

NOWA

MATeMATyka

1

PODRĘCZNIK • LICEUM • TECHNIKUM

ZAKRES PODSTAWOWY

nowość
EDYCJA 2024

ZMIANY
W PODSTAWACH
2024



oznaczenia
usuniętych
treści

nowa
era

NOWA MATeMATyka

1 PODRĘCZNIK • LICEUM • TECHNIKUM
ZAKRES PODSTAWOWY

WOJCIECH BABIAŃSKI
LECH CHAŃKO
JERZY JANOWICZ
DOROTA PONCZEK
EWA SZMYTKIEWICZ
KAROLINA WEJ

NOWA MATEMATyka

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki w zakresie podstawowym, na podstawie opinii rzeczoznawców:

dr. hab. Gustawa Trelińskiego, dr. Jacka Stańdo, mgr Teresy Kosyry-Cieślak.

Etap edukacyjny: III

Typ szkoły: ponadpodstawowa

Rok dopuszczenia: 2024

Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 971/1/2024/z1

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum* (2024) autorstwa Agnieszki Kamińskiej i Doroty Ponczek.

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujemy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl

Wykorzystywanie treści niniejszego Utworu, w jakiegokolwiek formie lub w jakimkolwiek procesie, do celów eksploracji tekstu i danych, uczenia maszynowego, rozwoju i/lub szkolenia i/lub wzbogacania sztucznej inteligencji jakiegokolwiek rodzaju jest surowo zabronione.



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2024
ISBN 978-83-267-5019-9

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Ewa Kowalik, Katarzyna Radzimińska

Współpraca redakcyjna: Urszula Cielniak

Opracowanie redakcyjne i merytoryczne infografik: Urszula Cielniak

Konsultacje merytoryczne: Jacek Klisowski, Barbara Sasim-Leciejevska

Redakcja językowa: Marta Zuchowicz

Opieka graficzna: Maciej Galiński, Marcin Oleksak

Projekt graficzny: Marek Błoszko, Ewa Kaletyn, Piotr Stopczyński

Projekt okładki: Maciej Galiński

Fotoedycja: Katarzyna Iwan-Malawska

Rysunki merytoryczne: Lech Chańko

Ilustracje: Krzysztof Mrawiński

Opracowanie graficzne infografik: Marek Błoszko, Aleksandra Szpunar, Alicja Skupin-Podwojewska

Realizacja projektu graficznego: Dorota Chańko

Nowa Era Sp. z o.o.
Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa
www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl
Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

Druk i oprawa: Quad/Graphics Europe Sp. z o.o.

Zdjęcia pochodzą ze zbiorów:

Zdjęcie na okładce: Shutterstock/Vink Fan.

Zdjęcia: Archiwum NE s. 41 (Merkury, Ziemia, Jowisz), s. 64; BE&W: Alamy Stock Photo - Alvey&Towers Picture Library s. 136, Bruce Leighty - Sports Images s. 146; Getty Images: E+/Deejpilot s. 61, E+/mbbirdy s. 241, Moment/George Pachantouris s. 111; Shutterstock: Africa Studio s. 174, Alex-505 s. 130 (10 centów), Amanda Carden s. 41 (Słońce), Bojan Pavlukovic s. 16, ch123 s. 268, Delpixel s. 133 (łódź na rzece), Inger Eriksen s. 221, Juice Dash s. 145, Lukas Gojda s. 199, Nadiia Korol s. 135, Potapov Alexander s. 97, rsooll s. 130 (5 centów), Tongsai s. 133 (kuter), Tony Baggett s. 130 (25 centów); Lech Chańko s. 9, 24, 267.

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w podręczniku. Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Spis treści

► 1. Liczby rzeczywiste

Cechy podzielności liczb – przypomnij sobie	10
1.1. Liczby naturalne	11
Działania na liczbach całkowitych i ułamkach zwykłych – przypomnij sobie ..	15
1.2. Liczby całkowite. Liczby wymierne	16
Pierwiastek kwadratowy i pierwiastek sześcienny – przypomnij sobie	19
1.3. Liczby niewymierne	20
Działania na ułamkach dziesiętnych i ułamkach zwykłych – przypomnij sobie	23
1.4. Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej	24
1.5. Pierwiastek kwadratowy	28
1.6. Pierwiastek sześcienny. Pierwiastek n -tego stopnia	31
1.7. Potęga o wykładniku naturalnym	35
1.8. Potęga o wykładniku całkowitym. Notacja wykładnicza	37
1.9. Potęga o wykładniku wymiernym	42
1.10. Logarytm i jego własności	45
1.11. Procenty	48
Powtórzenie	53
Sposób na zadanie	56
Przed obowiązkową maturą z matematyki	57

► 2. Język matematyki

2.1. Zbiory	62
2.2. Działania na zbiorach	65
Oś liczbowa – przypomnij sobie	69
2.3. Przedziały	70
2.4. Działania na przedziałach	74
Rozwiązywanie równań – przypomnij sobie	76
2.5. Rozwiązywanie nierówności	77
Sumy algebraiczne. Redukcja wyrazów podobnych – przypomnij sobie	81
2.6. Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian	82
2.7. Wyłączanie jednomianu przed nawias	85
2.8. Mnożenie sum algebraicznych	88
2.9. Wzory skróconego mnożenia	93
2.10. Zastosowanie przekształceń algebraicznych	98
2.11. Wartość bezwzględna	101
Powtórzenie	104



Sposób na zadanie	106
Przed obowiązkową maturą z matematyki	107
► 3. Układy równań	
Wykorzystanie równań do rozwiązywania zadań – przypomnij sobie	112
3.1. Co to jest układ równań	113
3.2. Rozwiązywanie układów równań metodą podstawiania	116
3.3. Rozwiązywanie układów równań metodą przeciwnych współczynników	122
3.4. Układy równań – zadania tekstowe (1)	128
3.5. Układy równań – zadania tekstowe (2)	132
Powtórzenie	137
Sposób na zadanie	140
Przed obowiązkową maturą z matematyki	141
► 4. Funkcje	
4.1. Pojęcie funkcji	146
Układ współrzędnych – przypomnij sobie	151
4.2. Szkicowanie wykresu funkcji (1)	152
4.3. Szkicowanie wykresu funkcji (2)	157
4.4. Monotoniczność funkcji	162
Wykorzystanie wykresu do prezentacji informacji – przypomnij sobie	166
4.5. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (1)	167
4.6. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (2)	171
4.7. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OY	175
4.8. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OX	177
✂ 4.9. Przekształcanie wykresu przez symetrię względem osi OX	181
✂ 4.10. Przekształcanie wykresu przez symetrię względem osi OY	185
4.11. Proporcjonalność odwrotna	188
Powtórzenie	191
Sposób na zadanie	194
Przed obowiązkową maturą z matematyki	195
► 5. Funkcja liniowa	
Punkty kratowe należące do prostej – przypomnij sobie	200
5.1. Wykres funkcji liniowej (1)	201
5.2. Wykres funkcji liniowej (2)	205
5.3. Własności funkcji liniowej	208
5.4. Równanie prostej na płaszczyźnie	213
5.5. Współczynnik kierunkowy prostej	217



5.6. Warunek prostokątności prostych	222
Układy równań – przypomnij sobie	226
5.7. Interpretacja geometryczna układu równań liniowych	227
5.8. Funkcja liniowa – zastosowania	231
Powtórzenie	234
Sposób na zadanie	236
Przed obowiązkową maturą z matematyki	237
► 6. Planimetria	
Kąty – przypomnij sobie	242
6.1. Miary kątów w trójkącie	243
6.2. Trójkąty przystające	246
6.3. Twierdzenie Talesa	251
6.4. Wielokąty podobne	255
6.5. Trójkąty podobne	259
Pola czworokątów – przypomnij sobie	263
6.6. Pola wielokątów podobnych	264
✂ 6.7. Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie	269
Problemy konstrukcyjne	271
Powtórzenie	273
Sposób na zadanie	275
Przed obowiązkową maturą z matematyki	276
 Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań	280
Indeks	315
Wybrane wzory i twierdzenia matematyczne	318

1 Liczby rzeczywiste

Podstawowe dane holownika „Stefan” przedstawionego na zdjęciu: długość 28,74 m, szerokość 6,53 m, zanurzenie 2,6 m, prędkość maksymalna 10 węzłów. Prędkość statków morskich podaje się w węzłach, czyli w milach morskich na godzinę. Jedna mila morska (Mm) to przybliżona długość takiego łuku południka, który jest wyznaczony przez 1 minutę kątową ($1/60$ stopnia). Południk jest w przybliżeniu półokręgiem o długości 20 000 km. Zatem:

$$1 \text{ Mm} \approx \frac{20\,000 \text{ km}}{180 \cdot 60} \approx 1,851852 \text{ km}$$

Otrzymany wynik zaokrągla się do pełnych metrów, czyli przyjmuje się, że $1 \text{ Mm} = 1852 \text{ m}$.

Odpowiedzi do poleceń i rozwiązań zadań nie należy zapisywać w podręczniku.

 Oznaczenie przykładów z dowodami oraz ćwiczeń i zadań na dowodzenie.

 Oznaczenie zadań, przy których rozwiązaniu należy skorzystać z kalkulatora.



Cechy podzielności liczb

Twierdzenie

Liczba naturalna jest podzielna przez:

- 2, gdy ostatnią jej cyfrą jest jedna z cyfr 0, 2, 4, 6, 8;
- 3, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3;
- 4, gdy jej dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4;
- 5, gdy ostatnią jej cyfrą jest 0 lub 5;
- 9, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9.

1. Przez które z liczb 2, 3, 5, 9 jest podzielna liczba:
 - a) 653 925, b) 574 038, c) 946 030, d) 749 298?
2. Czy liczba n jest podzielna przez 4?
 - a) $n = 63\,874$ b) $n = 58\,052$ c) $n = 35\,406$ d) $n = 47\,796$
3. Jaką cyfrę można podstawić za a , aby dana liczba była podzielna przez 4?
 - a) $684\,56a$ b) $23\,53a$ c) $21\,5a6$ d) $35\,7aa$
4. Jaką cyfrę można podstawić za a , aby dana liczba była podzielna przez 3?
 - a) $333\,3a4$ b) $64a\,871$ c) $434\,a4a$ d) $5aa\,6a3$
5. Wyszukaj w dostępnych źródłach cechę podzielności liczby naturalnej przez 8. Sprawdź, czy liczba x jest podzielna przez 8.
 - a) $x = 713\,592$ b) $x = 639\,044$ c) $x = 480\,658$ d) $x = 817\,296$
6. Przeczytaj przykład obok i podaj przez które z liczb 6, 12, 15 jest podzielna liczba:

Liczba 69 222 jest podzielna przez 2 i przez 3, ale nie jest podzielna przez 4. Zatem liczba ta jest podzielna przez 6, ale nie jest podzielna przez 12.

 - a) 775 584, c) 894 665,
 - b) 868 470, d) 501 474.
7. Dana jest liczba siedmiocyfrowa $3\,150\,57a$, gdzie a oznacza cyfrę jedności. Wyznacz tę liczbę przy założeniu, że jest ona podzielna przez:
 - a) 9, b) 6, c) 4, d) 8.
8. Nie wykonując dzielenia, ustal, przez które spośród liczb 15, 45, 75 jest podzielna liczba:
 - a) 1155, b) 9825, c) 5165, d) 8235.

1.1. Liczby naturalne



Liczb naturalnych: 0, 1, 2, 3, ... jest nieskończenie wiele. Dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje następna liczba naturalna: $n+1$. Na przykład po milionie następuje milion jeden, potem milion dwa, milion trzy, a po trylionie (liczba zapisywana jako jedynka z 18 zerami) – trylion jeden itd. Zbiór wszystkich liczb naturalnych oznaczamy literą $\mathbb{N}$.

Definicja

Niech m i n będą liczbami naturalnymi oraz $m \neq 0$. Liczbę m nazywamy **dzielnikiem** liczby n , gdy istnieje taka liczba naturalna k , że $n = m \cdot k$.

Jeśli liczba m jest dzielnikiem liczby n , to mówimy, że liczba n jest **podzielna** przez liczbę m lub że liczba n jest **wielokrotnością** liczby m .

Zauważ, że:

- liczba 1 jest dzielnikiem każdej liczby naturalnej,
- liczba 0 nie jest dzielnikiem żadnej liczby,
- każda dodatnia liczba naturalna jest dzielnikiem liczby 0.

Przykład 1

Wymień dzielniki liczby 54.

Liczba 54 ma następujące dzielniki: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54.

Ćwiczenie 1

Wymień dzielniki liczby:

- a) 12, b) 28, c) 36, d) 48.

Podzielność liczb naturalnych zapisujemy w następujący sposób:

- zapis $3 \mid n$ czytamy: 3 dzieli n lub inaczej: liczba n jest podzielna przez 3,
- zapis $7 \nmid n$ czytamy: 7 nie dzieli n lub inaczej: liczba n nie jest podzielna przez 7.

Liczbę **parzystą** możemy zapisać w postaci $2k$, a **nieparzystą** – w postaci $2k+1$, gdzie k jest liczbą naturalną.

Niech n będzie liczbą naturalną. Jeśli $2 \mid n$, to liczbę n nazywamy **parzystą**. Jeśli $2 \nmid n$, to liczbę n nazywamy **nieparzystą**.

Ćwiczenie 2

Czy podane stwierdzenie jest prawdziwe?

- a) $3 \mid 323\,232$ b) $11 \mid 111$ c) $15 \nmid 2345$ d) $7 \nmid 4949$

Zamiast mówić, że liczba 3 jest dzielnikiem liczby 45, możemy też powiedzieć, że liczba 45 **dzieli się** przez 3 **bez reszty**. $45 : 3 = 15$ reszta 0

W wyniku podzielenia liczby 47 przez 3, otrzymujemy $47 : 3 = 15$ reszta 2. 15 i resztę 2.

Oznacza to, że liczbę 47 możemy przedstawić w postaci $47 = 3 \cdot 15 + 2$.

Ćwiczenie 3

Zapisz liczbę w postaci $3k$, $3k + 1$ lub $3k + 2$, gdzie k jest liczbą naturalną.

- a) 26 b) 76 c) 108 d) 127 e) 713

Ćwiczenie 4

Zapisz liczbę w postaci $4k$, $4k + 1$, $4k + 2$ lub $4k + 3$, gdzie k jest liczbą naturalną.

- a) 3 b) 49 c) 79 d) 126 e) 492

Definicja

Liczbę naturalną, która ma dokładnie dwa dzielniki (1 i samą siebie), nazywamy **liczbą pierwszą**. Każdą liczbę naturalną większą od 1, która nie jest liczbą pierwszą, nazywamy **liczbą złożoną**.

Liczbami pierwszymi są na przykład liczby 7 i 37.

Zwróć uwagę na to, że liczb 0 i 1 nie zaliczamy ani do liczb pierwszych, ani do złożonych (jakie są dzielniki liczby 1, a jakie liczby 0?).

Grecki matematyk Euklides (żyjący na przełomie IV i III w. p.n.e.) udowodnił, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Ćwiczenie 5

Podaj wszystkie liczby pierwsze:

- a) parzyste,
b) mniejsze od 20,
c) większe od 20 i mniejsze od 50,
d) większe od 50 i mniejsze od 100.

Liczby pierwsze między 100 a 1000:
101 179 263 353 443 547 641 739 839 947
103 181 269 359 449 557 643 743 853 953
107 191 271 367 457 563 647 751 857 967
109 193 277 373 461 569 653 757 859 971
113 197 281 379 463 571 659 761 863 977
127 199 283 383 467 577 661 769 877 983
131 211 293 389 479 587 673 773 881 991
137 223 307 397 487 593 677 787 883 997
139 227 311 401 491 599 683 797 887
149 229 313 409 499 601 691 809 907
151 233 317 419 503 607 701 811 911
157 239 331 421 509 613 709 821 919
163 241 337 431 521 617 719 823 929
167 251 347 433 523 619 727 827 937
173 257 349 439 541 631 733 829 941

Rozkład liczby naturalnej na czynniki jest przedstawieniem tej liczby w postaci iloczynu liczb naturalnych większych od 1. Na przykład liczbę 52 można rozłożyć na czynniki następująco:

$52 = 2 \cdot 26, \quad 52 = 4 \cdot 13, \quad 52 = 2 \cdot 2 \cdot 13$

Ostatni z tych rozkładów jest rozkładem na czynniki będące liczbami pierwszymi. Mówimy krótko, że jest to **rozkład na czynniki pierwsze**.

Uwaga. Zauważmy, że $2 \cdot 2 \cdot 13$ jest tym samym rozkładem co np. $2 \cdot 13 \cdot 2$.

Twierdzenie

Każdą liczbę złożoną można rozłożyć na czynniki pierwsze. Istnieje dokładnie jeden taki rozkład (z dokładnością do kolejności czynników).

Rozkład na czynniki pierwsze liczby złożonej odbywa się zwykle w kilku krokach. Na przykład dla liczby 150 mamy:

$150 = 3 \cdot 50 = 3 \cdot 2 \cdot 25 = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$

Rozkład możemy też zapisać tak, jak podano obok.

150		3
50		2
25		5
5		5
1		

Ćwiczenie 6

Podaj rozkłady na czynniki pierwsze liczb 99, 720, 770, 1024, 1323.

Praktycznym zastosowaniem rozkładu na czynniki pierwsze jest wyznaczanie **najmniejszej wspólnej wielokrotności** dwóch liczb – NWW oraz **największego wspólnego dzielnika** – NWD.

Przykład 2

Korzystając z podanych obok rozkładów na czynniki pierwsze liczb 120 i 54, otrzymujemy:

$NWW(120, 54) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 1080$

$NWD(120, 54) = 2 \cdot 3 = 6$

120		2	54		2
60		2	27		3
30		2	9		3
15		3	3		3
5		5	1		
1					

Ćwiczenie 7

Oblicz $NWD(x, y)$ oraz $NWW(x, y)$.

- a) $x = 18, y = 30$ c) $x = 24, y = 72$ e) $x = 84, y = 105$
b) $x = 15, y = 50$ d) $x = 144, y = 192$ f) $x = 196, y = 420$

Ćwiczenie 8

Dane są dwie liczby x i y takie, że żaden czynnik występujący w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby x nie występuje w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby y . Wyznacz $NWD(x, y)$ i $NWW(x, y)$.

Zadania

- Które spośród liczb 2, 3, 4, 6, 9, 12 są dzielnikami podanej liczby?
a) 256 b) 294 c) 405 d) 588 e) 648
 - Ile jest liczb naturalnych mniejszych od 201 i podzielnych przez:
a) 5, b) 8, c) 9, d) 11?
 - Przedstaw liczbę n w postaci $5k + r$, gdzie k jest liczbą naturalną, natomiast r jest jedną z liczb 0, 1, 2, 3, 4.
a) $n = 39$ b) $n = 62$ c) $n = 156$ d) $n = 275$
 - Czy liczbę n można przedstawić w postaci $6k + r$, gdzie k jest liczbą naturalną, a r jest jedną z liczb 1, 2, 3?
a) $n = 46$ b) $n = 74$ c) $n = 147$ d) $n = 276$
 - Wyznacz sumę trzech kolejnych liczb nieparzystych, z których pierwszą jest podana liczba, a n jest liczbą naturalną.
a) $2n + 1$ b) $2n - 1, n > 0$ c) $2n - 5, n > 2$ d) $4n + 3$
- D** 6. Uzasadnij, że suma:
- trzech kolejnych liczb podzielnych przez 3 jest podzielna przez 9,
 - czterech kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 8,
 - pięciu kolejnych liczb parzystych jest podzielna przez 10.
- D** 7. Uzasadnij, że iloczyn:
- trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 6,
 - trzech kolejnych liczb parzystych jest podzielny przez 48.

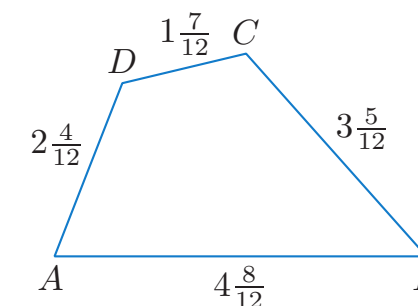
Sprawdź się

- Ile dzielników ma liczba n ?
a) $n = 12$ b) $n = 27$ c) $n = 29$ d) $n = 36$ e) $n = 60$
- Wykonaj dzielenie z resztą.
a) $75 : 8$ b) $75 : 3$ c) $109 : 6$ d) $738 : 4$ e) $3241 : 6$
- Oblicz $\text{NWD}(x, y)$ oraz $\text{NWW}(x, y)$.
a) $x = 24, y = 40$ c) $x = 48, y = 72$ e) $x = 112, y = 144$
b) $x = 36, y = 45$ d) $x = 54, y = 96$ f) $x = 105, y = 150$

Przypomnij sobie

Działania na liczbach całkowitych i ułamkach zwykłych

- Oblicz.
a) $4 - (6 - (12 - 10))$ d) $-9 + ((14 - 6) - (7 - 13))$
b) $6 - 2((8 - 19) - 7)$ e) $-6(-2 \cdot 9 - 17) - 19$
c) $8 - (4 + (-12 - (-4)))$ f) $13(5 - 19) - 3(9 - 13)$
- Oblicz.
a) $4((13 - 17) - 6(19 - 11)) : 2$ c) $-12 : (4 - 19) - (17 - 8) : (9 - 12)$
b) $8((15 - 3) : 2 + 32 : (-4 + 12))$ d) $(42 : (-6 - 8))((-5 - 17) : (5 - 7))$
- Zamień liczbę mieszaną na ułamek zwykły.
a) $1\frac{2}{3}$ b) $3\frac{1}{3}$ c) $4\frac{3}{7}$ d) $6\frac{4}{11}$ e) $5\frac{11}{15}$
 $2\frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{11}{4}$
- Zamień ułamek zwykły na liczbę mieszaną.
a) $\frac{11}{3}$ b) $\frac{17}{4}$ c) $\frac{21}{8}$ d) $\frac{32}{9}$ e) $\frac{49}{25}$
 $\frac{19}{5} = \frac{15 + 4}{5} = 3\frac{4}{5}$
- Oblicz. Wynik podaj w postaci liczby całkowitej lub mieszanej.
a) $\frac{2}{5} + \frac{3}{5}$ c) $\frac{5}{6} + \frac{11}{6}$ e) $\frac{17}{5} - \frac{3}{5}$ g) $\frac{7}{9} - \frac{23}{9}$
b) $\frac{7}{3} + \frac{4}{3}$ d) $\frac{13}{8} + \frac{23}{8}$ f) $\frac{19}{4} - \frac{3}{4}$ h) $\frac{29}{25} - \frac{61}{25}$
- Oblicz. Wynik podaj w postaci liczby całkowitej lub mieszanej.
a) $\frac{13}{4} + \frac{17}{4} - \frac{5}{4} - \frac{9}{4}$ c) $\frac{21}{11} - \frac{8}{11} - \frac{13}{11} + \frac{32}{11}$
b) $\frac{25}{7} - \frac{19}{7} + \frac{8}{7} - \frac{3}{7}$ d) $\frac{8}{15} - \frac{26}{15} + \frac{4}{15} - \frac{2}{15}$
- Oblicz. Wynik podaj w postaci liczby całkowitej lub mieszanej.
a) $\frac{3}{5} \cdot 2$ c) $\frac{5}{6} \cdot (-8)$ e) $\frac{5}{6} \cdot 24$ g) $1\frac{1}{4} \cdot 6$
b) $\frac{2}{3} \cdot 5$ d) $\frac{9}{10} \cdot (-6)$ f) $\frac{8}{9} \cdot 45$ h) $3\frac{2}{3} \cdot 9$
- Dany jest czworokąt $ABCD$ (rysunek obok).
a) Oblicz długość boku kwadratu, którego obwód jest równy obwodowi tego czworokąta.
b) Stosunek długości boków prostokąta jest równy $2 : 1$, a jego obwód jest równy obwodowi czworokąta $ABCD$. Oblicz pole tego prostokąta.



1.2. Liczby całkowite. Liczby wymierne



Liczby całkowite to liczby naturalne dodatnie: 1, 2, 3, 4, ..., liczby do nich przeciwne: -1, -2, -3, -4, ... oraz liczba 0.

Zbiór wszystkich liczb całkowitych będziemy oznaczać literą $\mathbb{Z}$.

Zera oraz liczb ujemnych używano w Indiach już w drugiej połowie I tysiąclecia n.e. W Europie przyjęły się dopiero kilkaset lat później. Współcześnie ideę osi liczbowej z zerem i liczbami ujemnymi widzimy np. w termometrze zaokrąglonym, a reguły rachunkowe dotyczące liczb ujemnych są przedmiotem ćwiczeń w szkole podstawowej.



Ćwiczenie 1

Oblicz w pamięci.

- a) $42 - 78$ c) $-240 \cdot (-3)$ e) $7 \cdot (-4) - 2 \cdot (-3) \cdot (-5)$
b) $-47 - (-63)$ d) $-342 + (-139)$ f) $(-16) \cdot (-2) - (-54) : (-9)$

Działania występujące w powyższym ćwiczeniu: dodawanie, odejmowanie oraz mnożenie są zawsze wykonalne w zbiorze liczb całkowitych. Inaczej jest w dzieleniu, gdyż wynik dzielenia liczb całkowitych nie zawsze jest liczbą całkowitą. Na przykład wynik dzielenia $(-3) : (-2) = \frac{3}{2}$ nie jest liczbą całkowitą.

Definicja

Liczby, które można zapisać jako iloraz $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi ($n \neq 0$), nazywamy **liczbami wymiernymi**.

Zbiór wszystkich liczb wymiernych oznaczamy literą $\mathbb{Q}$.

Zwróć uwagę na to, że każda liczba całkowita jest liczbą wymierną (dlaczego?).

Ułamki zazwyczaj przedstawiamy w możliwie najprostszej postaci, a więc w postaci **nieskracalnej**, np.:

$$\frac{180}{480} = \frac{18 \cdot \cancel{10}^1}{48 \cdot \cancel{10}^1} = \frac{18}{48} = \frac{3 \cdot \cancel{6}^1}{8 \cdot \cancel{6}^1} = \frac{3}{8} \quad \text{Ułamek } \frac{3}{8} \text{ jest nieskracalny.}$$

Po doprowadzeniu ułamka do postaci nieskracalnej otrzymujemy ułamek, którego licznik i mianownik to liczby **względnie pierwsze** (nie mają żadnych wspólnych dzielników całkowitych z wyjątkiem liczb 1 i -1).

Uwaga. Określenia **dzielnik** używamy również w odniesieniu do liczb całkowitych, np. liczba -6 ma następujące dzielniki: 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6.

Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy ułamki x i y są równe.

- a) $x = \frac{27}{72}, y = \frac{36}{96}$ b) $x = \frac{60}{108}, y = \frac{75}{135}$ c) $x = \frac{84}{156}, y = \frac{126}{246}$

Czasami trzeba ułamek **rozszerzyć**, na przykład wtedy, gdy chcemy dodać lub odjąć dwa ułamki o różnych mianownikach.

Ćwiczenie 3

Oblicz różnicę $\frac{5}{12} - \frac{7}{18}$, biorąc jako wspólny mianownik ułamków:

- a) iloczyn liczb 12 i 18,
b) NWW(12, 18).

Działania na liczbach wymiernych

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad b \neq 0, d \neq 0$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd} \quad b \neq 0, d \neq 0$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad b \neq 0, d \neq 0$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

- a) $1\frac{5}{12} - \frac{9}{8} - 2\frac{5}{6}$ c) $2\frac{2}{9} - 3\frac{5}{6} + 5\frac{1}{3}$
b) $6\frac{3}{4} - 2\frac{2}{3} - 3\frac{1}{6}$ d) $2\frac{2}{9} + 1\frac{5}{12} - \frac{7}{8}$

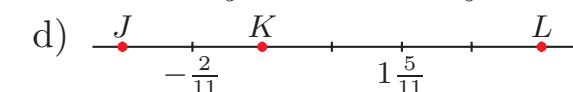
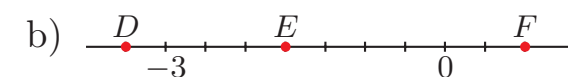
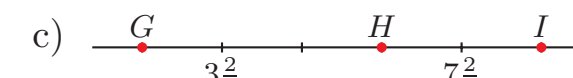
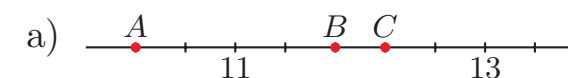
Ćwiczenie 5

Oblicz.

- a) $-2\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{27}{28}\right)$ b) $-3\frac{3}{8} : 5\frac{1}{16}$ c) $-1\frac{1}{7} \cdot 1\frac{11}{24} : \frac{3}{5}$ d) $3\frac{1}{2} - 3\frac{1}{6} : \left(-2\frac{1}{9}\right)$

Zadania

1. Podaj liczby odpowiadające punktom zaznaczonym na osi liczbowej.



2. Oblicz.

- a) $1\frac{3}{5} - 2\frac{1}{6}$ d) $\frac{7}{6} + \left(-\frac{5}{4} - \frac{4}{3}\right)$ g) $1\frac{5}{8} - \left(-2\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)$
b) $3\frac{3}{8} + 2\frac{5}{6}$ e) $- \left(-2\frac{2}{3}\right) + \frac{7}{15}$ h) $1\frac{2}{5} - 3\frac{7}{8} - \frac{1}{8}$
c) $\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right)$ f) $-1\frac{9}{16} + \frac{11}{12}$ i) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)$

3. Oblicz.

- a) $-1\frac{2}{25} \cdot \left(-2\frac{1}{12}\right)$ b) $4\frac{1}{7} - 4\frac{1}{2} : \left(-5\frac{1}{4}\right)$ c) $-2\frac{1}{9} \cdot 1\frac{16}{19} : \frac{7}{5}$

4. Oblicz.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \frac{2\frac{1}{6}}{1\frac{4}{9}} & \text{c)} \frac{1\frac{5}{12}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} & \text{e)} \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{8}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{8}} & \text{g)} \frac{2\frac{1}{4} - 3\frac{1}{2}}{\frac{1}{8} + \frac{1}{2}} \\ \text{b)} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} & \text{d)} \frac{2 - \frac{1}{3}}{2 - \frac{1}{2}} & \text{f)} \frac{\frac{1}{2} - \frac{2}{5}}{\frac{1}{2} - 1\frac{1}{5}} & \text{h)} \frac{3\frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{3}{4}}{2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} - 2} \end{array}$$

5. Oblicz wartość podanego wyrażenia dla $x = 1\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{4}$, $z = -\frac{3}{8}$.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{x-y}{y-z} & \text{b)} \frac{x+y-z}{y+z} & \text{c)} \frac{x-y+2z}{x+y+3z} \end{array}$$

6. Uporządkuj liczby a , b , c w kolejności rosnącej.

$$a = \frac{1 - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{7}{8} - \frac{3}{4}}, \quad b = 1\frac{1}{2} \cdot 4\frac{6}{11} \cdot 3\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right), \quad c = \frac{2}{11} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2\frac{3}{4} \cdot \left(-1\frac{1}{3}\right)$$

D 7. Uzasadnij, że nie istnieje trójkąt o bokach długości x , y i z .

$$\text{a)} x = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right), \quad y = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right), \quad z = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)^2$$

$$\text{b)} x = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{2}{5}}, \quad y = \frac{2\frac{1}{5} - \frac{1}{4}}{2\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}, \quad z = \frac{1\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1\frac{2}{3} + \frac{1}{4}}$$

8. **Ułamek egipski** to ułamek postaci $\frac{1}{n}$, gdzie n jest liczbą naturalną dodatnią. Przeczytaj informację obok i przedstaw podany ułamek jako sumę różnych ułamków egipskich.

$$\text{a)} \frac{2}{11} \quad \text{b)} \frac{2}{17} \quad \text{c)} \frac{2}{31}$$

Czy wiesz, że...

Każdy ułamek postaci $\frac{2}{n}$, gdzie n jest liczbą nieparzystą, można przedstawić jako sumę:

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

dla: $a = \frac{n+1}{2}, \quad b = \frac{n(n+1)}{2}$

Sprawdź się

9. Podaj liczbę odwrotną do liczby x .

$$\begin{array}{lll} \text{a)} x = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} & \text{c)} x = \frac{5}{6} + \frac{7}{8} & \text{e)} x = \frac{1}{2} + 13 - \frac{1}{4} \\ \text{b)} x = \frac{3}{4} - \frac{3}{8} & \text{d)} x = \frac{8}{15} - \frac{4}{9} & \text{f)} x = \frac{2}{3} - 34 + \frac{1}{6} \end{array}$$

10. Oblicz.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \left(1\frac{4}{5} - 3\frac{2}{7}\right) \cdot 5\frac{5}{13} & \text{c)} \left(\frac{2}{5} + 1\frac{2}{3}\right) \cdot (-2)^2 & \text{e)} \left(2\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)^2 \\ \text{b)} 1\frac{4}{5} - 3\frac{2}{7} \cdot 5\frac{5}{13} & \text{d)} \left(2\frac{3}{4} - 3\frac{1}{2}\right) \cdot (-2^2) & \text{f)} \left(\frac{3}{4} - \left(-\frac{3}{4}\right)^2\right)^2 \end{array}$$

11. Oblicz.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}}{\frac{1}{8} - \frac{1}{5} - \frac{1}{10}} & \text{b)} \frac{\frac{9}{5} : \frac{3}{7} - 3\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}}{5\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{7}} & \text{c)} \frac{1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} - \frac{2}{3} \cdot 1,5}{\frac{1}{4} \cdot (-2)^2 - 3\frac{1}{7} \cdot \frac{7}{11}} \end{array}$$

Przypomnij sobie

Pierwiastek kwadratowy i pierwiastek sześcienny

1. Zapisz w postaci liczby całkowitej.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sqrt{0} & \text{d)} \sqrt{9} & \text{g)} \sqrt{81} \\ \text{b)} \sqrt{1} & \text{e)} \sqrt{49} & \text{h)} \sqrt{100} \\ \text{c)} \sqrt{4} & \text{f)} \sqrt{64} & \text{i)} \sqrt{121} \end{array}$$

$$\sqrt{36} = 6, \text{ bo } 6^2 = 36$$

$$\sqrt{144} = 12, \text{ bo } 12^2 = 144$$

2. Zapisz w postaci ułamka zwykłego.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sqrt{\frac{1}{4}} & \text{c)} \sqrt{\frac{4}{9}} & \text{e)} \sqrt{\frac{49}{64}} \\ \text{b)} \sqrt{\frac{1}{9}} & \text{d)} \sqrt{\frac{9}{4}} & \text{f)} \sqrt{\frac{25}{81}} \end{array}$$

$$\sqrt{\frac{36}{121}} = \frac{6}{11}, \text{ bo:}$$

$$\left(\frac{6}{11}\right)^2 = \frac{36}{121}$$

3. Zapisz w postaci liczby mieszanej.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sqrt{2\frac{1}{4}} & \text{c)} \sqrt{6\frac{1}{4}} & \text{e)} \sqrt{1\frac{11}{25}} \\ \text{b)} \sqrt{2\frac{7}{9}} & \text{d)} \sqrt{5\frac{4}{9}} & \text{f)} \sqrt{1\frac{13}{36}} \end{array}$$

$$\sqrt{1\frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

4. Zapisz liczbę w postaci dziesiętnej.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sqrt{0,01} & \text{c)} \sqrt{0,36} & \text{e)} \sqrt{1,21} \\ \text{b)} \sqrt{0,04} & \text{d)} \sqrt{0,81} & \text{f)} \sqrt{1,44} \end{array}$$

$$\sqrt{0,09} = 0,3, \text{ bo:}$$

$$0,3^2 = 0,09$$

5. Zapisz w postaci liczby całkowitej.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sqrt[3]{0} & \text{d)} \sqrt[3]{27} & \text{g)} \sqrt[3]{343} \\ \text{b)} \sqrt[3]{1} & \text{e)} \sqrt[3]{64} & \text{h)} \sqrt[3]{1000} \\ \text{c)} \sqrt[3]{8} & \text{f)} \sqrt[3]{125} & \text{i)} \sqrt[3]{27\,000} \end{array}$$

$$\sqrt[3]{216} = 6, \text{ bo } 6^3 = 216$$

$$\sqrt[3]{8000} = 20, \text{ bo:}$$

$$20^3 = 8000$$

6. Zapisz w postaci ułamka zwykłego.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sqrt[3]{\frac{1}{8}} & \text{c)} \sqrt[3]{\frac{8}{27}} & \text{e)} \sqrt[3]{\frac{125}{8}} \\ \text{b)} \sqrt[3]{\frac{1}{27}} & \text{d)} \sqrt[3]{\frac{27}{125}} & \text{f)} \sqrt[3]{\frac{216}{125}} \end{array}$$

$$\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}, \text{ bo } \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$$

7. Zapisz w postaci ułamka dziesiętnego.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sqrt[3]{0,008} & \text{b)} \sqrt[3]{0,125} & \text{c)} \sqrt[3]{0,216} \end{array}$$

$$\sqrt[3]{0,001} = 0,1, \text{ bo:}$$

$$(0,1)^3 = 0,001$$

8. Oblicz.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sqrt{81} - \sqrt{64} + \sqrt[3]{64} & \text{b)} \sqrt[3]{125} + \sqrt{25} - \sqrt{100} \end{array}$$

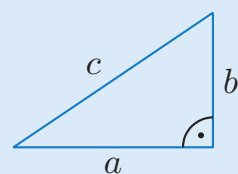
1.3. Liczby niewymierne

W VI w. p.n.e. Grecy sformułowali jedno z najsłynniejszych twierdzeń.

Twierdzenie Pitagorasa

Suma kwadratów długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej:

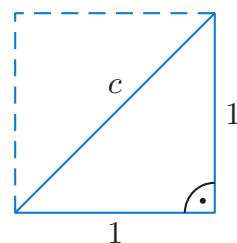
$$a^2 + b^2 = c^2$$



Twierdzenie to miało istotny wpływ na rozwój pojęcia liczby. Rozpatrzmy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 1 (rysunek obok).

Zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa: $c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, czyli $c = \sqrt{2}$ (przekątna kwadratu o boku 1 ma długość $\sqrt{2}$).

Dowód tego, że $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną, będzie przedstawiony w klasie 4.



Definicja

Liczby, które nie są wymierne, nazywamy **liczbami niewymiernymi**.

Stwierdzenie, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną, oznacza, że liczba ta nie jest równa żadnemu ułamkowi $\frac{m}{k}$, gdzie m i k są liczbami całkowitymi.

Ogólnie, dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $\sqrt{n}$ jest albo liczbą naturalną (np. $\sqrt{81} = 9$), albo liczbą niewymierną (np. $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{82}$). Analogicznie jest dla pierwiastka sześciennego (np. $\sqrt[3]{8} = 2$, a $\sqrt[3]{9}$ jest liczbą niewymierną).

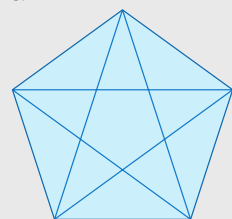
Ćwiczenie 1

Wśród podanych liczb wskaż liczby niewymierne.

- a) $\sqrt{7}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{44}$, $\sqrt{144}$ b) $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[3]{25}$, $\sqrt[3]{27}$

Inne przykłady liczb niewymiernych otrzymamy, jeżeli zauważymy, że suma liczby wymiernej i niewymiernej jest liczbą niewymierną. Podobnie iloczyn liczby wymiernej różnej od zera i liczby niewymiernej jest liczbą niewymierną. Dlatego na przykład liczby: $3 + \sqrt{7}$, $\frac{1}{5}\sqrt{13}$, $\frac{1}{2} - 2\sqrt{17}$, $2\sqrt{3} - \frac{7}{3}$ są liczbami niewymiernymi.

Przekątna pięciokąta foremnego o boku długości 1 ma długość równą $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Jest to liczba niewymierna.



Ćwiczenie 2

Czy liczba x jest niewymierna?

- a) $x = 3\sqrt{6} - \frac{1}{3}$ c) $x = \sqrt{16} + 2\sqrt{14}$ e) $x = \sqrt[3]{9} - 1$
b) $x = 10 + \frac{2}{3}\sqrt{9}$ d) $x = \frac{1}{2}\sqrt{4} - \sqrt{121}$ f) $x = 15 + 6\sqrt[3]{27}$

Ćwiczenie 3

Podaj przykład dwóch różnych liczb niewymiernych, których:

- a) suma jest liczbą wymierną, b) iloczyn jest liczbą wymierną.

Uwaga. Oprócz liczb niewymiernych, które są pierwiastkami kwadratowymi lub sześciennymi, istnieją inne liczby niewymierne, np. znana z geometrii liczba π .

