6 = 4$
 b) $a_4 = 8, a_5 = 27, a_6 = 64$
 c) $a_4 = 0, a_5 = -1, a_6 = -2$
6. a) $a_4 = 0; a_n > 0$ dla $n \in \{1, 2, 3\}$
 b) brak wyrazów równych zeru;
 $a_n > 0$ dla $n \in \{1, 2, 3, 4\}$
 c) $a_2 = 0; a_n > 0$ dla $n \geq 3$ i $n \in \mathbb{N}$
 d) brak ma wyrazów równych zeru;
 $a_n > 0$ dla $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Z** 1. a) 2, 6, 10, 14, 18
 b) 2, 2, 0, -4, -10
 c) 1, 2, 5, 12, 27
 d) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}$
 e) $3, \frac{3}{2}, \frac{7}{3}, \frac{7}{4}, \frac{11}{5}$
 f) 2, 1, 4, 3, 6
 g) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, -\frac{1}{20}, \frac{1}{30}$
 h) 0, 2, 0, 4, 0
 i) 2, 2, 18, -48, 650
2. a) $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{6}$
 b) 0, 4, 0, 16, 0, 64
 c) 2, 2, 6, $\frac{4}{3}, 10, \frac{6}{5}$
 d) $\frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 16, \frac{1}{7}, 36$
3. a) $a_n = \frac{2n-1}{2n+1}$
 b) $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$
 c) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{3^n}$
 d) $a_n = \sqrt[n]{n+1}$
 e) $a_n = \frac{3n-2}{5n+1}$
 f) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2 \cdot 3^n}$
4. a) a_3 b) a_1, a_3 c) a_2
 d) brak wyrazów równych zeru
 e) a_2, a_3 f) a_4, a_8
5. a) $a_1, a_2, \dots, a_6$
 b) $a_2, a_3, \dots, a_9$
 c) brak wyrazów ujemnych
6. a) a_5 b) a_4 c) a_3, a_4

7. a) $n \in \{1, 2, \dots, 5\}$
 b) $n \in \mathbb{N}_+ \setminus \{3, 4, 5\}$
8. a) a_1, a_2, a_4
 b) a_1, a_2, a_5
 c) a_1, a_2, a_3, a_6
10. a) $a_n = -\frac{1}{2}n + 3$
 b) $a_n = -\frac{2}{3}n + 1$
 c) $a_n = -\frac{1}{3}n + 9$
11. $a_n = n^2 - 6n + 5$; $a_1, a_2, \dots, a_7$
12. $a_n = -2n^2 + 8n$
13. a) $\frac{9}{2}, 3, \frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}, -3$
 b) $-1, 0, 3, 8, 15, 24$
 c) $-3, 5, -7, 9, -11, 13$
 d) $2, -1, 4, -3, 6, -5$
 e) $1, 0, -1, -2, -3, -2$
 f) $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}$
15. a) 6 b) 8 c) 7

3.3. Ciągi monotoniczne

- Ć 1. a) np. $a_n = 10 + \frac{1}{n}$
 b) np. $a_n = -\frac{1}{n}$
3. a) $a_1 = 4, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = 1, a_5 = 4$; nie jest
 b) $a_1 = 3, a_2 = 4, a_3 = 3, a_4 = 0, a_5 = -5$; nie jest
 c) $a_1 = -1, a_2 = -5, a_3 = -7, a_4 = -7, a_5 = -5$; nie jest
4. a) $\frac{n+1}{2n+3}$
 b) $\frac{-2n-2}{3n+1}$
 c) $\frac{n-2}{n^2+2n+2}$
 d) $\frac{n^2+2n}{2n-3}$
7. a) $a_5 = a_6 = 4$
 b) $a_3 \in \langle \frac{3}{2}; 2 \rangle, a_5 \in \langle 2; 3 \rangle, a_6 \in \langle 2; 3 \rangle$ i $a_5 \leq a_6$
8. a) np. 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1
 b) np. 2, 2, 2, -1, -1, -1, -2, -2
- Z 1. a) $n^2 + 2n$ b) $-n^2 + 1$
 c) $\frac{n+4}{n+1}$ d) $\frac{2n+2}{n+6}$
 e) $\frac{3n-1}{2n+3}$ f) $\frac{-3n-1}{4n-1}$
 g) $\frac{2n^2+4n+5}{2n+8}$
 h) $\frac{-2n^2-4n+2}{2n^2+4n+1}$

4. a) $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{25}$
 b) $5, \frac{7}{2}, \frac{13}{3}, \frac{15}{4}, \frac{21}{5}$
 c) 3, 2, 1, 0, 1
 d) 3, 0, 5, 12, 21
 e) 0, -1, 0, 3, 8
 f) 7, 12, 15, 16, 15
5. a) malejący b) stały c) rosnący
6. a) $k < 1$ b) $k > 1$ c) $k = 1$
7. a) $k \in (\frac{3}{2}; \infty)$
 b) $k \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$
 c) $k \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$
8. a) nierosnący dla $t \geq 9$,
 niemalejący dla $t \leq 9$
 b) nierosnący dla $t \in \langle -3; 3 \rangle$,
 niemalejący dla $t \in (-\infty; -3) \cup \langle 3; \infty \rangle$
 c) nierosnący dla $t \in (-\infty; 0) \cup \langle 2; \infty \rangle$,
 niemalejący dla $t \in \langle 0; 2 \rangle$
9. a) np. $a_n = -n$
 b) np. $a_n = -\frac{1}{n}$
10. a) 1, 0, 1, 4, 9
 b) -5, -8, -9, -8, -5
 c) 3, 2, 1, 0, 1
 d) 3, 4, 3, 0, 5
11. a) $a_{n+1} = \frac{n}{n+1}, r = \frac{1}{n(n+1)}$
 b) $a_{n+1} = \frac{3n}{n+2}, r = \frac{6}{(n+1)(n+2)}$
 c) $a_{n+1} = \frac{2n-2}{2n+3}, r = \frac{10}{(2n+1)(2n+3)}$
 d) $a_{n+1} = \frac{2n-2}{3n+5}, r = \frac{16}{(3n+2)(3n+5)}$
12. a), c), f) rosnący
 b), e), g), h) malejący
 d) nierosnący

3.4. Ciągi określone rekurencyjnie

- Ć 1. a) $a_4 = 0, a_5 = -1, a_6 = 0$
 b) $a_4 = 15, a_5 = 31, a_6 = 63$
 c) $a_4 = 13, a_5 = 27, a_6 = 53$
2. a) $a_2 = -1, a_3 = -4, a_4 = -7, a_5 = -10, a_6 = -13$
 b) $a_2 = -6, a_3 = -12, a_4 = -24, a_5 = -48, a_6 = -96$
 c) $a_2 = 1, a_3 = -1, a_4 = -9, a_5 = -35, a_6 = -115$
 d) $a_2 = \frac{1}{32}, a_3 = \frac{1}{8}, a_4 = 1, a_5 = 16, a_6 = 512$

2. e) $a_2 = 3, a_3 = 7, a_4 = 46, a_5 = 2112, a_6 = 4460539$

f) $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$

3. a) $a_3 = 2, a_4 = 4, a_5 = 6, a_6 = 10$

b) $a_3 = 4, a_4 = 7, a_5 = 11, a_6 = 18$

c) $a_3 = 0, a_4 = -1, a_5 = 1, a_6 = 2$

d) $a_3 = 0, a_4 = -3, a_5 = -4, a_6 = 7$

5. a) $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n + 2,$

$a_{n+1} = \frac{2n+3}{2n+1}a_n$ dla $n \geq 1$

b) $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 2n + 1,$

$a_{n+1} = \frac{n^2+2n+2}{n^2+1}a_n$ dla $n \geq 1$

c) $a_1 = 6, a_{n+1} = a_n + 4 \cdot 3^n,$

$a_{n+1} = 3a_n$ dla $n \geq 1$

d) $a_1 = -1, a_{n+1} = a_n + 2 \cdot (-1)^{n+1},$

$a_{n+1} = -a_n$ dla $n \geq 1$

e) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + n + 1,$

$a_{n+1} = \frac{n+2}{n}a_n$ dla $n \geq 1$

f) $a_1 = \sqrt{2},$

$a_{n+1} = a_n + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1},$

$a_{n+1} = \sqrt{\frac{n+2}{n+1}}a_n$ dla $n \geq 1$

[Z] 1. a) $a_2 = 0, a_3 = 10, a_4 = 30, a_5 = 70,$
8 liczb dodatnich

b) $a_2 = 4, a_3 = 0, a_4 = -8, a_5 = -24,$
2 liczby dodatnie

c) $a_2 = -1, a_3 = 3, a_4 = -5, a_5 = 11,$
5 liczb dodatnich

d) $a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 5, a_5 = 14,$
8 liczb dodatnich

e) $a_2 = 0, a_3 = \frac{1}{4}, a_4 = \frac{9}{16}, a_5 = \frac{289}{256},$
8 liczb dodatnich

f) $a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 2, a_5 = 15,$
10 liczb dodatnich

2. a) 4 b) 3 c) 6 d) 2

3. a) -4 b) 52

c) -1 d) 5

4. a) $x = 20$, ciąg malejący

b) $x = \frac{1}{6}$, ciąg rosnący

6. a) 0 b) 2 c) $\frac{5}{3}$ d) 2

7. a) $a_3 = 0, a_4 = -6, a_5 = 28, a_6 = 774$

b) $a_3 = 2, a_4 = -3, a_5 = -25,$

$a_6 = -100$

c) $a_3 = 2, a_4 = 1, a_5 = a_6 = \frac{1}{2}$

d) $a_3 = 9, a_4 = 15, a_5 = 33, a_6 = 63$

8. a) -1 lub 0 b) -2 lub 1

3.5. Ciąg arytmetyczny (1)

[C] 1. a) $r = 9$, kolejne wyrazy: 30, 39

b) $r = \frac{2}{3}$, kolejne wyrazy: $3\frac{2}{3}, 4\frac{1}{3}$

c) $r = -4$, kolejne wyrazy: -5, -9

2. a) $a_n = 2n, a_{20} = 40$

b) $a_n = \frac{1}{2}n + 3\frac{1}{2}, a_{20} = 13\frac{1}{2}$

c) $a_n = -n + 4, a_{20} = -16$

3. a) $a_n = 2n + 2$

b) $a_n = 5n - 10$

c) $a_n = -\frac{1}{4}n + 5\frac{1}{4}$

4. a) $r = -6$, malejący, $a_n = -6n + 15$

b) $r = \frac{3}{4}$, rosnący, $a_n = \frac{3}{4}n + 1$

c) $r = 0$, stały, $a_n = 2$

5. a) $k = 5$

b) $k = -1$ lub $k = 3$

6. a) $a_4 = 3m + 10, a_5 = 4m + 12;$

rosnący dla $m > -2,$

malejący dla $m < -2,$

stały dla $m = -2$

b) $a_4 = 2m - 9, a_5 = \frac{5}{2}m - 12;$

rosnący dla $m > 6,$

malejący dla $m < 6,$

stały dla $m = 6$

c) $a_4 = 3m^2 - 2, a_5 = 4m^2 - 3;$

rosnący dla $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty),$

malejący dla $m \in (-1; 1),$

stały dla $m \in \{-1; 1\}$

d) $a_4 = 3m - 2m^2, a_5 = 4m - 3m^2;$

rosnący dla $m \in (0; 1),$

malejący dla $m \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty),$

stały dla $m \in \{0, 1\}$

7. a) $x = 23$ b) $x = -2$ c) $x = \frac{5}{12}$

[Z] 1. a) $a_{14} = 34$, rosnący

b) $a_{11} = -36$, malejący

c) $a_{20} = 10,5$, rosnący

d) $a_{35} = 1,4$, rosnący

2. a) $a_n = 7n - 1$

b) $a_n = 3n - 7$

c) $a_n = 9\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n$

3. a) $a_n = 2n - 1$

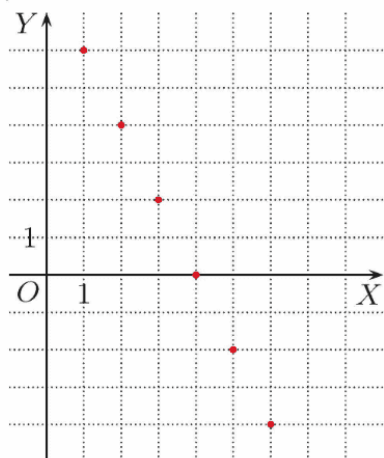
b) $a_n = -3n + 15$

c) $a_n = \frac{1}{2}n - 7\frac{1}{2}$

4. a) $a = 4, b = 7$
 b) $a = 26\frac{1}{2}, b = 51, c = 75\frac{1}{2}$
5. a) 5, 9, 13, 17, 21
 b) 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22
6. a) $a_n = 44 - 4n, a_{12} = -4$
 b) $a_n = -10\frac{1}{2} + \frac{1}{2}n, a_{12} = -4\frac{1}{2}$
 c) $a_n = 2\frac{3}{4} + \frac{1}{4}n, a_{12} = 5\frac{3}{4}$
7. a) $a_1 = 21, r = -5$
 b) $a_1 = -2, r = 5$
 c) $a_1 = -2, r = 2$
 d) $a_1 = \frac{7}{2}, r = -\frac{1}{2}$
 e) $a_1 = -1, r = \frac{1}{2}$ lub $a_1 = 1, r = -\frac{1}{2}$
 f) $a_1 = -1, r = 2$
 lub $a_1 = \frac{5}{2}, r = -\frac{3}{2}$
8. a) $x = 1 - \sqrt{3}$ lub $x = 1 + \sqrt{3}$
 b) $x = 10$
9. a_{16}
10. -6, -5, -4, -3
11. a) $x = 7, y = 11$
 b) $x = 15,5, y = 27, z = 38,5$
12. a) $a_n = 3n - 4, a_6 = 14$
 b) $a_n = 20 - 4n, a_6 = -4$
 c) $a_n = \frac{1}{2}n - 6, a_6 = -3$
13. a) $a_n = 8 - 4n, a_2 = 0$
 b) $a_n = 2n + 1, a_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$
 c) $a_n = 16 - 9n, a_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$

3.6. Ciąg arytmetyczny (2)

3. a) $a_n = -2n + 8, y = -2x + 8$



- b) $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 7, a_4 = 10,$
 $a_5 = 13, a_n = 3n - 2$
 c) $y = 2x + 1$

1. a) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, a_5 = 5$
4. a) $a_n = 5n - 4, a_1 = 1, a_2 = 6, a_3 = 11,$
 $a_4 = 16$
 b) $a_n = -3n + 1, a_1 = -2, a_2 = -5,$
 $a_3 = -8, a_4 = -11$
 c) $a_n = n\sqrt{3} - 2, a_1 = \sqrt{3} - 2,$
 $a_2 = 2\sqrt{3} - 2, a_3 = 3\sqrt{3} - 2,$
 $a_4 = 4\sqrt{3} - 2$
5. a) $a_n = \frac{1}{2}n - \frac{3}{2};$
 $a_n > 0$ dla $n \geq 4$
 b) $a_n = -2n + 9;$
 $a_n > 0$ dla $n \leq 4$
 c) $a_n = -\frac{1}{4}n + \frac{5}{2};$
 $a_n > 0$ dla $n \leq 9$
6. a) $a_n = 3n - 8, a_{10} = 22$
 b) $a_n = (n + 2)\sqrt{2}, a_{10} = 12\sqrt{2}$
8. a) 36 b) 6, 8
9. b) 13,5
10. a)–d) jest arytmetyczny
 e), f) nie jest arytmetyczny
11. a) $y = 2x + 3, a_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$
 b) $y = -\frac{1}{3}x + 10, a_{30} = 0$
 c) $y = x - 14, a_{14} = 0$