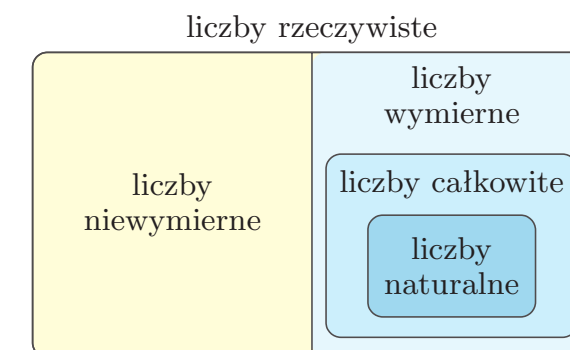
Definicja

Zbiór wszystkich liczb wymiernych i niewymiernych nazywamy zbiorem **liczb rzeczywistych**.

Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych oznaczamy literą $\mathbb{R}$.

Zbiór liczb niewymiernych bywa oznaczany literami $\mathbb{I}\mathbb{Q}$.

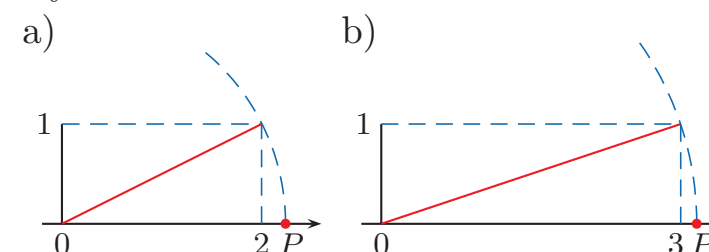
Uwaga. W dalszym ciągu, jeżeli nie napiszemy inaczej, przez „liczbę” rozumieć będziemy liczbę rzeczywistą.



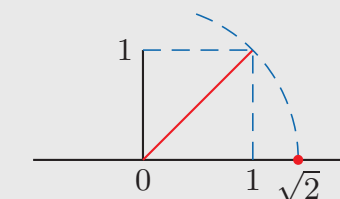
Zadania

- Wśród podanych trzech liczb wskaż liczbę niewymierną.
a) $\sqrt{4}$, $\sqrt{64}$, $\sqrt{164}$ c) $\sqrt{25}$, $\sqrt{125}$, $\sqrt{225}$ e) $\sqrt[3]{0}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{64}$
b) $\sqrt{9}$, $\sqrt{29}$, $\sqrt{49}$ d) $\sqrt{169}$, $\sqrt{196}$, $\sqrt{286}$ f) $\sqrt[3]{81}$, $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[3]{216}$

- Wyznacz współrzędną punktu P zaznaczonego na osi liczbowej. Czy jest to liczba wymierna?



Konstrukcyjne wyznaczenie na osi liczbowej punktu o współrzędnej $\sqrt{2}$



- Dany jest prostokąt o bokach x i y . Czy długość przekątnej tego prostokąta wyraża się liczbą wymierną?

- a) $x = 2$, $y = 4$ b) $x = 3$, $y = 4$ c) $x = 6$, $y = 8$ d) $x = 8$, $y = 10$

4. Dane są liczby niewymierne:

$$p = 3 - 2\sqrt{3}, \quad q = 2\sqrt{3}, \quad r = 2\sqrt{3} - 7, \quad s = 7\sqrt{3}$$

Wybierz dwie spośród tych liczb tak, aby:

- a) ich suma była liczbą wymierną, c) ich iloczyn był liczbą wymierną,
b) ich różnica była liczbą wymierną, d) ich iloraz był liczbą wymierną.

5. Korzystając z podanych przybliżeń, sprawdź, czy nierówność jest prawdziwa (nie używaj kalkulatora).

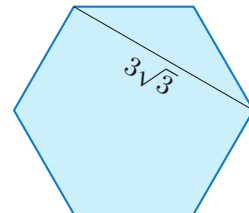
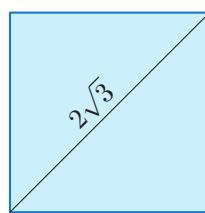
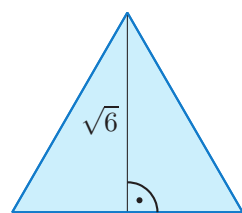
- a) $\sqrt{2} + \sqrt{3} > 3$ c) $2\sqrt{2} + \sqrt{5} > 5$ e) $4 - 2\sqrt{3} < \frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $\sqrt{5} + \sqrt{3} > 4$ d) $\sqrt{5} - \sqrt{3} < \frac{1}{2}$ f) $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{2} < \sqrt{3}$

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &\approx 1,414 \\ \sqrt{3} &\approx 1,732 \\ \sqrt{5} &\approx 2,236\end{aligned}$$

6. Podaj największą liczbę naturalną n spełniającą nierówność ($\pi \approx 3,14$):

- a) $n < 2\pi + 5$, b) $n < \pi^2 - 1$, c) $n^2 < 10\pi - 7$.

7. Na rysunkach przedstawiono trójkąt równoboczny, kwadrat i sześciokąt foremny. Obwód którego z tych wielokątów wyraża się liczbą wymierną?

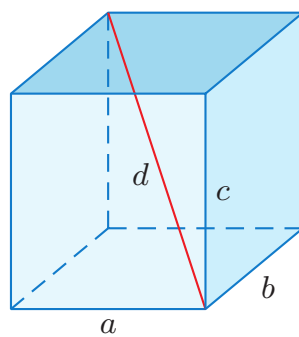


8. Długość przekątnej prostopadłościanu o wymiarach $a \times b \times c$ wyraża się wzorem:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Czy długość przekątnej prostopadłościanu o podanych krawędziach jest liczbą niewymierną?

- a) $a = 6, b = 8, c = 10$ b) $a = 3, b = 4, c = 12$



Sprawdź się

9. Wśród liczb $0,1, -3, 0, \sqrt{4}, -\frac{12}{3}, \sqrt[3]{125}, -\sqrt{3}, 121\frac{1}{3}, 2 - \sqrt{2}$ wskaż liczby:

- a) naturalne, b) całkowite, c) wymierne, d) niewymierne.

10. Podaj liczbę naturalną n spełniającą warunek:

- a) $n < \sqrt{35} < n + 1$, b) $n < 2\sqrt{3} < n + 1$, c) $n - 1 < 5\sqrt{5} < n$.

11. Czy długość przekątnej prostokąta o bokach a, b jest liczbą wymierną?

- a) $a = 5, b = 12$ b) $a = 6, b = 10$ c) $a = 7, b = 24$

Przypomnij sobie

Działania na ułamkach dziesiętnych i ułamkach zwykłych

1. Oblicz.

- a) $16,29 + 12,82$ c) $-0,81 + 23,5$ e) $-41,2 - 9,86$
b) $147,09 + 14,709$ d) $12,68 - 10,24$ f) $4,36 - (-3,8)$

2. Oblicz.

- a) $24,8 \cdot 2,1$ c) $5,32 \cdot (-5,5)$ e) $-(0,07 \cdot 0,052)$
b) $10,5 \cdot 3,2$ d) $(-0,34) \cdot (-1,5)$ f) $-(3,2 \cdot (-0,05))$

3. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Zamień ułamek zwykły na ułamek dziesiętny, wykonując dzielenie pisemne.

a) $\frac{7}{20}$

$$\begin{array}{r} 0,35 \\ 7 : 20 \\ - 0 \\ \hline 70 \\ - 60 \\ \hline 100 \\ - 100 \\ \hline 0 \end{array}$$

b) $\frac{19}{4}$

$$\begin{array}{r} 4,75 \\ 19 : 4 \\ - 16 \\ \hline 30 \\ - 28 \\ \hline 20 \\ - 20 \\ \hline 0 \end{array}$$

Zamień ułamek zwykły na ułamek dziesiętny, wykonując dzielenie pisemne.

- a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{8}{5}$ c) $\frac{13}{8}$ d) $\frac{21}{8}$ e) $\frac{13}{20}$ f) $\frac{16}{25}$ g) $\frac{49}{50}$ h) $\frac{11}{125}$

4. Oblicz.

- a) $1,75 : 0,25$ c) $8,4 : 1,5$ e) $0,0525 : (-0,42)$
b) $0,65 : 1,3$ d) $3,96 : 0,06$ f) $0,001 : (-0,000001)$

5. Oblicz.

- a) $\frac{2}{3} + 0,5 \cdot 3$ c) $(1\frac{6}{7} + 0,7) \cdot 2$ e) $\frac{30}{25} - (1,2 - 2)$
b) $\frac{1}{5} - 4 : 0,8$ d) $(5\frac{1}{8} + 7,125) : 2$ f) $3,25 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3})$

6. Oblicz.

- a) $6,4 : 2\frac{2}{15} - 24,8 : \frac{4}{5}$ b) $2\frac{1}{2} + 3(6,2 + 4,8)$ c) $24,75 : \frac{3}{4} + 5\frac{1}{2} : 2\frac{3}{4}$

1.4. Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej

Ułamki o mianownikach 10, 100, 1000, ... (czyli mianownikach będących potęgami liczby 10) nazywamy **uławkami dziesiętnymi**. Mogą one być zapisane na dwa sposoby: $\frac{15}{100} = 0,15$; $\frac{37}{1000} = 0,037$; $5\frac{7}{10} = 5,7$.

Zapis po prawej stronie powyższych równości nazywamy **rozwinięciem dziesiętnym** lub **postacią dziesiętną** liczby. Aby uzyskać postać dziesiętną liczby wymiernej, wykonujemy dzielenie. Na przykład dla liczby $\frac{13}{4}$ otrzymamy:

$$\frac{13}{4} = 13 : 4 = 3,25$$

Dla liczby $\frac{1}{6}$ w wyniku dzielenia otrzymamy:

$$\frac{1}{6} = 0,166666666\dots$$

Takie rozwinięcie zapisujemy w następujący sposób:

$$\frac{1}{6} = 0,1(6)$$

Dla liczby $\frac{4}{7}$ w wyniku dzielenia otrzymamy:

$$\frac{4}{7} = 0,571428571428571428\dots$$

co zapiszemy $\frac{4}{7} = 0,(571428)$.

Nawias w rozwinięciu dziesiętnym oznacza powtarzanie się nieskończenie wiele razy zapisanej w nim grupy cyfr. Taką najkrótszą powtarzającą się grupę cyfr nazywamy **okresem**, a rozwinięcie dziesiętne możemy też nazwać **okresowym**. Liczbę cyfr występujących w okresie nazywamy **długością okresu**.

Ćwiczenie 1

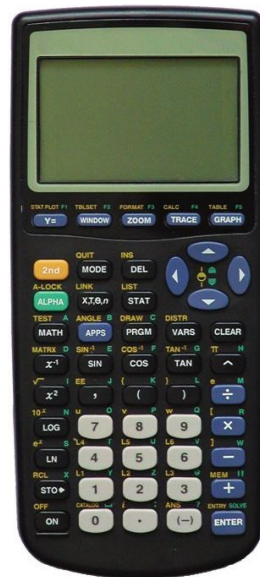
Przeczytaj podany w ramce przykład, a następnie przedstaw liczbę w postaci dziesiętnej.

- | | | |
|--------------------|---------------------|---------------------|
| a) $\frac{7}{20}$ | c) $\frac{52}{25}$ | e) $\frac{4}{125}$ |
| b) $\frac{11}{25}$ | d) $\frac{143}{50}$ | f) $\frac{17}{250}$ |

Ćwiczenie 2

Jaka cyfra znajduje się na dziesiątym, a jaka na dwudziestym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym podanej liczby?

- | | | | |
|-------------|------------|-------------|---------------|
| a) 0,(1234) | b) 5,(732) | c) 2,6(435) | d) 0,32(1410) |
|-------------|------------|-------------|---------------|



Przy obliczeniach na liczbach podanych w postaci dziesiętnej wygodnie jest korzystać z kalkulatora.

Przedstaw liczbę $\frac{6}{25}$ w postaci dziesiętnej.

$$\frac{6}{25} = \frac{6}{25} \cdot \frac{4}{4} = \frac{24}{100} = 0,24$$

Ćwiczenie 3

Wykonaj dzielenie i podaj długość okresu nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego każdej z liczb $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{5}{27}$.

Twierdzenie

Każdą liczbę wymierną można zapisać w postaci dziesiętnej skończonej lub nieskończonej okresowej.

Każde rozwinięcie dziesiętne okresowe przedstawia liczbę wymierną.

Uwaga. Rozwinięcia dziesiętne nieskończone nieokresowe przedstawiają liczby niewymierne, np. 0,101001000100001...

Ćwiczenie 4

a) Które z liczb wymiernych $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{8}$ mają rozwinięcia dziesiętne skończone, a które nieskończone?

b) Które z liczb $\sqrt{8}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{\frac{3}{4}}$, $\sqrt{\frac{16}{9}}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$, $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$ mają rozwinięcia dziesiętne nieskończone nieokresowe?

■ Przybliżenia. Reguła zaokrąglania

Mówimy, że liczba x jest **przybliżeniem** liczby a z dokładnością do d , jeśli liczby a i x różnią się o nie więcej niż d . Na przykład liczba 1,414 jest przybliżeniem liczby $\sqrt{2}$ z dokładnością do 0,001.

$$\sqrt{2} \approx 1,41421356237$$

Ćwiczenie 5

Podaj przybliżenie liczby $\sqrt{2}$ z dokładnością do:

- | | | | |
|---------|----------|------------|-------------|
| a) 0,1, | b) 0,01, | c) 0,0001, | d) 0,00001. |
|---------|----------|------------|-------------|

Do przybliżenia liczby zapisanej w postaci dziesiętnej zwykle stosujemy **regułę zaokrąglania**, która polega na odrzuceniu końcowych cyfr tej liczby i zastąpieniu ich zerami, przy czym:

- jeżeli pierwszą z odrzuconych cyfr jest 0, 1, 2, 3, 4, to ostatnią z zachowanych cyfr pozostawiamy bez zmian;
- jeżeli pierwszą z odrzuconych cyfr jest 5, 6, 7, 8, 9, to ostatnią z zachowanych cyfr zwiększamy o jeden.

Przykład 1

Zaokrągleniem liczby 6,9874 do:

- trzech miejsc po przecinku jest liczba 6,987,
- dwóch miejsc po przecinku – liczba 6,99,
- jednego miejsca po przecinku – liczba 7.

Zaokrągleniem liczby nazywamy jej przybliżenie zgodne z regułą zaokrąglania.

Ćwiczenie 6

Zaokrąglaj do liczby całkowitej.

- a) 20,9813 b) 19,901 c) 0,401 d) 1,099 e) 2,49957

Ćwiczenie 7

Podaj zaokrąglenia liczb $x = 7,89517$, $y = 9,99625$ i $z = 5,90394$ do n miejsc po przecinku dla: a) $n = 4$, b) $n = 3$, c) $n = 2$, d) $n = 1$.

Jeżeli przybliżenie liczby jest mniejsze od tej liczby, to mówimy o przybliżeniu z **niedomiarem**. Natomiast jeżeli przybliżenie liczby jest od niej większe, to mówimy o przybliżeniu z **nadmiarem**.

Czy wiesz, że...

W 2002 r. Yasumasa Kanada wyznaczył za pomocą komputera liczbę π z dokładnością do ponad biliona cyfr po przecinku. W praktyce wystarczają znacznie mniej dokładne przybliżenia.

3,141592653589793238462643383279502
88419716939937510582097494459230781
64062862089986280348253421170679821
48086513282306647093844609550582231
72535940812848111745028410270193852
11055596446229489549303819644288109
75665933446128475648233786783165271
20190914564856692346034861045432664

Ćwiczenie 8

Podaj zaokrąglenie liczby π z dokładnością do n miejsc po przecinku. Czy jest to przybliżenie z nadmiarem, czy z niedomiarem?

- a) $n = 6$ b) $n = 5$ c) $n = 4$ d) $n = 3$ e) $n = 2$

Zadania

1. Znajdź postać dziesiętną liczby (nie korzystaj z kalkulatora):

- a) $\frac{5}{4}$, b) $-\frac{27}{4}$, c) $-\frac{1}{8}$, d) $\frac{3}{8}$, e) $\frac{5}{8}$, f) $\frac{11}{8}$, g) $\frac{3}{80}$, h) $\frac{7}{80}$.

2. Na podstawie podanych obok informacji znajdź rozwinięcie dziesiętne liczby:

- a) $\frac{7}{9}$, c) $\frac{1}{300}$, e) $\frac{11}{30}$,
b) $\frac{1}{60}$, d) $\frac{5}{900}$, f) $\frac{17}{90}$.

$\frac{1}{3} = 0,33333333...$
 $\frac{1}{6} = 0,16666666...$
 $\frac{1}{9} = 0,11111111...$

3. Jaka cyfra znajduje się na dwunastym, a jaka na dwudziestym piątym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym podanej liczby? Zaokrąglj tę liczbę do trzech miejsc po przecinku.

- a) 1,(046) b) 0,3(25) c) 7,0(037) d) 9,(3486) e) 2,86(345)

4. Jaka cyfra znajduje się na dwudziestym czwartym, a jaka na setnym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby: a) $\frac{2}{7}$, b) $\frac{5}{7}$?

5. Liczba o rozwinięciu dziesiętnym okresowym $7,19(1ab693)$ ma na jedenastym miejscu po przecinku cyfrę 3, a na dwudziestym drugim – cyfrę 6. Wyznacz cyfry a i b tego rozwinięcia.

6. Na podstawie podanego obok twierdzenia odpowiedz, czy rozwinięcie dziesiętne ułamka jest skończone czy okresowe.

- a) $\frac{633}{320}$ b) $\frac{137}{480}$ c) $\frac{6561}{22\,400}$ d) $\frac{11\,111}{51\,200}$

Ułamek nieskracalny $\frac{m}{n}$ ma rozwinięcie dziesiętne skończone wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n jest iloczynem pewnej liczby czynników równych 2 lub 5.

7. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Przedstaw liczbę $0,(12)$ w postaci ułamka zwykłego.

$$x = 0,121212...$$

$100x = 12,121212...$ Obie strony równania mnożymy przez 100, aby przecinek znalazł się za pierwszym wystąpieniem okresu.

$$100x = 12 + x$$

$$99x = 12$$

$$x = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$$

Przedstaw liczbę w postaci ułamka zwykłego.

- a) $0,(36)$ b) $3,(72)$ c) $-6,(24)$ d) $0,(9)$ e) $41,7(9)$ f) $2,1(52)$

8. Liczby $x = 0,(6)$ i $y = 4,(36)$ przedstaw w postaci ułamków zwykłych, a następnie oblicz: a) $x + y$, b) $x^2 - y$, c) $x + \frac{1}{y}$.

Sprawdź się

9. Przedstaw liczbę w postaci dziesiętnej (nie korzystaj z kalkulatora):

- a) $\frac{19}{4}$, c) $\frac{15}{400}$, e) $\frac{25}{8}$, g) $\frac{7}{3}$, i) $\frac{2}{9}$,
b) $\frac{7}{40}$, d) $-\frac{59}{8}$, f) $\frac{26}{3}$, h) $-\frac{58}{9}$, j) $\frac{5}{80}$.

10. Jaka cyfra znajduje się na dwudziestym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym podanej liczby (nie korzystaj z kalkulatora)?

- a) $\frac{5}{11}$ b) $\frac{8}{15}$ c) $\frac{11}{30}$ d) $\frac{19}{60}$ e) $\frac{7}{27}$

11. Podaj przybliżenie liczby $\sqrt{5}$ z dokładnością do n miejsc po przecinku dla: a) $n = 7$, b) $n = 5$, c) $n = 1$.

$$\sqrt{5} \approx 2,23606798$$

1.5. Pierwiastek kwadratowy

Przypomnijmy definicję pierwiastka kwadratowego.

Definicja

Pierwiastkiem kwadratowym (pierwiastkiem drugiego stopnia) z liczby nieujemnej a nazywamy liczbę nieujemną b , której kwadrat jest równy a .

$$\sqrt{a} = b, \text{ gdy } b^2 = a \text{ i } b \geq 0$$

Przykład 1

$\sqrt{25} = 5$, ponieważ $5^2 = 25$.

$\sqrt{0,16} = 0,4$, ponieważ $0,4^2 = 0,16$.

$\sqrt{0} = 0$, ponieważ $0^2 = 0$.

Zwróć uwagę na to, że $\sqrt{36}$ nie jest równy -6 , ponieważ umówiliśmy się, że pierwiastek kwadratowy jest liczbą nieujemną, aby uniknąć sytuacji, w której $\sqrt{36}$ oznaczałby dwie różne liczby.

Ćwiczenie 1

Zapisz w postaci liczby wymiernej.

- | | | |
|-----------------|------------------|------------------|
| a) $\sqrt{144}$ | d) $\sqrt{625}$ | g) $\sqrt{1,21}$ |
| b) $\sqrt{225}$ | e) $\sqrt{2500}$ | h) $\sqrt{3,61}$ |
| c) $\sqrt{324}$ | f) $\sqrt{8100}$ | i) $\sqrt{4,41}$ |

Prawdziwa jest następująca własność:

Dla dowolnej liczby rzeczywistej:

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

Stąd $\sqrt{5^2} = 5$ oraz $\sqrt{(-5)^2} = -(-5) = 5$.

Ćwiczenie 2

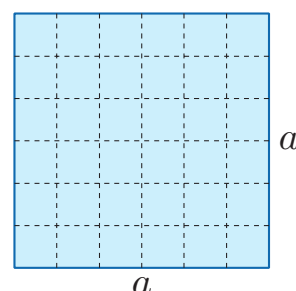
Podaj wartość, korzystając z powyższej własności.

- a) $\sqrt{3^2}$ b) $\sqrt{(-3)^2}$ c) $\sqrt{(-9)^2}$ d) $\sqrt{(-1,2)^2}$ e) $\sqrt{(-\sqrt{3})^2}$

Wyznaczenie pierwiastka kwadratowego z liczby nieujemnej odpowiada wyznaczeniu długości boku kwadratu, gdy znamy jego pole ($P = a^2$, więc $a = \sqrt{P}$).

Ćwiczenie 3

Oblicz obwód kwadratu o polu: a) $3,24 \text{ cm}^2$, b) 1024 cm^2 .



Przy odpowiednich założeniach (jakich?) prawdziwe są podane obok wzory.

Pierwiastek iloczynu

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Pierwiastek ilorazu

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Przykład 2

a) $\sqrt{49 \cdot 144} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{144} = 7 \cdot 12 = 84$

b) $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

- a) $\sqrt{4 \cdot 81}$, $\sqrt{25 \cdot 0,36}$, $\sqrt{0,09 \cdot 361}$ c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$, $\sqrt{6} \cdot \sqrt{1,5}$, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$
b) $\sqrt{\frac{121}{144}}$, $\sqrt{\frac{361}{400}}$, $\sqrt{\frac{576}{625}}$ d) $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}$, $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$, $\frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{14}}{\sqrt{35}}$

Zadania

1. Oblicz.

- | | |
|--|--|
| a) $\sqrt{121} + \sqrt{49} - \sqrt{225}$ | d) $\sqrt{3,61} - \sqrt{1,21} - \sqrt{0,09}$ |
| b) $\sqrt{196} - \sqrt{169} - \sqrt{144}$ | e) $\sqrt{\frac{81}{400}} + \sqrt{\frac{9}{100}} - \sqrt{\frac{64}{25}}$ |
| c) $\sqrt{0,25} + \sqrt{1,44} + \sqrt{6,25}$ | f) $\sqrt{3\frac{6}{25}} - \sqrt{2\frac{1}{4}} + \sqrt{1\frac{7}{9}}$ |

D 2. Uzasadnij, że:

- a) $\sqrt{1\frac{9}{16}} \neq \sqrt{1} + \sqrt{\frac{9}{16}}$, b) $\sqrt{2\frac{1}{4}} \neq \sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{4}}$, c) $\sqrt{4\frac{1}{9}} \neq \sqrt{4} + \sqrt{\frac{1}{9}}$.

3. Podaj wszystkie liczby naturalne leżące na osi między liczbami:

- a) $\sqrt{2}$ i $\sqrt{33}$, b) $\sqrt{10}$ i $\sqrt{140}$, c) $\sqrt{80}$ i $\sqrt{300}$.

4. Wyłącz czynnik przed pierwiastek.

- | | | | |
|----------------|----------------|-----------------|-----------------|
| a) $\sqrt{18}$ | c) $\sqrt{48}$ | e) $\sqrt{108}$ | g) $\sqrt{392}$ |
| b) $\sqrt{24}$ | d) $\sqrt{96}$ | f) $\sqrt{252}$ | h) $\sqrt{450}$ |

$$\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

5. Zapisz liczbę w postaci $a\sqrt{2}$.

- | | | |
|----------------------------|-----------------------------|---|
| a) $4\sqrt{2} + \sqrt{8}$ | c) $\sqrt{18} + \sqrt{98}$ | e) $\sqrt{18} + \sqrt{72} + \sqrt{242}$ |
| b) $\sqrt{32} - 3\sqrt{2}$ | d) $\sqrt{200} - \sqrt{50}$ | f) $\sqrt{800} + \sqrt{242} - \sqrt{162}$ |

6. Zapisz liczbę w postaci $a\sqrt{b}$.

- | | | |
|----------------------------|-----------------------------|--|
| a) $7\sqrt{5} + \sqrt{20}$ | c) $\sqrt{12} + \sqrt{75}$ | e) $0,2\sqrt{50} + 0,8\sqrt{72} - 0,3\sqrt{32}$ |
| b) $\sqrt{48} - \sqrt{27}$ | d) $\sqrt{45} - \sqrt{125}$ | f) $3\sqrt{20} - \frac{1}{3}\sqrt{45} - 5\sqrt{180}$ |

7. Usuń niewymierność z mianownika, postępując tak jak w przykładzie.

- a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ e) $\frac{5}{3\sqrt{10}}$
 b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{4}{3\sqrt{2}}$ f) $\frac{3}{5\sqrt{15}}$

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

8. Usuń niewymierność z mianownika. Podaj przybliżoną wartość wyrażenia (przyjmij $\sqrt{2} \approx 1,4$).

- a) $\frac{8+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{6-3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$ c) $\frac{5\sqrt{2}-10}{4\sqrt{2}}$ d) $\frac{5\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}}$

9. Oblicz.

- a) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$ c) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{40}$ e) $\sqrt{28} \cdot \sqrt{63}$ g) $\sqrt{30} \cdot \sqrt{480}$
 b) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{8}$ d) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{50}$ f) $\sqrt{45} \cdot \sqrt{20}$ h) $\sqrt{80} \cdot \sqrt{180}$

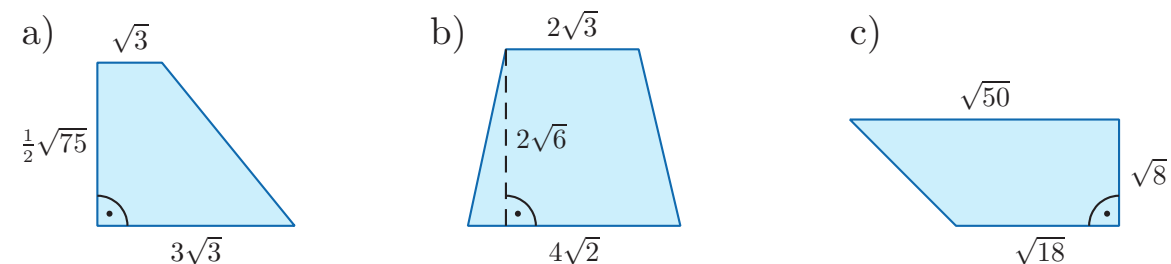
10. Oblicz.

- a) $\frac{\sqrt{54} \cdot \sqrt{350}}{\sqrt{21}}$ b) $\frac{\sqrt{98} \cdot \sqrt{375}}{\sqrt{80}}$ c) $\frac{\sqrt{52} \cdot \sqrt{363}}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{130}}$ d) $\frac{\sqrt{48} \cdot \sqrt{162}}{\sqrt{72} \cdot \sqrt{135}}$

11. Wykonaj działania.

- a) $2\sqrt{3}(\sqrt{27} + 3\sqrt{6} - 2\sqrt{3})$ b) $\sqrt{3}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$

12. Oblicz pole trapezu.



Sprawdź się

13. Oblicz.

- a) $\sqrt{81} + \sqrt{25}$ b) $\sqrt{0,49} + \sqrt{0,64}$ c) $\sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{16}}$ d) $\sqrt{\frac{1}{9}} - \sqrt{\frac{1}{100}}$

14. Włącz czynnik pod pierwiastek.

- a) $5\sqrt{5}$ b) $7\sqrt{3}$ c) $9\sqrt{2}$ d) $13\sqrt{2}$ e) $\frac{1}{3}\sqrt{27}$ f) $1,5\sqrt{6}$

15. Figurę przedstawioną na rysunku obok można rozciąć na dwa kwadraty o polach 6,25 i 4,41. Oblicz obwód tej figury.



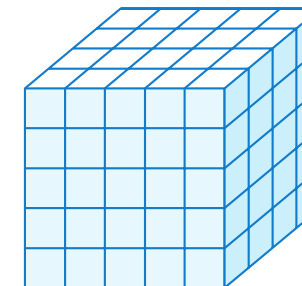
16. Prostokąt o polu P można rozciąć na dwa kwadraty. Oblicz obwód tego prostokąta.

- a) $P = 98 \text{ cm}^2$ b) $P = 6,48 \text{ cm}^2$ c) $P = \frac{1}{8} \text{ m}^2$ d) $P = \frac{1}{72} \text{ m}^2$

1.6. Pierwiastek sześcienny. Pierwiastek n -tego stopnia

■ Pierwiastek sześcienny z liczby nieujemnej

Rozpatrzmy zagadnienie polegające na wyznaczeniu długości krawędzi sześcianu o danej objętości V . Na przykład długość krawędzi sześcianu o objętości $V = 125 \text{ cm}^3$ jest równa 5 cm, bo $5 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 125 \text{ cm}^3$. Zapisujemy to następująco $\sqrt[3]{125} = 5$. Mówimy, że liczba 5 jest pierwiastkiem trzeciego stopnia z liczby 125.



Definicja

Pierwiastkiem sześciennym (pierwiastkiem trzeciego stopnia) z liczby nieujemnej a nazywamy liczbę b , która podniesiona do trzeciej potęgi jest równa a .

$$\sqrt[3]{a} = b, \text{ gdy } b^3 = a$$

Przykład 1

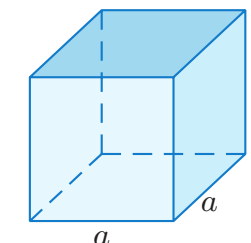
Podaj pierwiastek trzeciego stopnia i uzasadnij odpowiedź.

- a) $\sqrt[3]{8} = 2$, ponieważ $2^3 = 8$. c) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$, ponieważ $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$.
 b) $\sqrt[3]{0} = 0$, ponieważ $0^3 = 0$. d) $\sqrt[3]{0,216} = 0,6$, ponieważ $0,6^3 = 0,216$.

Przykład 2

Oblicz długość krawędzi sześcianu o objętości 27.

Objętość V sześcianu o krawędzi długości a jest równa a^3 , więc $a = \sqrt[3]{V}$, czyli $a = \sqrt[3]{27} = 3$.



Ćwiczenie 1

Oblicz długość krawędzi sześcianu o objętości V .

- a) $V = 1$ b) $V = 64$ c) $V = 216$ d) $V = 8000$

Ćwiczenie 2

Podaj wartość, korzystając z informacji podanych obok.

- a) $\sqrt[3]{512}$ c) $\sqrt[3]{1331}$ e) $\sqrt[3]{1,331}$
 b) $\sqrt[3]{\frac{1}{729}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{8}{729}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{729}{1331}}$

$$\begin{aligned} 7^3 &= 343 \\ 8^3 &= 512 \\ 9^3 &= 729 \\ 11^3 &= 1331 \end{aligned}$$

Obliczanie pierwiastka trzeciego stopnia jest działaniem odwrotnym do podnoszenia do trzeciej potęgi.

Na przykład $\sqrt[3]{11^3} = 11$ oraz $(\sqrt[3]{9})^3 = 9$.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{a^3} &= a \\ (\sqrt[3]{a})^3 &= a\end{aligned}$$

W obliczeniach wykorzystujemy podane poniżej wzory na pierwiastek sześcienny iloczynu i pierwiastek sześcienny ilorazu. Są one analogiczne do wzorów dla pierwiastka kwadratowego (podaj potrzebne założenia).

Przykład 3

a) $\sqrt[3]{0,001 \cdot 343} = \sqrt[3]{0,001} \cdot \sqrt[3]{343} = 0,1 \cdot 7 = 0,7$

b) $\frac{\sqrt[3]{686}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{686}{2}} = \sqrt[3]{343} = 7$

Pierwiastek iloczynu

$$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$$

Pierwiastek ilorazu

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

Ćwiczenie 3

Oblicz.

a) $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$ c) $\sqrt[3]{28} \cdot \sqrt[3]{98}$ e) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} - \sqrt[3]{\frac{125}{216}}$

b) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}$ d) $\frac{\sqrt[3]{56}}{\sqrt[3]{7}}$ f) $\frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{5}} + \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{81}}$

Ćwiczenie 4

Przeanalizuj przykład w ramce. Na jego podstawie usuń niewymierność z mianownika podanego ułamka.

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ b) $\frac{4}{\sqrt[3]{4}}$ c) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$

$$\frac{3}{\sqrt[3]{2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2 \cdot 4}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$$

Pierwiastek sześcienny z liczby rzeczywistej

W przeciwieństwie do definicji pierwiastka kwadratowego definicję pierwiastka sześciennego można rozszerzyć na liczby ujemne.

Na przykład: $\sqrt[3]{-1} = -1$, bo $(-1)^3 = -1$; $\sqrt[3]{-8} = -2$, bo $(-2)^3 = -8$.

Definicja

Pierwiastkiem trzeciego stopnia z liczby rzeczywistej a nazywamy taką liczbę b , która podniesiona do trzeciej potęgi jest równa a .

$$\sqrt[3]{a} = b, \text{ gdy } b^3 = a$$

Ćwiczenie 5

Zapisz w postaci liczby wymiernej.

a) $\sqrt[3]{-27}$ b) $\sqrt[3]{-64}$ c) $\sqrt[3]{-125}$ d) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$ e) $\sqrt[3]{-\frac{27}{1000}}$

Pierwiastek n -tego stopnia

Ogólnie dla pierwiastka n -tego stopnia mamy następujące definicje:

Jeśli n jest liczbą parzystą, to dla dowolnej liczby nieujemnej a :

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ gdy } b \geq 0 \text{ i } b^n = a$$

Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to dla dowolnej liczby rzeczywistej a :

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ gdy } b^n = a$$

Uwaga. Dla pierwiastka 2. stopnia zamiast pisać $\sqrt[n]{a}$ stosujemy zapis $\sqrt{a}$.

Ćwiczenie 6

Zapisz w postaci liczby wymiernej.

a) $\sqrt[4]{81}$ c) $\sqrt[4]{0,0016}$ e) $\sqrt[6]{729}$
b) $\sqrt[5]{-32}$ d) $\sqrt[5]{-0,00001}$ f) $\sqrt[7]{-128}$

$$\sqrt[8]{256} = 2, \text{ bo } 2^8 = 256.$$

$$\sqrt[9]{-512} = -2, \text{ bo } (-2)^9 = -512.$$

Zadania

1. Zapisz w postaci liczby wymiernej.

a) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ e) $\sqrt[3]{\frac{27}{1000}}$ g) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$
b) $\sqrt[3]{\frac{1}{64}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{125}{216}}$ h) $\sqrt[3]{12\frac{19}{27}}$

2. Oblicz.

a) $\sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{8}$ c) $\sqrt[3]{1000} + \sqrt[3]{27}$ e) $\sqrt[3]{0,125} + \sqrt[3]{0,001}$
b) $\sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{64}$ d) $\sqrt[3]{512} - \sqrt[3]{216}$ f) $\sqrt[3]{0,027} + \sqrt[3]{0,008}$

3. Wyłącz czynnik przed pierwiastek.

a) $\sqrt[3]{32}$ c) $\sqrt[3]{135}$ e) $\sqrt[3]{108}$
b) $\sqrt[3]{250}$ d) $\sqrt[3]{375}$ f) $\sqrt[3]{120}$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{500} &= \sqrt[3]{125 \cdot 4} = \\ &= \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{4} = 5\sqrt[3]{4}\end{aligned}$$

4. Włącz czynnik pod pierwiastek.

a) $2\sqrt[3]{3}$ c) $3\sqrt[3]{3}$ e) $4\sqrt[3]{10}$
b) $3\sqrt[3]{2}$ d) $6\sqrt[3]{2}$ f) $6\sqrt[3]{5}$

$$\begin{aligned}3\sqrt[3]{6} &= \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{6} = \\ &= \sqrt[3]{27 \cdot 6} = \sqrt[3]{162}\end{aligned}$$

5. Sprawdź, czy podana równość jest prawdziwa.

a) $\frac{3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{2,25}$ b) $\frac{2\sqrt[3]{5}}{5\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{0,08}$ c) $\frac{5\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{2\frac{7}{9}}$

6. Która z podanych liczb jest większa: x czy y ?

a) $x = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{64}}, y = \sqrt[3]{\frac{27}{8}}$ c) $x = \frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{729}}, y = \sqrt[3]{\frac{135}{320}}$
b) $x = \frac{\sqrt[3]{1000}}{\sqrt[3]{27}}, y = \sqrt[3]{\frac{3000}{81}}$ d) $x = \frac{\sqrt[3]{0,064}}{\sqrt[3]{0,125}}, y = \frac{\sqrt[3]{0,081}}{\sqrt[3]{0,192}}$

7. Objętość prostopadłościanu o wymiarach x cm $\times$ y cm $\times$ z cm jest równa objętości pewnego sześcianu. Oblicz długość krawędzi tego sześcianu.

- a) $x = 4, y = 4, z = 32$ b) $x = 16, y = 20, z = 25$

8. Z trzech sześciennych klocków zbudowano wieżę. Jej objętość jest równa objętości prostopadłościanu o podanych wymiarach. Oblicz wysokość tej wieży.

- a) 4 cm $\times$ 6 cm $\times$ 16 cm b) $6,25$ cm $\times$ $7,5$ cm $\times$ 8 cm

9. Włącz czynnik pod pierwiastek.

- a) $3\sqrt[4]{2}$ b) $5\sqrt[4]{4}$ c) $4\sqrt[5]{2}$ d) $10\sqrt[6]{0,01}$

$$\begin{aligned} 2\sqrt[10]{5} &= \sqrt[10]{2^{10}} \cdot \sqrt[10]{5} = \\ &= \sqrt[10]{2^{10} \cdot 5} = \sqrt[10]{5120} \end{aligned}$$

10. Oblicz.

- a) $\sqrt[4]{16} + \sqrt[4]{81} + \sqrt[4]{256} + \sqrt[4]{625}$ d) $2\sqrt[4]{\frac{81}{16}} - 3\sqrt[4]{\frac{256}{625}}$
b) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{10\,000}$ e) $6\sqrt[4]{0,0625} - 3\sqrt[4]{0,0081}$
c) $\sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[6]{16} - \frac{\sqrt[6]{1000}}{\sqrt[6]{0,001}} - \sqrt[5]{32}$ f) $\sqrt[6]{64} - \sqrt[6]{\frac{1}{64}} - \sqrt[3]{\frac{1}{64}}$

11. Zapisz w postaci liczby wymiernej.

- a) $\sqrt[3]{-8000}$ b) $\sqrt[3]{-0,001}$ c) $\sqrt[3]{-\frac{125}{64}}$ d) $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$

12. Oblicz.

- a) $2\sqrt[3]{-1} - \sqrt[3]{-27}$ c) $\sqrt[3]{\frac{-8}{125}} - \sqrt[3]{-2\frac{10}{27}}$ e) $\frac{\sqrt[3]{-16}}{5\sqrt[3]{2}} - \frac{\sqrt[3]{-72}}{\sqrt[3]{-9}}$
b) $-\sqrt[3]{\frac{-64}{125}} + \sqrt[3]{-0,125}$ d) $\frac{\sqrt[3]{-9} \cdot \sqrt[3]{-9}}{\sqrt[3]{-3}} - \frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{-3}}$ f) $\frac{\sqrt[5]{-128}}{\sqrt[5]{-4}} + \frac{\sqrt[7]{-128}}{\sqrt[9]{-1}}$

D 13. Uzasadnij, że iloczyn xyz równa się zero.

- a) $x = \sqrt[5]{-32} - \sqrt[4]{16}, y = \sqrt[7]{1} - 2\sqrt[6]{1}, z = \sqrt[10]{1024} + 2\sqrt[9]{-1}$
b) $x = \sqrt[5]{32} - \sqrt[4]{81}, y = \sqrt[5]{-32} - \sqrt[4]{81}, z = \sqrt[5]{-1} + \sqrt[4]{1}$

Sprawdź się

14. Oblicz.

- a) $-\sqrt[3]{343} + \sqrt[3]{216}$ b) $\sqrt[3]{-0,216} + \sqrt[3]{0,064}$ c) $\sqrt[3]{0,001} - \sqrt[3]{-0,008}$

15. Która spośród liczb a, b, c, d jest najmniejsza, a która – największa?

- a) $a = \sqrt{8} \cdot \sqrt{18}, b = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{32}, c = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{81}, d = \sqrt[3]{-125} \cdot \sqrt[3]{-27}$
b) $a = \sqrt{\frac{27}{2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}, b = \frac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}, c = \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8}, d = \sqrt[3]{-\frac{5}{4}} \cdot \sqrt[3]{-\frac{25}{2}}$

1.7. Potęga o wykładniku naturalnym

Przykład 1

Założmy, że mamy parę królików oraz że liczba królików podwaja się co pół roku. Ile królików będziemy mieli po 5 latach?

$$2 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{10 \text{ półrocznych okresów}} = 2^{11} = 2048$$

Przypomnijmy definicję potęgi o wykładniku naturalnym.