Suma, różnica, iloczyn i iloraz ciągów

1. a) $c_n = 3n, c_1 = 3, c_2 = 6, c_3 = 9,$
 $c_4 = 12$
 b) $c_n = n - 2, c_1 = -1, c_2 = 0, c_3 = 1,$
 $c_4 = 2$
 c) $c_n = 2n^2 + n - 1, c_1 = 2, c_2 = 9,$
 $c_3 = 20, c_4 = 35$
 d) $c_n = \frac{2n-1}{n+1}, c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = 1, c_3 = \frac{5}{4},$
 $c_4 = \frac{7}{5}$
2. a) $c_1 = 13, c_2 = 10, c_3 = 13, c_4 = 19,$
 nie jest monotoniczny
 b) $c_1 = -11, c_2 = -2, c_3 = 5, c_4 = 13,$
 rosnący
 b) $c_1 = 12, c_2 = 24, c_3 = 36, c_4 = 48,$
 rosnący
 c) $c_1 = \frac{1}{12}, c_2 = \frac{2}{3}, c_3 = \frac{9}{4}, c_4 = \frac{16}{3},$
 rosnący
4. a) np. $a_n = n, b_n = -\frac{1}{n}$
 b) np. $a_n = -\frac{1}{n}, b_n = -\frac{1}{n}$
 c) np. $a_n = n - 1, b_n = n - 3$

3.7. Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (1)

- Ć 1. a) $S_{50} = 1275$
b) $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$
2. a) $a_6 = 16, S_6 = 51$
b) $a_{20} = 10, S_{20} = 105$
3. a) $S_{31} = 1953$ b) $S_{13} = -299$
4. a) 20 wyrazów, suma: 1070
b) 12 wyrazów, suma: -246
c) 9 wyrazów, suma: 39
5. 800
6. a) 4950 b) 6567
- Z 1. a) 115 b) -185 c) 10,5
2. a) $a_1 = 0, a_{10} = 18, S_{10} = 90$
b) $a_1 = -4, a_{10} = 5, S_{10} = 5$
c) $a_1 = 18, a_{10} = -36, S_{10} = -90$
3. a) 11 wyrazów, suma: 209
b) 15 wyrazów, suma: 75
c) 20 wyrazów, suma: -440
4. a) 1021068 b) 2475
5. a) 1665 b) 945 c) 728
6. a) 3240 b) 329400 c) 83167
7. a) 970 b) 810 c) 1140
8. a) 334167 b) 234168
c) 145059
9. a) $S_9 = 81, S_{18} = 324$
b) $S_9 = -63, S_{18} = -369$
c) $S_9 = 49\frac{1}{2}, S_{18} = 220\frac{1}{2}$
10. a) 140 b) 130 c) 16
11. a) 348 b) 10050
c) -252 d) 0
12. a) 1010 b) 1030 c) 2040

3.8. Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (2)

- Ć 2. 15
- Z 1. a) 21 b) 14 c) 39
2. a) 4 b) 7 c) 11
3. 8
4. a), b), c) rosnący
d) malejący

5. a) $x = -3$ b) $x = -0,4$ c) $x = -4$
6. $a_1 = 1, r = \frac{2}{3}$ lub $a_1 = 7, r = -\frac{2}{3}, S_{10} = 40$
7. a) 21 b) 26

3.9. Ciąg geometryczny (1)

- Ć 1. $P_2 = 0,8 \text{ cm}^2, P_3 = 3,2 \text{ cm}^2, P_4 = 12,8 \text{ cm}^2$
2. a) $q = 2, a_4 = 24, a_5 = 48$
b) $q = 3, a_4 = 1, a_5 = 3$
c) $q = \frac{1}{2}, a_4 = \frac{1}{2}, a_5 = \frac{1}{4}$
d) $q = \frac{1}{4}, a_4 = 1, a_5 = \frac{1}{4}$
e) $q = -2, a_4 = -8, a_5 = 16$
f) $q = -\frac{1}{3}, a_4 = 1, a_5 = -\frac{1}{3}$
3. a) $a_2 = 3, a_3 = 9, a_4 = 27, a_5 = 81$
b) $a_2 = 8, a_3 = 4, a_4 = 2, a_5 = 1$
c) $a_2 = -5, a_3 = 5, a_4 = -5, a_5 = 5$
d) $a_2 = -\frac{1}{2}, a_3 = 1, a_4 = -2, a_5 = 4$
e) $a_2 = 1, a_3 = \sqrt{2}, a_4 = 2, a_5 = 2\sqrt{2}$
f) $a_2 = 2\sqrt{3}, a_3 = 6\sqrt{2}, a_4 = 12\sqrt{3}, a_5 = 36\sqrt{2}$
4. a) $q = 9$ b) $q = \frac{3}{2}$ c) $q = \frac{1}{6}$
d) $q = -\frac{3}{4}$ e) $q = -2\sqrt{2}$ f) $q = \frac{\sqrt{6}}{2}$
6. a) $a_6 = 4$ b) $a_7 = \frac{1}{625}$
c) $a_4 = \frac{64}{27}$ d) $a_6 = \frac{625}{64}$
e) $a_5 = -162$ f) $a_{15} = -7$
g) $a_9 = 80$ h) $a_8 = -\frac{1}{27}$
7. a) $a_1 = 8$ b) $a_1 = -\frac{1}{2}$ c) $a_1 = \frac{1}{27}$
- Z 1. a) $q = \frac{1}{2}, a_n = 2^{8-n}, a_7 = 2$
b) $q = 4, a_n = 4^{n-3}, a_7 = 256$
c) $q = -3, a_n = (-1)^{n+1} \cdot 3^{n-6}, a_7 = 3$
d) $q = \frac{4}{5}, a_n = (\frac{4}{5})^{n-5}, a_7 = \frac{16}{25}$
e) $q = -\sqrt{2}, a_n = -(-\sqrt{2})^n, a_7 = 8\sqrt{2}$
f) $q = \frac{3}{2}, a_n = \frac{3^{n-3}}{2^{n-2}}, a_7 = \frac{81}{32}$
2. a) $a_4 = 4 + 2\sqrt{2}, a_5 = 4\sqrt{2} + 4$
b) $a_4 = 2\sqrt{2} + 3, a_5 = 5\sqrt{2} + 7$
3. a) $a_n = \frac{125}{96} \cdot (\frac{8}{25})^{n-1}$ b) $a_n = \frac{54}{25} \cdot (\frac{5}{6})^{n-1}$
c) $a_n = -\frac{7}{2} \cdot (-2)^{n-1}$ lub $a_n = \frac{7}{2} \cdot 2^{n-1}$
d) $a_n = -\frac{3}{4} \cdot 2^{n-1}$
e) $a_n = -1024 \cdot (-\frac{1}{2})^{n-1}$
lub $a_n = 1024 \cdot (\frac{1}{2})^{n-1}$
f) $a_n = -\frac{1}{243} \cdot (-3)^{n-1}$ lub $a_n = \frac{1}{243} \cdot 3^{n-1}$

4. a) $-243, -81, -3$ b) $\frac{3}{16}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{2}$
 c) $3, 12, 24, 96$ d) $\frac{1}{3}, -1, -9, 27$
 e) $4, 2, 1, \frac{1}{2}$ f) $\frac{5}{3}, 5, 15, 45$
5. a) $q = 3, a_3 = 72, a_4 = 216, a_5 = 648$
 b) $q = -3, a_3 = 18, a_4 = -54, a_5 = 162$
 c) $q = \frac{4}{3}, a_3 = 1\frac{1}{3}, a_4 = 1\frac{7}{9}, a_5 = 2\frac{10}{27}$
 d) $q = -6, a_3 = -12, a_4 = 72, a_5 = -432$
 e) $q = \frac{2}{3}, a_3 = -5\frac{1}{3}, a_4 = -3\frac{5}{9}, a_5 = -2\frac{10}{27}$
 f) $q = \frac{\sqrt{2}}{2}, a_3 = 1, a_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}, a_5 = \frac{1}{2}$
6. a) $a_2 = 5\sqrt[3]{9}, a_3 = 5\sqrt[3]{3}$
 b) $a_2 = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}, a_3 = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$
 c) $a_2 = \frac{\sqrt[3]{100}}{10}, a_3 = -\sqrt[3]{10}$
7. a) $a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = \frac{1}{2}$ b) $a_2 = -32, a_3 = 16$
 c) $a_2 = \frac{1}{64}, a_3 = -\frac{1}{16}$

3.10. Ciąg geometryczny (2)

- C** 2. a) $a_n = \frac{8}{9} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$
 b) $a_n = -2^{4-n}$ c) $a_n = -2^n$
3. a), c) malejący d), e), f) rosnący
 b) nie jest monotoniczny
5. a) $x = -\frac{1}{5}$
 b), c) $x = 0$ lub $x = 2$
- Z** 1. a), d) malejący
 b) nie jest monotoniczny
 c) rosnący
3. a) $a_n = -4^{7-n}$
 b) $a_n = \frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{n-2}{2}}$ lub $a_n = -\frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{n-2}{2}}$
 c) $a_n = 5^{3-n}$ lub $a_n = -5^{3-n}$
 d) $a_n = 5^{n-1}$
 e) $a_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ lub $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$
 f) $a_n = -\sqrt{2} \cdot 3^{\frac{n-1}{2}}$ lub $a_n = \sqrt{2} \cdot 3^{\frac{n-1}{2}}$
4. $a = 32, b = 16, c = 8, d = 4$
5. $x = 11, y = 22, z = 44$
6. a), c) rosnący b), d) malejący
 e), f) nie jest monotoniczny
7. a) $x = 8, y = 128$, rosnący
 lub $x = -8, y = -128$,
 nie jest monotoniczny
 b) $x = \sqrt{2}, y = 2\sqrt{2}$, rosnący
 lub $x = -\sqrt{2}, y = -2\sqrt{2}$,
 nie jest monotoniczny

- c) $x = 12, y = 5\frac{1}{3}$, malejący
 lub $x = -12, y = -5\frac{1}{3}$,
 nie jest monotoniczny
 d) $x = \frac{1}{100}, y = 1$, rosnący
 lub $x = -\frac{1}{100}, y = -1$,
 nie jest monotoniczny

3.11. Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

- C** 1. a) 364 b) -21 c) $\frac{63}{32}$
 2. a) $\frac{31}{32}$ b) $\frac{341}{32}$ c) $\frac{5}{32}$
 3. a) -63 b) -484
 4. a) 7 b) 4
 5. 5
 6. a) 1023 b) -2046
- Z** 1. a) $15\frac{15}{16}$ b) $26\frac{242}{243}$ c) -1275 d) -56
 2. a) -255 b) $\frac{211}{72}$ c) $93(1 - \sqrt{2})$ d) 100

a_1	q	n	a_n	S_n
2	3	5	162	242
-32	$\frac{1}{2}$	7	$-\frac{1}{2}$	$-63\frac{1}{2}$
$\sqrt{8}$	$-\sqrt{2}$	8	-32	$30(\sqrt{2} - 2)$

3. a) $\frac{1023}{512} \text{ cm}^2$ b) $\frac{31}{8}(2 + \sqrt{2}) \text{ cm}$
 5. a) 4 b) 1091,2 c) 2
 d) 48 e) $1 + \sqrt{2}$ f) 9
 6. a) 6 b) 9 c) 10
 7. a) 7 b) 6
 8. $0,9 \text{ cm}^2$
 9. a) $a_n = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$
 b) $a_n = (-1)^n \cdot 3^{n-1}$ lub $a_n = \frac{1}{3} \cdot 2^{6-n}$
 10. -1023
 11. a) 0 b) x
 12. 381 lub $728\frac{2}{3}$
 13. $9(\sqrt{3} - 1)$
 14. 8
 15. $a_n = 2^{n-1}$
 16. a) 682 b) -242 c) $13\frac{3}{4}$
 17. a) $S_6 = -364, S_7 = 1094$
 b) $S_6 = 0, S_7 = 7$ c) $S_6 = 60\frac{2}{3}, S_7 = 60\frac{7}{9}$
 18. a) 32 b) 512 c) 2048
 19. a) 5 b) 8 c) 10

3.12. Ciągi arytmetyczne i ciągi geometryczne – zadania

Ć 1. a) 8, 5, 2

b) $a = 2$, $b = 4$, $c = 6$

lub $a = 11$, $b = 4$, $c = -3$

Z 1. a) 0 b) 220

2. $a_n = 2(n - 2)$

3. 9

4. $q = 3$, $a_1 = \frac{1}{11}$, $a_6 = 22\frac{1}{11}$

5. 2, 7, 12 lub 18, 7, -4

6. 4, 8, 16 lub $\frac{28}{3}$, $\frac{28}{3}$, $\frac{28}{3}$

7. a) 108 lub 36

b) -36

8. 2, 5, 8 lub 11, 5, -1

9. 9, 3, 1

10. a) 10, 20 lub $-\frac{15}{2}$, $\frac{45}{4}$ b) 2, 8

11. 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, 0 lub $\frac{1}{16}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{15}{16}$

12. a) $q = \frac{1}{2}$

b) suma obwodów: $23\frac{1}{4}$,
suma pól: $\frac{341}{64}\sqrt{3}$

13. 2, 4, 6 lub 6, 4, 2

14. -6, 6, 18 lub 10, 6, 2

15. 4, 12, 36

3.13. Procent składany

Ć 1. a) około 6230,91 zł

b) około 7673,43 zł

c) około 6719,58 zł

2. odsetki: około 3144,47 zł,
różnica kapitału: około 743,25 zł

3. a) około 995,43 zł

b) około 995,43 zł

c) około 980,34 zł

4. B

5. a) około 12 166,53 zł

b) około 12 189,94 zł

c) około 12 201,90 zł

d) około 12 209,97 zł

6. około 2641,36 zł

7. a) po 8 latach około 4791,40 zł,
po 20 latach około 15 484,60 zł

b) około 10 001,43 zł

8. a) około 143 183,39 zł

b) około 200 144,82 zł

c) około 228 151,10 zł

Z 1. a) 2205 zł b) około 2552,56 zł

c) około 2687,83 zł

2. a), b) około 754,76 zł

3. $r \approx 7,5\%$

4. po 5 latach około 1000 zł,
po 3 latach około 1082 zł

5. a) około 3582,16 zł

b) około 3586,85 zł

c) około 3590,04 zł

d) około 3591,60 zł

6. 3 lata

7. $k = 5000$,

po 18 latach około 12 033,10 zł

8. 25 000 zł

9. a) po 12 latach

b) po 24 latach

10. a) 180 840,96 zł b) 9 lat

11. a) 4326,40 zł

b) około 4637,10 zł

c) około 5920,98 zł

12. w ciągu 5 lat około 3097,20 zł,
w ciągu 10 lat około 8097,65 zł

13. bank C

3.14. Zagadnienia uzupełniające

2. a) $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_3 = 12$, $a_4 = 24$; $q = 2$

b) $a_1 = 6$, $a_2 = 2$, $a_3 = \frac{2}{3}$, $a_4 = \frac{2}{9}$; $q = \frac{1}{3}$

c) $a_1 = 4$, $a_2 = 1$, $a_3 = \frac{1}{4}$, $a_4 = \frac{1}{16}$; $q = \frac{1}{4}$

d) $a_1 = \frac{1}{16}$, $a_2 = \frac{1}{8}$, $a_3 = \frac{1}{4}$, $a_4 = \frac{1}{2}$;
 $q = 2$

3. a) $f(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^{x-1}$

b) $f(x) = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{x-1}$

4. a) 24 b) 14 c) 7

Zestaw powtórzeniowy I

1. a) -3 b) 3 c) 10 d) -6

2. a) -4 b) -7

3. a), c), f) ciąg arytmetyczny

a), b) ciąg rosnący

c), d), e), f) ciąg malejący

4. a) $a_6 = 12, a_9 = 18$
 b) $a_6 = -30, a_9 = -45$
 c) $a_6 = 8, a_9 = 11$
 d) $a_6 = -5, a_9 = -11$
 e) $a_6 = 50, a_9 = 80$
 f) $a_6 = 5\frac{1}{2}, a_9 = 4$
5. a) $a_n = 2n - 2, a_8 = 14$
 b) $a_n = 3n - 6, a_8 = 18$
 c) $a_n = -2n + 10, a_8 = -6$
6. a) $a_n = 3n - 1$ lub $a_n = -3n + 8$
 b) $a_n = 2n - 12$ lub $a_n = 2n$
 c) $a_n = n + 1$ lub $a_n = 5n - 11$
7. a) 222 b) 168 c) 168
 d) 66 e) 60 f) -6
8. a) 50 b) -550 c) 4000 d) 2525
9. 50 m
10. $a_1 = 2, a_2 = 8, a_3 = 20, a_8 = 240$
11. a), b), c) ciąg geometryczny
 a) ciąg malejący
 b), c) ciąg rosnący
12. a) 24, 48, 96, 192, 384
 b) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, -\frac{1}{32}$
 c) $-1, \frac{1}{5}, -\frac{1}{25}, \frac{1}{125}, -\frac{1}{625}$
13. a) 1250 b) 4
14. a) $a_3 = \frac{1}{10}, a_5 = 10$
 b) $a_3 = 8, a_5 = 32$
 c) $a_3 = 3, a_5 = \frac{1}{3}$
 d) $a_3 = 2, a_5 = \frac{1}{2}$ lub $a_3 = a_5 = 0$
15. a) $5\frac{13}{16}$ b) $-6\frac{7}{8}$
 c) 341 lub 521
 d) -44 lub -20
16. 4
17. siódmy
18. (b_n)
19. a) 1024 b) $60\frac{1}{7}$
20. a) np. $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = a_n + 2(n-1) \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$
 b) np. $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = a_n - \frac{1}{n^2+n} \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$
 c) np. $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = a_n + \log \frac{n+1}{n} \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$