Definicja

Dla liczby naturalnej $n > 1$ potęgą a^n nazywamy iloczyn n czynników równych liczbie a :

$$\begin{array}{c} \text{wykładnik potęgi} \\ \nearrow \\ a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ czynników}} \\ \uparrow \\ \text{podstawa potęgi} \end{array}$$

Przyjmujemy również, że: $a^1 = a$ oraz $a^0 = 1$ dla $a \neq 0$.

Nie definiujemy wartości 0^0 .

Przykład 2

- a) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$
b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$
c) $(-3)^1 = -3$
d) $16^0 = 1$

Ćwiczenie 1

Oblicz.

- a) $9^2, 9^3, 9^4$
b) $\left(\frac{3}{4}\right)^2, \left(\frac{3}{4}\right)^3, \left(\frac{3}{4}\right)^4$
c) $\left(-\frac{2}{5}\right)^2, \left(-\frac{2}{5}\right)^3, \left(-\frac{2}{5}\right)^4$

Ćwiczenie 2

Uporządkuj liczby w kolejności rosnącej.

$$(-2)^0, (-2)^4, (-2)^9, (-3)^4, (-3)^9$$

Przydatna jest umiejętność rozpoznawania niektórych potęg liczb: 2, 3, 4, 5.

n	2^n	3^n	4^n	5^n
1	2	3	4	5
2	4	9	16	25
3	8	27	64	125
4	16	81	256	625
5	32	243	1024	
6	64	729		
7	128			
8	256			
9	512			
10	1024			

Twierdzenie

Dla liczb naturalnych m, n oraz różnych od 0 liczb rzeczywistych a i b :

$$\begin{aligned} \blacksquare a^m \cdot a^n &= a^{m+n} & \blacksquare a^n \cdot b^n &= (ab)^n & \blacksquare (a^m)^n &= a^{m \cdot n} \\ \blacksquare \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} \text{ dla } m > n & \blacksquare \frac{a^n}{b^n} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n \end{aligned}$$

Ćwiczenie 3

Oblicz.

$$\begin{array}{lllll} \text{a)} 2^2 \cdot 2^6 & \text{c)} 2^9 : 2^6 & \text{e)} 2^6 \cdot 5^6 & \text{g)} 6^5 : 3^5 & \text{i)} (2^2)^3 \\ \text{b)} 2^3 \cdot 2^5 & \text{d)} 3^9 : 3^5 & \text{f)} 4^3 \cdot 5^3 & \text{h)} 12^4 : 4^4 & \text{j)} (3^3)^2 \end{array}$$

Zadania

1. Oblicz.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot 6^3 & \text{c)} \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot 3^6 & \text{e)} \left(-\frac{1}{2}\right)^8 \cdot (-2)^5 \\ \text{b)} \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot 5^5 & \text{d)} \left(-\frac{1}{2}\right)^5 \cdot (-2)^3 & \text{f)} \left(-\frac{1}{4}\right)^3 \cdot (-2)^6 \end{array}$$

2. Oblicz.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} (2^2)^5 & \text{c)} ((-4)^3)^1 & \text{e)} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^3 & \text{g)} \left(\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right)^3 \\ \text{b)} (3^2)^2 & \text{d)} ((-5)^2)^2 & \text{f)} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)^2 & \text{h)} \left(\left(-\frac{3}{2}\right)^3\right)^2 \end{array}$$

3. Porównaj liczby x i y .

$$\begin{array}{ll} \text{a)} x = (-4)^2, y = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 & \text{c)} x = \left(-\frac{1}{4}\right)^2, y = \left(-\frac{1}{4}\right)^4 \\ \text{b)} x = \left(-\frac{1}{2}\right)^5, y = \left(-\frac{1}{2}\right)^6 & \text{d)} x = \left(-\frac{2}{3}\right)^3, y = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 \end{array}$$

4. Uporządkuj liczby $\left(-\frac{1}{2}\right)^5, 2^4, (-2)^5, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(-\frac{1}{2}\right)^2, \left(-\frac{1}{2}\right)^3, \left(-\frac{1}{2}\right)^4$ w kolejności rosnącej.

Sprawdź się

5. Oblicz.

$$\text{a)} 2^5 \cdot 2 \cdot 2^5 \quad \text{b)} 3^2 \cdot 3 \cdot 3^2 \quad \text{c)} (4^2 \cdot 4^3) : 4^5 \quad \text{d)} (5^6 : 5^4) \cdot 5^2$$

6. Oblicz.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} 5^3 - (2^2)^3 - 3^0 & \text{d)} 3^3 \cdot 2^3 - 36^3 : 9^3 & \text{g)} 2^4 \cdot 5^4 + 10^3 - 10^2 \\ \text{b)} (4^2)^2 - 4^3 + 4^2 & \text{e)} (-2)^4 + (-2)^3 & \text{h)} (3^5 \cdot 2^5) : 6^4 \\ \text{c)} 11^2 + 2^3 \cdot \frac{1}{2} & \text{f)} -2^5 + (-3)^4 & \text{i)} (6^6 : 3^6) \cdot 5^6 \end{array}$$

1.8. Potęga o wykładniku całkowitym. Notacja wykładnicza

Określenie potęgi o wykładniku naturalnym możemy rozszerzyć na potęgę o wykładniku całkowitym (w szczególności ujemnym).

Definicja

Dla liczby naturalnej $n \geq 1$ i dla liczby $a \neq 0$ przyjmujemy, że:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Przykład 1

$$\begin{array}{lll} \text{a)} 3^{-1} = \frac{1}{3} & \text{b)} 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} & \text{c)} \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9 \end{array}$$

Ćwiczenie 1

Oblicz.

$$\begin{array}{lllll} \text{a)} 4^{-2} & \text{c)} (-3)^{-2} & \text{e)} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} & \text{g)} \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} & \text{i)} 0,2^{-2} \\ \text{b)} 4^{-3} & \text{d)} (-3)^{-3} & \text{f)} \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} & \text{h)} \left(-\frac{2}{3}\right)^{-4} & \text{j)} (-0,2)^{-3} \end{array}$$

Ćwiczenie 2

Czy podane liczby są równe?

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \left(\frac{5}{7}\right)^{-3}, \left(\frac{7}{5}\right)^3 & \text{b)} \left(-\frac{4}{9}\right)^6, \left(\frac{9}{4}\right)^{-6} & \text{c)} \left(-\frac{3}{5}\right)^{-5}, \left(\frac{5}{3}\right)^5 \end{array}$$

Do obliczania wartości wyrażeń, w których występują potęgi o wykładnikach całkowitych, możemy wykorzystywać prawa analogiczne do praw działań na potęgach o wykładnikach naturalnych.

Twierdzenie

Dla liczb całkowitych m, n oraz różnych od 0 liczb rzeczywistych a i b :

$$\begin{aligned} \blacksquare a^m \cdot a^n &= a^{m+n} & \blacksquare a^n \cdot b^n &= (ab)^n & \blacksquare (a^m)^n &= a^{m \cdot n} \\ \blacksquare \frac{a^m}{b^n} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n & \blacksquare \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} \end{aligned}$$

Ćwiczenie 3

Oblicz.

$$\begin{array}{lllll} \text{a)} 3^9 \cdot 3^{-6} & \text{c)} (2^5)^{-2} & \text{e)} 5^{-9} : 5^{-11} & \text{g)} 6^5 : 3^5 & \text{i)} 6^3 \cdot 2^{-5} \\ \text{b)} 0,5^3 \cdot 0,5^7 & \text{d)} (0,25^{-1})^{-4} & \text{f)} 4 : 4^{-4} & \text{h)} } 10^{10} : 5^{10} & \text{j)} 10^4 \cdot 5^{-2} \end{array}$$

Notacja wykładnicza

Przy zapisywaniu bardzo dużych i bardzo małych liczb wygodnie jest posługiwać się notacją wykładniczą (inaczej zwaną notacją naukową).

Definicja

Liczbę dodatnią a możemy przedstawić w postaci iloczynu:

$$a = x \cdot 10^n$$

gdzie x jest liczbą spełniającą warunki $1 \leq x < 10$, a n – liczbą całkowitą.

Takie przedstawienie liczby nazywamy **notacją wykładniczą**.

Przykład 2

a) $326\,000\,000\,000 = 3,26 \cdot 10^{11}$
↑ 11 cyfr

b) $0,00000097 = 9,7 \cdot 10^{-7}$
↑ 7 cyfr

Ćwiczenie 4

Zapisz liczbę w notacji wykładniczej.

- a) 5 020 000 000 000 000 000 000 000 000 ton (masa Syriusza)
b) 0,00027 mm (wielkość wirusa ospy)
c) 0,000 000 000 000 000 000 000 000 029 9 kg (masa cząsteczki wody)
d) 0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 910 956 kg (masa elektronu)

Ćwiczenie 5

Zapisz liczbę w notacji wykładniczej.

- a) 6 320 000 c) 43,728 e) 0,00065 g) 0,100324
b) 109 000 000 d) 8765,2 f) 0,00302 h) 0,000001

Ćwiczenie 6

Zapisz liczbę w postaci dziesiętnej.

- a) $8,62 \cdot 10^4$ b) $7,89 \cdot 10^{-4}$ c) $8,34 \cdot 10^{-5}$ d) $6,02 \cdot 10^0$

Ćwiczenie 7

Oblicz. Odpowiedź podaj w notacji wykładniczej i w postaci dziesiętnej.

- a) $(3,4 \cdot 10^7) \cdot (4 \cdot 10^{-5})$
b) $(1,4 \cdot 10^3) \cdot (8 \cdot 10^2)$
c) $(4,8 \cdot 10^{-1}) : (1,6 \cdot 10^{-3})$
d) $(7,2 \cdot 10^{-3}) : (1,2 \cdot 10^{-2})$

Oblicz.

$$(5,2 \cdot 10^9) \cdot (0,5 \cdot 10^{-7}) = 5,2 \cdot 0,5 \cdot 10^{9-7} = 2,6 \cdot 10^2 = 260$$

Zadania

1. Oblicz.

- a) $(-2)^5$, $(-2)^{-5}$, 2^{-5} c) $(\sqrt{3})^4$, $(\sqrt{3})^{-2}$, $(\sqrt{3})^{-6}$
b) $(\frac{1}{3})^{-2}$, $(-\frac{1}{3})^{-3}$, $(-\frac{1}{3})^{-4}$ d) $(\sqrt{2})^6$, $(\sqrt{2})^7$, $(\sqrt{2})^{-8}$

2. Zapisz liczbę w postaci 2^m , gdzie m jest liczbą całkowitą.

- a) $2^3 \cdot 4^6$ b) $4^{-5} \cdot 8^2$ c) $64^2 : 32^{-3}$ d) $(16^{-2} : 4^{-8}) \cdot 8^4$

3. Zapisz podane liczby w postaci potęg o tej samej podstawie.

- a) 16, $\frac{1}{64}$, 8^3 , $(\sqrt{2})^4$, 1024^2 c) 0,001, 100^5 , $(\frac{1}{100})^{-4}$, $(\frac{1}{0,1})^{-6}$
b) $\frac{1}{81}$, 27, 9^{-2} , $(\sqrt{3})^6$, 81^{-5} d) 25^{-3} , $(\frac{1}{5})^{-2}$, $(\frac{1}{125})^4$, 625^{-5}

4. Oblicz.

- a) $(-2\sqrt{3})^{-3}$ b) $(\frac{3}{\sqrt{2}})^{-4}$ c) $(-\frac{\sqrt{5}}{10})^{-3}$ d) $((-3\sqrt{2})^{-1})^{-2}$

5. Oblicz.

- a) $5^{-3} \cdot 2^{-3}$ c) $8^{-4} \cdot 4^4$ e) $(2\frac{3}{7})^5 : (\frac{17}{14})^5$ g) $(-0,2)^{-8} : 5^8$
b) $0,2^{-5} \cdot 5^{-5}$ d) $18^{-3} : 6^{-3}$ f) $1,3^{-2} : 0,1^{-2}$ h) $(-1,2)^{-5} : (\frac{6}{5})^{-5}$

6. Oblicz.

- a) $(\frac{6}{5})^{-5} \cdot (\frac{7}{6})^{-3} \cdot (\frac{5}{7})^{-4}$ b) $(\frac{2}{21})^{-3} \cdot 15^{-3} \cdot 7^{-3}$ c) $0,4^3 \cdot (\frac{5}{16})^3 : 4^{-3}$

7. Która z liczb jest większa: x czy y ?

- a) $x = 2^4 \cdot 4^{-2}$, $y = 4^{-4} : 8^{-2}$ b) $x = (2^{-4} : 2^{-6})^{-1}$, $y = (2^{-4} \cdot 2^{-3})^{-1}$

8. Oblicz.

- a) $\frac{2^{-2}}{3^{-3}} \cdot (\frac{4}{9})^2$ c) $\frac{6^0 + 0^6}{6^{-1}} + (4^6 - 16^3)$ e) $(0,5 \cdot (\frac{1}{8})^{-6} - 2 \cdot 16^4) : 7^3$
b) $((\frac{2}{3})^{-2})^{-2}$ d) $((\frac{1}{3})^4 \cdot (\frac{2}{3})^{-5}) : 6^{-2}$ f) $((\frac{2}{5})^{-3} : (\frac{5}{2})^2) \cdot (\frac{5}{2})^{-4}$

9. Podaj konieczne założenia i uprość wyrażenie, a następnie oblicz jego wartość dla $a = -\frac{1}{2}$.

- a) $a^3 \cdot a^5 \cdot a^{-6}$ c) $(a^4 : a^{-1}) \cdot a^{-3}$ e) $(a^{-1} \cdot a^6)^{-2} \cdot (a^{-3})^2$
b) $(a^8 \cdot a^{-3}) : a^2$ d) $(a^7 : a^{-2}) : a^{-4}$ f) $(a^5 : a^{-4})^2 : (a^{-4})^{-1}$

- 10.** Oblicz. Odpowiedź podaj w notacji wykładniczej i w postaci dziesiętnej.
a) $42\,000 \cdot 6500$ b) $1600 \cdot 0,0125$ c) $0,0044 \cdot 0,055$ d) $0,0605 \cdot 8600$
- 11.** Oblicz. Odpowiedź podaj w notacji wykładniczej i w postaci dziesiętnej.
a) $2\,100\,000\,000 : 105\,000$ c) $51\,000\,000\,000 : 0,017$
b) $243\,000\,000\,000 : 2,7$ d) $102\,400\,000\,000 : 0,64$
- 12.** Oblicz. Odpowiedź podaj w notacji wykładniczej.
a) $\frac{(3,2 \cdot 10^{-12}) \cdot (1,2 \cdot 10^4)}{4 \cdot 10^{-18}}$ c) $\frac{(3,4 \cdot 10^{-15}) \cdot (7,5 \cdot 10^{-16})}{2,5 \cdot 10^{-30}}$
b) $\frac{(5,2 \cdot 10^8) \cdot (1,5 \cdot 10^{-3})}{1,3 \cdot 10^{18}}$ d) $\frac{(4,8 \cdot 10^{18}) \cdot (1,8 \cdot 10^{-10})}{(6 \cdot 10^{-8}) \cdot (1,2 \cdot 10^{16})}$
- 13.** W tabeli podano wybrane prędkości, stosując zapis dziesiętny i notację wykładniczą. Przerysuj do zeszytu i uzupełnij tę tabelę.

	v [m/s] (zapis dziesiętny)	v [m/s] (notacja wykładnicza)
Rosnący włos	?	$4,6 \cdot 10^{-9}$
Szybki ślimak	0,00194	?
Ziemia wokół Słońca	?	$2,96 \cdot 10^4$
Światło w próżni	299 792 458	?

Sprawdź się

- 14.** Oblicz.
- a) 8^{-2} , $(-8)^2$, -8^{-2} , $-\left(-\frac{1}{8}\right)^2$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$, $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$, $-\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}$
- b) 4^3 , $(-4)^{-3}$, -4^{-3} , $-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-3}$ d) $(\sqrt{2})^{-6}$, $(-\sqrt{2})^6$, $-(\sqrt{2})^{-6}$
- 15.** Oblicz.
- a) $6^{-3} \cdot 6^5$ d) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$ g) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-5} : \left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$ j) $(6^{-2})^5 \cdot 6^8$
- b) $4^{-8} \cdot 4^6$ e) $5^{-10} : 5^{-7}$ h) $\left(\frac{8}{3}\right)^{-7} : \left(\frac{8}{3}\right)^{-8}$ k) $(4^{-3})^{-4} : 4^9$
- c) $0,5^{-4} \cdot 0,5^{-1}$ f) $7^{-4} : 7^{-6}$ i) $(3^6)^{-2} \cdot 3^{10}$ l) $(8^4)^{-2} : 8^{-10}$
- 16.** Podaj konieczne założenia i uprość wyrażenie, a następnie oblicz jego wartość dla podanej wartości x .
- a) $(x^{-3})^{-2} + (x^{-1})^{-6}$, $x = -2$ c) $\left(\left((x^{-3})^2 : x^{-4}\right) : x^0\right)^{-2}$, $x = 5$
- b) $\left((x^4)^{-3}\right)^{-2} : \left((x^2)^{-2}\right)^{-3}$, $x = 1$ d) $\left((x^3)^6 + (x^{-2})^{-9}\right) : (x^{-5})^{-3}$, $x = \frac{3}{2}$

Nazwy wielkich liczb

Bilion amerykański czy bilion europejski

Dlaczego europejski miliard to amerykański bilion,
a europejski bilion to amerykański trylion?

Amerykańskie nazewnictwo wielkich liczb
odnosi się do zapisu 10^{3n+3} i łączy łacińskie
przedrostki: *bi-* ($n = 2$), *tri-* ($n = 3$) itd.
z końcówką *-lion*.

Europejskie nazewnictwo pokazuje wielokrotność miliona lub miliarda i do łacińskiego przedrostka dodaje, odpowiednio: *-lion* lub *-liard*.

Amerykański matematyk Edward Kasner wprowadził nazwę googol, oznaczającą 10^{100} .

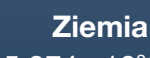
1 googol = 10 000 000 000 000 000 000 000
000 000 000 000 000 000 000 000 000 000
000 000 000 000 000 000 000 000 000 000
000 000 000 000 000 000

1 Wyszukaj w internecie informacje o liczbach googol i googolplex.

Potęga 10	Nazwa europejska	Nazwa amerykańska
9	miliard	bilion
12	bilion	trylion
15	biliard	kwadrylion
18	trylion	kwintylion
21	tryliard	seksstylion
24	kwadrylion	septylion
27	kwadryliard	oktylion
30	kwintylion	nonylion
33	kwintyliard	decylio
36	seksstylion	undecylio
39	seksstyliard	duodecylio
42	septylion	tridecylio
45	septyliard	kwatuordecylio
48	oktylion	kwindecylio
51	oktyliard	seksdecylio
54	nonylion	septendecylio

Słońce i planety

Poniżej podano masę: najmniejszej z planet w naszym systemie planetarnym – Merkurego, największej – Jowisza, a także Ziemi i Słońca (na rysunku nie zachowano skali). Masa Słońca stanowi 99,89% masy Układu Słonecznego.

 Słońce $1,989 \cdot 10^{30}$ kg	 Merkury $3,302 \cdot 10^{23}$ kg	 Ziemia $5,974 \cdot 10^{24}$ kg	 Jowisz $1,899 \cdot 10^{27}$ kg
--	---	--	--

2 Zapisz masę Słońca, Merkurego, Jowisza i Ziemi, korzystając z europejskiego oraz amerykańskiego nazewnictwa wielkich liczb.

1.9. Potęga o wykładniku wymiernym

Definicja

Dla dowolnej liczby $a \geq 0$ i liczby naturalnej $n > 1$ przyjmujemy:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Przykład 1

Oblicz.

a) $49^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7$ b) $125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$ c) $16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$

Ćwiczenie 1

Oblicz.

a) $4^{\frac{1}{2}}$ b) $16^{\frac{1}{2}}$ c) $81^{\frac{1}{2}}$ d) $8^{\frac{1}{3}}$ e) $27^{\frac{1}{3}}$ f) $81^{\frac{1}{4}}$

Potęga o wykładniku wymiernym $\frac{m}{n}$ definiujemy następująco:

Definicja

Dla dowolnej liczby $a > 0$, liczby naturalnej $n > 1$ i liczby całkowitej m przyjmujemy:

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Przykład 2

Oblicz.

a) $9^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{9})^3 = 3^3 = 27$ b) $8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$ c) $9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$

Ćwiczenie 2

Oblicz.

a) $4^{\frac{3}{2}}$ c) $8^{\frac{4}{3}}$ e) $81^{1,5}$ g) $125^{-\frac{2}{3}}$ i) $(\frac{1}{4})^{-2,5}$
b) $27^{\frac{2}{3}}$ d) $32^{\frac{3}{5}}$ f) $4^{2,5}$ h) $(\frac{1}{81})^{-\frac{3}{4}}$ j) $(\frac{8}{27})^{-\frac{2}{3}}$

D Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby $a > 0$, liczby naturalnej $n > 1$ i liczby całkowitej m zachodzi równość $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

Ćwiczenie 4

Oblicz.

a) $(\sqrt{10})^6$ c) $\sqrt[3]{125^2}$ e) $(\sqrt[8]{625})^2$ g) $(\sqrt[3]{\sqrt{27}})^2$ i) $(\sqrt{\sqrt[3]{49}})^3$
b) $\sqrt{4^{10}}$ d) $\sqrt[5]{32^3}$ f) $\sqrt{\sqrt{81}}$ h) $\sqrt[3]{\sqrt{4^3}}$ j) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{16^6}}$

Prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych są analogiczne do praw działań na potęgach o wykładnikach całkowitych.

Przykład 3

Oblicz.

a) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = 3^2 = 9$

b) $6^{\frac{4}{3}} : 6^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}} = 6^1 = 6$

Ćwiczenie 5

Oblicz.

a) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{4}{3}}$ b) $5^{\frac{4}{3}} \cdot 5^{\frac{5}{3}}$ c) $4^{\frac{9}{2}} : 4^{\frac{5}{2}}$ d) $2^{7,5} : 2^{2,5}$ e) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{6}}$

Przykład 4

Oblicz.

a) $8^{\frac{5}{2}} \cdot 2^{\frac{5}{2}} = (8 \cdot 2)^{\frac{5}{2}} = 16^{\frac{5}{2}} = (16^{\frac{1}{2}})^5 = 4^5 = 1024$

b) $10^{\frac{3}{2}} : 5^{\frac{3}{2}} = (10 : 5)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = (2^{\frac{1}{2}})^3 = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$

c) $80^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = (16 \cdot 5)^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = (\sqrt[4]{16})^3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5 = 40$

Ćwiczenie 6

Oblicz.

a) $12^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}}$ b) $12^{\frac{5}{2}} : 3^{\frac{5}{2}}$ c) $24^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}$ d) $9^{\frac{4}{3}} : 24^{\frac{2}{3}}$ e) $375^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}$

Ćwiczenie 7

Oblicz.

a) $(9^{\frac{3}{5}})^{\frac{10}{3}}$ b) $(8^{\frac{3}{2}})^{\frac{4}{9}}$ c) $(125^{\frac{2}{3}})^{0,75}$ d) $((\frac{4}{9})^{-2,5})^{-0,6}$ e) $(32^{\frac{28}{25}})^{-\frac{5}{7}}$

Obliczając przybliżone wartości potęg o wykładnikach wymiernych, możemy skorzystać z odpowiedniego kalkulatora (przykładowe wyniki zostały przedstawione obok).

$$\begin{aligned} 10^{0,3} &\approx 1,995262315 \\ 10^{0,45} &\approx 2,818382931 \\ 10^{0,625} &\approx 4,216965034 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 8

Korzystając z powyższych przybliżeń, podaj z dokładnością do czterech miejsc po przecinku przybliżoną wartość potęgi:

a) $10^{2,3}$, b) $10^{3,45}$, c) $10^{\frac{13}{8}}$, d) $10^{-1,7}$.

Zadania

- Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 2.
a) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{0,5}$ e) $\sqrt{512}$ g) $2\sqrt{2}$
b) $\sqrt[3]{2}$ d) $\sqrt[3]{4}$ f) $\sqrt[3]{1024}$ h) $2\sqrt[3]{2}$
- Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 7.
a) $\sqrt{7^3}$ c) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ e) $\sqrt{\frac{1}{7^3}}$ g) $49\sqrt{7}$
b) $\sqrt[3]{7^2}$ d) $\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$ f) $\frac{1}{\sqrt[5]{7^3}}$ h) $7\sqrt[5]{7}$
- Oblicz.
a) $9^{\frac{3}{2}}$ c) $8^{-\frac{4}{3}}$ e) $144^{-0,5}$ g) $10\,000^{0,25}$
b) $125^{\frac{2}{3}}$ d) $27^{-\frac{2}{3}}$ f) $16^{0,75}$ h) $81^{-0,125}$
- Oblicz.
a) $0,04^{\frac{3}{2}}$ c) $0,027^{\frac{2}{3}}$ e) $0,0625^{-\frac{5}{4}}$ g) $0,0081^{-1,25}$
b) $0,16^{-\frac{1}{2}}$ d) $0,0016^{-\frac{3}{4}}$ f) $0,00032^{\frac{2}{5}}$ h) $0,00000256^{0,375}$
- Oblicz.
a) $2^2 \cdot 8^{\frac{2}{3}}$ c) $3^3 \cdot 27^{-\frac{4}{3}}$ e) $0,008^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{125}$ g) $0,0256^{\frac{3}{4}} \cdot (\sqrt[3]{10})^9$
b) $2^4 : 32^{\frac{1}{5}}$ d) $27^{\frac{2}{3}} : 9^{-\frac{3}{2}}$ f) $0,04^{\frac{1}{2}} : 64^{\frac{1}{3}}$ h) $0,027^{\frac{2}{3}} : \sqrt[6]{27^2}$

Sprawdź się

- Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 3.
a) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt[3]{9}$ e) $\sqrt[5]{81}$ g) $3\sqrt{3}$
b) $\sqrt[4]{3}$ d) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ f) $\sqrt[3]{243}$ h) $9\sqrt[3]{3}$
- Oblicz.
a) $25^{\frac{1}{2}} + 8^{\frac{1}{3}}$ c) $32^{\frac{1}{5}} + 81^{\frac{1}{4}}$ e) $4^{-\frac{1}{2}} + 8^{-\frac{1}{3}}$ g) $(\frac{9}{16})^{-\frac{1}{2}} + (\frac{27}{64})^{-\frac{1}{3}}$
b) $49^{\frac{1}{2}} - 27^{\frac{1}{3}}$ d) $64^{\frac{1}{6}} - 16^{\frac{1}{4}}$ f) $9^{-\frac{1}{2}} - 27^{-\frac{1}{3}}$ h) $0,008^{-\frac{1}{3}} - 0,25^{-\frac{1}{2}}$
- Oblicz.
a) $16^{\frac{5}{4}}$ b) $64^{\frac{2}{3}}$ c) $8^{-\frac{5}{3}}$ d) $25^{-\frac{3}{2}}$ e) $81^{-\frac{3}{4}}$
- Oblicz.
a) $2^{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{2}$ b) $49^{\frac{1}{2}} : 49^{\frac{1}{4}}$ c) $\sqrt{7^5} \cdot 7^{-\frac{3}{2}}$ d) $9^{-\frac{3}{4}} : 27^{-\frac{3}{2}}$

1.10. Logarytm i jego własności

Definicja

Logarytmem o podstawie 10 (logarytmem dziesiętnym) z dodatniej liczby b nazywamy liczbę x taką, że $10^x = b$. Piszemy wówczas $\log b = x$.

Przykład 1

- a) $\log 1000 = 3$, ponieważ $10^3 = 1000$.
b) $\log 0,1 = -1$, ponieważ $10^{-1} = 0,1$.
c) $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2}$, ponieważ $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$.

Pytanie o $\log b$ to pytanie o to, do jakiej potęgi należy podnieść 10, aby otrzymać liczbę b .

Ćwiczenie 1

Oblicz.

- a) $\log 10$ b) $\log 100$ c) $\log 100\,000$ d) $\log 0,01$ e) $\log \sqrt[3]{10}$

Rozpatruje się też logarytmy o innych podstawach. Na przykład logarytmem o podstawie 2 z dodatniej liczby b jest taka liczba x , że $2^x = b$. Piszemy wówczas $\log_2 b = x$.

Przykład 2

- a) $\log_2 8 = 3$, ponieważ $2^3 = 8$.
b) $\log_2 \frac{1}{16} = -4$, ponieważ $2^{-4} = \frac{1}{16}$.
c) $\log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$, ponieważ $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$.

Pytanie o $\log_2 b$ to pytanie o to, do jakiej potęgi należy podnieść 2, aby otrzymać liczbę b .

Ćwiczenie 2

Oblicz.

- a) $\log_2 16$ b) $\log_2 1024$ c) $\log_2 \frac{1}{2}$ d) $\log_2 \frac{1}{8}$ e) $\log_2 \sqrt{2}$

Definicja

Niech a i b będą liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$. **Logarytm** o podstawie a z liczby b to wykładnik potęgi, do jakiej należy podnieść podstawę a , aby otrzymać liczbę b .

$$\log_a b = x, \text{ gdy } a^x = b$$

Przykład 3

- a) $\log_3 9 = 2$, ponieważ $3^2 = 9$.
b) $\log_5 125 = 3$, ponieważ $5^3 = 125$.
c) $\log_{25} 625 = 2$, ponieważ $25^2 = 625$.

$\log_a b = x$
liczba logarytmowana
logarytm
podstawa logarytmu

Ćwiczenie 3

Oblicz.

a) $\log_3 3$ b) $\log_3 81$ c) $\log_3 \sqrt{3}$ d) $\log_3 27$ e) $\log_3 \frac{1}{9}$ f) $\log_3 \sqrt[4]{3}$

D Ćwiczenie 4

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby dodatniej a różnej od 1 zachodzą podane obok własności.

$$\log_a 1 = 0$$
$$\log_a a = 1$$

Czy wiesz, że...

Pojęcie logarytmu wprowadził ponad 400 lat temu szkocki matematyk John Napier (1550–1617), a logarytmy dziesiętne zdefiniował Anglik Henry Briggs (1561–1630) – opublikował on tablice takich logarytmów.

W obliczeniach są wykorzystywane następujące własności logarytmów (ich dokładne omówienie i dowody zostaną przedstawione w dalszym toku nauki).

Twierdzenie

Jeśli a, b, c są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$ i $p \in \mathbb{R}$, to:

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c \quad \text{logarytm iloczynu}$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \quad \text{logarytm ilorazu}$$

$$\log_a b^p = p \log_a b \quad \text{logarytm potęgi}$$

Przykład 4

a) $\log_2(256 \cdot 1024) = \log_2 256 + \log_2 1024 = 8 + 10 = 18$

b) $\log_2 16\sqrt{2} = \log_2 16 + \log_2 \sqrt{2} = 4 + \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 5

Oblicz, korzystając ze wzoru na logarytm iloczynu.

a) $\log_2(64 \cdot 256)$ b) $\log_5(125 \cdot 625)$ c) $\log_5 5\sqrt{5}$ d) $\log_2 8\sqrt[3]{2}$ e) $\log_3 9\sqrt[4]{3}$

Przykład 5

a) $\log_2 \frac{0,25}{32} = \log_2 0,25 - \log_2 32 = -2 - 5 = -7$

b) $\log_3 \frac{81}{\sqrt{3}} = \log_3 81 - \log_3 \sqrt{3} = 4 - \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 6

Oblicz, korzystając ze wzoru na logarytm ilorazu.

a) $\log_2 \frac{0,5}{64}$ b) $\log_2 \frac{1024}{0,125}$ c) $\log_2 \frac{\sqrt{2}}{8}$ d) $\log_5 \frac{625}{\sqrt{5}}$ e) $\log_3 \frac{243}{\sqrt[4]{3}}$

Ćwiczenie 7

Oblicz, korzystając ze wzoru na logarytm potęgi.

a) $\log_2 4^{10}$ b) $\log_2 32^4$ c) $\log_3 9^6$ d) $\log_3 81^{-4}$

$$\log_2 8^5 = 5 \log_2 8 =$$
$$= 5 \cdot 3 =$$
$$= 15$$

Zadania

1. Oblicz.

a) $\log_2 512$ b) $\log_2 2$ c) $\log_2 \frac{1}{32}$ d) $\log_2 \sqrt[5]{2}$ e) $\log_2 \sqrt{8}$

2. Oblicz.

a) $\log_3 1$ b) $\log_3 243$ c) $\log_3 \frac{1}{3}$ d) $\log_3 3\sqrt{3}$ e) $\log_3 \frac{1}{\sqrt[4]{27}}$

3. Oblicz.

a) $\log_{\frac{1}{2}} 2$ b) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$ c) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}$ $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$, bo $(\frac{1}{3})^{-3} = 27$.

4. Dla jakiej podstawy logarytmu a podana równość jest prawdziwa?

a) $\log_a 16 = 4$ b) $\log_a 16 = 1$ c) $\log_a 16 = -1$

5. Sprawdź prawdziwość równości $\log_2 x + \log_2 y = \log_2 xy$ dla podanych wartości x i y .

a) $x = 4, y = 16$ b) $x = 8, y = \frac{1}{4}$ c) $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{8}$

6. Sprawdź prawdziwość równości $\log_3 x - \log_3 y = \log_3 \frac{x}{y}$ dla podanych wartości x i y .

a) $x = 27, y = 3$ b) $x = 81, y = 9$ c) $x = 3, y = \sqrt{3}$

7. Oblicz.

a) $\log 2 + \log 5$ c) $\log 250 + \log \frac{2}{5}$ e) $\log 1250 - \log \frac{5}{4}$

b) $\log 8 + \log 125$ d) $\log 150 - \log 15$ f) $\log \frac{1}{3} - \log 3\frac{1}{3}$

Sprawdź się

8. Oblicz.

a) $\log_2 1 + \frac{1}{2} \log_2 16$ c) $\log_4 4 - \log_4 64$ e) $\log_3 \frac{1}{9} - \log_3 3$

b) $\log_3 27 - \log_4 1$ d) $\log_5 125 - \log_5 \frac{1}{5}$ f) $\log_4 2 + \log_9 3$

9. Dla jakiej liczby logarytmowanej b podana równość jest prawdziwa?

a) $\log_2 b = 5$ c) $\log_{27} b = \frac{2}{3}$ e) $\log_{\frac{1}{16}} b = -\frac{3}{4}$ g) $\log_{10} b = 6$

b) $\log_{\frac{1}{2}} b = -1$ d) $\log_7 b = 0$ f) $\log_{\sqrt{2}} b = -6$ h) $\log_8 b = -1$

W niektórych sytuacjach wykorzystuje się dziesiątą część procentu, czyli promil.

1 promil (1‰) danej wielkości to 0,001 tej wielkości.

Ćwiczenie 7

Oblicz:

- a) 2‰ liczby 300,
- c) 50‰ liczby 100,
- e) 0,2‰ liczby 1800,
- b) 8‰ liczby 1400,
- d) 5‰ liczby 1000,
- f) 5,5‰ liczby 180.

■ Obliczanie, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba

Przykład 6

Za jedną akcję firmy *X* tydzień temu trzeba było zapłacić 25 zł, a dzisiaj – o 2,25 zł więcej. O ile procent podrożały akcje?

$$\frac{2,25}{25} \cdot 100\% = 9\%$$

Akcje podrożały o 9%.

Ćwiczenie 8

W tabeli podano ceny jednej akcji firmy *Y* i firmy *Z* w lutym i w marcu. Oblicz, o ile procent podrożały akcje każdej z tych firm.

Firma	Luty	Marzec
Y	18 zł	24,30 zł
Z	24 zł	27 zł

Ćwiczenie 9

Oblicz, jakim procentem liczby *x* jest liczba *y* oraz jakim procentem liczby *y* jest liczba *x*.

- a) $x = 100, y = 50$
- b) $x = 50, y = 40$
- c) $x = 10, y = 16$

■ Wyznaczanie liczby, gdy dany jest jej procent

Przykład 7

W tabeli podano ceny zestawów rondli po obniżce oraz wysokość obniżki. Oblicz cenę dużego zestawu przed obniżką.

Oznaczmy przez *x* cenę dużego zestawu przed obniżką. Obecna cena stanowi 85% ceny *x*:

$$\frac{85}{100}x = 272 \text{ i stąd } x = 272 \cdot \frac{100}{85} = 320 \text{ [zł]}.$$

Zestaw	Obniżka	Cena
duży	o 15%	272 zł
średni	o 24%	190 zł
mały	o 32%	85 zł

Ćwiczenie 10

Oblicz cenę średniego i cenę małego zestawu rondli z przykładu 7 przed obniżką.

Zadania

1. Oblicz:

- a) 20% liczby 80,
- c) 11% liczby 40,
- e) 15‰ liczby 300,
- b) 40% liczby 60,
- d) 401% liczby 40,
- f) 2‰ liczby 2.

2. Która liczba jest większa:

- a) 12% liczby 20 czy 10% liczby 25,
- b) 45% liczby 30 czy 6% liczby 250,
- c) 55% liczby 200 czy 18% liczby 600,
- d) 150% liczby 20 czy 5% liczby 6000?

Czy wiesz, że...
Słowa „procent” i „promil” pochodzą od łacińskich wyrażen: procent: *per centum* – na sto, promil: *pro mille* – na tysiąc.

3. Oblicz, jakim procentem liczby 600 jest podana liczba.

- a) 150
- b) 1860
- c) 270
- d) 450

4. Oblicz, jakim procentem liczby *a* jest liczba *b*.

- a) $a = 80, b = 20$
- c) $a = 800, b = 44$
- e) $a = 60, b = 90$
- b) $a = 160, b = 12$
- d) $a = 450, b = 36$
- f) $a = 90, b = 342$

5. Oblicz liczbę, której:

- a) 15% jest równe 30,
- c) 45% jest równe 900,
- b) 60% jest równe 240,
- d) 12% jest równe 14,4.

6. Cena kajaka wynosiła 1000 zł. Cenę podniesiono najpierw o 20%, a następnie o 15%. Ile kosztuje kajak po tych zmianach? O ile procent wzrosła cena kajaka w stosunku do ceny początkowej?

7. Cenę sukni ślubnej obniżono o *p*%. O ile procent należałoby podnieść nową cenę, aby suknia kosztowała tyle samo, ile przed obniżką?

- a) $p = 50$
- b) $p = 25$
- c) $p = 36$

8. Cenę pewnego towaru podniesiono dwukrotnie o *p*%. O ile procent należałoby obniżyć jego cenę, aby towar ten kosztował tyle, ile na początku?

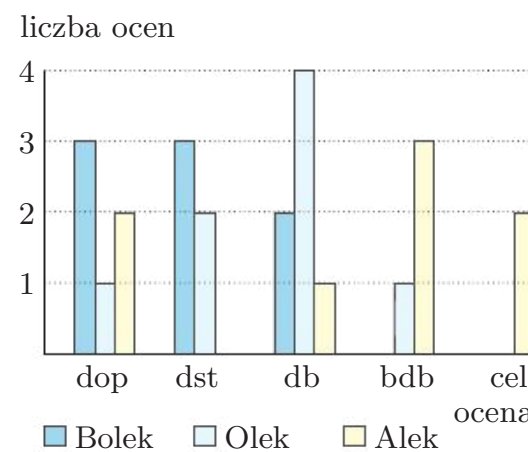
- a) $p = 25$
- b) $p = 50$

9. Wycieczka do Londynu kosztuje 2400 zł. Jaka byłaby cena tej wycieczki:

- a) gdyby najpierw podniesiono ją o 10%, a następnie obniżono o 10%,
- b) gdyby najpierw obniżono ją o 25%, a następnie podniesiono o 25%,
- c) gdyby najpierw obniżono ją o 25%, a następnie podniesiono o 20%?



10. Na diagramie obok przedstawiono liczbę poszczególnych ocen, jakie bracia Bolek, Olek i Alek otrzymali na koniec pierwszego semestru.