Zestaw powtórzeniowy II

1. a), c), d) ciąg malejący
 b) ciąg rosnący
2. a), d) ciąg rosnący
 b) ciąg malejący
 c) ciąg niemonotoniczny
3. $a_n = -n^2 + 6n - 3,$
 $a_n \leq -18$ dla $n \geq 8$
4. $a_n = \frac{1}{3}n^2 - 2n, a_9 = 9, a_{18} = 72$
5. a) 165 150 b) 82 350
6. a) 3960 b) 396 000
7. a) 1265
 b) 654
8. a) $x = 13$
 b) $x = -30$
 c) $x = 37$
 d) $x = 29$
9. a) $x = \frac{1}{2}$
 b) $x = -2$ lub $x = 8$
11. a) 1, 2, 3 lub 4, 2, 0
 b) 1, 2, 4 lub 4, 2, 1
12. a) $a_n = 3n + 1$
 b) $a_n = 7n - 3$
13. $a_1 = -5, a_2 = 0, a_3 = 5$
 lub $a_1 = -2, a_2 = 0, a_3 = 2$
14. $4\frac{364}{729}\pi \text{ cm}^2$
15. 24
16. a), b) około 836,74 zł

Zadania testowe

1. D 2. B 3. A 4. D 5. D 6. B 7. C 8. B
 9. C

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. rosnący
3. 4
4. jest
5. 6, 8, 10
6. 2, 4, 6 lub 6, 4, 2
7. 112 cm^2
8. 8
9. 27

4.1. Średnia arytmetyczna

Ć 1. Basia – 2,9, Tomek – 4,0

2. siedmiu

3. $\bar{x}_A = 6$, $\bar{x}_B = 16$, $\bar{x}_C = 26$

Jeżeli wszystkie liczby zestawu danych zwiększymy o stałą wartość, to ich średnia arytmetyczna również zwiększy się o tę wartość.

4. $\bar{x}_d = 4$, $\bar{x}_c = 4,2$, $\bar{x}_k \approx 4,09$

5. a) $x_1 = 9$ b) 135

Z 1. 47

2. a) dst – 5 osób, db – 5 osób

b) dst – 10 osób

c) dst – 2 osoby, db – 8 osób

3. a) 3700 zł b) 3550 zł

4. a) 4544 zł b) 2528 zł

5. a) 4800 zł

b) 6160 zł, 3640 zł

c) 2400 zł

6. a) średnia: 20, średnia obciąża: 5,5

b) średnia: $23\frac{1}{7}$, średnia obciąża: $13\frac{4}{5}$

7. średnia: 682,5, średnia obciąża: 255

8. a) tak, 11 b) nie c) tak, 16

9. 1,85 h = 1 h 51 min

10. a) $x = 7$ b) $x = 5$

4.2. Mediana, skala centylowa i dominanta

Ć 1. a) 3 b) 10,5 c) 5,5

2. a) 555 kg b) 502,5 kg c) 540 kg

3. 3,5

4. a) np. 1, 1, 5, 6, 7, mediana: 5, średnia: 4

b) np. 1, 2, 3, 6, 8, mediana: 3, średnia: 4

5. 7,5

6. a) 60%

b) 40. centyl: 50%, 80. centyl: 82%

7. a) 50. b) 10%

8. mediana: 43, dominanta: 42

Najczęściej był kupowany rozmiar 42.

9. a) mediana: 4, dominanta: 3

b) mediana: 3, dominanta: 5

Z 1. a) $c = 13$ b) $c = 3$ lub $c = 8$

2. A: $M = 3,5$, nie ma dominanty, $\bar{x} = 3,5$

B: $M = 2$, $D = 1$, $\bar{x} = 2\frac{2}{3}$

C: $M = 5$, $D = 6$, $\bar{x} = 4\frac{1}{3}$

D: $M = 3,5$, $D_1 = 3$, $D_2 = 4$, $\bar{x} = 3,5$

E: $M = 3,5$, $D_1 = 3$, $D_2 = 4$, $\bar{x} = 3,5$

F: $M = 3,5$, $D_1 = 1$, $D_2 = 6$, $\bar{x} = 3,5$

3. a) $M = 4$, $D = 6$, $\bar{x} = 3\frac{8}{9}$

b) $M = 3$, $D = 1$, $\bar{x} = 3\frac{1}{9}$

c) $M = 3,5$, nie ma dominanty, $\bar{x} = 3,5$

4. a) $\bar{x} = 4,52$, $M = 5$,

liczba 2: 32. centyl, liczba 7: 88. centyl

b) $\bar{x} = 4,38$, $M = 4$, $D = 2$,

liczba 3: 48. centyl

5. a) 60% b) 24

6. $M = 3,5$, $D = 3$

7. a) $x = 5$ b) $x = 6$

8. 10%

4.3. Odchylenie standardowe

Ć 1. a) $\sigma^2 = 2$, $\sigma \approx 1,41$

b) $\sigma^2 = 3,6$, $\sigma \approx 1,9$

c) $\sigma^2 = 4,4$, $\sigma \approx 2,1$

2. $\sigma_A > \sigma_B$

3. A: $\sigma = 1$; B: $\sigma = 1$

Jeżeli wszystkie liczby zestawu danych zwiększymy o stałą wartość, to odchylenie standardowe się nie zmieni.

4. dziesięć razy

5. X: $\sigma^2 = 50\,000$ zł², $\sigma \approx 223,61$ zł

Y: $\sigma^2 = 1\,050\,000$ zł², $\sigma \approx 1024,70$ zł

6. $\bar{x} = 4$, $\sigma^2 = 6\frac{4}{7}$, $\sigma \approx 2,56$

Z 1. a) $\bar{x} = 5$, $\sigma^2 = 0$, $\sigma = 0$

b) $\bar{x} = 5$, $\sigma^2 = 1$, $\sigma = 1$

c) $\bar{x} = 5$, $\sigma^2 = 4$, $\sigma = 2$

d) $\bar{x} = 5$, $\sigma^2 = \frac{5}{3}$, $\sigma \approx 1,29$

e) $\bar{x} = 6$, $\sigma^2 = \frac{16}{3}$, $\sigma \approx 2,31$

f) $\bar{x} = 8$, $\sigma^2 = 4,25$, $\sigma \approx 2,06$

2. $\bar{x} = 170$ kg, $\sigma^2 \approx 166,7$ kg², $\sigma \approx 12,9$ kg

3. $\sigma_A \approx 1,26$, $\sigma_B \approx 1,38$, $\sigma_C \approx 1,98$

4. $\sigma_A \approx 3,58$ cm, $\sigma_B \approx 2,45$ cm,
 $\sigma \approx 3,07$ cm

5. a) $\sigma \approx 1,3$ b) 16 c) 30
6. a) 3 b) tak, jeden uczeń
7. a) $\bar{x}_a = \bar{x} + 2$, $M_a = M + 2$,
 $D_a = D + 2$, $\sigma_a = \sigma$
 b) $\bar{x}_b = 2\bar{x}$, $M_b = 2M$, $D_b = 2D$,
 $\sigma_b = 2\sigma$
8. a) $\bar{x} = 30$ min, $\sigma^2 = 350$ min²,
 $\sigma \approx 18,71$ min
 b) $\bar{x} = 30$ min, $\sigma^2 = 33\frac{1}{3}$ min²,
 $\sigma \approx 5,77$ min
 c) $\bar{x} = 30$ min, $\sigma^2 = 160$ min²,
 $\sigma \approx 12,65$ min
9. a) $\sigma^2 = 1,65$, $\sigma \approx 1,28$
 b) $\sigma^2 = 4,25$, $\sigma \approx 2,06$

Korelacja

1. około 0,85

Inne miary rozrzutu danych

1. a) 13: rozstęp: 9°C, $\sigma = 3^\circ\text{C}$
 14: rozstęp: 6°C, $\sigma \approx 2,06^\circ\text{C}$
 15: rozstęp: 9°C, $\sigma \approx 3,08^\circ\text{C}$
 16: rozstęp: 6°C, $\sigma \approx 2,24^\circ\text{C}$
 b) rozstęp: 15°C, $\sigma \approx 3,82^\circ\text{C}$
3. a) równe
 b), c) mniejsze
4. $\bar{x} = 3,5$, $\sigma \approx 1,87$, $d = 1,6875$

4.4. Średnia ważona

- C** 1. a) 4,5 b) 5 c) 5
2. a) 8,9 b) 4,5
3. a) Basia – 3,6, Kasia – 4,6
 b) Asia: $\bar{x}_w \approx 3,8$,
 Basia: $\bar{x}_w \approx 4,2$,
 Kasia: $\bar{x}_w = 4$
4. a) 320 zł b) 420 zł
- Z** 1. Marek
2. taka sama
3. a) $t = 4,5$ b) $t = 7$
4. a) $w = 7$ b) $w = 2$
5. a) $n = 2$ b) $n = 7$
6. a) 12,5 b) 5,875

4.5. Zagadnienia uzupełniające

1. a) 342 b) 79 c) 11
2. 168
3. 440 przed upływem 1400 godzin,
 30 przed upływem 1100 godzin

Zestaw powtórzeniowy I

1. a) $\bar{x} = 3,75$, $M = 4$, $D = 4$
 b) $\bar{x} = 20$, $M = 9$, $D = 9$
 c) $\bar{x} = 5$, $M = 6$, $D = 8$
 d) $\bar{x} = 10$, $M = 10$, $D_1 = 4$, $D_2 = 16$
2. grupa I: 3,5, grupa II: 4
3. $\bar{x} = 36$ km, $\sigma \approx 7,23$ km
4. $\bar{x} = 3500$ g, $\sigma \approx 586,66$ g
5. IIIa: $\bar{x} = 1,5$ h, $M = 1$ h, $D = 1$ h,
 IIIb: $\bar{x} = 1,475$ h, $M = 1,5$ h, $D = 1,5$ h,
 dla obu klas: $\bar{x} \approx 1,49$ h, $M = 1,5$ h,
 $D = 1$ h
6. a) 5
 b) 12,55
7. A: $5,6 \approx 6$, B: $5,4 \approx 5$, C: $4,2 \approx 4$,
 D: $3,8 \approx 4$, E: $3,2 \approx 3$

Zestaw powtórzeniowy II

1. B
2. a) 6 b) 11
3. $\bar{x} = 3,85$, $\sigma \approx 1,01$
4. $\sigma^2 = 0,25$ h², $\sigma \approx 0,5$ h
5. a) $a = 1,4$ lub $a = 5$
 b) $x = 2$, $y = 4$
6. w grupie o 0,25, w klasie o 0,1
7. Nie można rozstrzygnąć, który lek jest skuteczniejszy.

Zadania testowe

1. D 2. A 3. C 4. D 5. B

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. $x = 5$, $M = 5$, $D = 5$
2. $45 \leq x \leq 53$
3. $\bar{x}_A = 4,5$, $\bar{x}_B = 3,6$, $\bar{x}_C = 2$
4. $\sigma_{III} \approx 645,50$ zł
5. $\bar{x} = 210$ kg, $\sigma \approx 62,11$ kg

Indeks

- ciąg 112
 - arytmetyczny 128, 129, 130
 - geometryczny 142, 143, 145, 146
 - liczb Catalana 163
 - liczbowy 113
 - malejący 119
 - niemalejący 121
 - nierosnący 121
 - nieskończony 112
 - rosnący 119
 - skończony 114
 - stały 121
- dominanta 178
- działania na potęgach 10, 11, 14
- dziedzina
 - funkcji logarytmicznej 32, 33
 - funkcji wykładniczej 17
- efektywna stopa procentowa 157
- figura
 - osiowosymetryczna 94
 - środkowosymetryczna 97
- funkcja
 - logarytmiczna 32
 - wykładnicza 17
- iloraz ciągu geometrycznego 142
- kapitalizacja odsetek 156
- krzywa Gaussa 192
- liczba logarytmowana 22
- liczby losowe 180
- logarytm 22, 23
 - dziesiętny 26
- mediana 176
- nominalna stopa procentowa 157
- odchylenie
 - przeciętne 188
 - standardowe 182
- odległość
 - między prostymi równoległymi 64
- odległość
 - między punktami w układzie współrzędnych 55
 - punktu od prostej 62
- okres kapitalizacji 156
- okręgi
 - przecinające się 76
 - rozłączne 76
 - styczne 76
- oś symetrii 93, 94
- podciąg ciągu 149
- podstawa logarytmu 22
- pole trójkąta w układzie współrzędnych 66
- potęga o wykładniku
 - całkowitym 10
 - rzeczywistym 13, 14
 - wymiernym 11
- procent składany 155
- proste
 - prostokątne w układzie współrzędnych 61
 - równoległe w układzie współrzędnych 61
- punkt styczności prostej i okręgu 80
- reguła trzech sigm 192
- rekurencyjne określenie ciągu 123
- rozkład normalny 192
- rozpad promieniotwórczy 41
- rozstęp 188
- równanie
 - kierunkowe prostej 61
 - ogólne prostej 61
 - okręgu 67
 - okręgu w postaci kanonicznej 68
 - okręgu w postaci ogólnej 75
- różnica ciągu arytmetycznego 128
- sieczna okręgu 80
- silnia 124
- skala
 - centylowa 177
 - Richtera 45

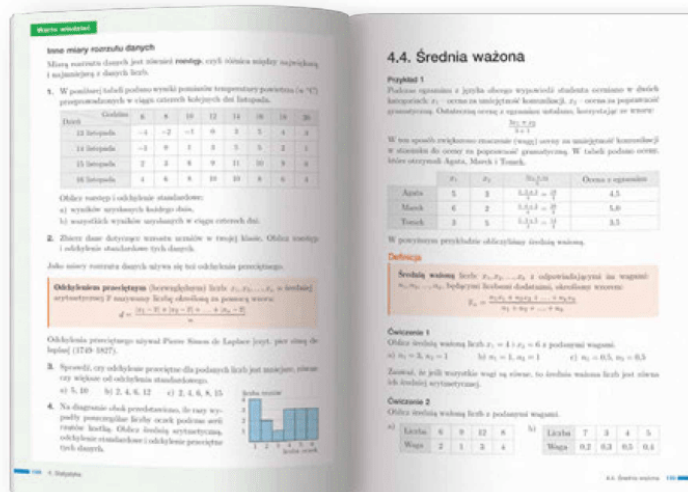
- styczna do okręgu 80
- suma początkowych wyrazów ciągu
 - arytmetycznego 136, 137
 - geometrycznego 148
- symetria
 - osiowa 93
 - środkowa 97
 - względem osi układu współrzędnych 94
 - względem początku układu współrzędnych 98
- średnia
 - arytmetyczna 130, 161, 172
 - geometryczna 146, 161
 - obcięta 175
 - ważona 189
- środek symetrii 97
- środkowa trójkąta 59
- twierdzenie
 - o logarytmie iloczynu 28
 - o logarytmie ilorazu 28
 - o logarytmie potęgi 30
- twierdzenie
 - o zmianie podstawy logarytmu 44
 - odwrotne do twierdzenia Pitagorasa 54
 - Pitagorasa 54
- układ równań
 - nieoznaczony 83
 - oznaczony 83
 - sprzeczny 83
- wariancja 182, 184
- współczynnik kierunkowy prostej 61
- współrzędne środka odcinka 58
- wyraz ciągu 112
- wzór ogólny
 - ciągu 115
 - ciągu arytmetycznego 128
 - ciągu geometrycznego 143
- wzrost wykładniczy 41
- zbiór wartości
 - funkcji logarytmicznej 33
 - funkcji wykładniczej 17