- a) Ile procent ocen Olka to oceny dobre i bardzo dobre?
 b) Ile procent wszystkich ocen braci stanowią oceny lepsze od oceny dopuszczającej?
11. Oblicz $p\%$ liczby x .
 a) $x = 2^3 \cdot 5^2$, $p = 55$ b) $x = \sqrt[4]{16} \cdot 5^2$, $p = 12$ c) $x = \sqrt[3]{64} \cdot 5^4$, $p = 0,2$
12. Wyznacz liczbę, której $p\%$ jest równe y .
 a) $y = 2^0 \cdot 3^4$, $p = 50$ b) $y = 2^2 \cdot 5^{-2}$, $p = 20$ c) $y = 2^{-1} : 2^2$, $p = 12,5$

Sprawdź się

13. Oblicz:
 a) 5%, 10%, 20% liczby 200, c) 3%, 6%, 30%, 270% liczby 150,
 b) 2%, 4%, 12% liczby 50, d) 8%, 15%, 45%, 125% liczby 400.
14. Oblicz:
 a) $4\frac{7}{100}$ liczby 600, b) $5\frac{7}{100}$ liczby 240, c) $16\frac{7}{100}$ liczby 550.
15. Wyznacz liczbę, której: a) 30% jest równe 45, b) 120% jest równe 90.
16. Na diagramach przedstawiono zestawienie ocen semestralnych z matematyki w pewnej klasie (z podziałem na dziewczęta i chłopców). Oblicz, ile procent uczniów otrzymało ocenę dobrą, a ile procent – ocenę pozytywną.
- liczba dziewcząt

ocena	1	2	3	4	5	6
1	1	2	1	2	3	2

liczba chłopców

ocena	1	2	3	4	5	6
1	2	1	3	4	2	1
17. O ile procent liczba x jest większa od liczby y ? O ile procent liczba y jest mniejsza od liczby x ?
 a) $x = 32$, $y = 20$ c) $x = 8$, $y = 6$ e) $x = 22$, $y = 4,4$
 b) $x = 60$, $y = 48$ d) $x = 2,4$, $y = 0,6$ f) $x = 80$, $y = 25$

Powtórzenie

Zestaw I

1. Podaj wszystkie naturalne dzielniki liczby:
 a) 18, b) 38, c) 40, d) 58, e) 68.
2. Jaka jest największa liczba trzycyfrowa podzielna przez:
 a) 5, b) 6, c) 7, d) 15, e) 45?
3. Wyznacz liczbę przeciwną do podanej liczby.
 a) $23 : (-7\frac{2}{3}) - \frac{324}{243}$ c) $(-6\frac{2}{3}) : (-7\frac{1}{7}) - \sqrt{\frac{169}{225}}$ e) $3\frac{3}{4} : \frac{3}{10} - (-1\frac{1}{6}) : \frac{7}{5}$
 b) $(-2\frac{3}{5}) \cdot 3\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$ d) $-12 \cdot 3\frac{7}{15} + 3\frac{1}{2} : 5$ f) $4\frac{3}{4} : (\frac{3}{4} - 2\frac{1}{3}) - \frac{1}{2}$
4. Podaj liczbę przeciwną do liczby x i liczbę odwrotną do liczby y .
 a) $x = (3\frac{1}{4} - 1,5) \cdot (-2\frac{1}{8} + \frac{1}{4})$, $y = (2,25 - 3\frac{1}{2}) : \frac{2}{3} + \frac{1}{8}$
 b) $x = (1\frac{1}{6} - \frac{1}{9}) : (1\frac{1}{3} - \frac{1}{6})$, $y = (\frac{1}{7} - \frac{1}{3}) \cdot 0,35 - 1\frac{1}{3} : (-1\frac{1}{2})$
 c) $x = -48 : 0,6 + 1\frac{2}{3} \cdot 54 - 1\frac{5}{7} : 1\frac{1}{14}$, $y = 1\frac{1}{3} \cdot (-3\frac{3}{5}) + (\frac{3}{5} - 2\frac{4}{15}) \cdot 0,5$
 d) $x = 0,3(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) - (\frac{2}{3} - \frac{1}{6}) : 0,75$, $y = (\frac{3}{4} - 1\frac{1}{3}) \cdot (-0,8) + 1,44 : 2\frac{2}{5}$
5. Wśród poniższych liczb wskaż liczbę niewymierną i podaj największą liczbę całkowitą od niej mniejszą.
 a) $4 - \frac{\sqrt{12}}{3}$, $14 - \sqrt{196}$, $2\sqrt{16} - \sqrt{36}$ c) $\frac{\sqrt{49}}{3} + \frac{\sqrt[3]{729}}{4}$, $\sqrt{81} + \sqrt[3]{81}$
 b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$, $\sqrt{1\frac{4}{25}}$, $\sqrt{12} \cdot \sqrt{75}$ d) $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{49}$, $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{125}$
6. Wyznacz liczbę odwrotną do podanej liczby.
 a) $\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt{15}$ c) $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{40}$ e) $\frac{\sqrt{128}}{\sqrt{512}}$ g) $\sqrt{1\frac{9}{16}} : \sqrt{\frac{225}{256}}$
 b) $\sqrt{5\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{7}{3}}$ d) $\sqrt[3]{75} \cdot \sqrt[3]{45}$ f) $\frac{\sqrt{216}}{\sqrt{192}}$ h) $\sqrt{1\frac{1}{2}} : \sqrt{1\frac{5}{27}}$
7. a) Oblicz iloraz sumy liczb $x = 2 - \sqrt{5}$ oraz $y = 4 - \sqrt{5}$ i ich różnicy.
 b) Oblicz sześcian różnicy liczb $x = 1 - 6\sqrt[3]{3}$ i $y = 0, (9) - \sqrt[3]{3}$.
 c) Oblicz różnicę odwrotności kwadratów liczb $x = \frac{\sqrt{2}}{9}$ i $y = 0, (2) \cdot \sqrt{3}$.
- D** 8. Uzasadnij, że podana liczba jest wymierna.
 a) $\log_3 6 + \log_3 1,5$ c) $\log 625 + \log 16$ e) $\log_4 \frac{3}{2} + \log_4 \frac{1}{3}$
 b) $\log_2 6 - \log_2 0,75$ d) $\log 175 - \log 1\frac{3}{4}$ f) $\log_2 \sqrt{18} - \log_2 3$

9. O ile procent zmieniło się pole prostokąta, którego:

- a) oba boki skrócono o 20%,
b) jeden bok skrócono o 10%, a drugi wydłużono o 10%?

10. Liczba członków pewnego klubu golfowego wzrastała przez ostatnie trzy lata o 20% rocznie. Rok temu należało do niego 216 osób. Ilu członków liczył ten klub trzy lata temu?

11. Wyznacz liczbę o 20% mniejszą od podanej liczby.

- a) $\frac{(3\frac{1}{4} - 1,5) \cdot (-2\frac{1}{8} + \frac{1}{4})}{(2,25 - 3\frac{1}{2}) : \frac{2}{3} + \frac{1}{8}}$ c) $\frac{-48 : 0,6 + 1\frac{2}{3} \cdot 45 - 1\frac{5}{7} : 1\frac{1}{14}}{1\frac{1}{3} \cdot (-2\frac{2}{5}) + (\frac{3}{5} - 5\frac{1}{5}) \cdot 0,5}$
b) $\frac{(1\frac{1}{6} - \frac{7}{9}) : (1\frac{1}{3} - \frac{1}{6})}{(\frac{1}{7} - \frac{1}{3}) \cdot 0,35 - 1\frac{2}{3} : (-2\frac{1}{2})}$ d) $\frac{0,3(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + (\frac{2}{3} - \frac{1}{6}) : 0,75}{(\frac{3}{4} - 1\frac{1}{3}) \cdot (-0,8) + 1,44 : 2\frac{2}{5}}$

■ Zestaw II

1. a) Suma trzech kolejnych liczb całkowitych jest o 15 większa od podwojonej największej z nich. Wyznacz te liczby.

b) Suma czterech kolejnych liczb parzystych jest o 20 większa od potrojonej największej z nich. Wyznacz te liczby.

2. Liczby $x = 0,(3)$ i $y = 1,(3)$ zapisz jako ułamki zwykłe i oblicz:

- a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, b) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$, c) $\frac{1}{x} + y^2$, d) $x^2 - \frac{1}{y^2}$.

3. Oblicz sumę oraz iloczyn liczb x i y .

- a) $x = \sqrt{1\frac{9}{16}}$, $y = \sqrt{5\frac{4}{9}}$ c) $x = \sqrt[3]{\frac{1}{125}}$, $y = \sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$
b) $x = \sqrt{\frac{28}{63}}$, $y = \sqrt{\frac{75}{48}}$ d) $x = \sqrt[3]{-8}$, $y = \sqrt[3]{-\frac{270}{640}}$

4. Wyznacz liczbę a .

- a) $\sqrt{3} = \sqrt[3]{a}$ c) $\sqrt{1\frac{1}{3}} = \sqrt[4]{a}$ e) $2\sqrt{3} = \sqrt[4]{a}$
b) $\frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt[3]{a}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt[4]{a}$ f) $3\sqrt{2} = \sqrt[4]{a}$

5. Oblicz $x - \frac{1}{x}$.

- a) $x = \sqrt[3]{\frac{(-2)^3}{125}}$ c) $x = (\sqrt{169} - \sqrt{196})^2$ e) $x = \sqrt{88 + \sqrt{144}}$
b) $x = \sqrt[3]{\frac{(-2)^6}{(-3)^3}}$ d) $x = ((\sqrt{225} - 10)^2)^2$ f) $x = \sqrt{\sqrt{6,25} - 0,25}$

6. Oblicz wartość wyrażenia $2m - 3n$, gdy:

- a) $3^m = 81$, $0,5^n = 0,125$, c) $0,5^m = 64$, $(\frac{2}{3})^n = 3,375$,
b) $6^m = 216$, $0,4^n = 2,5$, d) $(-\frac{1}{3})^m = -27$, $(-\frac{2}{5})^n = -15,625$.

7. Podaj konieczne założenia i oblicz wartość wyrażenia dla $a = \frac{3}{4}$ i $b = \frac{8}{9}$.

- a) $\frac{(ab)^{-1}}{b^{-2}a^{-2}}$ b) $\frac{ab^2 \cdot (ab)^{-3}}{(a^0b^{-1})^{-1}}$ c) $\frac{(a^{-1}b^2)^{-3}a^{-2}b^5}{a^2 : (ab)^3}$

8. Rozwiąż równanie.

- a) $\frac{x^{12}}{x^9} = 64$ c) $\frac{x^5 \cdot x^4}{(x^2)^3} = 27$ e) $\frac{(x^2)^{-3} \cdot x}{(x^{-2})^2} = \frac{2}{7}$
b) $\frac{x^7}{x^{-3}} = 1024$ d) $\frac{x^7 \cdot x^{-3}}{x^{-1}} = 32$ f) $\frac{x^{-4} \cdot x^{-7}}{(x^2)^{-4}} = \frac{1}{8}$

9. Oblicz.

- a) $\frac{18\frac{2}{5}}{6\frac{7}{5} \cdot 9\frac{1}{5}}$ b) $\frac{12\frac{1}{3} \cdot 16\frac{2}{3}}{6\frac{4}{3}}$ c) $\frac{14\frac{1}{3}}{7\frac{1}{3} \cdot 2\frac{2}{3}}$ d) $\frac{20^{1,2} \cdot 24^{0,3}}{6^{1,3} \cdot 25^{0,1}}$

10. Uporządkuj liczby a , b , c i d w kolejności rosnącej.

- a) $a = \log_2 64$, $b = \log_3 81$, $c = \log_4 1024$, $d = \log_5 125$
b) $a = \log_2 2\sqrt{2}$, $b = \log_3 9\sqrt[3]{3}$, $c = \log_4 32$, $d = \log_5 0,04$

11. Oblicz. Odpowiedź podaj w notacji wykładniczej.

- a) $\frac{(2,4 \cdot 10^3) \cdot (7 \cdot 10^{13})}{(6 \cdot 10^6) \cdot (3,5 \cdot 10^4)}$ c) $2\,500\,000 \cdot 0,0015$
b) $\frac{(25 \cdot 10^{-2}) \cdot (6 \cdot 10^{-6})}{(1,5 \cdot 10^{11}) \cdot (5 \cdot 10^{-9})}$ d) $420\,000\,000 : 0,003$

12. Oblicz 125% liczby x , gdzie x jest rozwiązaniem podanego równania.

- a) $9 - \frac{3}{2}x = 6$ b) $3x - 7 = \frac{1}{2}x + 8$ c) $\frac{x-3}{2} = \frac{1}{6} + \frac{x-2}{3}$

13. Oblicz:

- a) 6‰ liczby 400, b) 0,5‰ liczby 64, c) 20,5‰ liczby 8.

14. Wyznacz liczbę:

- a) o 2‰ większą od 100, b) o 1,6‰ większą od 500.

D 15. Uzasadnij, że jeśli $x, y, z \neq 0$ oraz $x + y^{-1} - z^{-2} = 0$, to:

- a) $x = \frac{y - z^2}{yz^2}$, b) $y = \frac{z^2}{1 - xz^2}$, $xz^2 \neq 1$, c) $z^2 = \frac{y}{1 + xy}$, $xy \neq -1$.

D 16. Uzasadnij, że suma trzech kolejnych liczb naturalnych:

- a) jest podzielna przez 3, b) parzystych jest podzielna przez 6.

**Przykład 1**

Ile jest liczb dwucyfrowych dodatnich, których reszta z dzielenia przez 7 jest równa 3?

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

- Liczb spełniających warunki zadania nie jest dużo, można je zatem wszystkie wypisać: 10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, 59, 66, 73, 80, 87, 94 – jest ich 13.
- Zauważmy, że najmniejszą liczbą dwucyfrową spełniającą podany warunek jest 10, a największą 94. Wszystkie te liczby można zapisać w postaci $7n + 3$, gdzie $1 \leq n \leq 13$, zatem jest 13 takich liczb.

Odpowiedź: 13

→ Zadanie 20, str. 60

Przykład 2

Ile jest liczb czterocyfrowych dodatnich, które są podzielne przez 3 i przez 5?

Zauważmy, że liczby podzielne przez 3 i przez 5 to liczby podzielne przez 15. Najmniejszą liczbą czterocyfrową podzielną przez 15 jest 1005, a największą 9990. Liczb spełniających warunki zadania jest zbyt dużo, aby je wszystkie wypisać.

$$1005 = 15 \cdot 67, 1020 = 15 \cdot 68, 1035 = 15 \cdot 69, \dots, 9990 = 15 \cdot 666$$

Każdą z tych liczb możemy zapisać w postaci $15 \cdot n$, gdzie $67 \leq n \leq 666$. Zatem takich liczb jest $666 - 67 + 1 = 600$.

Odpowiedź: 600

→ Zadanie 21, str. 60

Przykład 3

Ile jest liczb trzycyfrowych dodatnich, które są podzielne przez 5 lub przez 6?

Rozpatrujemy liczby trzycyfrowe podzielne przez 5: 100, 105, 110, ..., 995. Najmniejszą z nich jest 100, a największą 995. Liczby trzycyfrowe podzielne przez 5 można zapisać w postaci $100 + 5n$, gdzie $0 \leq n \leq 179$, zatem takich liczb jest 180.

Rozpatrujemy liczby trzycyfrowe podzielne przez 6: 102, 108, 114, ..., 996. Najmniejszą z nich jest 102, a największą 996. Liczby trzycyfrowe podzielne przez 6 można zapisać w postaci $102 + 6n$, gdzie $0 \leq n \leq 149$, zatem takich liczb jest 150.

Zauważmy, że dwa razy zostały policzone liczby podzielne przez 30 (są one podzielne zarówno przez 5, jak i przez 6).

Liczby trzycyfrowe podzielne przez 30 można zapisać w postaci $120 + 30n$, gdzie $0 \leq n \leq 29$, takich liczb jest więc 30.

Zatem liczb podzielnych przez 5 lub przez 6 jest: $180 + 150 - 30 = 300$.

Odpowiedź: 300

→ Zadanie 22, str. 60



W zadaniach 1–12 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

Liczbą podzielną przez 15 jest

- A. 9 720 279 B. 2 220 205 C. 22 222 220 D. 23 420 340

Zadanie 2 (0–1)

Liczbą odwrotną do $\frac{0,25 - \sqrt{\frac{9}{16}}}{-3^2 : 3}$ jest

- A. 6 B. 4 C. -4 D. -6

Zadanie 3 (0–1)

Najmniejszą liczbą całkowitą większą od $6 - 2\pi$ jest

- A. -1 B. 0 C. 1 D. -2

Zadanie 4 (0–1)

Liczbą wymierną jest

- A. $\frac{2\sqrt{6} - \sqrt{16}}{2}$ B. $\frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ C. $\frac{\sqrt{25} + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ D. $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{54}}$

Zadanie 5 (0–1)

Ułamek $\frac{\sqrt[3]{-16} \cdot \sqrt[3]{-16}}{\sqrt[3]{-4}}$ jest równy

- A. $\frac{-16}{\sqrt[3]{-4}}$ B. $\frac{16}{\sqrt[3]{-4}}$ C. -4 D. 4

Zadanie 6 (0–1)

Ułamek $\frac{5^5 \cdot 3 + 2 \cdot 5^5}{5^6 : 5^2}$ jest równy

- A. 5^6 B. $15 + 2 \cdot 5^5$ C. 25 D. 5^7

Zadanie 7 (0–1)

Liczba $\log_8 4$ jest równa

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{2}$

Zadanie 8 (0–1)

Cena ulgowego karnetu na basen stanowi 60% ceny karnetu normalnego. Karnet ulgowy kosztuje 60 zł. Za karnet normalny trzeba zapłacić

- A. 84 zł B. 100 zł C. 360 zł D. 36 zł

Zadanie 9 (0–1)

Oprocentowanie lokaty terminowej było równe 4%. Po roku bank podwyższył oprocentowanie do 5%. Oprocentowanie lokaty wzrosło

- A. o 20%. B. o 25%. C. o 40%. D. o 75%.



Zadanie 10 (0-1)

Suma $2^{15} + 2^{15} + 2^{15} + 2^{15}$ jest równa

- A. 2^{60} B. 8^{15} C. 2^{18} D. 2^{17}

Zadanie 11 (0-1)

Iloczyn liczb $6,4 \cdot 10^8$ i $8,5 \cdot 10^{-3}$ jest równy

- A. $5,44 \cdot 10^5$ B. $0,544 \cdot 10^6$ C. $5,44 \cdot 10^6$ D. $5,44 \cdot 10^7$

Zadanie 12 (0-1)

Liczba b jest o 20% mniejsza od liczby a , zaś liczba c jest o 20% większa od liczby b . Zatem

- A. $a = \frac{4}{5}c$ B. $a = c$ C. $a = \frac{13}{12}c$ D. $a = 1\frac{1}{24}c$

Zadanie 13 (0-1)

Dana jest liczba $\left(2 \cdot \left(-3\frac{1}{3}\right) - 7 : 4\frac{1}{5}\right) : \frac{-2\frac{1}{8} + 0,625 \cdot \frac{4}{5}}{-2 + 1\frac{1}{9} \cdot (-6)}$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Podana liczba to liczba całkowita ujemna.	P	F
Podana liczba to liczba wymierna nieujemna.	P	F

Zadanie 14 (0-2)

Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Liczbą wymierną jest

- A. $\sqrt{6}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ E. $\sqrt{12}(\sqrt{48} + \sqrt{27})$
B. $\sqrt{6}(\sqrt{6} + \sqrt{18})$ F. $\sqrt{12}(\sqrt{54} + \sqrt{24})$
C. $\sqrt{8}(\sqrt{18} + \sqrt{50})$ G. $\sqrt{18}(\sqrt{32} + \sqrt{24})$
D. $\sqrt{8}(\sqrt{36} + \sqrt{25})$ H. $\sqrt{18}(\sqrt{25} + \sqrt{49})$

Zadanie 15 (0-2)

Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Wartość 2 przyjmuje wyrażenie

- A. $\log_2 1 + \log_2 1$ E. $\log_4 4 + \log_4 2$
B. $\log_2 4 + \log_2 4$ F. $\log_2 8 + \log_4 2$
C. $\log_2 4 - \log_2 2$ G. $\log_4 4 - \log_4 2$
D. $\log_2 8 - \log_2 2$ H. $\log_4 8 + \log_4 2$



Zadanie 16

Dane są liczby $\sqrt{11}$, $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[3]{(-17)^3}$, $\sqrt{121}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{\frac{169}{9}}$, $\sqrt{(-2)^2}$.

Zadanie 16.1 (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Dokładnie dwie spośród podanych liczb są ujemne.	P	F
Dokładnie dwie spośród podanych liczb są niewymierne.	P	F

Zadanie 16.2 (0-1)

Uzupełnij zdanie tak, aby było prawdziwe.

Suma dwóch najmniejszych liczb spośród podanych jest równa ?.

Zadanie 17 (0-1)

Dane są liczby x i y spełniające warunki: $x < -1$ oraz $x < y < 0$.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Iloczyn liczby o 1 większej od x i liczby y jest

A.	dodatni,	ponieważ	1.	jeden z czynników jest równy zero.
B.	równy zero,		2.	czynniki są różnych znaków.
C.	ujemny,		3.	oba czynniki są ujemne.

Zadanie 18

Dane są liczby $a = 6 - 3\sqrt{48}$ i $b = 8 + 2\sqrt{108}$.

Zadanie 18.1 (0-1)

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3. Suma liczb a i b jest liczbą

A.	wymierną,	ponieważ	1.	suma liczb niewymiernych jest liczbą niewymierną.
B.	niewymierną,		2.	suma liczb wymiernych jest liczbą wymierną.
			3.	suma tych liczb jest równa 14.

Zadanie 18.2 (0-1)

Iloczyn liczb a i b jest równy

- A. $24(16 + \sqrt{3})$ B. $-24(16 + \sqrt{3})$ C. $-24(16 - \sqrt{3})$ D. $24(16 - \sqrt{3})$

**Zadanie 19 (0-2)**

Określ znak iloczynu liczb $a = \frac{13}{5} - 2,(5)$ oraz $b = \sqrt{2} - 1,(4)$.

Zadanie 20 (0-2) → Przykład 1, str. 56

Ile jest dodatnich liczb dwucyfrowych, których reszta z dzielenia przez 6 jest równa 2?

Zadanie 21 (0-3) → Przykład 2, str. 56

Ile jest dodatnich liczb trzycyfrowych, które są podzielne przez 3 i przez 4?

Zadanie 22 (0-4) → Przykład 3, str. 56

Ile jest dodatnich liczb trzycyfrowych, które są podzielne przez 4 lub przez 5?

Zadanie 23

Dany jest trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości $2\sqrt{27}$ i $4\sqrt{12}$.

Zadanie 23.1 (0-2)

Oblicz obwód tego trójkąta.

Zadanie 23.2 (0-2)

Kwadrat o boku a ma pole równe polu tego trójkąta. Oblicz a .

Zadanie 24 (0-2)

Cena brutto kurtki zimowej wynosiła 307,50 zł. Na cenę tę składała się cena netto oraz 23% podatku VAT. Cena kurtki została obniżona i po obniżce podatek VAT wynosił 51,75 zł. O ile zmniejszyła się cena netto tej kurtki?

Zadanie 25 (0-2)

Cenę towaru obniżono o 60%, a następnie podniesiono o $p\%$ i w ten sposób otrzymano cenę sprzed obniżki. Wyznacz p .

Zadanie 26 (0-4)

Dane są liczby $x = \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{15}\right) : \left(\frac{11}{20} - 0,2\right)$ i $y = (0,5 \cdot 3)^{-2} \cdot 2^3 \cdot 3^{-1}$. O ile procent liczba x jest większa od liczby y ?

Zadanie 27 (0-4)

Woda płynąca jednocześnie z kranów A , B i C może napęlnić basen w ciągu 4 godzin. Woda płynąca tylko z kranu A napęlnia w ciągu godziny $\frac{1}{10}$ basenu, a tylko z kranu $B - \frac{1}{12}$ basenu. Ile czasu trwałoby napęlnianie basenu wodą płynącą tylko z kranu C ?

D Zadanie 28 (0-4)

Uzasadnij, że jeśli $a = 45$, $b = (2 - \sqrt{5})(1 - 2\sqrt{5})$ i $c = (-2 + \sqrt{5})(11 + 2\sqrt{5})$, to liczba $\frac{\sqrt{a}}{b+c}$ jest liczbą wymierną.

2 Język matematyki

Wieża CN Tower w Toronto jest najwyższą budowlą na zachodniej półkuli. Stosunek jej wysokości (553,33 m) do wysokości, na której znajduje się kosz wieży (342 m), wynosi około 1,618. Jest to przybliżenie liczby zwanej **złotą liczbą** lub **złotym stosunkiem**. O odcinku mówimy, że został podzielony w złotym stosunku, jeśli stosunek dłuższej części do krótszej jest równy stosunkowi całego odcinka do dłuższej części: $\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}$.



Dokładna wartość złotego stosunku wynosi $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



2.1. Zbiory

Zgodnie z tradycją zbiory oznaczamy wielkimi literami. Aby opisać zbiór, należy określić, jakie są jego **elementy**. Można to zrobić słownie lub (jeśli to możliwe) wypisać jego elementy, np.:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ – zbiór liczb naturalnych
 $A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ – zbiór naturalnych dzielników liczby 20

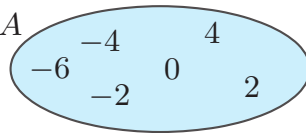
Zbiór, który ma skończoną liczbę elementów, nazywamy **zbiorem skończonym**. Zbiór, do którego należy nieskończenie wiele elementów, nazywamy **zbiorem nieskończonym**.

Aby zapisać, że element należy do zbioru, używamy symbolu $\in$, np. $7 \in \mathbb{N}$, aby zapisać, że element nie należy do zbioru – symbolu $\notin$, np. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Zbiór, do którego nie należy żaden element, nazywamy **zbiorem pustym** i oznaczamy symbolem $\emptyset$.

Ćwiczenie 1

Na diagramie przedstawiono zbiór A . Określ, czy zdanie jest prawdziwe.

- a) $2 \in A$ c) $\sqrt{16} \in A$ e) $-6 \notin A$
b) $1 \in A$ d) $\sqrt{9} \in A$ f) $6 \notin A$



Jeszcze innym sposobem opisanie zbioru jest podanie warunku, jaki muszą spełniać jego elementy. Na przykład zapis $B = \{n \in \mathbb{N} : n^2 \leq 16\}$ oznacza, że $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Przykład 1

Opis słowny zbioru	Wypisanie elementów	Zapis symboliczny
A jest zbiorem tych liczb całkowitych, których kwadraty są równe 4.	$A = \{-2, 2\}$	$A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 4\}$
B jest zbiorem tych liczb naturalnych, których kwadraty są mniejsze od 30.	$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$	$B = \{n \in \mathbb{N} : n^2 < 30\}$

Ćwiczenie 2

Wypisz wszystkie elementy zbiorów D , E i F oraz podaj ich zapis symboliczny.

D – zbiór tych liczb naturalnych, których kwadraty są mniejsze od 5
 E – zbiór tych liczb całkowitych, których kwadraty są mniejsze od 5
 F – zbiór tych liczb rzeczywistych, których kwadraty są równe 5

Definicja

Dwa **zbiory** są **równe** wtedy i tylko wtedy, gdy mają te same elementy.

Ćwiczenie 3

- Które spośród zbiorów A , B i C są równe?
a) $A = \{-6, -3, 0, 3, 6\}$, $B = \{-6, -3, 0, 3, 6, 8\}$, $C = \{0, 3, -3, 6, -6\}$
b) $A = \{-3, -2, -1, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 \leq 15\}$, C – zbiór tych liczb całkowitych, których kwadraty są mniejsze od 10

Każda liczba naturalna jest liczbą całkowitą. Mówimy, że zbiór liczb naturalnych jest podzbiorem zbioru liczb całkowitych.

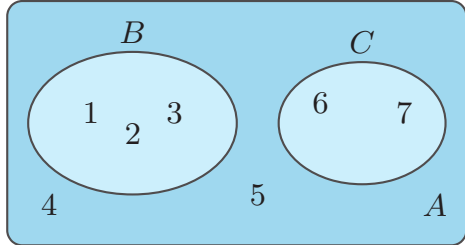
Definicja

Zbiór A jest **podzbiorem** zbioru B , jeśli każdy element zbioru A jest elementem zbioru B . Mówimy też, że zbiór A jest zawarty w zbiorze B . Zapisujemy to: $A \subset B$. Zapis $A \not\subset B$ oznacza, że A nie jest podzbiorem zbioru B .

Uwaga. Dla dowolnego zbioru A zachodzą zależności: $A \subset A$ i $\emptyset \subset A$. Jeśli $A \subset B$ i $B \subset A$, to zbiory A i B są równe: $A = B$.

Przykład 2

Na diagramie obok przedstawiono zbiory:
 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{6, 7\}$.
Między tymi zbiorami zachodzą zależności:
 $B \subset A$ i $C \subset A$



Ćwiczenie 4

- Czy prawdziwa jest któraś z zależności: $A \subset B$, $B \subset A$?
a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
b) $A = \{-4, -2, -1, 0, 1, 2, 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 20\}$
c) A – zbiór dzielników liczby 40, B – zbiór dzielników liczby 60

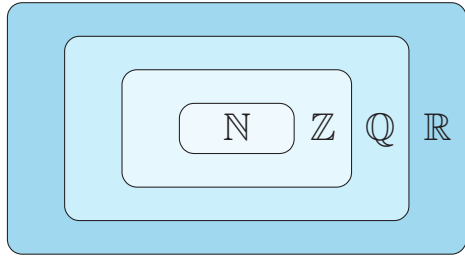
Zwróćmy uwagę, że dla poznanych dotychczas zbiorów liczbowych zachodzą zależności:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



Ćwiczenie 5

Uzasadnij, że: a) $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$, b) $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{Q}$.



Zadania

- Określ zbiory A i B , wypisując wszystkie ich elementy. Czy zachodzi któraś z zależności: $A \subset B$, $B \subset A$?
 - A – zbiór naturalnych dzielników liczby 12,
 B – zbiór naturalnych dzielników liczby 24
 - A – zbiór naturalnych dzielników liczby 42,
 B – zbiór naturalnych dzielników liczby 45
- Wypisz wszystkie dwuelementowe podzbiory zbioru A .
 - $A = \{0, 1, 2\}$
 - $A = \{a, b, c\}$
 - $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- Wypisz wszystkie czteroelementowe podzbiory zbioru $\{a, b, c, d, e\}$.
- Wypisz elementy zbioru X , do którego należą tylko nieparzyste liczby naturalne takie, że ich:
 - kwadrat jest mniejszy od 180,
 - pierwiastek jest mniejszy od 5.

Czy wiesz, że...

Słowo „zbiór” w języku potocznym jest używane w wielu sytuacjach. Na przykład zbiorami nazywa się różnorodne kolekcje gromadzone przez hobbystów czy też kolekcje dzieł sztuki. *Wazon z irysami na żółtym tle* – obraz Vincenta van Gogha, należy do zbiorów Muzeum van Gogha w Amsterdamie.

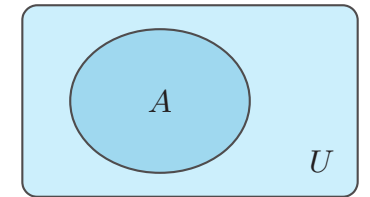


Sprawdź się

- D** 5. Czy zbiory A i B mają tyle samo elementów? Uzasadnij, że $A \not\subset B$.
- A – zbiór dzielników liczby 6, B – zbiór dzielników liczby 15
 - A – zbiór dzielników liczby 18, B – zbiór dzielników liczby 30
 - A – zbiór dzielników liczby 36, B – zbiór dzielników liczby 48
- Wypisz wszystkie trzelementowe podzbiory zbioru $\{0, 1, 2, 3\}$.
 - Wypisz trzelementowe podzbiory zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, dla których:
 - suma wszystkich elementów jest większa od 7,
 - iloczyn wszystkich elementów jest równy 0.

2.2. Działania na zbiorach

Na zamieszczonym obok diagramie U oznacza zbiór wszystkich rozpatrywanych elementów i jest nazywany **przestrzenią**. Gdy mówimy o liczbach, to przestrzenią jest zwykle zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

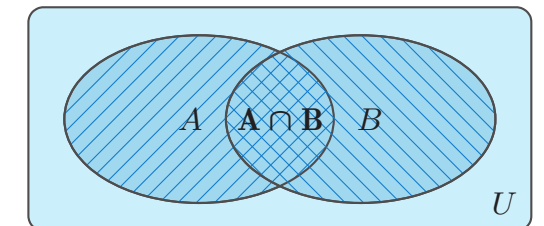


Definicja

Iloczynem (częścią wspólną) zbiorów A i B nazywamy zbiór elementów, które należą jednocześnie do obu tych zbiorów. Iloczyn zbiorów A i B oznaczamy $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ i } x \in B\}$$

Na zamieszczonym obok diagramie iloczyn zbiorów A i B jest przedstawiony jako obszar podwójnie zakreskowany.



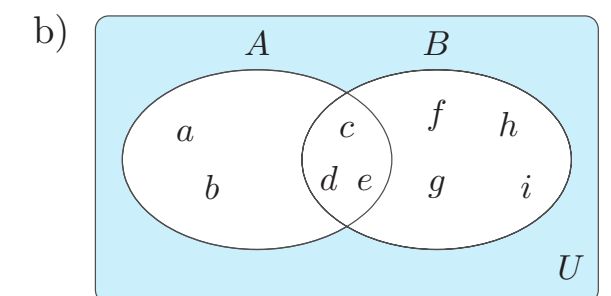
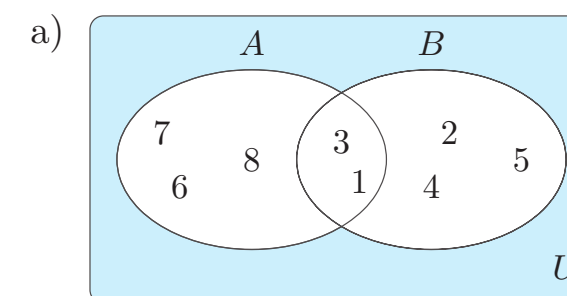
Przykład 1

Niech $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Tylko liczby 2 i 4 należą do obu zbiorów jednocześnie, zatem:

$$A \cap B = \{2, 4\}$$

Ćwiczenie 1

Na podstawie diagramu podaj elementy zbiorów A , B oraz $A \cap B$.

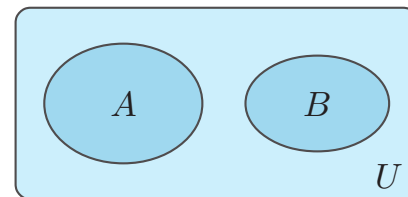


Ćwiczenie 2

Wyznacz iloczyn zbiorów A i B .

- $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
- $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$, $B = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
- $A = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}\}$, $B = \{\frac{10}{100}, \frac{20}{100}, \frac{30}{100}, \frac{40}{100}, \frac{50}{100}\}$

Zbiory A i B nazywamy **rozłącznymi**, gdy nie mają wspólnych elementów, czyli gdy $A \cap B = \emptyset$. Na zamieszczonym obok diagramie przedstawiono rozłączne zbiory A i B .



Ćwiczenie 3

Czy zbiory X i Y są rozłączne?

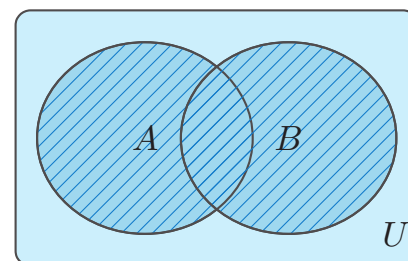
- X – zbiór liczb parzystych, Y – zbiór liczb nieparzystych
- X – zbiór liczb parzystych, Y – zbiór liczb podzielnych przez 5

Definicja

Sumą zbiorów A i B nazywamy zbiór elementów, które należą do co najmniej jednego ze zbiorów A lub B . Sumę zbiorów A i B oznaczamy $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ lub } x \in B\}$$

Na zamieszczonym obok diagramie suma zbiorów A i B jest przedstawiona jako obszar zakreskowany.

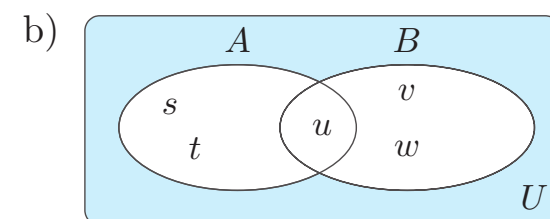
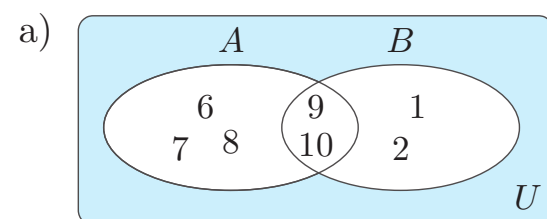


Przykład 2

Jeśli $A = \{2, 3, 4\}$ i $B = \{1, 3, 5, 7\}$, to $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$.

Ćwiczenie 4

Na podstawie diagramu podaj elementy sumy zbiorów A i B .



Ćwiczenie 5

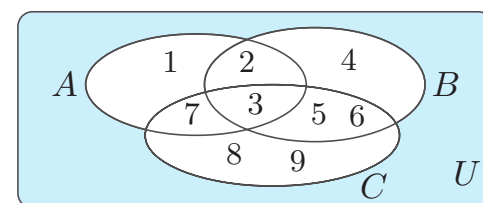
Wyznacz sumę zbiorów A i B .

- $A = \{5, 10, 15, 20, 25\}$, $B = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
- A – zbiór dzielników liczby 6, B – zbiór dzielników liczby 8
- A – zbiór liczb parzystych, B – zbiór liczb nieparzystych

Ćwiczenie 6

Korzystając z diagramu, wyznacz zbiory:

- $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cup B \cup C$,
- $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$.



Definicja

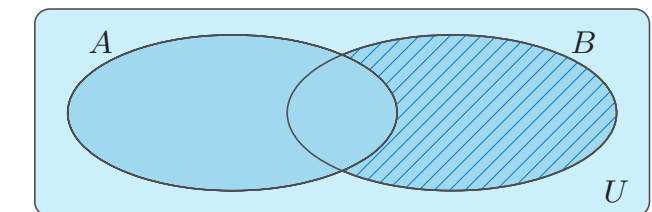
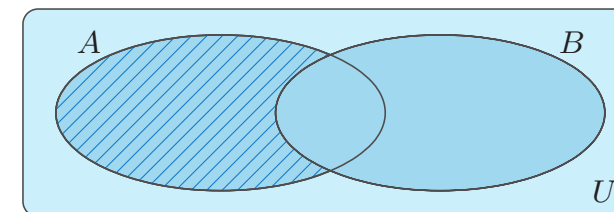
Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B . Różnicę zbiorów A i B oznaczamy $A \setminus B$.

$$A \setminus B = \{x: x \in A \text{ i } x \notin B\}$$

Obszary zakreskowane na poniższych diagramach przedstawiają:

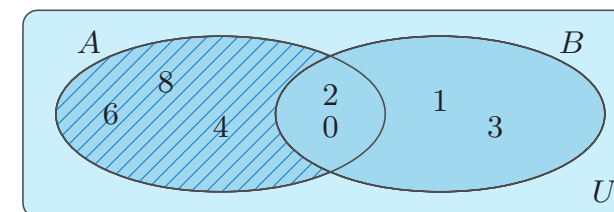
zbiór $A \setminus B$,

zbiór $B \setminus A$.

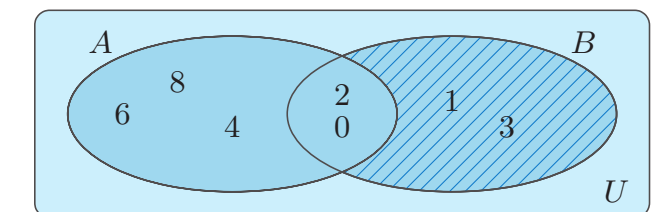


Przykład 3

Dane są zbiór $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ i zbiór $B = \{0, 1, 2, 3\}$. Wyznacz zbiory $A \setminus B$ oraz $B \setminus A$.



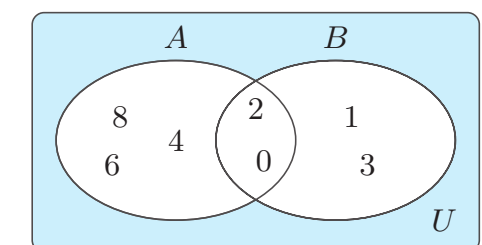
$$A \setminus B = \{4, 6, 8\}$$



$$B \setminus A = \{1, 3\}$$

Ćwiczenie 7

Dane są zbiory $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ – zbiór liczb parzystych mniejszych od 9 i $B = \{0, 1, 2, 3\}$ – zbiór liczb naturalnych mniejszych od 4. Wyznacz zbiory $A \setminus B$ i $B \setminus A$.