Tablice logarytmów dziesiętnych

b	$b + 0,00$	$b + 0,01$	$b + 0,02$	$b + 0,03$	$b + 0,04$	$b + 0,05$	$b + 0,06$	$b + 0,07$	$b + 0,08$	$b + 0,09$
1,0	0,0000	0,0043	0,0086	0,0128	0,0170	0,0212	0,0253	0,0294	0,0334	0,0374
1,1	0,0414	0,0453	0,0492	0,0531	0,0569	0,0607	0,0645	0,0682	0,0719	0,0755
1,2	0,0792	0,0828	0,0864	0,0899	0,0934	0,0969	0,1004	0,1038	0,1072	0,1106
1,3	0,1139	0,1173	0,1206	0,1239	0,1271	0,1303	0,1335	0,1367	0,1399	0,1430
1,4	0,1461	0,1492	0,1523	0,1553	0,1584	0,1614	0,1644	0,1673	0,1703	0,1732
1,5	0,1761	0,1790	0,1818	0,1847	0,1875	0,1903	0,1931	0,1959	0,1987	0,2014
1,6	0,2041	0,2068	0,2095	0,2122	0,2148	0,2175	0,2201	0,2227	0,2253	0,2279
1,7	0,2304	0,2330	0,2355	0,2380	0,2405	0,2430	0,2455	0,2480	0,2504	0,2529
1,8	0,2553	0,2577	0,2601	0,2625	0,2648	0,2672	0,2695	0,2718	0,2742	0,2765
1,9	0,2788	0,2810	0,2833	0,2856	0,2878	0,2900	0,2923	0,2945	0,2967	0,2989
2,0	0,3010	0,3032	0,3054	0,3075	0,3096	0,3118	0,3139	0,3160	0,3181	0,3201
2,1	0,3222	0,3243	0,3263	0,3284	0,3304	0,3324	0,3345	0,3365	0,3385	0,3404
2,2	0,3424	0,3444	0,3464	0,3483	0,3502	0,3522	0,3541	0,3560	0,3579	0,3598
2,3	0,3617	0,3636	0,3655	0,3674	0,3692	0,3711	0,3729	0,3747	0,3766	0,3784
2,4	0,3802	0,3820	0,3838	0,3856	0,3874	0,3892	0,3909	0,3927	0,3944	0,3962
2,5	0,3979	0,3997	0,4014	0,4031	0,4048	0,4065	0,4082	0,4099	0,4116	0,4133
2,6	0,4150	0,4166	0,4183	0,4200	0,4216	0,4232	0,4249	0,4265	0,4281	0,4298
2,7	0,4314	0,4330	0,4346	0,4362	0,4378	0,4393	0,4409	0,4425	0,4440	0,4456
2,8	0,4472	0,4487	0,4502	0,4518	0,4533	0,4548	0,4564	0,4579	0,4594	0,4609
2,9	0,4624	0,4639	0,4654	0,4669	0,4683	0,4698	0,4713	0,4728	0,4742	0,4757
3,0	0,4771	0,4786	0,4800	0,4814	0,4829	0,4843	0,4857	0,4871	0,4886	0,4900
3,1	0,4914	0,4928	0,4942	0,4955	0,4969	0,4983	0,4997	0,5011	0,5024	0,5038
3,2	0,5051	0,5065	0,5079	0,5092	0,5105	0,5119	0,5132	0,5145	0,5159	0,5172
3,3	0,5185	0,5198	0,5211	0,5224	0,5237	0,5250	0,5263	0,5276	0,5289	0,5302
3,4	0,5315	0,5328	0,5340	0,5353	0,5366	0,5378	0,5391	0,5403	0,5416	0,5428
3,5	0,5441	0,5453	0,5465	0,5478	0,5490	0,5502	0,5514	0,5527	0,5539	0,5551
3,6	0,5563	0,5575	0,5587	0,5599	0,5611	0,5623	0,5635	0,5647	0,5658	0,5670
3,7	0,5682	0,5694	0,5705	0,5717	0,5729	0,5740	0,5752	0,5763	0,5775	0,5786
3,8	0,5798	0,5809	0,5821	0,5832	0,5843	0,5855	0,5866	0,5877	0,5888	0,5899
3,9	0,5911	0,5922	0,5933	0,5944	0,5955	0,5966	0,5977	0,5988	0,5999	0,6010
4,0	0,6021	0,6031	0,6042	0,6053	0,6064	0,6075	0,6085	0,6096	0,6107	0,6117
4,1	0,6128	0,6138	0,6149	0,6160	0,6170	0,6180	0,6191	0,6201	0,6212	0,6222
4,2	0,6232	0,6243	0,6253	0,6263	0,6274	0,6284	0,6294	0,6304	0,6314	0,6325
4,3	0,6335	0,6345	0,6355	0,6365	0,6375	0,6385	0,6395	0,6405	0,6415	0,6425
4,4	0,6435	0,6444	0,6454	0,6464	0,6474	0,6484	0,6493	0,6503	0,6513	0,6522
4,5	0,6532	0,6542	0,6551	0,6561	0,6571	0,6580	0,6590	0,6599	0,6609	0,6618
4,6	0,6628	0,6637	0,6646	0,6656	0,6665	0,6675	0,6684	0,6693	0,6702	0,6712
4,7	0,6721	0,6730	0,6739	0,6749	0,6758	0,6767	0,6776	0,6785	0,6794	0,6803
4,8	0,6812	0,6821	0,6830	0,6839	0,6848	0,6857	0,6866	0,6875	0,6884	0,6893
4,9	0,6902	0,6911	0,6920	0,6928	0,6937	0,6946	0,6955	0,6964	0,6972	0,6981
5,0	0,6990	0,6998	0,7007	0,7016	0,7024	0,7033	0,7042	0,7050	0,7059	0,7067
5,1	0,7076	0,7084	0,7093	0,7101	0,7110	0,7118	0,7126	0,7135	0,7143	0,7152
5,2	0,7160	0,7168	0,7177	0,7185	0,7193	0,7202	0,7210	0,7218	0,7226	0,7235
5,3	0,7243	0,7251	0,7259	0,7267	0,7275	0,7284	0,7292	0,7300	0,7308	0,7316