Ćwiczenie 8

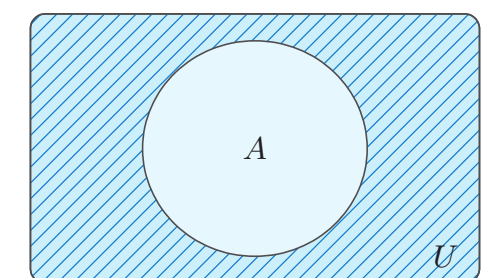
Dla podanych zbiorów A i B wyznacz zbiory $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

- $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$
- $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Szczególnym przypadkiem różnicy zbiorów jest **dopełnienie zbioru**, które oznaczamy przez A' i definiujemy jako różnicę całej przestrzeni i zbioru A :

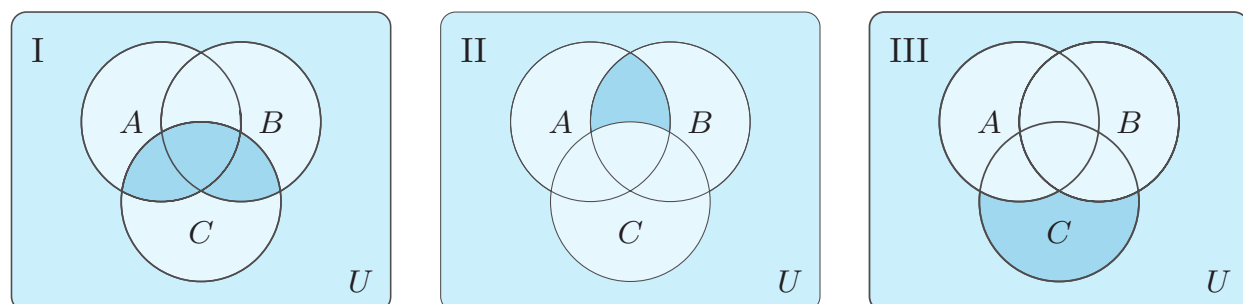
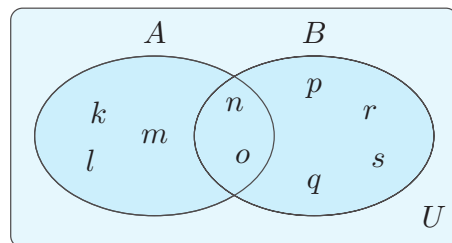
$$A' = U \setminus A = \{x \in U: x \notin A\}$$

Obszar zakreskowany na diagramie to zbiór A' .



Zadania

- Na diagramie przedstawiono zbiory A i B . Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.
- Dla podanych zbiorów A i B wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.
 - $A = \{a, c, e, g\}$, $B = \{d, e, f, g\}$
 - $A = \{1, 5, 7, 9\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$
- W pewnej 30-osobowej klasie 16 uczniów jeździ na nartach, a 10 – gra w hokeja. Wiadomo, że połowa uczniów grających w hokeja jeździ na nartach. Ilu uczniów nie uprawia żadnego z wymienionych sportów?
- Na którym z poniższych diagramów ciemnoniebieski obszar odpowiada podanemu zbiorowi?



- a) $(A \cap B) \setminus C$ b) $C \setminus (A \cup B)$ c) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$

Sprawdź się

- Na diagramie przedstawiono zbiory A i B . Do których ze zbiorów $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ należą tylko liczby nieparzyste?
 -
 -
- Dane są zbiory: A – zbiór spółgłosek w słowie *arytmetyka*, B – zbiór spółgłosek w słowie *geometria* oraz C – zbiór spółgłosek w słowie *algebra*. Wyznacz zbiór:
 - $A \cap B$,
 - $A \setminus B$,
 - $B \setminus A$,
 - $B \cap C$,
 - $B \setminus C$,
 - $C \setminus B$,
 - $A \cap B \cap C$,
 - $A \cup B \cup C$.

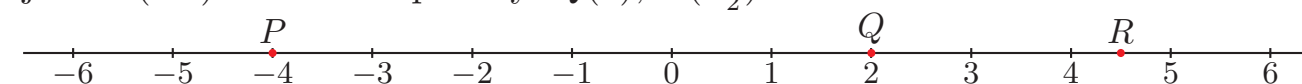
Przypomnij sobie

Oś liczbowa

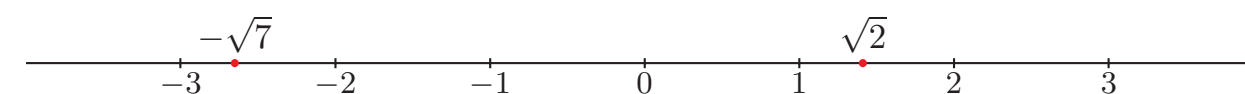
Oś liczbowa to prosta, na której wyróżniono punkt zerowy (początek osi), zwrot oraz przynajmniej jeden punkt wskazujący na jednostkę.

Każdej liczbie rzeczywistej odpowiada dokładnie jeden punkt na osi liczbowej. Każdemu punktowi na osi liczbowej przyporządkowana jest dokładnie jedna liczba zwana **współrzędną** tego punktu.

Na poniższej osi liczbowej punkt P odpowiada liczbie -4 , co możemy zapisać jako $P(-4)$. Pozostałe punkty: $Q(2)$, $R(4\frac{1}{2})$.



- Odczytaj współrzędne punktów zaznaczonych na osi liczbowej.
 -
 -
- Odczytaj współrzędne punktów zaznaczonych na osi liczbowej.
 -
 -
 -
 -
- Na osi liczbowej zaznaczono przybliżone położenie punktów odpowiadających liczbom $-\sqrt{7}$ oraz $\sqrt{2}$. Przerysuj tę oś do zeszytu i zaznacz na niej przybliżone położenia punktów odpowiadających liczbom $-\sqrt{10}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$.



- Na którym z poniższych rysunków zaznaczono zbiór tych liczb x , które spełniają podany warunek?
 -
 -
 -
 -
 - $x < \frac{1}{2}$
 - $x \leq \frac{3}{2}$
 - $x > -\frac{1}{2}$
 - $x \geq -\frac{1}{2}$
- Zaznacz na osi liczbowej zbiór tych liczb x , które spełniają warunek:
 - $x < 4\frac{1}{3}$,
 - $x \leq -2\frac{3}{4}$,
 - $x > -3\frac{1}{5}$,
 - $x \geq 8,3$.
- Zaznacz na osi liczbowej zbiór tych liczb x , które spełniają warunek:
 - $x \geq 21$,
 - $x < -35$,
 - $x \leq 0,03$,
 - $x > -3\frac{1}{6}$.

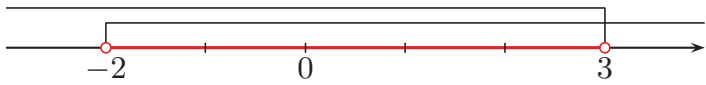
2.3. Przedziały

■ Przedziały ograniczone

Przykład 1

Zaznacz na osi liczbowej zbiór tych liczb x , które spełniają jednocześnie dwa warunki (dwie nierówności): $x > -2$ i $x < 3$.

Liczby, które spełniają obie nierówności jednocześnie, muszą być większe od -2 i mniejsze od 3 , co możemy też zapisać symbolicznie za pomocą podwójnej nierówności: $-2 < x < 3$. Na osi liczbowej zbiór ten przedstawiamy następująco:



Liczby -2 i 3 nie należą do zbioru. Na osi zaznaczamy je pustymi kółkami. Ten zbiór nazywamy **przedziałem otwartym** od -2 do 3 , co symbolicznie zapisujemy $(-2; 3)$. Liczby -2 i 3 nazywamy **końcami przedziału**.

Podając, które liczby x spełniają obie nierówności, piszemy: $x \in (-2; 3)$.

Nazwa zbioru	Oznaczenie	Warunek, jaki spełniają liczby x należące do zbioru	Ilustracja graficzna
przedział otwarty	$(a; b)$	$a < x < b$	

Uwaga. Przedział otwarty $(a; b)$ często zaznacza się na osi liczbowej następująco:



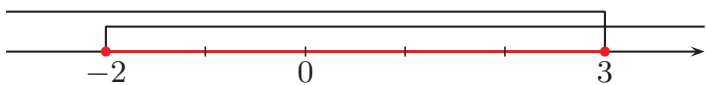
Ćwiczenie 1

Zapisz nierówności, które są spełnione przez liczby należące do podanego przedziału. Zaznacz ten przedział na osi liczbowej.

- a) $(-3; 2)$ b) $(0; 4)$ c) $(-\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$ d) $(100; 150)$

Przykład 2

Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających warunek: $-2 \leq x \leq 3$.



Liczby -2 i 3 należą do zbioru, dlatego na osi końce przedziałów zaznaczamy zamalowanymi kółkami. Ten zbiór nazywamy **przedziałem obustronnie domkniętym** od -2 do 3 i zapisujemy symbolicznie $[-2; 3]$.

Jeśli do przedziału należy tylko jego lewy koniec, to taki przedział nazywamy **lewostronnie domkniętym**, a jeśli należy do niego tylko jego prawy koniec – to **prawostronnie domkniętym**.

Nazwa zbioru	Oznaczenie	Warunek, jaki spełniają liczby x należące do zbioru	Ilustracja graficzna
przedział domknięty	$[a; b]$	$a \leq x \leq b$	
przedział lewostronnie domknięty	$[a; b)$	$a \leq x < b$	
przedział prawostronnie domknięty	$(a; b]$	$a < x \leq b$	

Długością każdego z przedziałów $(a; b)$, $[a; b)$, $(a; b]$, $[a; b]$ nazywamy liczbę: $b - a$.

Ćwiczenie 2

Zapisz nierówności, które są spełnione przez liczby należące do podanego przedziału. Zaznacz ten przedział na osi liczbowej. Podaj, ile liczb całkowitych należy do tego przedziału.

- a) $[-1; 4]$ b) $[\frac{3}{2}; 5)$ c) $(-2; -\frac{1}{2}]$ d) $[-60; 40]$

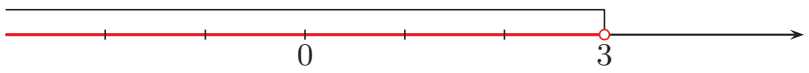
■ Przedziały nieograniczone

Przykład 3

a) Zbiór liczb spełniających nierówność $x > -1$ nazywamy **przedziałem lewostronnie otwartym** od -1 do ∞ i zapisujemy symbolicznie $(-1; \infty)$.



b) Zbiór liczb spełniających nierówność $x < 3$ nazywamy **przedziałem prawostronnie otwartym** od $-\infty$ do 3 i zapisujemy symbolicznie $(-\infty; 3)$.

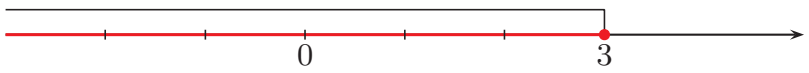


Przykład 4

a) Zbiór liczb spełniających nierówność $x \geq -1$ nazywamy **przedziałem lewostronnie domkniętym** od -1 do ∞ i zapisujemy symbolicznie $[-1; \infty)$.



b) Zbiór liczb spełniających nierówność $x \leq 3$ nazywamy **przedziałem prawostronnie domkniętym** od $-\infty$ do 3 i zapisujemy symbolicznie $(-\infty; 3]$.



Uwaga. Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ możemy zapisać jako przedział $(-\infty; \infty)$.

Ćwiczenie 3

Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

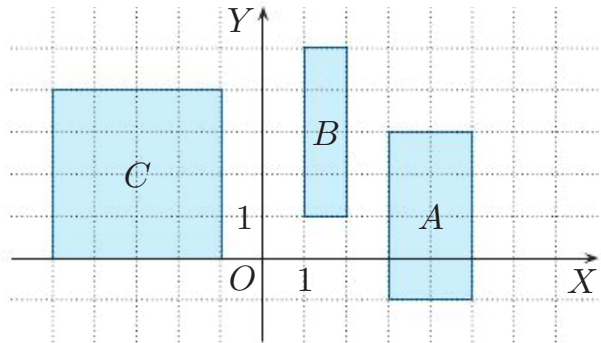
Nazwa zbioru	Oznaczenie	Warunek, jaki spełniają liczby x należące do zbioru	Ilustracja graficzna
przedział otwarty	$(a; \infty)$	?	
przedział lewostronnie domknięty	$[a; \infty)$	$x \geq a$	?
?	?	$x \leq b$	
?	$(-\infty; b)$	?	?

Zadania

1. Zapisz jako przedział zbiór liczb spełniających podany warunek. Zaznacz ten przedział na osi liczbowej.
- a) $-7 \leq x \leq 0$ c) $\frac{1}{4} \leq x < \sqrt{2}$ e) $x \geq 2\frac{1}{4}$ g) $x \leq -\frac{1}{3}$
b) $\frac{1}{2} < x < 9$ d) $-\frac{13}{3} < x \leq 5$ f) $x > -3$ h) $x \leq 27$
2. Zapisz symbolicznie przedział zaznaczony na osi liczbowej i podaj warunek, jaki muszą spełniać liczby należące do tego przedziału.
- a) c) e) g)
b) d) f) h)
3. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału zbiór wszystkich:
- a) liczb dodatnich, których odległość od zera jest mniejsza od 4,
b) liczb ujemnych, których odległość od zera jest nie większa niż 4,
c) liczb nieujemnych, których odległość od zera jest większa od $2\frac{1}{2}$,
d) liczb niedodatnich, których odległość od zera jest nie mniejsza niż $\sqrt{2}$.
4. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału zbiór, do którego należą liczby odległe:
- a) od liczby 1 o mniej niż 2, c) od liczby 3 o nie więcej niż 2,
b) od liczby -1 o mniej niż 3, d) od liczby $-\frac{1}{4}$ o nie więcej niż $\frac{3}{2}$.

5. Wypisz wszystkie liczby całkowite należące do podanego przedziału.
- a) $[-1; 4)$ b) $(0; 6)$ c) $[-\frac{2}{3}; \frac{5}{2}]$ d) $[-\frac{25}{4}; -2]$
6. Ile liczb całkowitych x spełnia podany warunek?
- a) $\sqrt{x} \in [1; 2]$ b) $\sqrt{x} \in [2; 3]$ c) $\sqrt[3]{x} \in (1; 2)$ d) $\sqrt[3]{x} \in [-2; 0)$
7. Sprawdź, czy zachodzi któraś z zależności: $A \subset B$, $B \subset A$.
- a) $A = (-1; 2]$, $B = [-1; 3)$ c) $A = (-\frac{7}{8}; \frac{15}{8})$, $B = [-\frac{6}{7}; \frac{13}{7}]$
b) $A = (-\infty; 7)$, $B = (2; 7]$ d) $A = (\frac{22}{7}; 7)$, $B = (\pi; \sqrt{50})$
8. Określ najdłuższy przedział domknięty, którego końce są liczbami całkowitymi i który jest zawarty w podanym przedziale.
- a) $(-2\frac{1}{2}; 5]$ b) $(-\pi; 6)$ c) $[-3\frac{3}{4}; 2\frac{3}{4})$ d) $[-\sqrt{2}; \sqrt{3}]$
9. Wskaż na osi liczbowej liczbę jednakowo odległą od końców przedziału:
- a) $[-3; 1]$, b) $[-2; 3]$, c) $[\sqrt{2}; 4\sqrt{2}]$, d) $[1\frac{1}{4}; 2\frac{3}{4}]$.
10. Dla jakich wartości parametru p przedziały $[p; p+1]$ oraz $[2p; 2p+1]$ mają dokładnie jeden punkt wspólny?

11. Współrzędne (x, y) punktów należących do prostokąta A (rysunek obok) spełniają warunki: $x \in [3; 5]$ i $y \in [-1; 3]$. Zapisz warunki, jakie spełniają punkty należące do:
- a) prostokąta B ,
b) kwadratu C .



Sprawdź się

12. Zaznacz na osi liczbowej podany przedział. Ile liczb całkowitych należy do tego przedziału?
- a) $[-3; 2]$ b) $(-1; 6)$ c) $[-1\frac{1}{2}; 4)$ d) $(-2\frac{1}{3}; 5]$
13. Zapisz nierówności, które są spełnione przez liczby x należące do podanego przedziału. Ile liczb całkowitych podzielnych przez 3 należy do tego przedziału?
- a) $[-3; 5]$ b) $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ c) $[-\frac{7}{3}; \frac{4}{3}]$ d) $(-\pi; 2\pi)$
14. Które spośród liczb $-\frac{8}{3}$, $-2\frac{3}{4}$, $3\frac{2}{5}$, π należą do podanego przedziału?
- a) $(-2\frac{2}{3}; 3\frac{2}{3}]$ b) $[-2\frac{2}{3}; 3,4)$ c) $[-2; 3,14]$ d) $(-2\frac{1}{2}; 3\frac{1}{4})$

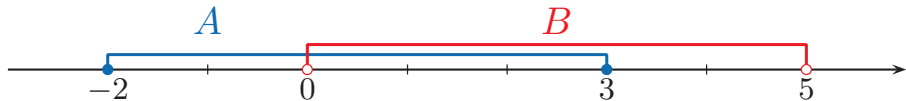
2.4. Działania na przedziałach

Przedziały to podzbiory zbioru liczb rzeczywistych. Można wykonywać na nich działania: $\cup, \cap, \setminus$.

Przykład 1

Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ dla $A = [-2; 3]$ i $B = (0; 5)$.

Kiedy wykonujemy działania na przedziałach, wygodnie jest posługiwać się ich ilustracją graficzną.



$A \cup B = [-2; 5)$	Sumie przedziałów A i B odpowiada ta część osi, która jest zaznaczona co najmniej jednym kolorem.
$A \cap B = (0; 3]$	Iloczynowi przedziałów A i B odpowiada ta część osi, która jest zaznaczona dwoma kolorami.
$A \setminus B = [-2; 0]$	Różnicy $A \setminus B$ odpowiada ta część osi, która jest zaznaczona tylko kolorem niebieskim.
$B \setminus A = (3; 5)$	Różnicy $B \setminus A$ odpowiada ta część osi, która jest zaznaczona tylko kolorem czerwonym.

Uwaga. Wykonując działania na przedziałach, zwróć szczególną uwagę na ich końce. Na osi liczbowej używamy pustego kółka, gdy liczba odpowiadająca temu punktowi nie należy do zbioru, a kółka zamalowanego – gdy należy.

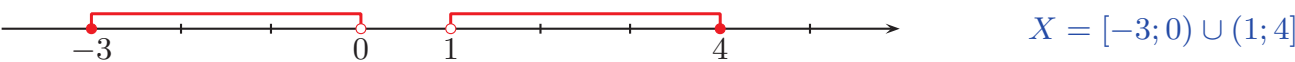
Ćwiczenie 1

Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

- a) $A = (1; 4)$, $B = (2; 6)$ c) $A = [1; 3]$, $B = [-5; 3]$
b) $A = [-4; 1]$, $B = [1; 3]$ d) $A = (-3; 2]$, $B = (-1; 2]$

Przykład 2

Zbiór X zaznaczony na osi liczbowej jest sumą przedziałów $[-3; 0]$ i $(1; 4]$.



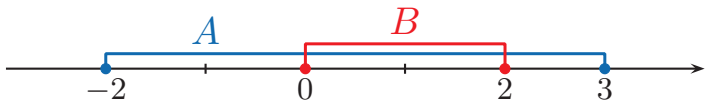
Ćwiczenie 2

Zaznacz na osi liczbowej zbiór X .

- a) $X = [-4; -1] \cup [2; 4]$ b) $X = [-6; -5] \cup (-3; 2) \cup [4; \infty)$

Przykład 3

Dane są zbiory $A = [-2; 3]$ i $B = [0; 2]$. Wyznacz zbiór $A \setminus B$.



Różnicą zbiorów A i B jest suma przedziałów.

$$A \setminus B = [-2; 0) \cup (2; 3]$$

Ćwiczenie 3

Wyznacz zbiór $A \setminus B$.

- a) $A = [-5; 4]$, $B = (-3; -1)$ c) $A = [-3; \infty)$, $B = [-1; 2]$
b) $A = [-3; 5)$, $B = [2; \frac{5}{2}]$ d) $A = \mathbb{R}$, $B = [-3; 1]$

Zadania

- Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.
a) $A = (-3; 0)$, $B = [-1; 4]$ d) $A = (-\infty; 2]$, $B = [0; 2]$
b) $A = (-4; 2]$, $B = [-\frac{1}{2}; 3)$ e) $A = [-1; 2]$, $B = [2; \infty)$
c) $A = [-5; 4]$, $B = (-2; 0]$ f) $A = (-\infty; 6)$, $B = [-3; \infty)$
- Zaznacz zbiór X na osi liczbowej.
a) $X = (-1; 3) \cup \{5\}$ b) $X = [0; 2] \cup \{3, 4\}$ c) $X = \{1\} \cup (3; 5]$
- Zaznacz na osi liczbowej i zapisz jako sumę przedziałów podany zbiór.
a) $\mathbb{R} \setminus (-2; 3)$ b) $\mathbb{R} \setminus [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ c) $\mathbb{R} \setminus (0; 10]$ d) $\mathbb{R} \setminus [-\sqrt{2}; \sqrt{2})$
- Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B , a następnie wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.
a) $A = (-3; 1) \cup (3; 6)$, $B = (0; 4)$ b) $A = [0; 7]$, $B = (1; 3) \cup [8; 9]$

Sprawdź się

- Zaznacz zbiór X na osi liczbowej.
a) $X = (-4; 0) \cup (2; 4)$ c) $X = [-2; 0] \cup [1; 2] \cup [4; 6]$
b) $X = [-3; 1] \cup [2; 5)$ d) $X = (-3; -1) \cup (0; 2] \cup [3; 6)$
- Niech $A = (-5; 3)$, $B = (-7; 4)$. Ile liczb całkowitych należy do zbioru:
a) $A \cup B$, b) $A \cap B$, c) $A \setminus B$, d) $B \setminus A$?
- Który ze zbiorów $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ jest zbiorem pustym?
a) $A = [0; 4]$, $B = (0; 4)$ b) $A = [1; 3]$, $B = (3; 6]$

Rozwiązywanie równań

1. Sprawdź, czy liczba p spełnia podane równanie.

a) $20 - 5x = 4 - 13x$, $p = -2$

b) $3x - (1 + 5x) = \frac{1}{2}x + 14$, $p = -5$

2. Rozwiąż równanie.

a) $2x + 4 = 9$

c) $4x + 3 = 2x - 9$

b) $-3x + 6 = 7$

d) $x - 6 = 5x - 2$

3. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{4x-1}{3} = 5$

c) $\frac{6x+1}{5} = x$

b) $\frac{2-3x}{4} = 1$

d) $3 - x = \frac{2x-3}{2}$

4. Liczba x jest rozwiązaniem podanego równania. Oblicz sumę liczby przeciwnej i liczby odwrotnej do x .

a) $\frac{3x-5}{2} + 3 = \frac{3x+5}{6}$

b) $\frac{4x+1}{5} = 2 - \frac{4-8x}{3}$

Rozwiąż równanie.

a) $2x - 3 = 9$

$$2x - 3 = 9 / + 3$$

$$2x = 12 / : 2$$

$$x = 6$$

Rozwiązaniem jest liczba 6.

b) $\frac{x+6}{2} = 5$

$$\frac{x+6}{2} = 5 / \cdot 2$$

$$x + 6 = 10 / - 6$$

$$x = 4$$

Rozwiązaniem jest liczba 4.

c) $\frac{x+4}{2} - \frac{-2x-5}{6} = \frac{0,5x+2,5}{3}$

d) $\frac{5-4x}{4} - \frac{6x-1}{3} = \frac{4x-1}{12}$

5. Rozwiąż równanie.

a) $3(2x - 7) - (7x - 13) = -10$

d) $3x = x - (1 - (x - 3))$

b) $-2(-27 - 3x) = -3(2x - 10)$

e) $5x - (2x + (3 - x)) = 11$

c) $6 - 2(2x - \frac{1}{2}) = 4x - 2(\frac{3}{4} - 3x)$

f) $1 - (x - (x - (x - 1))) = 0$

6. Sprawdź, czy równanie jest **tożsamościowe** (spełnione przez każdą liczbę rzeczywistą), czy **sprzeczne** (niespełnione przez żadną liczbę rzeczywistą).

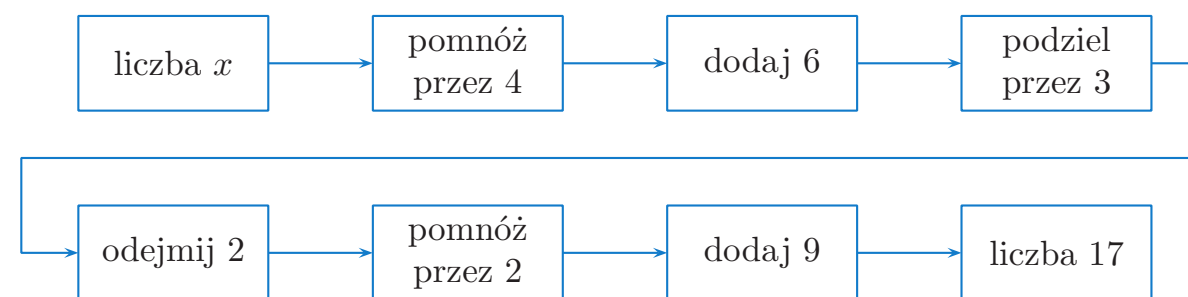
a) $3x - 6 = 1 - (7 - 3x)$

c) $\frac{3}{2}(4x - 6) = \frac{2}{3}(9x - 6)$

b) $4 - (3 + 2x) = 5 - (2x + 6)$

d) $\frac{1}{2}(8 - \frac{1}{2}x) = 4 - \frac{1}{4}x$

7. Począwszy od liczby x , wykonano kolejno ciąg operacji. Wyznacz liczbę x .



2.5. Rozwiązywanie nierówności

Warunek $ax + b > c$, gdzie x jest niewiadomą, nazywamy **nierównością**.

Mówimy, że **liczba spełnia nierówność**, jeśli po podstawieniu jej na miejsce niewiadomej otrzymujemy nierówność prawdziwą. Na przykład liczba 7 spełnia nierówność $x + 1 > 5$, bo $7 + 1 > 5$. Rozwiązanie nierówności polega na wyznaczeniu zbioru wszystkich liczb, które ją spełniają.

Ćwiczenie 1

Sprawdź, czy podana liczba spełnia nierówność $\frac{1}{2}x - 2 < 1$.

a) 2

b) 4

c) 6

d) 8

Przykład 1

- a) Rozwiąż nierówność $x + 3 > 7$.

$$x + 3 > 7$$

$$x + 3 - 3 > 7 - 3$$

$$x > 4$$

Nierówność jest prawdziwa dla $x \in (4; \infty)$.

- b) Rozwiąż nierówność $x - 4 \leq 5$.

$$x - 4 \leq 5$$

$$x - 4 + 4 \leq 5 + 4$$

$$x \leq 9$$

Nierówność jest prawdziwa dla $x \in (-\infty; 9]$.

Zauważ, że dodanie tej samej liczby do obu stron nierówności lub jej odjęcie od obu stron odpowiada czynności przeniesienia tej liczby na drugą stronę nierówności z przeciwnym znakiem.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż nierówność. Podaj najmniejszą liczbę naturalną spełniającą tę nierówność.

a) $x + 309 < 273$

b) $x - \frac{1}{2} \geq 2\frac{1}{3}$

c) $x - \frac{1}{4} \leq -5\frac{1}{2}$

d) $2x - 3 > x + 17$

Definicja

Dwie nierówności nazywamy **równoważnymi**, jeśli mają one ten sam zbiór rozwiązań.

Ćwiczenie 3

Czy podane nierówności są równoważne?

a) $x - 13 < 56$, $x + 26 > 95$

b) $x + \frac{1}{4} \geq \frac{2}{3}$, $x + \frac{1}{12} \geq \frac{1}{2}$

Twierdzenie

Jeżeli obie strony nierówności pomnożymy lub podzielimy przez tę samą liczbę dodatnią, to otrzymamy nierówność równoważną.

Przykład 2

Rozwiąż nierówność $6x + 5 < 17$.

$$\begin{aligned} 6x + 5 &< 17 && \text{Od obu stron nierówności odejmujemy 5.} \\ 6x &< 12 \quad / : 6 && \text{Obie strony nierówności dzielimy przez 6.} \\ x &< 2 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 4

Rozwiąż nierówność.

$$\text{a) } 3x + 7 \leq 34 \quad \text{b) } \frac{3}{4}x - 1 > \frac{1}{3} \quad \text{c) } 0,1x + 1 < -\frac{1}{2} \quad \text{d) } 5x - 7 \geq 3x + 5$$

Twierdzenie

Jeżeli obie strony nierówności pomnożymy lub podzielimy przez tę samą liczbę ujemną, to po zmianie zwrotu nierówności otrzymamy nierówność równoważną.

Przykład 3

a) Rozwiąż nierówność $-\frac{1}{3}x > 5$.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}x &> 5 \quad / \cdot (-3) && \text{Obie strony nierówności mnożymy przez } -3. \\ x &< -15 && \text{Zmieniamy zwrot nierówności.} \end{aligned}$$

Zwróć uwagę na to, że zamiast mnożyć obie strony nierówności przez liczbę ujemną (-3) , można je pomnożyć przez 3 i przenieść odpowiednie wyrazy na drugą stronę nierówności.

b) Rozwiąż nierówność $-6x - 4 \leq -13$.

$$\begin{aligned} -6x - 4 &\leq -13 && \text{Do obu stron nierówności dodajemy 4.} \\ -6x &\leq -9 \quad / : (-6) && \text{Obie strony nierówności dzielimy przez } -6. \\ x &\geq \frac{3}{2} && \text{Zmieniamy zwrot nierówności.} \end{aligned}$$

Ćwiczenie 5

Rozwiąż nierówność. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań tej nierówności.

$$\begin{aligned} \text{a) } -3x - 7 &< 2 && \text{c) } 3(x - 1) \geq x + 5 && \text{e) } \frac{x-3}{2} < \frac{x+2}{3} \\ \text{b) } -\frac{2}{3}x + 1 &\leq 5 && \text{d) } 2\left(x + \frac{1}{4}\right) > \frac{1}{2}x + 4 && \text{f) } \frac{2-x}{5} \leq \frac{x+1}{2} \end{aligned}$$

Definicja

Nierówność, która nie jest spełniona przez żadną liczbę rzeczywistą, nazywamy **nierównością sprzeczną**.

Nierówność, która jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą, nazywamy **nierównością tożsamościową**.

Przykład 4

Rozwiąż nierówność.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1-3x}{6} &< -\frac{1}{2}x && \text{b) } \frac{5x-2}{5} \geq x-2 \\ \frac{1-3x}{6} &< -\frac{1}{2}x \quad / \cdot 6 && \frac{5x-2}{5} \geq x-2 \quad / \cdot 5 \\ 1-3x &< -3x && 5x-2 \geq 5x-10 \\ 1 &< 0 && -2 \geq -10 \\ &&& \text{sprzeczność} && \text{tożsamość} \end{aligned}$$

Nierówność jest spreczna.

Nierówność jest tożsamościowa.

Ćwiczenie 6

Sprawdź, czy podana nierówność jest tożsamościowa, czy spreczna.

$$\begin{aligned} \text{a) } 3(2 - \frac{1}{6}x) &\geq -0,5x + 1 && \text{d) } \frac{4-3x}{3} \geq \frac{2-5x}{5} + 5 \\ \text{b) } -\frac{2}{3}(3x-2) &> \frac{1}{2}(3-4x) && \text{e) } \frac{x-3}{2} < \frac{2x+1}{3} - \frac{x-2}{6} \\ \text{c) } \frac{x-2}{2} &< \frac{3x-4}{6} - 1 && \text{f) } \frac{x+3}{2} - \frac{x-3}{4} \geq \frac{1}{4}x - 3 \end{aligned}$$

Zadania

1. Zapisz w postaci przedziału zbiór liczb spełniających poniższy warunek (klamra oznacza, że obie nierówności mają być jednocześnie spełnione).

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} x+9 \geq 13 \\ 2x-6 < 4 \end{cases} && \text{b) } \begin{cases} 3x+6 > -9 \\ 1-x \geq 3 \end{cases} && \text{c) } \begin{cases} -2x+3 \leq 4 \\ 5-4x \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

2. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału zbiór liczb, które jednocześnie spełniają obie podane nierówności. Podaj najmniejszą i największą liczbę całkowitą należącą do tego przedziału.

$$\begin{aligned} \text{a) } 2x+20 > 8 \text{ i } 5 < 1-x && \text{c) } 2x+3 < 7 \text{ i } 3-4x \leq 19 \\ \text{b) } 2x+3 > 2 \text{ i } 4x < 3 && \text{d) } 3x+9 > -7 \text{ i } -3x > 4x+21 \end{aligned}$$

3. Które spośród liczb $a = 1 - \sqrt{2}$, $b = \sqrt{5} - 1$, $c = \pi + 2$ spełniają nierówność:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{3}{4}x - \frac{2}{3} &> x + \frac{1}{2}, && \text{c) } \frac{3x-2}{5} \geq \frac{x+1}{3}, && \text{e) } \frac{3x+2}{-5} < 3-x, \\ \text{b) } \frac{5}{6}x - \frac{1}{2} &\leq \frac{3}{8}x - \frac{1}{6}, && \text{d) } \frac{2x+7}{3} > \frac{6-x}{2}, && \text{f) } -3(x+3) > \frac{x-5}{-2} \end{aligned}$$

4. Rozwiąż nierówność.

a) $2 - \frac{x+3}{3} < \frac{2x-3}{2}$

b) $\frac{2-x}{2} - \frac{2x-1}{3} \leq 1 - x$

c) $\frac{x+4}{12} + 1 \geq \frac{x}{6} - \frac{3-x}{4}$

d) $\frac{3x+1}{4} - \frac{6-2x}{5} > -\frac{1}{20} - \frac{x-1}{2}$

e) $-\frac{1}{6}x - \frac{2x-5}{4} \geq 3 - \frac{8x-3}{3}$

f) $\frac{x-1}{3} - \frac{2x-1}{6} < \frac{1}{2} - \frac{x-3}{5}$

5. Rozwiąż nierówność.

a) $\sqrt{3}x - 6 < 9 - 2\sqrt{3}x$ b) $\sqrt{2}x + 4 < \sqrt{8}x - 8$ c) $\sqrt{5}x < \frac{5\sqrt{5}}{3}x - 2\frac{2}{3}$

6. a) Jeśli podwoimy liczbę naturalną n , od otrzymanego iloczynu odejmiemy 11, a uzyskaną różnicę pomnożymy przez 3, to otrzymamy liczbę naturalną mniejszą od 21. Podaj możliwe wartości n .

b) Jeśli potroimy całkowitą liczbę ujemną k , do otrzymanego iloczynu dodamy 7, a następnie otrzymaną sumę pomnożymy przez 4, to otrzymamy liczbę większą od 2. Podaj możliwe wartości k .

c) Jeśli od połowy liczby naturalnej m odejmiemy trzecią część liczby m pomniejszonej o 2, to otrzymamy liczbę mniejszą od 3. Podaj możliwe wartości m .

7. Wysokość prostopadłościanu jest równa k , a jego podstawą jest kwadrat o boku 3. Jakie wartości całkowite może przyjmować k przy założeniu, że:

a) suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu jest większa od 38 i mniejsza od 46,

b) pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu jest większe od 40 i mniejsze od 68?

Sprawdź się

8. Rozwiąż nierówność.

a) $3 - x < 4$

c) $3 + \frac{1}{2}x > \frac{3}{2}x - 1$

e) $\frac{2}{3}x + 1 \geq \frac{1}{2}x - 2$

b) $6x \geq 1 + 8x$

d) $1 - \frac{2}{3}x \leq 8 + \frac{5}{3}x$

f) $2,5x - \frac{1}{4} < \frac{3}{4}x + 1$

9. Które liczby ze zbioru $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ spełniają nierówność?

a) $x - (2x - 3) < 2(x - 1,5)$

b) $1 - (0,6 - 0,3x) \leq x - 0,1(4x + 5)$

c) $0,3(x - 0,3) - 0,4(0,4x - 3) \geq -0,25$

d) $2(x - 1) - 3(2x + 1) > -x - \frac{1}{2}(6 - 4x)$

10. Zapisz w postaci przedziału zbiór rozwiązań nierówności.

a) $\frac{x-3}{6} \leq \frac{x-4}{4}$

b) $3 - \frac{x-2}{4} > \frac{2x+1}{2}$

c) $\frac{x+3}{2} - \frac{x+3}{3} \leq \frac{x+3}{4}$

Przypomnij sobie

Sumy algebraiczne. Redukcja wyrazów podobnych

Jednomianem nazywamy wyrażenie, które jest liczbą, zmienną, zapisaną za pomocą litery, lub iloczynem liczb i zmiennych, na przykład:

$$7, 8x, -4xy, \frac{1}{3}x^3y^2$$

1. Pomnóż jednomiany:

a) $9x^2$ i $2xy^2$,

c) $-\frac{1}{2}xyz^2$ i $8x^2z$,

b) $4x^2y^2$ i $\frac{1}{2}xy^4$,

d) $-8x^3y^2z$ i $8xy^2z^3$.

$$\frac{1}{2}x \cdot 8xy^2 = 4x^2y^2$$

$$6x^2y \cdot 2x^3y^2 = 12x^5y^3$$

2. Pomnóż podany jednomian przez $-12a^2b$.

a) $4a^2$

b) $\frac{1}{4}ab^4$

c) $-2abc$

d) $-\frac{3}{4}b^2c^3$

3. Długość krawędzi sześcianu jest równa $3pq^2$. Zapisz za pomocą jednomianów pole powierzchni całkowitej tego sześcianu oraz jego objętość.

Wyrażenie algebraiczne będące sumą lub różnicą jednomianów nazywamy **sumą algebraiczną**.

Poszczególne składniki sumy algebraicznej, czyli poszczególne składające się na nią jednomiany, nazywamy **wyrazami sumy algebraicznej**.

O wyrazach sumy algebraicznej, które różnią się co najwyżej współczynnikiem liczbowym, mówimy, że są **podobne**, na przykład:

$$2x^3 \text{ i } 8x^3 \text{ lub } 6x^2yz \text{ i } \frac{1}{2}x^2yz$$

4. Wskaż wyrazy podobne w podanej sumie algebraicznej.

a) $6x^2 + 6x - 4x^2$

b) $xy^3 + x^3y - \frac{1}{2}x^3y$

c) $2x^2y - 3xy^2 + 9x^2y + xy^2$

Wyrazy podobne możemy dodawać (lub odejmować). Dodawanie (lub odejmowanie) wyrazów podobnych nazywamy **redukcją wyrazów podobnych**.

$$8x^3 - 5x^3 = 3x^3$$

$$9x^2y + 4x^2y = 13x^2y$$

$$3xyz^3 - \frac{1}{2}xyz^3 = 2\frac{1}{2}xyz^3$$

5. Zredukuj wyrazy podobne.

a) $8x^3 - 4xy - 9x^3 + 2xy$

c) $x^2yz - 3xz^3 + 6x^2yz$

b) $6x^4y + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^3 - 3x^4y$

d) $4xy^3 + 2xz^3 - \frac{1}{2}xy^3$

6. Opuść nawiasy i zredukuj wyrazy podobne.

a) $(2x^3 - 6x^2) - (4x^3 - 2x^2)$

c) $x^3 - (x^2y - (4x^3 - 2x^2y))$

b) $-(4x^2y + xy^2) - (6xy^2 - x^2y)$

d) $-2xy^4 - (-2x^2 - (x^2 - 3xy^4))$

2.6. Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian

Przykład 1

Iloczyn liczb $17 \cdot 9$ możemy obliczyć w następujący sposób:

$$17 \cdot 9 = (10 + 7) \cdot 9 = 10 \cdot 9 + 7 \cdot 9 = 90 + 63 = 153$$

Ćwiczenie 1

Oblicz.

- a) $19 \cdot 7$ b) $12 \cdot 17$ c) $21 \cdot 17$ d) $22 \cdot 19$

Aby pomnożyć sumę algebraiczną przez jednomian, należy każdy wyraz sumy pomnożyć przez ten jednomian i zapisać sumę otrzymanych iloczynów.

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Przykład 2

Pomnóż sumę algebraiczną przez jednomian.

- a) $(2x^2 - 6x + 7) \cdot x^3 = 2x^5 - 6x^4 + 7x^3$
 b) $2xy(x^2 + 2y + 3x^2y) = 2x^3y + 4xy^2 + 6x^3y^2$

Ćwiczenie 2

Pomnóż sumę algebraiczną przez jednomian.

- a) $4x^2(6x^3 - \frac{1}{2}x)$ c) $x^2y(xy^2 - 3x^2y)$ e) $(x^2 - 6xz + z^3) \cdot xyz$
 b) $\frac{1}{4}x^3(8x^2 + 2x)$ d) $(x^2y - \frac{1}{2}x^3y^2) \cdot xy^3$ f) $x^2y^2z(2x^3y - 4xz^2 + \frac{1}{2}z)$

Przykład 3

Wykonaj mnożenie i zredukuj wyrazy podobne.

- a) $-2x(6x - 2y - 1) - 6y(-2x + 2y) = -12x^2 + 4xy + 2x + 12xy - 12y^2 =$
 $= -12x^2 + 16xy + 2x - 12y^2$
 b) $(4x - 3y) \cdot 2z - (6x - 2y)(-2z) = 8xz - 6yz + 12xz - 4yz =$
 $= 20xz - 10yz$

Ćwiczenie 3

Wykonaj mnożenie i zredukuj wyrazy podobne.

- a) $x(4x^2 - 7x - 1) - 6x^2(2x - 3)$ c) $x(-3x + 5y) - (2x - 3y) \cdot 3y$
 b) $3x^3(2x^2 - 8x) + 4x(-2x^4 + x^3)$ d) $2x^2y(4x - 2y) + 6xy^2(-3x - 4)$

D Przykład 4

Wykaż, że wartość wyrażenia $6x^3(2x^2 - 6x + \frac{1}{2}) - 2x(6x^4 - 18x^3 + \frac{3}{2}x^2)$ nie zależy od wartości zmiennej x .

$$6x^3(2x^2 - 6x + \frac{1}{2}) - 2x(6x^4 - 18x^3 + \frac{3}{2}x^2) =$$

$$= 12x^5 - 36x^4 + 3x^3 - 12x^5 + 36x^4 - 3x^3 = 0$$

Zatem wartość tego wyrażenia nie zależy od wartości zmiennej x .

D Ćwiczenie 4

Wykaż, że wartość podanego wyrażenia nie zależy od wartości zmiennych x i y .

- a) $6xy(8x^2 - 3x + y) - 2y(24x^3 - 9x^2) - 6xy^2 + 8$
 b) $\frac{1}{2}xy^2(3x^2 - 4x + 6) - \frac{1}{4}x^2y(6xy - 8y) - 3xy^2 - 1$

Zadania

1. Wykonaj mnożenie.

- a) $x^3(6x^2 - 8x + 3)$ c) $(3x^2 + 2x - 4)x^2$
 b) $-2x^4(2x^2 - 4x + 1)$ d) $-2x^3(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2)$

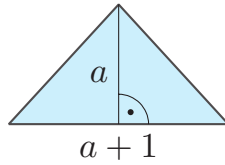
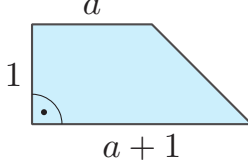
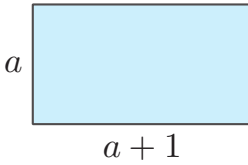
2. Wykonaj mnożenie.

- a) $xy(3x^2 - 2xy + y)$ d) $\sqrt{2}x^4(\sqrt{8}xy + y^2)$
 b) $3xy^2(-2x^2y - 2x + y^2)$ e) $(x^2y - xy + xy^2)x^2y$
 c) $-\frac{1}{2}x^2(4x^2y - 2xy^2)$ f) $2\sqrt{3}xy^3(\sqrt{3}x^2y^2 - \frac{1}{2}x^3y)$

3. Wykonaj mnożenie.

- a) $a(a - 4)a^2$ c) $3a^2b(2a^2 - 8ab^2)b^3$
 b) $2a^3(a^2 - 3a) \cdot 4a$ d) $\frac{1}{2}ab^2(4a^2b - 6b) \cdot \frac{1}{2}a^2b$

4. Dopasuj do figury wzór na jej pole.

- A.  I. $2a^2 + a$ B.  II. $a^2 + a$
 C.  III. $\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a$ D.  IV. $a + \frac{1}{2}$

5. Wyznacz jednomian, przez który należy pomnożyć sumę algebraiczną $2x^2 - 3xy + 6y$, aby otrzymać podane wyrażenie.

- a) $6x^3 - 9x^2y + 18xy$ c) $8x^3y - 12x^2y^2 + 24xy^2$
 b) $-4x^4 + 6x^3y - 12x^2y$ d) $-12x^3y^2 + 18x^2y^3 - 36xy^3$

6. Wykonaj mnożenie i zredukuj wyrazy podobne.

- $x^2(2x^2 - x) - 6x(x^3 - 2x^2)$
- $2x(x^3 + \frac{1}{2}x) - 3x(2x^3 + x^2)$
- $8x^3(x^2 - 2) + \frac{1}{2}x(4x^4 - 8x^2)$
- $2x(3x - 4) - 6x(x^2 + 2x - 3)$
- $-\frac{1}{2}x^2(x^2 - 2x + 6) - 2x(\frac{1}{2}x^2 - 4x)$
- $\sqrt{6}x^3(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) + \sqrt{3}x(2x^2 - 4\sqrt{2}x)$

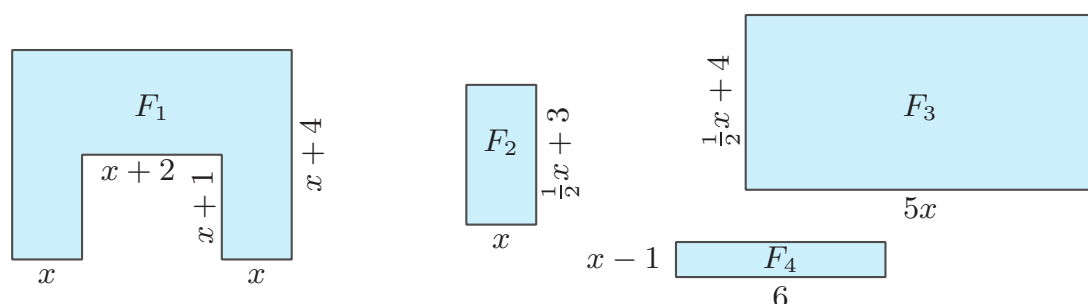
7. Wykonaj mnożenie i zredukuj wyrazy podobne.

- $xy^2(2x - 3xy + y) + \frac{1}{4}x^2y(\frac{1}{2}y^2 - 8y)$
- $-\frac{1}{2}x^3y(xy - 2xy^2) - \frac{1}{8}xy^2(4x^3 - 16x^2y)$
- $-\frac{1}{4}x^2y(-2x + y) - \frac{3}{4}y(x^2 - x^2y) - \frac{1}{2}(x^3y + xy)$

D 8. Wykaż, że wartość podanego wyrażenia nie zależy od wartości zmiennej x .

- $4x^2(x^2 - \frac{3}{2}x + 1) - 3x(\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 1) - 4(x^2 - \frac{3}{4}x - 8)$
- $\sqrt{15}x(2\sqrt{3}x^2 - 6\sqrt{5}x - \sqrt{10}) - 2\sqrt{5}x^2(3x - 3\sqrt{15}) + \sqrt{6}(5x - 1)$

D 9. Uzasadnij, że suma pól figur F_1 i F_2 równa się różnicy pól figur F_3 i F_4 .



Sprawdź się

10. Oblicz.

- $9 \cdot 13$
- $13 \cdot 12$
- $17 \cdot 15$
- $17 \cdot 25$

11. Wykonaj mnożenie.

- $x^2(6x^3 - 4)$
- $2x^3(\frac{1}{2}x^2 - x)$
- $3x^2(x^3 - x^2 + 4x)$
- $9x^3(2x^2 + x - 6)$
- $\frac{1}{2}x^2(4x^4 - 8x^2 + x + 5)$
- $\sqrt{2}x^2(\sqrt{2}x^3 - 2\sqrt{2}x)$

12. Wykonaj mnożenie i zredukuj wyrazy podobne.

- $xy(4x^2y - 6x) - 2x^2(xy^2 - 3y)$
- $3x^2y(5x^2y - y) - y(2x^4y + 2x^2)$
- $\frac{1}{2}xy^2(8x - \frac{1}{4}) + y(\frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{8}xy)$
- $x(2x^2y - 4xy - z) + y(x^3 + 6x^2 + 3z)$
- $x^2yz(x^2 + 2z) - xz^2(4xy - y)$
- $2yz^2(3x^3 - y) + 2y^2z(x^3 - 4z)$

2.7. Wyłączanie jednomianu przed nawias

Jeżeli wśród poszczególnych wyrazów sumy występują jednakowe czynniki, można wyłączyć je przed nawias – czasami ułatwia to obliczenia.

Przykład 1

Oblicz sumę $7 \cdot 49 + 7 \cdot 51$.

Wyłączamy przed nawias liczbę 7:

$$7 \cdot 49 + 7 \cdot 51 = 7 \cdot (49 + 51) = 7 \cdot 100 = 700$$

Korzystamy z własności działań:
 $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
 zwanej rozdzielnnością mnożenia
 względem dodawania.

Ćwiczenie 1

Oblicz w pamięci.

- $2 \cdot 183 + 2 \cdot 17$
- $9 \cdot 27 + 9 \cdot 23$
- $3 \cdot 251 + 3 \cdot 249$
- $6 \cdot 378 + 6 \cdot 222$
- $228 \cdot 12 + 172 \cdot 12$
- $19 \cdot 116 + 84 \cdot 19$

Zauważmy, że wspólny czynnik można wyłączyć przed nawias również w sumach algebraicznych.

Przykład 2

Dana jest suma algebraiczna $6x^3 + 12x^2$. Wyłącz przed nawias wspólny czynnik.

- Wyłączamy przed nawias 6: $6x^3 + 12x^2 = 6(x^3 + 2x^2)$
- Wyłączamy przed nawias $6x$: $6x^3 + 12x^2 = 6x(x^2 + 2x)$
- Wyłączamy przed nawias $6x^2$: $6x^3 + 12x^2 = 6x^2(x + 2)$
- Wyłączamy przed nawias $12x^2$: $6x^3 + 12x^2 = 12x^2(\frac{1}{2}x + 1)$

To, jaki czynnik wyłączymy przed nawias, zależy od konkretnego zadania.

Wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias jest czynnością odwrotną do mnożenia jednomianu przez sumę algebraiczną.

$$a \cdot b + a \cdot c = a(b + c)$$

Ćwiczenie 2

Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

- $5x + 5y$
- $4b - 8a$
- $9x - 27y^2$
- $-6x^2 + 18y^2$
- $39y^2 - 26z$
- $-11a^3 + 22b^2$
- $-48p + 36q^2$
- $75xy^3 - 125$

Ćwiczenie 3

Wyłącz wskazany jednomian przed nawias.

- a) $4x^2 + xy$, x c) $3xy - xyz$, xy e) $a^2b + 3a^2b^2 - a^3b$, a^2b
 b) $2x^3 - 12xy$, $2x$ d) $6pq + 18p^2q$, $6pq$ f) $4x^2y^2 - 5x^3y^2 + 2x^2y^3$, x^2y^2

Przed nawias wyłączamy zwykle **czynnik liczbowy** oraz **wszystkie możliwe zmienne w jak najwyższych potęgach**. Na przykład:

$$27x^3y^2 + 18x^2y^3 = 9x^2y^2(3x + 2y)$$

Ćwiczenie 4

Wyłącz przed nawias czynnik liczbowy oraz wszystkie możliwe zmienne w jak najwyższych potęgach.

- a) $8x^3 - 36x^2$ d) $20ax - 15ay$ g) $2a^3b + 4a^2b - 4a^2b^2$
 b) $7y^2 - 14y^4$ e) $8ab + 12bc$ h) $21p^3q^2 - 27p^2q^3 + 3p^2q^2$
 c) $5x^3 + 10x^2y$ f) $4xy + 6x^2y$ i) $48x^2y + 18xy^2 - 12x^2y^2$

Zadania

1. Oblicz.

- a) $4 \cdot 49 + 4 \cdot 51$ c) $113 \cdot 25 + 87 \cdot 25$ e) $10 \cdot 17 + 10 \cdot 33 + 50 \cdot 10$
 b) $40 \cdot 47 + 40 \cdot 53$ d) $63 \cdot 37 + 37 \cdot 37$ f) $15 \cdot 17 + 15 \cdot 2 + 15$

2. Wyłącz podany czynnik przed nawias.

- a) $a^2b + ab^3$, ab c) $9a^3b^2 - 3a^2c^2$, $3a^2$ e) $3a^3b^2 - 6a^2b$, $3a^2b$
 b) $x^3y^2 - xy^3$, xy^2 d) $4x^4y^4 + 8y^3z$, $4y^3$ f) $6x^2y^4 + 8x^3y^3$, $2x^2y^3$

3. Zapisz podaną sumę algebraiczną w postaci iloczynu, wyłączając przed nawias wskazany jednomian.

- a) $x^2yz + xy^2z + xyz^2$, xyz c) $2x^3y - 4x^2y^2 + 6x^2yz$, $2x^2y$
 b) $x^2yz^2 + xy^2z^3 - x^3yz^2$, xyz^2 d) $12x^4y^3 + 6x^3y^3 - 9x^5y^2$, $3x^3y^2$

4. Przepisz do zeszytu i uzupełnij odpowiednimi jednomianami.

- a) $27y^4 + 36y^3 - 54y^2 = 9y^2(3y^2 + \boxed{?} + \boxed{?})$
 b) $3ab(3a + b + \boxed{?}) = 9a^2b + \boxed{?} + 6ab$
 c) $12t^4 - 9t^3 + 3t^2 = \boxed{?} \cdot (\boxed{?} - 3t + 1)$

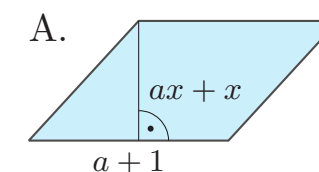
5. Wiadomo, że $a + b = 15$. Oblicz wartość podanego wyrażenia.

- a) $-3a - 3b$ b) $2(a + b) - 4a - 4b$ c) $a(a + b) + b(a + b)$

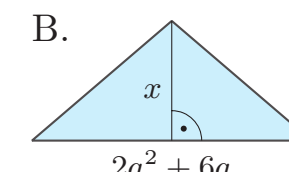
6. Wiadomo, że $6x + 9y = 12$. Oblicz wartość podanego wyrażenia.

- a) $60x + 90y$ b) $12x + 18y$ c) $2x + 3y$ d) $x + \frac{3}{2}y$

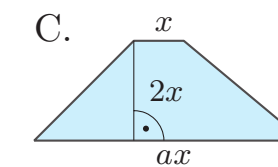
7. Dopasuj do figury wyrażenie opisujące jej pole.



I. $ax(a + 3)$



II. $x^2(a + 1)$



III. $x(a + 1)^2$

- D** 8. Przeczytaj podane obok uzasadnienie stwierdzenia, że suma trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3. Następnie uzasadnij, że:

- a) suma pięciu kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 5,
 b) suma trzech kolejnych liczb parzystych jest podzielna przez 6,
 c) suma trzech kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 3.

Niech n , $n+1$ i $n+2$ będą kolejnymi liczbami naturalnymi. Ich suma S jest równa:

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$$

Suma S została przedstawiona w postaci iloczynu, którego jednym z czynników jest liczba 3, a drugim liczba naturalna $n+1$. Zatem S jest podzielna przez 3.

- D** 9. Uzasadnij, że jeśli dwie liczby naturalne są podzielne przez 3, to suma ich kwadratów jest podzielna przez 9.

- D** 10. Uzasadnij, że suma dowolnej liczby dwucyfrowej i liczby powstałej z przedstawienia cyfr tej liczby jest podzielna przez 11 (np. $23 + 32 = 55$, a liczba 55 jest podzielna przez 11).

Sprawdź się

11. Wyłącz przed nawias czynnik liczbowy oraz zmienną x w jak najwyższej potędze.

- a) $9x^3 - 6x^2 + 15x$ b) $18x^4 + 24x^3 - 12x^2$ c) $8x^5 - 16x^4 + 12x^6$

12. Wyłącz przed nawias czynnik $3x^2$ lub $2xy^2$.

- a) $9x^3 + 3x^2y^2$ c) $6x^2y^2 - 2xy^2$ e) $6x^3y^3 - 6x^4y^4 + 12xy^2$
 b) $3x^4y^2 - 6x^2y$ d) $8xy^5 + 12x^2y^4$ f) $6x^4y^2 + 6x^3y^2 - 18x^4y$

13. Wyłącz przed nawias czynnik liczbowy oraz wszystkie możliwe zmienne w jak najwyższej potędze.

- a) $9x^4y^3 - 12y^5$ b) $8a^2b^2 + 4a^3b^4$ c) $8p^3q^3 + 4p^4q^4 - 6p^2q^3$

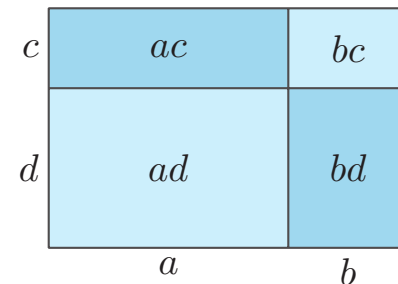
2.8. Mnożenie sum algebraicznych

Prostokąt narysowany obok ma boki długości $a + b$ i $c + d$, zatem jego pole jest równe $(a + b) \cdot (c + d)$. Pole tego prostokąta możemy również obliczyć, sumując pola czterech mniejszych prostokątów:

$$ac + ad + bc + bd$$

Mamy zatem równość:

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$



Aby pomnożyć dwie sumy algebraiczne, należy każdy wyraz jednej sumy pomnożyć przez każdy wyraz drugiej sumy i zapisać sumę otrzymanych iloczynów.

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Uwaga. W zapisie iloczynu sum algebraicznych możemy pominąć znak mnożenia między nawiasami.

Przykład 1

a) Wykonaj mnożenie $(x + 3)(x + 5)$. Zredukuj wyrazy podobne.

$$(x + 3)(x + 5) = x \cdot x + x \cdot 5 + 3 \cdot x + 3 \cdot 5 = x^2 + 8x + 15$$

Każdy wyraz jednej sumy mnożymy przez każdy wyraz drugiej sumy.

b) Wykonaj mnożenie $(a + 4b)(a - b)$. Zredukuj wyrazy podobne.

$$(a + 4b)(a - b) = a^2 - ab + 4ab - 4b^2 = a^2 + 3ab - 4b^2$$

Ćwiczenie 1

Wykonaj mnożenie. Zredukuj wyrazy podobne.

- a) $(x + 4)(x + 3)$ c) $(p + q)(q - 2p)$ e) $(a + 3b)(3a - 2b)$
 b) $(p + 6)(p - q)$ d) $(3x + 1)(2x + 6)$ f) $(2a - \frac{1}{2}b)(4a - 3b)$

Przykład 2

Wykonaj mnożenie $(x - 3)(x^2 + x - 2)$.

Zauważmy, że nie ma znaczenia, w jakiej kolejności wykonamy mnożenie danych sum algebraicznych.

$$(x - 3)(x^2 + x - 2) = x^3 + x^2 - 2x - 3x^2 - 3x + 6 = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

$$(x^2 + x - 2)(x - 3) = x^3 - 3x^2 + x^2 - 3x - 2x + 6 = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

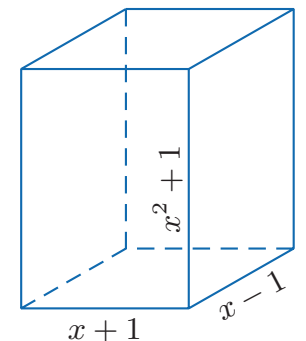
Ćwiczenie 2

Wykonaj mnożenie.

- a) $(x - 1)(x^2 + x - 2)$ c) $(x + y - 4)(x - y)$ e) $(x - y + 2)(x + y - 3)$
 b) $(x + 3)(2x^2 - x + 3)$ d) $(2x - y + 6)(x + 3y)$ f) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

Przykład 3

Wyznacz objętość prostopadłościanu przedstawionego na rysunku obok. Zapisz otrzymane wyrażenie w jak najprostszej postaci.



Aby wyznaczyć objętość prostopadłościanu, mnożymy przez siebie wyrażenia opisujące długości sąsiednich krawędzi jego podstawy i wysokość:

$$V = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$$

$$\begin{aligned} ((x + 1)(x - 1))(x^2 + 1) &= && \text{Mnożymy dwie dowolnie wybrane sumy i w otrzy-} \\ = (x^2 - x + x - 1)(x^2 + 1) &= && \text{manym wyrażeniu redukujemy wyrazy podobne.} \\ = (x^2 - 1)(x^2 + 1) &= && \text{Mnożymy dwie sumy i ponownie} \\ = x^4 + x^2 - x^2 - 1 = x^4 - 1 &= && \text{redukujemy wyrazy podobne.} \end{aligned}$$

Zatem objętość tego prostopadłościanu wyraża się wzorem $V = x^4 - 1$.

Ćwiczenie 3

Wyznacz objętość prostopadłościanu o podanych wymiarach. Zapisz otrzymane wyrażenie w jak najprostszej postaci.

- a) $x + 2, x - 2, x^2 + 2$ b) $x - 2, x^2 - 1, x^2 + 1$

Przykład 4

a) Oblicz $(\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - 1)$.

Postępujemy analogicznie jak w przypadku mnożenia sum algebraicznych.

$$(\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - 1) = (\sqrt{3})^2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2 = 3 + \sqrt{3} - 2 = 1 + \sqrt{3}$$

b) Oblicz $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(2\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} + \sqrt{2})(2\sqrt{3} - \sqrt{2}) &= 2(\sqrt{3})^2 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} - (\sqrt{2})^2 = \\ &= 6 - \sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 2 = 4 + \sqrt{6} \end{aligned}$$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

- a) $(\sqrt{2} + 3)(\sqrt{2} - 1)$ c) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$ e) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)$
 b) $(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} - 3)$ d) $(2\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} + 3\sqrt{2})$ f) $(\sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

D Przykład 5

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby całkowitej n liczba S jest podzielna przez 5.

$$S = (4n - 1)(n - 2) + (4 - n)(2 - n)$$

Przekształcamy wyrażenie opisujące liczbę S :

$$\begin{aligned} S &= (4n - 1)(n - 2) + (4 - n)(2 - n) = && \text{Mnożymy sumy algebraiczne.} \\ &= 4n^2 - 8n - n + 2 + 8 - 4n - 2n + n^2 = && \text{Redukujemy wyrazy podobne.} \\ &= 5n^2 - 15n + 10 = && \text{Wyłączamy liczbę 5 przed nawias.} \\ &= 5(n^2 - 3n + 2) \end{aligned}$$

Liczbę S przedstawiliśmy w postaci iloczynu, którego jednym z czynników jest liczba 5, a drugim liczba $n^2 - 3n + 2$. Liczba $n^2 - 3n + 2$ jest całkowita, ponieważ jest sumą liczb całkowitych. Zatem S jest podzielna przez 5.

D Ćwiczenie 5

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby całkowitej n liczba postaci:

- a) $(2n - 3)(n + 4) + (n - 3)(n + 2) - n$ jest podzielna przez 3,
- b) $(3n - 4)(2n - 5) - (2n - 1)(5 - 2n)$ jest podzielna przez 5,
- c) $(6n - 3)(n + 4) - (3n - 2)(2n - 1)$ jest podzielna przez 7.

Przykład 6

a) Rozwiąż równanie $(x - 1)(x + 3) = x^2$.

$$\begin{aligned} (x - 1)(x + 3) &= x^2 && \text{Mnożymy sumy algebraiczne i przenosimy } x^2 \\ x^2 + 3x - x - 3 - x^2 &= 0 && \text{na lewą stronę równania ze zmienionym znakiem.} \\ 2x &= 3 \quad / : 2 && \text{Redukujemy wyrazy podobne.} \\ x &= 1\frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) Rozwiąż nierówność $(2x + 1)(2x + 5) + x \leq (4x - 1)(x + 3)$.

$$\begin{aligned} (2x + 1)(2x + 5) + x &\leq (4x - 1)(x + 3) \\ 4x^2 + 10x + 2x + 5 + x &\leq 4x^2 + 12x - x - 3 \\ 4x^2 + 10x + 2x + x - 4x^2 - 12x + x &\leq -3 - 5 && \text{Przenosimy ze zmienionym znakiem} \\ 2x &\leq -8 \quad / : 2 && \text{wyrażenia zawierające niewiadomą} \\ x &\leq -4 && \text{na lewą stronę nierówności,} \\ & && \text{a liczby na prawą stronę.} \end{aligned}$$

Ćwiczenie 6

Rozwiąż równanie lub nierówność.

- a) $(x + 2)(x - 5) = x^2$
- b) $(x + 3)(1 - 2x) + 2x^2 = 0$
- c) $3x^2 - (x + 1)(3x + 2) = 0$
- d) $(x + 4)(x - 1) < x(x + 2) + 2x - 1$
- e) $(2x + 3)(3x - 1) + 4 > (6x - 2)(x + 1)$
- f) $(1 - x)(2x + 3) \leq -2(x + 1)(x - 2) - 2$

Zadania

1. Wykonaj mnożenie.

- a) $(2a + b)(a - 1)$
- b) $(3a - 2b)(2b + 3)$
- c) $(-2a + b)(6a - 2)$
- d) $(3 + 4a)(-2b - 1)$
- e) $(2a + b^2)(a - 2b)$
- f) $(a^2 - 3b)(2b - 3a)$

2. Wykonaj mnożenie.

- a) $(x + 2y + 3)(x - 2)$
- b) $(2x - y + 1)(2x - 3)$
- c) $(x^2 + y)(x + y + 2)$
- d) $(x - y)(x^2 - 2x + 1)$
- e) $2x(x - 2y)(3 + y)$
- f) $-4x(2x - y)(2x + y)$

3. Uprość wyrażenie.

- a) $(a + 3)(a - 4) + (a - 3)(a + 4)$
- b) $(2a - b)(a + 3b) - (a - 4b)(2a + b)$
- c) $3y^2 - 2x(x + 2y) - (x - y)(2x + y)$
- d) $2x^2 + 3(x(x + 2) - x(x - 3))$

4. Uprość wyrażenie i oblicz jego wartość dla $x = -0,5$.

- a) $(x + 2)(6(x + 4) - 5(x + 6))$
- b) $-2(x^4 + x^2) + x^3(x + 1) + (x^2 - 2)(x^2 + 3)$

5. Dany jest prostokąt o bokach długości a i $a + 2$.

- a) Przedstaw wzór na pole tego prostokąta w postaci sumy algebraicznej.
- b) Krótszy bok tego prostokąta przedłużono o 1, a dłuższy skrócono o 1, w wyniku czego powstał kwadrat. Wyznacz różnicę między polem kwadratu a polem prostokąta.

6. a) Dany jest kwadrat o boku długości $x + 3$. O ile zmniejszy się pole tej figury, gdy jeden jej bok zmniejszymy o 2, a drugi o 1?

b) Dany jest trójkąt o podstawie równej $a + 3$ i wysokości opuszczonej na tę podstawę równej $a + 4$. O ile zwiększy się pole trójkąta, gdy tę wysokość zwiększymy o 2?

c) Dany jest prostokąt o bokach długości $x + 4$ i $2x + 3$. O ile zwiększy się pole tego prostokąta, jeśli jeden z jego boków zwiększymy o 2, a drugi o 1? Rozpatrz dwa przypadki.

7. Oblicz.

- a) $(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})(4\sqrt{3} - 8\sqrt{2})$
- b) $(2\sqrt{5} - 4\sqrt{2})(2\sqrt{2} + \sqrt{5})$
- c) $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - (4 - \sqrt{6})$
- d) $(\sqrt{5} + 2\sqrt{3})(2\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (6 - 3\sqrt{15})$

D 8. Uzasadnij, że dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}$ wartość wyrażenia jest nieujemna.

- a) $(3x - 6)(4x - 2) - (6x + 3)(2x - 6)$
- b) $(3x - 2)(2x - 1) - (5x - 2)(x - 1)$

9. Rozwiąż równanie.

- a) $(x+2)(x-3) = x^2 + 4$ c) $(x-2)(x-5) = (x+3)(x+6)$
b) $(x-4)(x+6) = x(x-4)$ d) $(2x+1)(x+3) = (x-4)(2x-3)$

10. Rozwiąż nierówność.

- a) $x^2 - (x+3)(x-3) \leq 6x$ c) $(2x-1)(3x-1) - (3x-2)(2x-3) \geq 0$
b) $(4-x)(2x+3) + 2x^2 < 6$ d) $(4-6x)(2x+1) + (4x-5)(3x-1) > x$

11. Ile liczb naturalnych spełnia podaną nierówność?

- a) $(3x+1)(2-x) + x(3x-5) \geq x$
b) $2x^2 - (2x+1)(x-3) > 6x-7$
c) $(3x+3)(2x-1) + 4x < 6(x+2)(x-1) + 9$

12. a) Dane są dwa prostokąty: P_1 o wymiarach $(2x+30)$ cm $\times$ $(x+20)$ cm oraz P_2 o wymiarach $(2x+10)$ cm $\times$ $(x+10)$ cm. Różnica pól prostokątów P_1 i P_2 jest równa 900 cm². Oblicz obwody tych prostokątów.

b) Dane są dwa prostokąty o wymiarach $(6-x)$ cm $\times$ $(2x-5)$ cm oraz $(x+5)$ cm $\times$ $(2x-1)$ cm. Suma ich pól jest równa 69 cm². Oblicz różnicę między polami większego i mniejszego prostokąta.

13. Dane są prostokąt o wymiarach $(4x+1)$ cm $\times$ $(x+3)$ cm oraz kwadrat o boku $(2x+7)$ cm. Pole kwadratu jest o 91 cm² większe od pola prostokąta. Oblicz różnicę między obwodami kwadratu i prostokąta.

Sprawdź się

14. Uprość wyrażenie.

- a) $(3k+5)(4k-2) + 2(5-7k)$ c) $(2k-l)(5k+l) - (4k+l)(k-l)$
b) $(3-l)(4-l) - (6-l)(1-l)$ d) $3k(8k-2l) - (6k+l)(4k-l)$

15. Rozwiąż równanie lub nierówność.

- a) $(3x-4)(2x-1) = (6x+2)(x-1)$
b) $(9x+1)(2x-1) = (1-6x)(1-3x)$
c) $9x^2 - (3-4x)(3-2x) < x(x-9)$
d) $(x+1\frac{1}{2})(2x+1) \geq (2x+\frac{1}{2})(x-1) + 6x$

D 16. Uzasadnij, że jeśli n jest liczbą całkowitą, to liczba postaci:

- a) $(3n+2)(1-2n) + (2-5n)(2n-3) - 2n$ jest podzielna przez 4,
b) $(5n-8)(4n+1) - (2n-5)(9n-2) + n(4n+2)$ jest podzielna przez 6.

2.9. Wzory skróconego mnożenia

Kwadrat sumy i kwadrat różnicy

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b :

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 && \text{kwadrat sumy} \\(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 && \text{kwadrat różnicy}\end{aligned}$$

Wzory na kwadrat sumy i kwadrat różnicy można zilustrować następująco:

$$\begin{aligned}(\bigcirc + \square)^2 &= \bigcirc^2 + 2 \cdot \bigcirc \cdot \square + \square^2 \\(\bigcirc - \square)^2 &= \bigcirc^2 - 2 \cdot \bigcirc \cdot \square + \square^2\end{aligned}$$

D Ćwiczenie 1

Wykaż, że dla dowolnych liczb a i b prawdziwe są podane wyżej wzory.

Przykład 1

- a) $(x+5)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$
b) $(x-4)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$
c) $(3x+2)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4$
d) $(2x-5)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 - 20x + 25$

Ćwiczenie 2

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

- a) $(x+1)^2$ c) $(x-3)^2$ e) $(2x+1)^2$ g) $(4x-1)^2$
b) $(x+2)^2$ d) $(x-5)^2$ f) $(\frac{1}{2}x+2)^2$ h) $(2x-\frac{1}{2})^2$

Przykład 2

- a) $(x+4y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 4y + (4y)^2 = x^2 + 8xy + 16y^2$
b) $(2x-3y)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$

Ćwiczenie 3

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

- a) $(x+2y)^2$ c) $(3x+2y)^2$ e) $(x-\frac{1}{2}y)^2$ g) $(2x-\frac{1}{4}y)^2$
b) $(2x-y)^2$ d) $(3x-4y)^2$ f) $(3x+\frac{1}{2}y)^2$ h) $(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y)^2$

Przykład 3

- a) $(\sqrt{5} + 2)^2 = (\sqrt{5})^2 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 2 + 2^2 = 5 + 4\sqrt{5} + 4 = 9 + 4\sqrt{5}$
b) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 = (\sqrt{6})^2 + 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 6 + 2\sqrt{12} + 2 = 8 + 4\sqrt{3}$
c) $(\sqrt{6} - \sqrt{3})^2 = (\sqrt{6})^2 - 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 6 - 2\sqrt{18} + 3 = 9 - 6\sqrt{2}$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

- a) $(\sqrt{7} + 1)^2$ c) $(6 - \sqrt{3})^2$ e) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$ g) $(\sqrt{6} + \sqrt{15})^2$
b) $(\sqrt{5} - 3)^2$ d) $(4 + \sqrt{5})^2$ f) $(\sqrt{7} - \sqrt{5})^2$ h) $(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{6})^2$

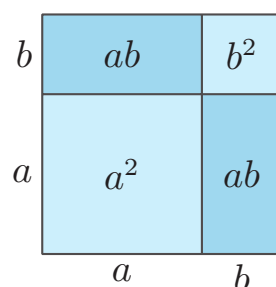
Ćwiczenie 5

- a) Wyjaśnij, dlaczego rysunek przedstawiony obok jest interpretacją geometryczną wzoru:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- b) Podaj analogiczną interpretację geometryczną wzoru:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$



Różnica kwadratów

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \quad \text{różnica kwadratów}$$

D Ćwiczenie 6

Wykaż, że dla dowolnych liczb a i b prawdziwy jest podany wyżej wzór.

Przykład 4

- a) $(\boxed{x} - \boxed{6})(\boxed{x} + \boxed{6}) = \boxed{x}^2 - \boxed{6}^2 = x^2 - 36$
b) $(x + 5)(x - 5) = x^2 - 5^2 = x^2 - 25$
c) $(2x - 3y)(2x + 3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2$
d) $(y + 2x)(2x - y) = (2x + y)(2x - y) = (2x)^2 - y^2 = 4x^2 - y^2$

Ćwiczenie 7

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

- a) $(x - 3)(x + 3)$ c) $(2x - 4)(2x + 4)$ e) $(3x - 4y)(3x + 4y)$
b) $(x + 7)(x - 7)$ d) $(6 + 5x)(5x - 6)$ f) $(\frac{1}{2}x + 3y)(3y - \frac{1}{2}x)$

Przykład 5

$$(7 - \sqrt{3})(7 + \sqrt{3}) = 49 - 3 = 46$$

Ten przykład rozwiązany za pomocą kalkulatora wyglądałby następująco:

$$(7 - \sqrt{3})(7 + \sqrt{3}) \approx (7 - 1,732050808)(7 + 1,732050808) = 5,267949192 \cdot 8,732050808 \approx 46$$

Ćwiczenie 8

Oblicz.

- a) $(5 - \sqrt{7})(5 + \sqrt{7})$ d) $(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{6}}{2})(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{6}}{2})$ g) $(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})$
b) $(6 + \sqrt{3})(6 - \sqrt{3})$ e) $(2\sqrt{3} + \frac{1}{2})(2\sqrt{3} - \frac{1}{2})$ h) $(\sqrt{2} + \sqrt{6})(\sqrt{6} - \sqrt{2})$
c) $(\sqrt{5} + 1)(1 - \sqrt{5})$ f) $(2\sqrt{2} - 3)(3 + 2\sqrt{2})$ i) $(\sqrt{5} + \frac{\sqrt{2}}{2})(\sqrt{5} - \frac{\sqrt{2}}{2})$

Przykład 6

Oblicz wartość wyrażenia $(x - 1)(x + 1) + (x + 1)^2$ dla $x = \sqrt{5}$.

$$(x - 1)(x + 1) + (x + 1)^2 = x^2 - 1 + x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + 2x$$

Wartość tego wyrażenia dla $x = \sqrt{5}$ jest równa $2(\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5} = 10 + 2\sqrt{5}$.

Ćwiczenie 9

Oblicz wartość wyrażenia:

- a) $(x + 2)(x - 2) - (x + 4)^2$ dla $x = \sqrt{5}$,
b) $(3x - 1)(3x + 1) + (3x - 1)^2$ dla $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
c) $(2x + 3)(2x - 3) - (2x + 1)^2$ dla $x = -\sqrt{6}$,
d) $(1 - 4x)(4x + 1) + (4x - 3)^2$ dla $x = -2\sqrt{3}$.

Zadania

1. Uprość podane wyrażenie.

- a) $(x - 3)(x + 3) + (2 + x)(2 - x)$
b) $(x + \frac{3}{2})(x - \frac{3}{2}) - (x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$
c) $(y + 3x)(3x - y) - (x - 5y)(x + 5y)$
d) $(2x - y)(2x + y) + (3x + 2y)(3x - 2y)$

2. Oblicz wartość wyrażenia:

- a) $(x + 1)(x - 1) + (x + 2)(x - 2) - (x + 3)(x - 3)$ dla $x = \sqrt{3}$,
b) $(1 - 2x)(1 + 2x) + (1 - 3x)(1 + 3x) - (1 - 4x)(4x + 1)$ dla $x = \sqrt{5}$,
c) $(2x - 1)^2 - (2x - 1)(1 + 2x) - (2x + 1)^2$ dla $x = \sqrt{2}$.

3. Oblicz.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} (1 + \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^2 & \text{c)} (4 - \sqrt{5})(4 + \sqrt{5}) - (\sqrt{5} - 2)(2 + \sqrt{5}) \\ \text{b)} (\sqrt{3} - 1)^2 - (2 - \sqrt{3})^2 & \text{d)} (\sqrt{6} - \sqrt{5})(\sqrt{6} + \sqrt{5}) + (\sqrt{6} - \sqrt{5})^2 \end{array}$$

4. Oblicz.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sqrt{\sqrt{2} + 1} \cdot \sqrt{\sqrt{2} - 1} & \\ \text{b)} \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} & \\ \text{c)} \sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{3}} & \\ \text{d)} \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} & \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\sqrt{5} - 2} \cdot \sqrt{\sqrt{5} + 2} = \\ & = \sqrt{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)} = \\ & = \sqrt{5 - 4} = \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

5. Oblicz pole powierzchni całkowitej sześcianu o krawędzi a .

$$\begin{array}{lll} \text{a)} a = 3 + \sqrt{2} & \text{b)} a = 2\sqrt{3} - 1 & \text{c)} a = \sqrt{6} + \sqrt{2} \end{array}$$

6. Oblicz obwód trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a i b .

$$\begin{array}{ll} \text{a)} a = 4 - \sqrt{2}, b = 4 + \sqrt{2} & \text{b)} a = 8 + \sqrt{2}, b = 4 - 2\sqrt{2} \end{array}$$

7. Oblicz wartość wyrażenia:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} (2x + 3y)(2x - 3y) - (2x - 3y)^2 & \text{dla } x = \sqrt{\sqrt{10} - 3}, y = \sqrt{\sqrt{10} + 3}, \\ \text{b)} (\sqrt{3}x - y)^2 - (x - \sqrt{3}y)^2 & \text{dla } x = \sqrt{6} + \sqrt{2}, y = \sqrt{6} - \sqrt{2}, \\ \text{c)} (\sqrt{2}x - \sqrt{3}y)^2 - (\sqrt{2}x - \sqrt{5}y)(\sqrt{2}x + \sqrt{5}y) & \text{dla } x = \sqrt{5} - 4, y = \sqrt{6}, \\ \text{d)} (x^2 - 4y^2)^2 - (4y^2 - x^2)^2 & \text{dla } x = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}, y = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}. \end{array}$$

D 8. Uzasadnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} (n + 1)^2 - n^2 \text{ jest nieparzysta,} & \text{c)} (n + \frac{1}{2})^2 - (n - \frac{1}{2})^2 \text{ jest parzysta,} \\ \text{b)} (2n + 1)^2 \text{ jest nieparzysta,} & \text{d)} n^3 - n \text{ jest podzielna przez 6.} \end{array}$$

Sprawdź się

9. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} (7 - x)^2 & \text{c)} (2x + 4)^2 & \text{e)} (\frac{1}{4}x + 8)^2 & \text{g)} (0,5x + 0,4)^2 \\ \text{b)} (x + \frac{1}{2})^2 & \text{d)} (3x + 8)^2 & \text{f)} (\frac{2}{3}x - 6)^2 & \text{h)} (0,1x - 2,5)^2 \end{array}$$

10. Oblicz.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} (3 + \sqrt{2})^2 & \text{c)} (4 - 3\sqrt{2})^2 & \text{e)} (2\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 & \text{g)} (\sqrt{8} - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 \\ \text{b)} (1 - \sqrt{5})^2 & \text{d)} (2\sqrt{7} + 3)^2 & \text{f)} (\sqrt{6} - 2\sqrt{3})^2 & \text{h)} (\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3})^2 \end{array}$$

11. Oblicz.

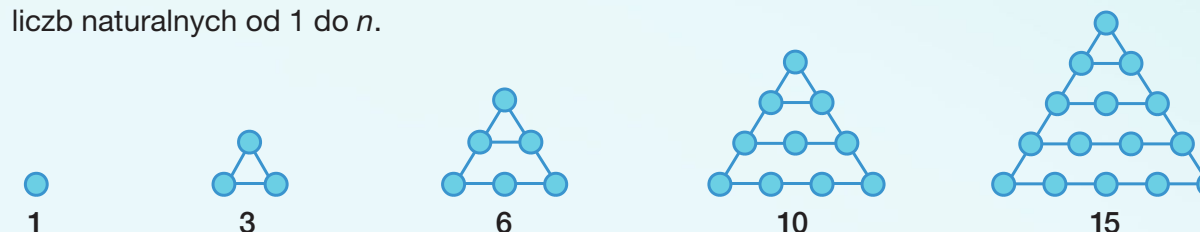
$$\begin{array}{lll} \text{a)} (\sqrt{7} - 1)(1 + \sqrt{7}) & \text{b)} (3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3}) & \text{c)} (\sqrt{2} - \sqrt{6})(\sqrt{2} + \sqrt{6}) \end{array}$$

Liczby wielokątne

Liczby wielokątne badali już w VI wieku p.n.e. starożytni Grecy. Ich nazwę wyjaśniono na poniższych rysunkach.