b	$b + 0,00$	$b + 0,01$	$b + 0,02$	$b + 0,03$	$b + 0,04$	$b + 0,05$	$b + 0,06$	$b + 0,07$	$b + 0,08$	$b + 0,09$
5,4	0,7324	0,7332	0,7340	0,7348	0,7356	0,7364	0,7372	0,7380	0,7388	0,7396
5,5	0,7404	0,7412	0,7419	0,7427	0,7435	0,7443	0,7451	0,7459	0,7466	0,7474
5,6	0,7482	0,7490	0,7497	0,7505	0,7513	0,7520	0,7528	0,7536	0,7543	0,7551
5,7	0,7559	0,7566	0,7574	0,7582	0,7589	0,7597	0,7604	0,7612	0,7619	0,7627
5,8	0,7634	0,7642	0,7649	0,7657	0,7664	0,7672	0,7679	0,7686	0,7694	0,7701
5,9	0,7709	0,7716	0,7723	0,7731	0,7738	0,7745	0,7752	0,7760	0,7767	0,7774
6,0	0,7782	0,7789	0,7796	0,7803	0,7810	0,7818	0,7825	0,7832	0,7839	0,7846
6,1	0,7853	0,7860	0,7868	0,7875	0,7882	0,7889	0,7896	0,7903	0,7910	0,7917
6,2	0,7924	0,7931	0,7938	0,7945	0,7952	0,7959	0,7966	0,7973	0,7980	0,7987
6,3	0,7993	0,8000	0,8007	0,8014	0,8021	0,8028	0,8035	0,8041	0,8048	0,8055
6,4	0,8062	0,8069	0,8075	0,8082	0,8089	0,8096	0,8102	0,8109	0,8116	0,8122
6,5	0,8129	0,8136	0,8142	0,8149	0,8156	0,8162	0,8169	0,8176	0,8182	0,8189
6,6	0,8195	0,8202	0,8209	0,8215	0,8222	0,8228	0,8235	0,8241	0,8248	0,8254
6,7	0,8261	0,8267	0,8274	0,8280	0,8287	0,8293	0,8299	0,8306	0,8312	0,8319
6,8	0,8325	0,8331	0,8338	0,8344	0,8351	0,8357	0,8363	0,8370	0,8376	0,8382
6,9	0,8388	0,8395	0,8401	0,8407	0,8414	0,8420	0,8426	0,8432	0,8439	0,8445
7,0	0,8451	0,8457	0,8463	0,8470	0,8476	0,8482	0,8488	0,8494	0,8500	0,8506
7,1	0,8513	0,8519	0,8525	0,8531	0,8537	0,8543	0,8549	0,8555	0,8561	0,8567
7,2	0,8573	0,8579	0,8585	0,8591	0,8597	0,8603	0,8609	0,8615	0,8621	0,8627
7,3	0,8633	0,8639	0,8645	0,8651	0,8657	0,8663	0,8669	0,8675	0,8681	0,8686
7,4	0,8692	0,8698	0,8704	0,8710	0,8716	0,8722	0,8727	0,8733	0,8739	0,8745
7,5	0,8751	0,8756	0,8762	0,8768	0,8774	0,8779	0,8785	0,8791	0,8797	0,8802
7,6	0,8808	0,8814	0,8820	0,8825	0,8831	0,8837	0,8842	0,8848	0,8854	0,8859
7,7	0,8865	0,8871	0,8876	0,8882	0,8887	0,8893	0,8899	0,8904	0,8910	0,8915
7,8	0,8921	0,8927	0,8932	0,8938	0,8943	0,8949	0,8954	0,8960	0,8965	0,8971
7,9	0,8976	0,8982	0,8987	0,8993	0,8998	0,9004	0,9009	0,9015	0,9020	0,9025
8,0	0,9031	0,9036	0,9042	0,9047	0,9053	0,9058	0,9063	0,9069	0,9074	0,9079
8,1	0,9085	0,9090	0,9096	0,9101	0,9106	0,9112	0,9117	0,9122	0,9128	0,9133
8,2	0,9138	0,9143	0,9149	0,9154	0,9159	0,9165	0,9170	0,9175	0,9180	0,9186
8,3	0,9191	0,9196	0,9201	0,9206	0,9212	0,9217	0,9222	0,9227	0,9232	0,9238
8,4	0,9243	0,9248	0,9253	0,9258	0,9263	0,9269	0,9274	0,9279	0,9284	0,9289
8,5	0,9294	0,9299	0,9304	0,9309	0,9315	0,9320	0,9325	0,9330	0,9335	0,9340
8,6	0,9345	0,9350	0,9355	0,9360	0,9365	0,9370	0,9375	0,9380	0,9385	0,9390
8,7	0,9395	0,9400	0,9405	0,9410	0,9415	0,9420	0,9425	0,9430	0,9435	0,9440
8,8	0,9445	0,9450	0,9455	0,9460	0,9465	0,9469	0,9474	0,9479	0,9484	0,9489
8,9	0,9494	0,9499	0,9504	0,9509	0,9513	0,9518	0,9523	0,9528	0,9533	0,9538
9,0	0,9542	0,9547	0,9552	0,9557	0,9562	0,9566	0,9571	0,9576	0,9581	0,9586
9,1	0,9590	0,9595	0,9600	0,9605	0,9609	0,9614	0,9619	0,9624	0,9628	0,9633
9,2	0,9638	0,9643	0,9647	0,9652	0,9657	0,9661	0,9666	0,9671	0,9675	0,9680
9,3	0,9685	0,9689	0,9694	0,9699	0,9703	0,9708	0,9713	0,9717	0,9722	0,9727
9,4	0,9731	0,9736	0,9741	0,9745	0,9750	0,9754	0,9759	0,9763	0,9768	0,9773
9,5	0,9777	0,9782	0,9786	0,9791	0,9795	0,9800	0,9805	0,9809	0,9814	0,9818
9,6	0,9823	0,9827	0,9832	0,9836	0,9841	0,9845	0,9850	0,9854	0,9859	0,9863
9,7	0,9868	0,9872	0,9877	0,9881	0,9886	0,9890	0,9894	0,9899	0,9903	0,9908
9,8	0,9912	0,9917	0,9921	0,9926	0,9930	0,9934	0,9939	0,9943	0,9948	0,9952
9,9	0,9956	0,9961	0,9965	0,9969	0,9974	0,9978	0,9983	0,9987	0,9991	0,9996

Podręcznik **MATeMATyka 3** do zakresu podstawowego w spójny i przystępny sposób wprowadza ucznia w zagadnienia matematyczne. Dzięki niemu lekcje w szkole są ciekawe, a jednocześnie pozwala on na efektywną samodzielną naukę w domu.



Czytelny układ

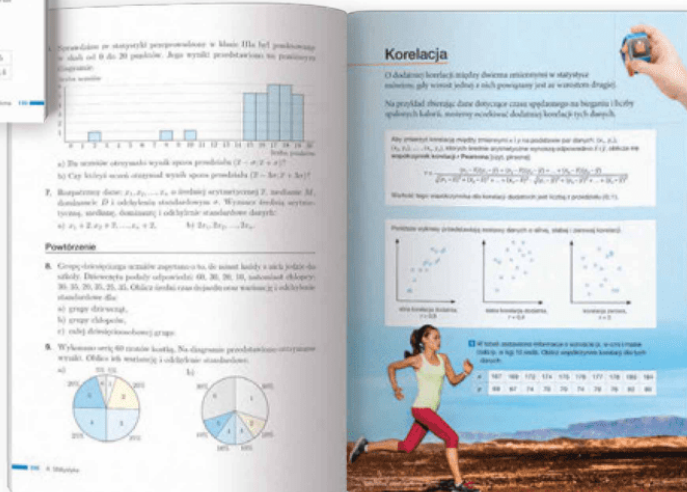
Przejrzyste wprowadzenia nowych treści, przykłady, proste ćwiczenia i ułożone zgodnie ze wzrastającym stopniem trudności zadania tworzą czytelny układ każdego tematu. Ułatwia to pracę na lekcjach i w domu.

Pomocne sekcje

Sekcje *Warto powtórzyć* pomagają lepiej przygotować się do kolejnych lekcji. Sekcje *Warto wiedzieć* uzupełniają i rozszerzają treści z lekcji.

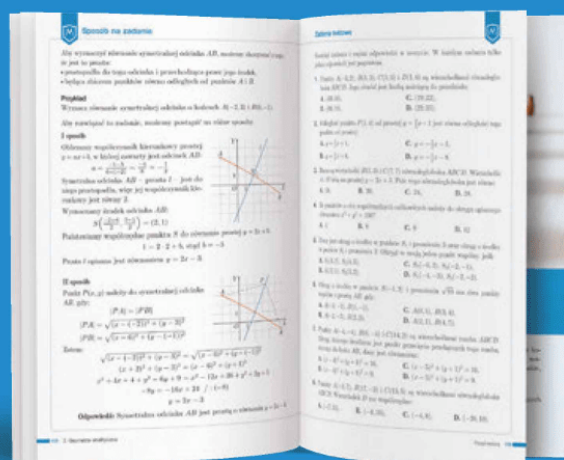
Różnorodne formy przekazu

Ciekawe infografiki i *Zagadnienia uzupełniające* urozmaicają pracę na lekcjach i zachęcają uczniów do samodzielnych poszukiwań.



WIESZ, UMIESZ, ZDASZ

Każdy dział podręcznika **MATeMATyka 3** kończy się dwoma zestawami powtórzeniowymi, dzięki którym uczniowie mogą utrwalić zdobyte wcześniej wiadomości. Następnie zaczyna się sekcja zadań zamkniętych i otwartych, w której znajdziemy też *Sposoby na zadania*, pokazujące różne metody rozwiązywania zadań.



Nowa Era Sp. z o.o.



www.nowaera.pl



nowaera@nowaera.pl



Centrum Kontaktu: 801 88 10 10, 58 721 48 00

ISBN 978-83-267-4203-3



9 788326 742033