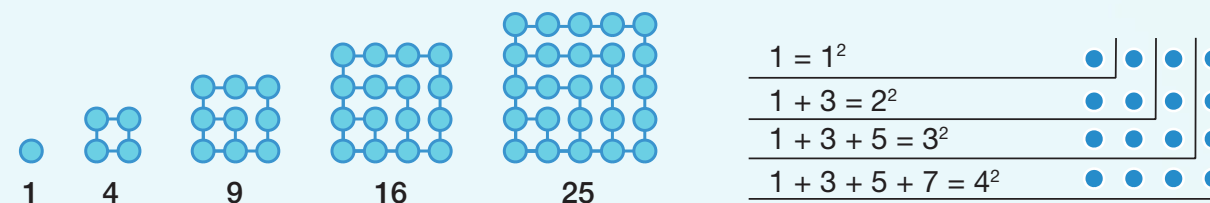
Liczby trójkątne

Liczby 1, 3, 6, 10, 15, to kolejne liczby trójkątne. Zauważ, że n -ta liczba trójkątna to suma liczb naturalnych od 1 do n .



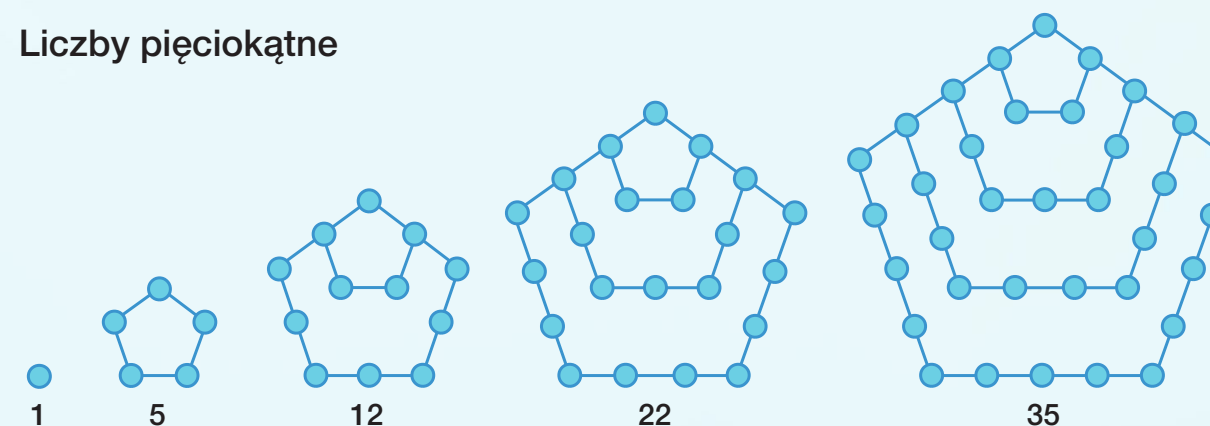
Wzór na n -tą liczbę trójkątną ma postać $\frac{n(n+1)}{2}$.

Liczby kwadratowe



- 1 Zauważ, że n -ta liczba kwadratowa jest sumą n początkowych liczb nieparzystych (rysunek po prawej). Ile jest równa suma dwudziestu początkowych liczb nieparzystych?
- 2 Wykaż, że dla $n > 1$ n -ta liczba kwadratowa jest sumą dwóch kolejnych liczb trójkątnych.

Liczby pięciokątne



- 3 Korzystając z podanego obok wzoru, oblicz szóstą liczbę pięciokątną.
- 4 Oblicz pięć kolejnych liczb sześciokątnych. Podaj ich ilustrację graficzną.

n -ta liczba r -kątne wyraża się wzorem:

$$(r-2) \cdot \frac{n(n-1)}{2} + n$$

2.10. Zastosowanie przekształceń algebraicznych

Wzór na różnicę kwadratów: $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ można zastosować do usuwania niewymierności z mianownika.

Przykład 1

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{5}{\sqrt{2}-1} &= \frac{5}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{5\sqrt{2}+5}{2-1} = 5\sqrt{2}+5 \\ \text{b)} \quad \frac{6}{3+\sqrt{3}} &= \frac{6}{3+\sqrt{3}} \cdot \frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{6(3-\sqrt{3})}{9-3} = \frac{6(3-\sqrt{3})}{6} = 3-\sqrt{3} \\ \text{c)} \quad \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} &= \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{7-3} = \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{4} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Ćwiczenie 1

Usuń niewymierność z mianownika.

$$\text{a)} \quad \frac{1}{6+\sqrt{2}} \quad \text{b)} \quad \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+4} \quad \text{c)} \quad \frac{2}{4-3\sqrt{2}} \quad \text{d)} \quad \frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}+2} \quad \text{e)} \quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

Wzory skróconego mnożenia wykorzystujemy do rozwiązywania równań i nierówności.

Ćwiczenie 2

Przeczytaj podany obok przykład. Rozwiąż równanie.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad x^2 - (2-x)^2 &= 8 \\ \text{b)} \quad (3x+1)^2 - 9x^2 &= 17 \\ \text{c)} \quad (x+1)^2 - (x+1)(x-1) &= 12 \end{aligned}$$

Rozwiąż równanie.

$$\begin{aligned} (x-4)(x+4) - (x-3)^2 &= 17 \\ x^2 - 16 - (x^2 - 6x + 9) &= 17 \\ x^2 - 16 - x^2 + 6x - 9 &= 17 \\ 6x - 25 &= 17 \\ 6x &= 42 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad 4x^2 - (2x+1)^2 &< 3 & \text{c)} \quad (2x+1)(2x-1) &> 4x^2 - 9x \\ \text{b)} \quad (3-x)^2 &\geq x^2 + 12 & \text{d)} \quad 2 - (2x-1)^2 &\leq (3-2x)(2x+3) \end{aligned}$$

Przykład 2

Dla jakich wartości x wyrażenie $x^2 + 4x + 4$ przyjmuje wartość równą 0?

$$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$$

Zatem $x^2 + 4x + 4 = 0$, gdy $(x+2)^2 = 0$, czyli $x = -2$.

Ćwiczenie 4

Dla jakich wartości x podane wyrażenie przyjmuje wartość równą 0?

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad x^2 + 8x + 16 & & \text{d)} \quad 4x^2 - 4x + 1 & & \text{g)} \quad 4x^2 + 12x + 9 \\ \text{b)} \quad x^2 - 6x + 9 & & \text{e)} \quad 25x^2 + 10x + 1 & & \text{h)} \quad 9x^2 + 12x + 4 \\ \text{c)} \quad x^2 + 10x + 25 & & \text{f)} \quad 16x^2 + 8x + 1 & & \text{i)} \quad 9x^2 - 3x + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Przykład 3

a) Rozwiąż równanie $(x+3)^2 = 6x$.

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 &= 6x \\ x^2 &= -9 \end{aligned} \quad \text{Kwadrat liczby rzeczywistej nie może być liczbą ujemną.}$$

Zatem równanie jest sprzeczne – nie jest spełnione przez żadną liczbę $x \in \mathbb{R}$.

b) Rozwiąż nierówność $(2x-1)^2 < 4x(x-1)$.

$$\begin{aligned} 4x^2 - 4x + 1 &< 4x^2 - 4x \\ 1 &< 0 \end{aligned}$$

Zatem nierówność jest sprzeczna – nie jest spełniona przez żadną liczbę $x \in \mathbb{R}$.

Przykład 4

a) Rozwiąż równanie $(x+3)^2 - (x-3)^2 = 12x$.

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 - (x^2 - 6x + 9) &= 12x \\ 12x &= 12x \end{aligned}$$

Zatem równanie jest tożsamościowe – jest spełnione przez każdą liczbę $x \in \mathbb{R}$.

b) Rozwiąż nierówność $(x-2)(x+2) + 5 > 0$.

$$\begin{aligned} x^2 - 4 + 5 &> 0 \\ x^2 &> -1 \end{aligned} \quad \text{Kwadrat liczby rzeczywistej zawsze jest większy od liczby ujemnej.}$$

Zatem nierówność jest tożsamościowa – spełniona przez każdą liczbę $x \in \mathbb{R}$.

Ćwiczenie 5

Sprawdź, czy równanie jest tożsamościowe lub sprzeczne.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad (6-x)^2 - (2-x)^2 &= -8x & \text{c)} \quad (x-4)^2 + 4x &= (x-2)^2 + 12 \\ \text{b)} \quad (3x+1)^2 - (1-3x)^2 &= 12x & \text{d)} \quad (x-3)^2 + 14x &= 2x^2 - (x-4)^2 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 6

Sprawdź, czy nierówność jest tożsamościowa lub sprzeczna.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad (x+1)^2 - 2 &\leq (x-1)(1+x) + 2x & \text{c)} \quad 6x - (3x-1)^2 &\geq (2x+3)^2 \\ \text{b)} \quad (2-x)^2 - (4-x)^2 &\geq 4x - 8 & \text{d)} \quad (2x+3)^2 - 30 &< 8x^2 - (2x-3)^2 \end{aligned}$$

Zadania

1. Usuń niewymierność z mianownika. Czy podana liczba należy do przedziału $(0; 4)$?

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \frac{1}{1+\sqrt{3}} & \text{d)} \frac{2}{1-2\sqrt{2}} & \text{g)} \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} & \text{j)} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \\ \text{b)} \frac{1}{3-\sqrt{2}} & \text{e)} \frac{6}{3+2\sqrt{3}} & \text{h)} \frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} & \text{k)} \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}-2\sqrt{3}} \\ \text{c)} \frac{3}{2+\sqrt{5}} & \text{f)} \frac{8}{3\sqrt{2}-4} & \text{i)} \frac{10}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} & \text{l)} \frac{1+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} \end{array}$$

2. Rozwiąż równanie.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} (x-5)(x+5) = x^2 - 100x & \text{d)} 4(x+2)^2 - (2x-1)^2 = 20x + 10 \\ \text{b)} (3-x)^2 - (x+\frac{1}{3})^2 = \frac{2}{9} & \text{e)} (6+\frac{1}{3}x)(-\frac{1}{3}x+6) + (\frac{1}{3}x-4)^2 = 4 \\ \text{c)} 4(\frac{1}{2}x-3)^2 = (6-x)^2 & \text{f)} (-4x-3)(4x-3) + 8(1-\sqrt{2}x)^2 = 1 \end{array}$$

3. Rozwiąż nierówność. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} 4(x-3)^2 - (2x-5)^2 \geq 2 & \text{c)} -9(2-x)^2 - (1-3x)(3x+1) \leq 11 \\ \text{b)} 9(\frac{2}{3}x-1)^2 > (1-2x)^2 - 8x & \text{d)} (\frac{1}{4}x+2)^2 + 14(1-\frac{1}{2}x)(1+\frac{1}{2}x) \geq 0 \end{array}$$

4. Wyznacz przedział będący zbiorem liczb spełniających obie nierówności.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} (x+1)^2 > x^2 + 1 \\ (x-1)^2 < (2-x)^2 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} (2x+5)(5-2x) + (2x-3)^2 - 2 > 0 \\ (x-\frac{1}{2})^2 - 4 < x - (2-x)(2+x) \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} \frac{x-3}{4} < \frac{x+1}{2} \\ (2x-3)^2 \leq (5-2x)^2 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} x - \frac{4x-2}{3} \geq x-6 \\ 1 - (2x-1)(1+2x) < -2x - (2x-1)^2 \end{cases} \end{array}$$

Sprawdź się

5. Usuń niewymierność z mianownika.

$$\begin{array}{lllll} \text{a)} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{b)} \frac{1}{2-\sqrt{3}} & \text{c)} \frac{4}{2-\sqrt{2}} & \text{d)} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+2} & \text{e)} \frac{3+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3} \end{array}$$

6. Rozwiąż równanie.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} (x-1)^2 - (x+2)^2 = 6 & \text{c)} x^2 - (x-4)(4+x) = 2 \\ \text{b)} (3-x)^2 + (2x+1)^2 = 5x^2 & \text{d)} (\frac{x}{2}+3)(\frac{x}{2}-3) = (\frac{x}{2}-1)^2 \end{array}$$

7. Rozwiąż nierówność.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} (x+3)^2 - (x+2)^2 \leq 0 & \text{c)} 9x^2 + (2+3x)(2-3x) \geq 6x \\ \text{b)} (4-x)^2 + (2+x)^2 > 2x^2 & \text{d)} (\frac{3}{2}x-4)(\frac{3}{2}x+4) < (\frac{3}{2}x-1)^2 \end{array}$$

2.11. Wartość bezwzględna

Definicja

Liczbę $|a|$ określoną za pomocą wzoru:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

nazywamy **wartością bezwzględną** liczby a .

Oznaczenie $|a|$ wprowadził Karl Weierstrass [czyt. wajersztras] w 1841 r.

Zwróć uwagę, że $|a|$ jest zawsze liczbą nieujemną: $|a| \geq 0$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$.

Przykład 1

$$\text{a)} |3,5| = 3,5 \quad \text{b)} |-3,5| = -(-3,5) = 3,5 \quad \text{c)} |0| = 0 \quad \text{d)} |\sqrt{2}| = \sqrt{2}$$

Przykład 2

$$\begin{array}{l} \text{a)} |\sqrt{5}-2| = \sqrt{5}-2, \text{ gdyż } \sqrt{5}-2 > 0. \\ \text{b)} |1-\sqrt{2}| = -(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2}-1, \text{ gdyż } 1-\sqrt{2} < 0. \end{array}$$

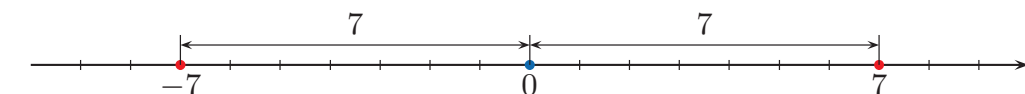
Ćwiczenie 1

Podaj wartość bezwzględną liczby.

$$\text{a)} 5 \quad \text{b)} -5 \quad \text{c)} \sqrt{3}-1 \quad \text{d)} \sqrt{3}-3 \quad \text{e)} 4-3\sqrt{2} \quad \text{f)} 5-2\sqrt{5}$$

Interpretacja geometryczna wartości bezwzględnej

Wartość bezwzględna liczby x to jej odległość na osi liczbowej od liczby 0.



Liczby -7 i 7 leżą w tej samej odległości od 0 na osi liczbowej i mają tę samą wartość bezwzględną, równą 7.

$$|-7| = 7 \quad \text{i} \quad |7| = 7$$

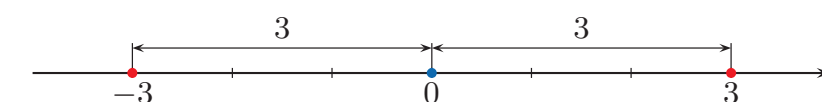
Dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$:

$$|-a| = |a|$$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $|x| = 3$.

Ponieważ zgodnie z interpretacją geometryczną wartość bezwzględna liczby x jest równa jej odległości na osi liczbowej od 0, jedynymi liczbami spełniającymi równanie są -3 oraz 3 .



Ćwiczenie 2

Podaj, dla jakich wartości x spełnione jest równanie:

- a) $|x| = 2$, b) $|x| = 10$, c) $|x| = 0$, d) $|x| = -3$.

Ćwiczenie 3

Która z liczb x, y ma większą wartość bezwzględną?

- a) $x = 7, y = -6$ b) $x = -10, y = -12$ c) $x = -8, y = 0$

Przypomnijmy, że:

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

Dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Na przykład: $\sqrt{5^2} = |5| = 5$ oraz $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$.

Ćwiczenie 4

Oblicz.

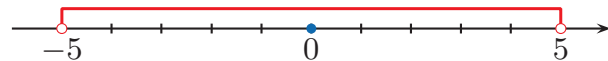
- a) $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$ b) $\sqrt{(4 - 2\sqrt{3})^2}$ c) $\sqrt{(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2}$

Korzystając z interpretacji geometrycznej, możemy rozwiązywać niektóre nierówności z wartością bezwzględną.

Przykład 4

- a) Rozwiąż nierówność $|x| < 5$.

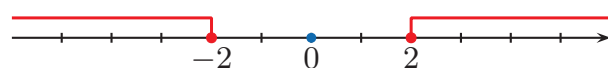
Zaznaczamy na osi liczbowej zbiór tych liczb x , których odległość od 0 jest mniejsza od 5.



Nierówność jest spełniona przez $-5 < x < 5$, zatem $x \in (-5; 5)$.

- b) Rozwiąż nierówność $|x| \geq 2$.

Zaznaczamy na osi liczbowej zbiór tych liczb x , których odległość od 0 jest większa lub równa 2.



Nierówność jest spełniona przez $x \leq -2$ oraz przez $x \geq 2$, zatem:

$$x \in (-\infty; -2] \cup [2; \infty)$$

Ćwiczenie 5

Rozwiąż nierówność i zaznacz na osi liczbowej jej zbiór rozwiązań.

- a) $|x| < 8$ b) $|x| \leq 4$ c) $|x| > 3$ d) $|x| \geq \frac{1}{2}$

Ćwiczenie 6

Rozwiąż nierówność.

- a) $|x| \geq 0$ b) $|x| \leq 0$ c) $|x| > 0$ d) $|x| < 0$

Zadania

1. Oblicz.

- a) $|2\frac{1}{2}| + |-2\frac{1}{2}|$ c) $|-0,5| + |-0,25| - |0,75|$ e) $1 + |1 - \sqrt{2}|$
b) $|7\frac{1}{4}| - |-7\frac{1}{4}|$ d) $2|-\frac{3}{4}| - 3|\frac{1}{8}| + 4|-\frac{5}{16}|$ f) $\sqrt{3} - |2 - \sqrt{3}|$

2. Oblicz $x + |x|$ oraz $x - 2|x|$.

- a) $x = 5$ b) $x = -3$ c) $x = 2 - \sqrt{6}$ d) $x = 3\sqrt{2} - 4$

3. Wyznacz liczby spełniające równanie.

- a) $2|x| = 8$ c) $\frac{2}{3}|x| = 4$ e) $3|x| + 6 = 7$ g) $3 - 2|x| = 1$
b) $\frac{1}{2}|x| = 7$ d) $-3|x| = -\frac{3}{4}$ f) $\frac{1}{2}|x| - 1 = 3$ h) $9 - \frac{3}{4}|x| = 6$

4. Która nierówność jest tożsamościowa, a która sprzeczna?

- a) $|x| > -7, |x| < -7$ b) $|x| \geq -3, |x| \leq -3$

5. Które spośród liczb $-3, 3, 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}$ spełniają podany warunek?

- a) $|x| < 3$ b) $|x| < 2$ c) $|x| \geq 1$ d) $|x| \geq 3$

6. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz jako sumę przedziałów zbiór liczb x , które jednocześnie spełniają obie podane nierówności.

- a) $|x| \leq 3$ i $|x| \geq 1$ b) $|x| < 5$ i $|x| > 2$ c) $|x| \leq 4$ i $|x| > 3\frac{1}{2}$

Sprawdź się

7. Oblicz.

- a) $\sqrt{(\sqrt{7} - 3)^2}$ b) $\sqrt{(2\sqrt{2} - 3)^2}$ c) $\sqrt{(3\sqrt{2} - 4)^2}$

8. Rozwiąż równanie.

- a) $3|x| = 2$ b) $-\frac{3}{2}|x| = -6$ c) $\frac{1}{4}|x| - \frac{1}{2} = 2\frac{3}{4}$ d) $|x| + 2 = 1, (9)$

9. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci sumy przedziałów zbiór rozwiązań podanej nierówności.

- a) $1 < |x| < 4$ b) $5 \leq |x| \leq 6\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2} \leq |x| < 3$ d) $\frac{5}{2} \leq |x| \leq \frac{9}{2}$



Powtórzenie

Zestaw I

- Zaznacz na osi liczbowej i zapisz jako przedział zbiór liczb jednocześnie spełniających obie nierówności.
 - $3x + 14 > 8$ i $5 < 1 - 4x$
 - $3x + 2 > 1$ i $3x \leq 4$
 - $4x + 3 < 19$ i $21 - 2x \geq 7$
 - $2x + 7 \geq -2$ i $-4x \geq 3x + 14$
- Rozwiąż nierówność.
 - $\frac{3}{4}x \leq \frac{5}{2}$
 - $\frac{1-x}{2} < 1$
 - $\frac{x-3}{4} < \frac{x+1}{2}$
 - $\frac{x}{3} - \frac{1-x}{6} < 0$
 - $x - \frac{4x-2}{3} \geq x - 6$
 - $\frac{x-\frac{1}{3}}{2} - \frac{x-\frac{1}{2}}{3} < 1$
- Zapisz wyrażenie w postaci sumy algebraicznej.
 - $(x+1)^2 + (x+2)^2$
 - $(x+3)^2 + (x-2)^2$
 - $(x-4)^2 - (x+4)^2$
 - $(x-3)^2 - (x-1)^2$
 - $(2x-1)^2 + (2x-3)^2$
 - $(2x+1)^2 - (3x-1)^2$
- Uprość wyrażenie.
 - $(x-2)(x+2) + (x+5)(x-5)$
 - $(x-1)(x+1) - (x-4)(x+4)$
 - $(5-2x)(5+2x) - (3x+4)(4-3x)$
 - $(\frac{1}{2} - x)(x + \frac{1}{2}) + (x + \frac{5}{2})(x - \frac{5}{2})$
- Oblicz wartość wyrażenia dla $x = \sqrt{3} + 1$.
 - $(x-1)^2 - (x-1)(x+1)$
 - $(x+3)^2 - (x-3)^2 - 12$
- Oblicz.
 - $(\sqrt{2} + 3)^2 + (\sqrt{2} - 3)^2$
 - $(2 + \sqrt{3})^2 - (2 - \sqrt{3})^2$
 - $(2\sqrt{3} - 1)^2 - (\sqrt{3} + 2)^2$
 - $(2\sqrt{3} - 1)^2 + (2\sqrt{3} + 1)^2$
- Zapisz podaną liczbę w postaci $a + b\sqrt{3}$, gdzie a, b są liczbami całkowitymi.
 - $\frac{4}{\sqrt{3}-1}$
 - $\frac{2}{2-\sqrt{3}}$
 - $\frac{2}{2\sqrt{3}-4}$
 - $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$
- Dla liczb $x = 2 - \sqrt{5}$ i $y = 2 + \sqrt{5}$ oblicz:
 - iloczyn x i y ,
 - iloraz x i y ,
 - sumę kwadratów x i y .
- Zapisz podane wyrażenie jako kwadrat sumy lub kwadrat różnicy. Dla jakich wartości x wyrażenie to przyjmuje wartość równą 0?
 - $x^2 + 10x + 25$
 - $x^2 - 16x + 64$
 - $9x^2 - 6x + 1$
 - $16x^2 + 8x + 1$
 - $9x^2 + 12x + 4$
 - $\frac{1}{4}x^2 + x + 1$

Zestaw II

- Wyznacz zbiory $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$.
 - $A = [-1; 4]$, $B = (2; 5)$
 - $A = [2; 7]$, $B = (3; 5]$
 - $A = [-4; 2]$, $B = [2; 9)$
 - $A = (-\infty; 0]$, $B = [0; 4]$
 - $A = (-\infty; -1)$, $B = (-2; 4)$
 - $A = (2; \infty)$, $B = [0; 5)$
- Ile liczb całkowitych spełnia jednocześnie obie nierówności?
 - $\begin{cases} 2x + 3 \geq 4x - 5 \\ 2 - x \leq -(1 - 2x) \end{cases}$
 - $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 < \frac{1}{3}x + 2 \\ -\frac{2}{3}x - 1 > \frac{1}{3} - x \end{cases}$
 - $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{x-1}{4} \leq 1 \\ \frac{1}{6}x > -1 - \frac{x}{3} \end{cases}$
- Rozwiąż równanie.
 - $(x+2)(2-x) = 6x - x^2$
 - $\frac{1}{4}x^2 - 3x + 5 = (\frac{1}{2}x - 4)(\frac{1}{2}x + 4)$
 - $(x+3)^2 = (x-5)(x+5)$
 - $(x - \frac{1}{2})^2 = x^2 - \frac{1}{2}$
- Wyznacz liczbę całkowitą n tak, aby rozwiązanie równania należało do przedziału $(n; n+2)$.
 - $(x+2)^2 - (x-2)^2 = 56$
 - $(x-3)^2 - (4-x)^2 = 13$
 - $(x-3)(x+3) + (4-x)(4+x) = 2x$
 - $(2x-1)(1+2x) - (2x-1)^2 = 6$
- Rozwiąż nierówność. Zaznacz na osi liczbowej otrzymany zbiór rozwiązań.
 - $9(x+1)^2 - (3x-1)^2 \geq -4$
 - $4(\frac{1}{2}x - 2)^2 < (1-x)^2 + 7$
 - $4(3+x)^2 - (2x-1)(2x+1) \leq 13$
 - $(2-3x)(3x+2) > 3 - (3x-1)^2$
- Podaj najmniejszą liczbę całkowitą spełniającą nierówność.
 - $(x-1)^2 - (x+1)^2 \leq 28$
 - $(x+2)^2 - (3-x)^2 > 5$
 - $(x-2)(2+x) + (4-x)(4+x) \leq 3x$
 - $(3x-1)^2 - (3x+1)(3x-1) < 20$
- Sprawdź, czy liczba p jest liczbą wymierną.
 - $p = (3 - \sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2} - 3)^2$
 - $p = (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2$
- Uzasadnij, że liczba q jest liczbą wymierną.
 - $q = \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{2}-1}$
 - $q = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \frac{6}{\sqrt{3}+3}$
 - $q = \frac{1}{3+\sqrt{5}} + \frac{5}{5-\sqrt{5}}$
- Wymień wszystkie liczby całkowite x spełniające podany warunek.
 - $|x| \leq 4$
 - $0 < |x| < 3$
 - $2 \leq |x| \leq 4$
- Oblicz wartość podanego wyrażenia dla $x = -2\frac{1}{2}$.
 - $||x| - 3| - \frac{1}{2}$
 - $|1 - |x|| + \frac{1}{2}$
 - $||x| - 6| - |x|$

**D Przykład 1**

Uzasadnij, że reszta z dzielenia przez 3 sumy kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych jest równa 2.

Rozpatrzmy trzy kolejne liczby naturalne: n , $n+1$, $n+2$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Suma kwadratów tych liczb:

$$\begin{aligned} S &= n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = \\ &= n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 = \\ &= 3n^2 + 6n + 5 = 3(n^2 + 2n + 1) + 2 \end{aligned}$$

Ponieważ $n^2 + 2n + 1$ jest liczbą naturalną, reszta z dzielenia S przez 3 jest równa 2.

• Zauważ, że aby wykazać, że reszta z dzielenia liczby S przez 3 jest równa 2, przedstawiliśmy tę liczbę w postaci $3k + 2$, gdzie $k \in \mathbb{N}$.

• Konieczne jest rozumowanie dotyczące dowolnych kolejnych trzech liczb naturalnych, bo sprawdzenie dla konkretnych liczb naturalnych, np.:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14 = 3 \cdot 4 + 2$$

czy:

$$11^2 + 12^2 + 13^2 = 121 + 144 + 169 = 434 = 3 \cdot 144 + 2$$

nie jest wystarczającym uzasadnieniem.

→ Zadanie 25, str. 110

D Przykład 2

Uzasadnij, że reszta z dzielenia przez 4 sumy kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych jest równa 3.

Trzy kolejne liczby nieparzyste można zapisać w postaci $2n+1$, $2n+3$, $2n+5$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$. Rozpatrywaną sumę oznaczamy przez S .

$$\begin{aligned} S &= (2n+1)^2 + (2n+3)^2 + (2n+5)^2 = \\ &= (4n^2 + 4n + 1) + (4n^2 + 12n + 9) + (4n^2 + 20n + 25) = \\ &= 12n^2 + 36n + 35 = 4(3n^2 + 9n + 8) + 3 \end{aligned}$$

Ponieważ $3n^2 + 9n + 8$ jest liczbą całkowitą, reszta z dzielenia S przez 4 jest równa 3.

• Zauważ, że aby wykazać, że reszta z dzielenia liczby S przez 4 jest równa 3, liczbę S przedstawiliśmy w postaci $4k + 3$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

• Konieczne jest rozumowanie dotyczące dowolnych kolejnych trzech liczb nieparzystych, bo sprawdzenie dla konkretnych liczb nieparzystych, np.:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 = 1 + 9 + 25 = 35 = 4 \cdot 8 + 3$$

czy:

$$(-7)^2 + (-5)^2 + (-3)^2 = 49 + 25 + 9 = 83 = 4 \cdot 20 + 3$$

nie jest wystarczającym uzasadnieniem.

→ Zadanie 25, str. 110



W zadaniach 1–9 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

A jest zbiorem kwadratów liczb naturalnych, a B – zbiorem ich sześciątów. Ile liczb mniejszych od 200 należy do zbioru $B \setminus A$?

- A. 5 B. 4 C. 3 D. 0

Zadanie 2 (0–1)

$A = (-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}) \cap \mathbb{Z}$ jest zbiorem

- A. siedmioelementowym. C. czteroelementowym.
B. sześćcioelementowym. D. pustym.

Zadanie 3 (0–1)

Zbiór $\mathbb{R} \setminus (-1; 1)$ można zapisać w postaci

- A. $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$ C. $(-\infty; -1] \cup [1; \infty)$
B. $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ D. $\{-1, 1\}$

Zadanie 4 (0–1)

Zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{x}{2} + 2 < \frac{x}{3}$ jest przedział

- A. $(-\infty; 12)$ B. $(-\infty; -12)$ C. $(-12; \infty)$ D. $(12; \infty)$

Zadanie 5 (0–1)

Zbiór wszystkich liczb spełniających jednocześnie dwie nierówności $1 - x \geq 2$ i $2x + 4 > -6$ można zapisać w postaci przedziału

- A. $(-5; -1]$ B. $(-5; -1)$ C. $[-5; -1]$ D. $(-\infty; -5)$

Zadanie 6 (0–1)

Dla dowolnych liczb a i b zachodzi równość

- A. $(a - 2b)^2 = a^2 - 4b^2$ C. $(a - 2b)^2 = a^2 - 2ab + 4b^2$
B. $(a - 2b)^2 = a^2 + 4b^2$ D. $(a - 2b)^2 = a^2 - 4ab + 4b^2$

Zadanie 7 (0–1)

Dla dowolnej liczby x wyrażenie $\frac{x^2}{9} - \frac{2}{3}x + 1$ jest równe

- A. $(-\frac{x}{3} + 1)^2$ B. $(-\frac{x}{3} - 1)^2$ C. $(-\frac{x}{3} - 3)^2$ D. $(\frac{2}{3}x - 1)^2$

Zadanie 8 (0–1)

Ułamek $\frac{1}{1-\sqrt{2}}$ jest równy

- A. $1 + \sqrt{2}$ B. $-1 - \sqrt{2}$ C. $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{1+\sqrt{3}}{3-2\sqrt{2}}$

Zadanie 9 (0–1)

Liczba $|\sqrt{3} - 4|$ należy do przedziału

- A. $(-\infty; 0)$ B. $[0; 2,3)$ C. $[2,3; 4)$ D. $[4; \infty)$



Zadanie 10

Dane są liczby $a = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ i $b = (\sqrt{3} + 1)^2$.

Zadanie 10.1 (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Obie podane liczby są niewymierne.	P	F
Liczba b jest większa od liczby a .	P	F

Zadanie 10.2 (0-1)

Uzupełnij zdanie.

Największą liczbą całkowitą mniejszą od b jest liczba ?.

Zadanie 11 (0-1)

Dana jest nierówność $(x - 3)^2 - (x - 1)^2 \geq -2$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Podaną nierówność spełnia nieskończenie wiele liczb naturalnych.	P	F
Liczba $x = 2\sqrt{3}$ spełnia tę nierówność.	P	F

Zadanie 12 (0-1)

Dane jest wyrażenie $(x - \frac{1}{2}y)^2 - (x + \frac{1}{2}y)^2$.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y podane wyrażenie jest równe

A.	$-\frac{1}{2}xy,$	ponieważ	1.	$(x - \frac{1}{2}y)^2 = x^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2$ oraz $(x + \frac{1}{2}y)^2 = x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2$.
B.	$-xy,$		2.	$(x - \frac{1}{2}y)^2 = x^2 - xy + \frac{1}{4}y^2$ oraz $(x + \frac{1}{2}y)^2 = x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2$.
C.	$-2xy,$		3.	$(x - \frac{1}{2}y)^2 = x^2 - 2xy + \frac{1}{4}y^2$ oraz $(x + \frac{1}{2}y)^2 = x^2 + 2xy + \frac{1}{4}y^2$.

Zadanie 13 (0-2)

Oblicz wartość wyrażenia $(x - 4y)^2 - (4y + x)^2$ dla $x = \frac{1}{4}$ i $y = \frac{\sqrt{3}}{4}$.



Zadanie 14 (0-2)

Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Liczba $(2\sqrt{6}a - \sqrt{2})^2$ jest całkowita dla

- A.** $a = \sqrt{6}$
- C.** $a = \frac{3\sqrt{3}}{2}$
- E.** $a = (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 - 8$
- B.** $a = \frac{\sqrt{6}}{2}$
- D.** $a = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
- F.** $a = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 - 4\sqrt{3}$

Zadanie 15 (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Dla dowolnych liczb p, q , jeśli $p < q$, to $p^2 < q^2$.	P	F
Dla dowolnych różnych od zera liczb p, q , jeśli $p < q$, to $\frac{1}{p} < \frac{1}{q}$.	P	F

Zadanie 16 (0-1)

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Suma $|3 - 2\sqrt{3}| + |4\sqrt{3} - 7|$ jest równa

A.	$4 - 2\sqrt{3},$	ponieważ	1.	$3 - 2\sqrt{3} > 0$ i $4\sqrt{3} - 7 > 0.$
B.	$6\sqrt{3} - 10,$		2.	$3 - 2\sqrt{3} < 0$ i $4\sqrt{3} - 7 < 0.$
			3.	$3 - 2\sqrt{3} < 0$ i $4\sqrt{3} - 7 > 0.$

Zadanie 17 (0-2)

Dane są liczby $a = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$ i $b = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$.

Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.

1. Iloczyn ab jest równy

- A.** 1
- B.** 2
- C.** $2\sqrt{6}$
- D.** 5

2. Iloczyn $(b + a)(b - a)$ jest równy

- E.** $4\sqrt{6}$
- F.** $10 - 4\sqrt{6}$
- G.** $10 + 4\sqrt{6}$
- H.** $-4\sqrt{6}$

Zadanie 18 (0-2)

Zapisz w postaci przedziału zbiór rozwiązań nierówności:

$$(3 - 2x)^2 \leq (2x - \sqrt{3})(\sqrt{3} + 2x)$$

Zadanie 19 (0-2)

Podaj liczby naturalne spełniające nierówność $(4x + 3)^2 - (4x - 3)^2 \leq 100$.

**D Zadanie 20 (0-3)**

Uzasadnij, że nierówność $\sqrt{2}x - 3\sqrt{2} < 6 - x$ spełniają cztery liczby naturalne dodatnie.

Zadanie 21 (0-2)

Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną n spełniającą nierówność:

$$n^2 \geq |10 - 10\sqrt{10}|$$

Zadanie 22 (0-2)

Ile liczb całkowitych x spełnia warunek $\frac{1}{2-\sqrt{3}} \leq |x| < 9$?

D Zadanie 23 (0-2)

Uzasadnij, że dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}$ liczba $(3k-1)^2 + (3k+1)^2 + (3k+2)^2 - 3k^2$ jest podzielna przez 6.

D Zadanie 24 (0-2)

Uzasadnij, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 8.

D Zadanie 25 (0-4) → Przykład 1 i 2, str. 106

Uzasadnij, że reszta z dzielenia przez 8 sumy kwadratów czterech kolejnych liczb nieparzystych jest równa 4.

Zadanie 26 (0-4)

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a-b} : \frac{a \cdot b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ dla $a = 3 + \sqrt{2}$ i $b = 3 - \sqrt{2}$.

D Zadanie 27 (0-3)

Uzasadnij, że każda liczba z przedziału $(\frac{7}{2}; \infty)$ spełnia nierówność:

$$\sqrt{2}x + 2 \leq 2x$$

Zadanie 28 (0-4)

Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających jednocześnie obie nierówności.

$$\begin{cases} \frac{1-x}{2} < \frac{5-x}{4} \\ (2x-1)^2 \geq (2x-3)(2x+3) + 2 \end{cases}$$

Zadanie 29 (0-4)

Ile jest liczb całkowitych spełniających jednocześnie obie nierówności?

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x - (\frac{1}{8} - \frac{1}{2}x) \geq x - \frac{5}{4} \\ (2-x)^2 \leq (x+1)^2 \end{cases}$$

3 Układy równań

Samolot lecący pod wiatr przebywa trasę 1200 km w ciągu 2,4 h. Tę samą trasę z wiatrem pokonuje w 2 h. Jaka jest prędkość samolotu, a jaka wiatru (przyjmujemy, że prędkości te są stałe)?

Jeśli oznaczymy przez x prędkość samolotu, a przez y prędkość wiatru, to do opisu sytuacji potrzebujemy dwóch równań z niewiadomymi x i y . Poszukiwanym rozwiązaniem są wielkości spełniające jednocześnie oba te równania: $x = 550$ km/h i $y = 50$ km/h.

Rozdział ten poświęcony jest metodom rozwiązywania układów równań oraz wykorzystaniu ich do rozwiązywania zadań tekstowych.



Wykorzystanie równań do rozwiązywania zadań

Przykład 1

W skarbonce znajduje się 12 monet – są to monety 2- i 5-złotowe. Razem dają one kwotę 36 zł. Oblicz, ile monet każdego nominału znajduje się w skarbonce.

Oznaczmy przez x liczbę 2-złotówek, wówczas liczba 5-złotówek jest równa $12 - x$. Zapisujemy równanie uwzględniające informacje zawarte w zadaniu:

$$2x + 5(12 - x) = 36$$

$$2x + 60 - 5x = 36$$

$$-3x = -24$$

$$x = 8$$

$$\text{Sprawdzenie: } 8 \cdot 2 + 4 \cdot 5 = 36$$

Zatem w skarbonce znajduje się 8 monet 2-złotowych i 4 monety 5-złotowe.

1. W portmonetce znajduje się 19 monet: 6 monet 1-złotowych oraz monety 2- i 5-złotowe. Razem dają one kwotę 50 zł. Oblicz, ile monet 5-złotowych znajduje się w portmonetce.
2. Otrzymaliśmy 6 zł reszty w monetach 10-, 20- i 50-groszowych. Monet 20- i 50-groszowych było tyle samo, a wszystkich monet było 20. Oblicz, ile otrzymaliśmy monet 10-groszowych.

Przykład 2

Z dwóch miast odległych o 390 km wyjechały o tej samej godzinie naprzeciw siebie dwa samochody. Pierwszy samochód jechał z prędkością 60 km/h, a drugi z prędkością o 10 km/h większą. Po jakim czasie samochody się spotkają?

Oznaczmy przez t czas w godzinach, jaki minął od wyjazdu do momentu spotkania. Pierwszy samochód przejechał w tym czasie $60t$ km, a drugi – $70t$ km. Otrzymujemy równanie:

$$60t + 70t = 390$$

$$130t = 390$$

$$t = 3$$

Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

Zatem samochody spotkają się po 3 godzinach.

3. Samochód pokonał trasę o długości 525 km. Pierwszy odcinek trasy przebył z prędkością 90 km/h. Przejechanie drugiego odcinka z prędkością 60 km/h zajęło mu dwa razy więcej czasu niż przejechanie pierwszego odcinka. Ile czasu trwała cała podróż?

$$s = v \cdot t$$

gdzie:
 s – droga,
 v – prędkość,
 t – czas

3.1. Co to jest układ równań

Przykład 1

Podaj trzy pary liczb x, y spełniające równanie $2x + 4y = 20$.

Przykładowe pary:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases}, \begin{cases} x = -2 \\ y = 6 \end{cases}, \begin{cases} x = 0,5 \\ y = 4,75 \end{cases}$$

Po wybraniu jako x dowolnej liczby wyznaczamy y , rozwiązując odpowiednie równanie.

Równanie $2x + 4y = 20$ to przykład **równania z dwiema niewiadomymi**. Równanie to jest spełnione przez nieskończenie wiele par liczb.

Przykład 2

Do skarbonki wrzucono 7 monet. Były to monety 2- i 5-złotowe. Wiadomo, że w skarbonce jest 26 zł. Ile monet 2-, a ile 5-złotowych wrzucono do skarbonki?

Wprowadźmy oznaczenia niewiadomych:

x – liczba monet 2-złotowych,

y – liczba monet 5-złotowych.

Aby opisać sytuację z zadania, potrzebujemy dwóch równań: $x + y = 7$ (do skarbonki wrzucono 7 monet) i $2x + 5y = 26$ (w skarbonce znajduje się 26 zł). Równania te muszą być spełnione jednocześnie – zapisujemy to, łącząc je klamrą:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 5y = 26 \end{cases}$$

Ustalmy najpierw, które pary liczb spełniają pierwsze równanie. Liczby monet x i y mogą być tylko liczbami dodatnimi naturalnymi, zatem równanie $x + y = 7$ spełnia sześć par liczb:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}, \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}, \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}, \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}, \begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases}$$

Spośród nich tylko para $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$ spełnia drugie równanie $2x + 5y = 26$.

Zatem jest ona rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 5y = 26 \end{cases}$, czyli do skarbonki wrzucono 3 monety 2-złotowe i 4 monety 5-złotowe.

Ćwiczenie 1

Kasjerka wydała resztę 2 zł 10 gr w 9 monetach, wśród których były tylko 10- i 50-groszówki. Ile było 10-groszówek, a ile 50-groszówek?

Układem dwóch równań z dwiema niewiadomymi (lub krótko: układem równań) nazywamy dwa jednocześnie rozpatrywane równania opisujące związek między tymi dwiema niewiadomymi. **Rozwiązanie układu równań** to para liczb, która spełnia jednocześnie oba równania.

Przykład 3

Sprawdź, która para liczb spełnia układ równań $\begin{cases} 4x + 3y = 10 \\ -x + 2y = 14 \end{cases}$

$$\text{A. } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} x = -2 \\ y = 6 \end{cases}$$

A. Podstawiamy do równań układu $x = 1$ i $y = 2$.

$$\begin{cases} 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 4 + 6 = 10 & \text{Spełnione pierwsze równanie.} \\ -1 + 2 \cdot 2 = 3 \neq 14 & \text{Drugie równanie nie jest spełnione.} \end{cases}$$

Zatem para $x = 1, y = 2$ nie spełnia podanego układu równań.

B. Podstawiamy do równań układu $x = -2$ i $y = 6$.

$$\begin{cases} 4 \cdot (-2) + 3 \cdot 6 = -8 + 18 = 10 & \text{Spełnione pierwsze równanie.} \\ -(-2) + 2 \cdot 6 = 2 + 12 = 14 & \text{Spełnione drugie równanie.} \end{cases}$$

Zatem para $x = -2, y = 6$ spełnia podany układ równań.

Ćwiczenie 2

Sprawdź, która para liczb spełnia układ równań $\begin{cases} 3x - 2y = -18 \\ -\frac{1}{2}x + 3y = 7 \end{cases}$

$$\text{A. } \begin{cases} x = -6 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} x = -5 \\ y = -1,5 \end{cases} \quad \text{C. } \begin{cases} x = -5 \\ y = 1,5 \end{cases} \quad \text{D. } \begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \end{cases}$$

Zadania

1. Sprawdź, czy para liczb $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$ spełnia podany układ równań.

$$\text{a) } \begin{cases} 5x - 2y = 16 \\ 7x - y = 17 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 2x + \frac{1}{3}y = 3 \\ -x - y = 1 \end{cases} \quad \text{e) } \begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = 2\frac{1}{6} \\ \frac{x+1}{3} + \frac{y+1}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{1}{2}x - 2y = 7 \\ 4x + y = 11 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 2 \\ \frac{5}{2}y - \frac{3}{4}x = 1 \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}y = 0 \\ \frac{x-1}{2} + \frac{y-1}{3} = -\frac{5}{6} \end{cases}$$

2. Sprawdź, która para liczb spełnia układ równań:

$$\begin{cases} 3x + 2y = -8 \\ -6x - 5y = 11 \end{cases}$$

$$\text{A. } \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{C. } \begin{cases} x = -6 \\ y = 5 \end{cases} \quad \text{D. } \begin{cases} x = -8 \\ y = 8 \end{cases}$$

3. Podaj wszystkie pary liczb naturalnych dodatnich spełniające równanie.

$$\text{a) } 3x + 2y = 17 \quad \text{b) } 3x + 4y = 17 \quad \text{c) } 2x + 4y = 17$$

4. Do podanego równania dopisz takie drugie, aby utworzony układ równań był spełniony przez wskazaną parę liczb.

$$\begin{aligned} \text{a) } 4x + 3y = 14, & \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases} & \text{c) } 4x - 9y = -1, & \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \\ \text{b) } 3x - 7y = 6, & \begin{cases} x = -5 \\ y = -3 \end{cases} & \text{d) } 12x + \frac{1}{2}y = -10, & \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -8 \end{cases} \end{aligned}$$

5. Zapisz podane informacje w postaci układu równań.

- a) Liczba x jest o 8 większa od liczby y . Liczba y jest pięciokrotnie mniejsza od liczby x .
- b) Suma liczby x i podwojonej liczby y wynosi 10. Połowa liczby x jest równa y .

6. Zapisz podane informacje w postaci układu równań.

- a) Liczba a stanowi 40% liczby b . Gdy do 20% liczby a dodamy 60% liczby b , to otrzymamy 4.
- b) Liczba o 10% mniejsza od liczby a jest o 10% większa od liczby b . Różnica liczby o 15% większej od a i liczby o 15% mniejszej od b wynosi 1.

Sprawdź się

7. Podaj wszystkie pary liczb naturalnych spełniających równanie $x + 3y = 9$ oraz te, które spełniają równanie $5x + 2y = 19$. Czy istnieje para liczb naturalnych spełniająca oba równania?

8. Zapisz podane informacje w postaci układu równań.

- a) Suma liczb x i y jest równa 5. Różnica tych liczb wynosi 2.
- b) Suma liczb a i b jest równa 14. Gdy do 120% liczby a dodamy 70% liczby b , to otrzymamy sumę a i b .

3.2. Rozwiązywanie układów równań metodą podstawiania

Jedną z metod rozwiązywania układów równań jest **metoda podstawiania**.

Przykład 1

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x - 3y = 5 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases}$ metodą podstawiania.

Wybieramy jedno z równań i wyznaczamy z niego jedną z niewiadomych. To, którą niewiadomą wyznaczymy, nie ma wpływu na ostateczne rozwiązanie układu równań.

$$\begin{cases} x = 3y + 5 & \text{Wyznaczamy niewiadomą } x \text{ z pierwszego równania.} \\ 4x + 5y = 3 & \text{Drugie równanie przepisujemy bez zmian.} \end{cases}$$

W miejsce x w drugim równaniu podstawiamy wyrażenie $3y + 5$, dzięki czemu otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą y .

$$\begin{cases} x = 3y + 5 & \text{Pierwsze równanie przepisujemy bez zmian.} \\ 4(3y + 5) + 5y = 3 & \text{Podstawiamy wyrażenie } 3y + 5 \text{ w miejsce } x \text{ w drugim równaniu.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y + 5 \\ 12y + 20 + 5y = 3 & \text{Rozwiązujemy drugie równanie z niewiadomą } y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y + 5 \\ 17y = -17 / : 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y + 5 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \cdot (-1) + 5 \\ y = -1 \end{cases} \quad \text{Podstawiamy wyznaczoną wartość } y \text{ do pierwszego równania i obliczamy niewiadomą } x.$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \quad \text{Otrzymana para liczb jest jedynym rozwiązaniem układu równań.}$$

Aby przekonać się, czy nie popełniliśmy błędu, możemy sprawdzić otrzymane rozwiązanie, podstawiając je do układu równań:

$$\begin{cases} 2 - 3 \cdot (-1) = 2 + 3 = 5 & \text{Spełnione pierwsze równanie.} \\ 4 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 8 - 5 = 3 & \text{Spełnione drugie równanie.} \end{cases}$$

Zatem otrzymana para liczb jest rozwiązaniem tego układu równań.

W wyniku przekształceń równań układu w kolejne równoważne równania otrzymujemy **równoważne układy równań**, czyli takie, które mają to samo rozwiązanie (są spełnione przez tę samą parę liczb).

Ćwiczenie 1

Rozwiąż podany układ równań metodą podstawiania. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} x + 2y = 12 \\ x - 3y = 7 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} x + 3y = 3 \\ x - 2y = -1 \end{cases} & \text{e) } \begin{cases} 5x + 3y = 12 \\ 2x - y = 7 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} -3x + y = -20 \\ 2x - y = 1 \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} 2x + y = 20 \\ x - 3y = -4 \end{cases} & \text{f) } \begin{cases} -7x + 2y = 13 \\ -5x + y = 11 \end{cases} \end{array}$$

Przykład 2

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 4x + y = 6 - 2y \\ 2y - x = 2 + y \end{cases}$ metodą podstawiania.

Zaczynamy od doprowadzenia obu równań do prostszej postaci – takiej, w której niewiadome znajdują się po jednej stronie równań.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ y - x = 2 \end{cases} \quad \text{Wybierając równanie, z którego wyznaczymy niewiadomą, kierujemy się przede wszystkim łatwością obliczeń.}$$

$$\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ y = x + 2 \end{cases} \quad \text{Wyznaczamy niewiadomą } y \text{ z drugiego równania.}$$

$$\begin{cases} 4x + 3(x + 2) = 6 \\ y = x + 2 \end{cases} \quad \text{Podstawiamy wyrażenie } x + 2 \text{ w miejsce } y \text{ w pierwszym równaniu.}$$

$$\begin{cases} 4x + 3x + 6 = 6 \\ y = x + 2 \end{cases} \quad \text{Rozwiązujemy pierwsze równanie z niewiadomą } x.$$

$$\begin{cases} 7x = 0 / : 7 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 + 2 \end{cases} \quad \text{Wyznaczoną wartość niewiadomej } x \text{ podstawiamy do drugiego równania.}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

Para liczb $x = 0$, $y = 2$ jest rozwiązaniem podanego układu równań.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 2x - 4y \\ x + y = 7 - y \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x = x - y + 3 \\ 2 = y - x \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 2(x + 2) = y - 2 \\ 2x - y = x + y - 15 \end{cases}$$

Przykład 3

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} \frac{y+3}{6} = \frac{x+1}{3} - 1 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ metodą podstawiania.

Zaczynamy od doprowadzenia pierwszego równania do prostszej postaci, a następnie rozwiązujemy układ równań metodą podstawiania.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{y+3}{6} = \frac{x+1}{3} - 1 & / \cdot 6 \\ 2x + y = 1 \end{cases} & \quad \begin{cases} y = 2x - 7 \\ 2x + 2x - 7 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y + 3 = 2(x + 1) - 6 \\ 2x + y = 1 \end{cases} & \quad \begin{cases} y = 2x - 7 \\ 4x = 8 & / : 4 \end{cases} \\ \begin{cases} y + 3 = 2x + 2 - 6 \\ 2x + y = 1 \end{cases} & \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \cdot 2 - 7 \end{cases} & \quad \begin{array}{l} \text{Na dowolnym etapie roz-} \\ \text{wiązywania możemy zamie-} \\ \text{nić równania miejscami.} \end{array} \\ \begin{cases} y = 2x - 7 \\ 2x + y = 1 \end{cases} & \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

Zatem rozwiązaniem układu jest para liczb: $x = 2$, $y = -3$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{x+y}{2} = 5 \\ \frac{x-y}{3} = 4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{2x-y}{3} = \frac{3x+y}{2} \\ x = 2(x+y+1) \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 1 - \frac{x-1}{2} = 2 + \frac{y+1}{3} \\ x + y + 4 = 0 \end{cases}$$

Nie każdy układ równań ma rozwiązanie. Na przykład układ równań:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

nie jest spełniony przez żadną parę liczb (jeśli suma dwóch liczb jest równa 7, to nie może być jednocześnie równa 8). Zauważmy, że również układ równań:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 7 \end{cases}$$

nie ma rozwiązania (dlaczego?).

Przykład 4

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ -2x + 4y = 7 \end{cases}$ metodą podstawiania.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 3 + 2y \\ -2(3 + 2y) + 4y = 7 \end{cases} & \quad \begin{array}{l} \text{Wyznaczamy niewiadomą } x \text{ z pierwszego równania.} \\ \text{Podstawiamy wyrażenie } 3 + 2y \\ \text{w miejsce } x \text{ w drugim równaniu.} \end{array} \\ \begin{cases} x = 3 + 2y \\ -6 - 4y + 4y = 7 \end{cases} & \\ \begin{cases} x = 3 + 2y \\ 0y = 13 \end{cases} & \quad \text{Drugie równanie jest sprzeczne – nie jest spełnione} \\ & \quad \text{przez żadną wartość niewiadomej } y. \end{aligned}$$

Zatem **żadna para liczb nie spełnia podanego układu równań.**

Układ równań może mieć **nieskończenie wiele rozwiązań**. Na przykład układ:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

spełnia każda para liczb x , y , których suma jest równa 2.

Przykład 5

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 6x - 2y = 12 \\ -3x + y = -6 \end{cases}$ metodą podstawiania.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x - y = 6 \\ y = 3x - 6 \end{cases} & \quad \begin{array}{l} \text{Doprowadzamy pierwsze równanie do prostszej postaci.} \\ \text{Wyznaczamy niewiadomą } y \text{ z drugiego równania.} \end{array} \\ \begin{cases} 3x - (3x - 6) = 6 \\ y = 3x - 6 \end{cases} & \quad \begin{array}{l} \text{Podstawiamy wyrażenie } 3x - 6 \text{ w miejsce } y \\ \text{w pierwszym równaniu.} \end{array} \\ \begin{cases} 3x - 3x + 6 = 6 \\ y = 3x - 6 \end{cases} & \quad \begin{array}{l} \text{Równanie } 0x = 0 \text{ (możemy je również zapisać } 0 = 0) \\ \text{jest zawsze spełnione, niezależnie od tego, jaką wartość} \\ \text{wstawimy w miejsce niewiadomej } x. \\ \text{Zatem o liczbie rozwiązań układu decyduje tylko} \\ \text{drugie równanie, w którym występują obie niewiadome.} \end{array} \\ \begin{cases} 0x = 0 \\ y = 3x - 6 \end{cases} & \end{aligned}$$

Równanie $y = 3x - 6$ jest spełnione przez nieskończenie wiele par liczb, co oznacza, że **układ równań jest spełniony przez nieskończenie wiele par liczb**,

np. spełniają go pary liczb: $\begin{cases} x = 0 \\ y = -6 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0,5 \\ y = -4,5 \end{cases}$

Układ równań z dwiema niewiadomymi x i y :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & \text{gdzie } a_1 \neq 0 \text{ lub } b_1 \neq 0 \\ a_2x + b_2y = c_2 & \text{gdzie } a_2 \neq 0 \text{ lub } b_2 \neq 0 \end{cases}$$

nazywamy **układem równań liniowych**.

Definicja

Układ równań liniowych, którego rozwiązaniem jest jedna para liczb, nazywamy **układem oznaczonym**.

Układ równań liniowych, który ma nieskończenie wiele rozwiązań, nazywamy **układem nieoznaczonym**.

Układ równań liniowych, który nie ma ani jednego rozwiązania, nazywamy **układem sprzecznym**.

Ćwiczenie 4

Sprawdź, czy układ równań jest oznaczony, nieoznaczony czy spreczny.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 2x + 4y = 24 \\ x + 2y = 12 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x + 3y = 3 \\ x - 3y = -3 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2x + 6y = 4 \end{cases} \end{array}$$

Zadania

1. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x + 6 = 3x + y \\ 4 = x - 2y + 5 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} -2x = 3y - 2 \\ y - 6x = -6 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} x - 3y = 1 - x - y \\ 0,2x + 0,1y = -0,1 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 2x - 3y = 0,7 \\ x + 4y = 5,3 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 0,4x - 0,3y = -2 \\ 1,6x + 1,5y = 46 \end{cases} \end{array}$$

2. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} 3(x - y) - 4(x - y) = -5 \\ 6 - x = 2(x - 3y) - 18 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 3 - 2(y - 4x) = 4(1 - x) - 19 \\ -3(2x - y + 1) = -2y + 26 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} 6x - (2y - 3x) = 7y - 9 \\ -3x + 8 = -2(x - 2y - 9) \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 4(3x - 0,5) - 5(y + 0,5) = 9 \\ -2x - 5(y - 2,5) = -9y + 5,5 \end{cases} \\ \text{c)} \begin{cases} x - 2(3 - 2(x - y)) = 23 \\ 6 + 5(1 - 3(y - x)) = 20x + 1 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 4(x - 1) - 2(y - 0,5) = 7 \\ 3(x - 2) + 5(y - 1,5) = 13,5 \end{cases} \end{array}$$

3. Czy rozwiązaniem układu równań jest para liczb całkowitych?

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} \frac{x+5}{2} + \frac{y}{2} = \frac{y+8}{4} \\ -3x - y = 5 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} \frac{2+x}{4} = \frac{y-1}{3} \\ \frac{5-x-y}{2} = \frac{x+2y}{5} \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} \frac{2x-6}{5} + 6y = 3 \\ x - 6y - 1 = 2y \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y-1}{3} = 1 \\ \frac{x-2}{8} - \frac{y-1}{4} = 2 \end{cases} \end{array}$$

4. Sprawdź, ile rozwiązań ma układ równań.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} 2(x - 3y) + 3(x - 2y) = 1 \\ \frac{5}{2}x - 2y = 4(y + 1) \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x - 7(y - 1) = -2(\frac{5}{2} + x) \\ -2(1 - 2x - y) = 1 - x - 5y \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} 2(x - 2y) - 2(y - x + 1,5) = 5 \\ \frac{2-x}{5} - 0,3y = 0 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 3(1 - x) - 5(2 - y) = 5 \\ 0,2(2 - 3x) + y = 0,8 \end{cases} \end{array}$$

5. Rozwiąż układ równań.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} (x + 2)^2 + 2y = x + 15 + (x - 2)(x + 2) \\ x + (y - 1)^2 = 1 - (\sqrt{3} - y)(y + \sqrt{3}) \end{cases} & \\ \text{b)} \begin{cases} x(1 - 2x) - y(1 - y) = (y - \sqrt{2}x)(y + \sqrt{2}x) + 3 \\ 2x - (2y - \frac{1}{4})^2 + 16\frac{1}{16} = (2y + 3)(3 - 2y) \end{cases} & \end{array}$$

6. Sprawdź, czy układ równań jest oznaczony, nieoznaczony, czy spreczny.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 2x + 3(y - 2) = 1 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 4x - y = 2 \\ \frac{1}{2}y = 2(x - 1) \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 2y - x = 8 \\ x + 4 = 2(y - 2) \end{cases} \end{array}$$

7. Dane jest równanie $3x - 4y = 2$. Dopisz do niego drugie równanie, tak aby otrzymany układ równań był:

a) spreczny, b) nieoznaczony, c) oznaczony.

Sprawdź się

8. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 3x + 4 = 2y - 4 \\ x + y = 1 - x \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 6y + x + 1 = 0 \\ 2y - 6x + 7 = 0 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} \frac{x+10}{2} + y = \frac{y-1}{2} \\ 3 - \frac{3x-2y}{2} = 5 + 2y \end{cases} \end{array}$$

9. Sprawdź, czy układ równań jest oznaczony, nieoznaczony, czy spreczny.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -2x + \frac{4}{3}y = -3 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 7,5x - 5y = 6 \\ 2y - 3x = -2,4 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 2x + 3y = -\frac{1}{3} \\ 4x - 4\frac{1}{2}y = 6 \end{cases} \end{array}$$

3.3. Rozwiązywanie układów równań metodą przeciwnych współczynników

Inną metodą rozwiązywania układów równań jest **metoda przeciwnych współczynników**.

Przykład 1

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x + 3y = -4 \\ -x + 6y = 13 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

Zauważmy, że współczynniki przy niewiadomej x są liczbami przeciwnymi (1 i -1), zatem po dodaniu obu równań stronami, otrzymamy równanie z jedną niewiadomą y .

$$\begin{array}{rcl} \begin{cases} x + 3y = -4 \\ -x + 6y = 13 \end{cases} \\ + \\ \hline x - x + 3y + 6y = -4 + 13 \\ 9y = 9 \\ y = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Dodajemy równania stronami.} \\ \text{Otrzymaliśmy równanie z jedną niewiadomą.} \end{array}$$

Wyznaczoną wartość niewiadomej y podstawiamy do jednego z równań wyjściowego układu, na przykład do równania $x + 3y = -4$. Otrzymujemy nowy, równoważny układ równań:

$$\begin{cases} y = 1 \\ x + 3 \cdot 1 = -4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Podstawiamy liczbę 1 w miejsce } y \text{ w równaniu} \\ x + 3y = -4 \text{ i obliczamy niewiadomą } x. \end{array}$$

Stąd otrzymujemy jako rozwiązanie układu równań parę liczb:

$$\begin{cases} x = -7 \\ y = 1 \end{cases}$$

Sprawdzenie

$$\begin{cases} -7 + 3 \cdot 1 = -7 + 3 = -4 & \text{Spełnione pierwsze równanie.} \\ -(-7) + 6 \cdot 1 = 7 + 6 = 13 & \text{Spełnione drugie równanie.} \end{cases}$$

Ćwiczenie 1

Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 4x + y = 5 \\ 2x - y = -2 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -2x + y = -1 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ -5x + y = 9 \end{cases} \end{array}$$

Czasami zanim dodamy równania stronami, najpierw musimy pomnożyć obie strony jednego równania (lub obu równań) przez taką liczbę (lub liczby), aby współczynniki przy jednej z niewiadomych w obu równaniach były liczbami przeciwnymi.

Przykład 2

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 5x + 4y = 6 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników.

Współczynniki przy żadnej z niewiadomych nie są liczbami przeciwnymi. Przekształcimy zatem jedno z równań tak, aby otrzymać przeciwne współczynniki przy niewiadomej y .

$$\begin{array}{rcl} \begin{cases} 5x + 4y = 6 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} 5x + 4y = 6 \\ 2x + y = 3 \cdot (-4) \end{cases} & \text{Mnożymy obie strony drugiego równania przez } -4. \\ + \\ \begin{cases} 5x + 4y = 6 \\ -8x - 4y = -12 \end{cases} & \text{Dodajemy równania stronami.} \\ \hline 5x - 8x = 6 - 12 & \text{Otrzymaliśmy równanie z jedną niewiadomą.} \end{array}$$

Rozwiązujemy równanie z niewiadomą x :

$$-3x = -6, \text{ stąd } x = 2$$

Wyznaczoną wartość niewiadomej x podstawiamy do jednego z równań wyjściowego układu, np. do równania $2x + y = 3$, i otrzymujemy nowy, równoważny układ równań:

$$\begin{array}{rcl} \begin{cases} x = 2 \\ 2 \cdot 2 + y = 3 \end{cases} & \text{Podstawiamy liczbę 2 w miejsce } x \text{ w równaniu } 2x + y = 3. \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \end{array}$$

Otrzymana para liczb $x = 2, y = -1$ jest rozwiązaniem podanego układu.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x + 5y = -2 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 4x - 7y = 3 \\ 3x + 14y = 5 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 10x + 21y = -9 \\ -5x - 7y = 8 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} 3x + y = -13 \\ 2x + 3y = -4 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 5x - 2y = 16 \\ 3x + 5y = -9 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 2x + 3y = -3,5 \\ 3x - 2y = 4,5 \end{cases} \end{array}$$

Przykład 3

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 5x + 7y = 4 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników.

Rozwiązanie układu równań rozpoczynamy od pomnożenia każdego z równań przez takie liczby, aby przy jednej z niewiadomych otrzymać przeciwne współczynniki.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \quad / \cdot 5 \\ 5x + 7y = 4 \quad / \cdot (-2) \end{cases}$$

Mnożymy obie strony pierwszego równania przez 5, a drugiego przez -2.

$$\begin{cases} 10x + 15y = 10 \\ -10x - 14y = -8 \end{cases}$$

Dodajemy równania stronami.

$$\begin{array}{r} 10x + 15y = 10 \\ -10x - 14y = -8 \\ \hline y = 2 \end{array}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

Otrzymujemy nowy układ równań, równoważny do danego.

$$\begin{cases} y = 2 \\ 2x + 3 \cdot 2 = 2 \end{cases}$$

Podstawiamy liczbę 2 w miejsce y w drugim równaniu.

$$\begin{cases} y = 2 \\ 2x = -4 \quad / : 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Zatem rozwiązaniem układu równań jest para liczb: $x = -2, y = 2$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ 2x + 3y = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + 7y = 7 \\ 3x + 6y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x + 2y = 13 \\ 4x - 7y = 2 \end{cases}$

Ćwiczenie 4

Podaj liczby, przez które można pomnożyć obie strony równań układu, aby móc skorzystać z metody przeciwnych współczynników. Nie rozwiązuj układu.

a) $\begin{cases} 3x - 7y = 2 \\ -5x + 4y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -\frac{1}{2}x + 17y = 4 \\ \frac{1}{3}x - 13y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{2}{5}x - 6y = 1 \\ 3x - 5y = 9 \end{cases}$

Przykład 4

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 5(x - y) + 5 = 2(2x + y) \\ 2(x - 1) = y + 1 \end{cases}$

Rozpoczynamy od doprowadzenia równań układu do najprostszej postaci.

$$\begin{cases} 5x - 5y + 5 = 4x + 2y \\ 2x - 2 = y + 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x - 7y = -5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

Redukujemy wyrazy podobne. Niewiadome zapisujemy po lewej stronie każdego równania.

Otrzymany układ równań możemy rozwiązać jedną z dwóch metod.

Metoda podstawiania

$$\begin{cases} x = -5 + 7y \\ 2(-5 + 7y) - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5 + 7y \\ -10 + 14y - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5 + 7y \\ 13y = 13 \quad / : 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5 + 7y \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5 + 7 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Metoda przeciwnych współczynników

$$\begin{cases} x - 7y = -5 \quad / \cdot (-2) \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + 14y = 10 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -2x + 14y = 10 \\ 2x - y = 3 \\ \hline 13y = 13 \quad / : 13 \\ y = 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ 2x - 1 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Rozwiązanie układu równań nie zależy od:

- wyboru metody rozwiązywania,
- kolejności równań w układzie – można ją zmienić na każdym etapie rozwiązywania.

W przypadku metody podstawiania rozwiązanie układu równań nie zależy od wyboru wyznaczonej niewiadomej i tego, z którego równania ją wyznaczamy.

W przypadku metody przeciwnych współczynników rozwiązanie układu równań nie zależy od wyboru niewiadomej, którą redukujemy.

Rozpatrywane poprzednio układy równań były układami oznaczonymi. Pokażemy, jak wygląda rozwiązywanie metodą przeciwnych współczynników układu sprzecznego oraz nieoznaczonego.

Przykład 5

$$\begin{array}{l} \text{Rozwiąż układ równań } \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ -x + \frac{2}{3}y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ -x + \frac{2}{3}y = 1 \end{cases} \quad \text{Mnożymy obie strony drugiego równania przez 3.} \\ \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ -3x + 2y = 3 \end{cases} \quad \text{Dodajemy równania stronami.} \\ \hline 0x + 0y = 7 \quad \text{Otrzymaliśmy równanie spreczne.} \end{array}$$

Równania $0x + 0y = 7$ (można je zapisać w postaci $0 = 7$) nie spełnia żadna para liczb x i y , zatem układ równań jest spreczny.

Przykład 6

$$\begin{array}{l} \text{Rozwiąż układ równań } \begin{cases} -5x + \frac{2}{3}y = -4 \\ 3\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} -5x + \frac{2}{3}y = -4 \\ 3\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y = 3 \end{cases} \quad \text{Mnożymy obie strony pierwszego równania przez 3, a drugiego przez 4.} \\ \begin{cases} -15x + 2y = -12 \\ 15x - 2y = 12 \end{cases} \quad \text{Dodajemy równania stronami.} \\ \hline 0x + 0y = 0 \quad \text{Otrzymaliśmy równanie tożsamościowe.} \end{array}$$

Równanie $0x + 0y = 0$ (można je zapisać w postaci $0 = 0$) spełnia dowolna para liczb x i y . Wyjściowy układ równań jest równoważny nieoznaczonemu układowi równań:

$$\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 15x - 2y = 12 \end{cases}$$

Układ ten jest spełniony przez nieskończenie wiele par liczb, dla których prawdziwe jest drugie równanie. Jego rozwiązanie można zapisać w postaci:

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{15}{2}x - 6 \end{cases}$$

Ćwiczenie 5

Sprawdź, czy układ równań jest nieoznaczony czy spreczny.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ -x + 0,4y = 1 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 1,5x - 2y = 6 \\ x - 1\frac{1}{3}y = 4 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} -\frac{2}{3}x + 3y = 4 \\ \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{4}y = 5 \end{cases} \end{array}$$

Zadania

1. Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 13 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} -2x + 3y = 5 \\ 6x - 8y = 3 \end{cases} & \text{e) } \begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 2(2x + 3y) = 30 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} 3x - 4y = 15 \\ 7x + 2y = 1 \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} 3x - 5y = 3,5 \\ -4x + 2y = -7 \end{cases} & \text{f) } \begin{cases} 2(x + y) = 2 - 2y \\ x + 2y = 6 \end{cases} \end{array}$$

2. Rozwiąż układ równań.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}x - 1 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{4}y + 3 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} 0,2(x + 2y) - 0,3(2x - y) = 3,5 \\ 2(x + y) - (x - 2) = 2y + 2 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} \frac{1}{2}(x - y) = \frac{1}{3}(x + y) \\ \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}(y + 3x) = -4 \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} 0,01(4x - y) = 0,01y + 0,02 \\ 0,6(y - x) = 0,1(y + 2x + 1) \end{cases} \end{array}$$

3. Rozwiąż układ równań.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} 5(y + 2) + x = 3x + y \\ \frac{y + 2,5}{5} = x + 1 \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} 2(x + 1) = 3(y - 1) + 13 \\ \frac{x - y}{3} = \frac{3x}{2} + \frac{3y}{4} + 1 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} 3x - y = 5 \\ (x + 1)(x + 1) - y = x(x + 1) \end{cases} & \text{e) } \begin{cases} \frac{x + y}{2} = \frac{5y - x}{3} - \frac{7y - 3x}{5} \\ 5(x + 1) = 3(y - 1) \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} \frac{x - 1}{2} + \frac{y + 1}{3} = 3 \\ \frac{x + 1}{3} - \frac{y - 2}{6} = 2 \end{cases} & \text{f) } \begin{cases} \frac{x + y}{2} - \frac{x - y}{3} = 1 \\ \frac{5}{2}y - 2 = 1 - \frac{1}{2}x \end{cases} \end{array}$$

Sprawdź się

4. Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} x - y = 4x - 3y + 5 \\ x + y = 3x + 5y - 2 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} 0,01x - 0,01(y - 1) = -0,06 \\ 0,03x - 0,02(y - 2) = -0,12 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} \frac{3}{2}x - y = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}x + 2 \\ 5x - (y - (x - 2y)) = 4 \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} 2x - 3y = 4 - \frac{1}{3}y \\ -x + 5y = 2x - 2y + 2 \end{cases} \end{array}$$

3.4. Układy równań – zadania tekstowe (1)

Przykład 1

Dwie ciężarówki przewożące piasek wykonały łącznie 13 kursów. Jedna z nich przewoziła za każdym razem 15 ton, a druga – 8 ton piasku. Łącznie przewiozły one 132 tony piasku. Ile kursów wykonała każda z ciężarówek? Ułóż odpowiedni układ równań i go rozwiąż.

Wprowadźmy oznaczenia niewiadomych:

x – liczba kursów wykonanych przez pierwszą ciężarówkę,

y – liczba kursów wykonanych przez drugą ciężarówkę.

Zapisujemy układ równań odpowiadający treści zadania.

$$\begin{cases} x + y = 13 & \text{Łączna liczba kursów dwóch ciężarówek.} \\ 15x + 8y = 132 & \text{Łączna masa przewiezonego piasku.} \end{cases}$$
$$\begin{cases} x + y = 13 \quad / \cdot (-8) \\ 15x + 8y = 132 \end{cases} \quad \text{Układ równań rozwiązujemy metodą przeciwnych współczynników.}$$
$$+ \begin{cases} -8x - 8y = -104 \\ 15x + 8y = 132 \end{cases}$$

$$7x = 28$$

Stąd otrzymujemy rozwiązanie układu równań $x = 4$ i $y = 9$.

Pierwsza ciężarówka wykonała 4 kursy, a druga 9.

Ćwiczenie 1

Dwie ciężarówki, jedna o ładowności 6 ton, a druga – 10 ton, przewiozły łącznie 460 ton piasku podczas 50 kursów (za każdym razem były maksymalnie obciążone). Ile kursów wykonała jedna ciężarówka, a ile druga?

Ćwiczenie 2

a) Śliwki na targowisku kosztowały 6,50 zł/kg, a wiśnie – 8,50 zł/kg. Gospodyni kupiła łącznie 4 kg tych owoców i zapłaciła za nie 31 zł. Ile kupiła śliwek, a ile wiśni?

b) Warzywa znajdujące się na stoisku kosztują: marchew – 4 zł/kg, buraki – 6 zł/kg, rzepa – 7,50 zł/kg. Kierownik stołówki kupił 8 kg tych warzyw, w tym 2 kg rzepy. Za wszystko zapłacił 49 zł. Ile kupił marchwi, a ile buraków?

Przykład 2

Piotr i Dorota mają razem 30 lat. Dorota jest o cztery lata młodsza od Piotra. Oblicz wiek Doroty i wiek Piotra.

Oznaczamy niewiadome:

d – wiek Doroty w latach, p – wiek Piotra w latach.

Zapisujemy warunki zadania w postaci układu równań:

$$\begin{cases} d + p = 30 \\ d = p - 4 \end{cases}$$

Po rozwiązaniu tego układu równań otrzymujemy (sprawdź):

$$\begin{cases} p = 17 \\ d = 13 \end{cases}$$

Dorota ma 13 lat, a Piotr – 17 lat.

Ćwiczenie 3

Tomek jest o cztery lata starszy od swojej siostry. Za dwa lata będą mieli w sumie 30 lat. Ile lat ma obecnie każde z nich?

Przykład 3

Sześć lat temu mama Basi była trzy razy starsza od swojej córki, a za cztery lata będzie od niej dwa razy starsza. Ile lat ma obecnie Basia, a ile jej mama?

Oznaczamy niewiadome:

b – wiek Basi w latach, m – wiek mamy Basi w latach.

Informacje z zadania wygodnie jest przedstawić w formie tabeli.

	Sześć lat temu	Obecnie	Za cztery lata
Wiek Basi	$b - 6$	b	$b + 4$
Wiek mamy Basi	$m - 6$	m	$m + 4$

Zapisujemy układ równań, w którym pierwsze równanie opisuje sytuację sprzed sześciu lat, a drugie – sytuację, która nastąpi za cztery lata.

$$\begin{cases} m - 6 = 3(b - 6) \\ m + 4 = 2(b + 4) \end{cases}$$

Po rozwiązaniu tego układu równań otrzymujemy (sprawdź):

$$\begin{cases} b = 16 \\ m = 36 \end{cases}$$

Basia ma obecnie 16 lat, a jej mama – 36 lat.

Ćwiczenie 4

- a) Pięć lat temu Daria miała dwa razy mniej lat niż Maria. Daria jest młodsza od Marii o 5 lat. Ile lat ma obecnie Daria, a ile Maria?
- b) Za trzy lata Olek będzie o połowę starszy od Alka, a dziewięć lat temu Olek miał o dwa lata więcej niż wynosił podwojony wiek Alka. Ile lat ma obecnie Olek, a ile Alek?

Zadania

1. Dziewięć lat temu ojciec był sześć razy starszy od syna. Za dziewięć lat obaj będą mieli razem 85 lat. Ile lat ma obecnie każdy z nich?
2. Dwa lata temu Ania, jej siostra bliźniaczka i ich starszy brat mieli razem 45 lat. Za trzy lata suma wieku bliźniaczek będzie o 12 większa od wieku ich brata. Ile lat ma obecnie każde z nich?
3. Moneta 2-złotowa waży 5,21 g, a 5-złotowa – 6,54 g. Skarbnik klasowy zebrał 30 monet o nominałach 2 zł oraz 5 zł. Wszystkie monety ważyły łącznie 169,6 g. Ile monet 2-złotowych, a ile 5-złotowych zebrał skarbnik?
4. Wydano 48 złotych w 20 monetach: było wśród nich 8 monet 2-złotowych oraz monety 1- i 5-złotowe. Ile było monet 1-, a ile 5-złotowych?
5. Kwotę 100 złotych wydano w monetach 1-, 2- i 5-złotowych – łącznie w 32 monetach, przy czym liczba monet 5-złotowych była o dwa większa od podwojonej liczby monet 1-złotowych. Ile monet każdego rodzaju wydano?
6. Jednego dolara rozmieniono na monety 5-, 10- i 25-centowe. Okazało się, że po rozmienieniu było łącznie 12 monet, w tym jedna moneta 25-centowa. Ile było monet 5-, a ile 10-centowych?

1 dolar = 100 centów



Moneta 5-centowa



Moneta 10-centowa



Moneta 25-centowa



7. W skarbonce znajdowały się 4 dolary w monetach 5-, 10- i 25-centowych. Wszystkich monet było 29, a 10-centówek było trzy razy więcej niż 5-centówek. Ile było monet każdego nominału?

8. Długość jednego boku prostokąta jest o 3 cm większa od podwojonej długości drugiego boku. Obwód tego prostokąta jest równy 36 cm. Oblicz jego pole.
9. Obwód prostokąta jest równy 56 cm. Gdyby zwiększyć długość jednego boku o 2 cm, a drugiego o 6 cm, to stosunek długości boków otrzymanego prostokąta wynosiłby 1:3. Oblicz długości boków wyjściowego prostokąta (rozpatrz dwa przypadki).
10. Obwód trapezu równoramiennego jest równy 40 cm. Jego ramię ma długość równą średniej arytmetycznej długości jego podstaw i jest o 6 cm dłuższe od jego krótszej podstawy. Oblicz długości boków tego trapezu.
11. W sobotę wystawę fotografii odwiedziły 72 osoby: 50 osób kupiło bilety normalne, pozostali kupili bilety ulgowe. Dochód ze sprzedaży biletów w tym dniu wyniósł 654 zł. W niedzielę wystawę obejrzało 112 osób, w tym 42 osoby, które kupiły bilety ulgowe. Tego dnia dochód ze sprzedaży biletów wyniósł 994 zł. Ile kosztował bilet normalny, a ile ulgowy?
12. Różnica między pewną liczbą dwucyfrową a liczbą otrzymaną w wyniku przestawienia cyfr tej liczby wynosi 36. Suma tych liczb wynosi 110. Jakie to liczby?
13. Dana jest trzycyfrowa liczba A o cyfrze dziesiątek równej 5. Po usunięciu tej cyfry otrzymujemy dwucyfrową liczbę B . Różnica liczb A i B wynosi 320, a suma liczb A i B jest równa 388. Jakie to liczby?

Sprawdź się

14. Na widowni teatru muzycznego znajduje się 280 miejsc. Na spektakl sprzedano $\frac{3}{4}$ wszystkich miejsc i uzyskano przychód w wysokości 7000 zł. Cena biletu ulgowego wynosi 30 zł, a normalnego 35 zł. Ile sprzedano biletów ulgowych, a ile normalnych?
15. Obwód trapezu równoramiennego jest równy 50 cm. Jego dłuższa podstawa ma długość 20 cm, a suma długości jego ramion jest o 2 cm mniejsza od długości krótszej podstawy. Oblicz długość ramienia tego trapezu.
16. Ramiona trapezu mają długości 25 cm i 65 cm, a jego obwód jest równy 205 cm. Suma długości dwóch dłuższych boków trapezu jest o 105 cm większa od sumy długości jego dwóch krótszych boków. Oblicz długości podstaw tego trapezu.

3.5. Układy równań – zadania tekstowe (2)

Układy równań są często wykorzystywane przy rozwiązywaniu zadań dotyczących wielkości podanych w procentach oraz zadań dotyczących prędkości.

Przykład 1

Ile kilogramów solanki o stężeniu 6% należy zmieszać z solanką o stężeniu 2%, aby otrzymać 100 kg solanki o stężeniu 5%?

Oznaczamy niewiadome:

x – masa w kg solanki 6-procentowej,
 y – masa w kg solanki 2-procentowej.

Zapisujemy równania opisujące warunki zawarte w treści zadania:

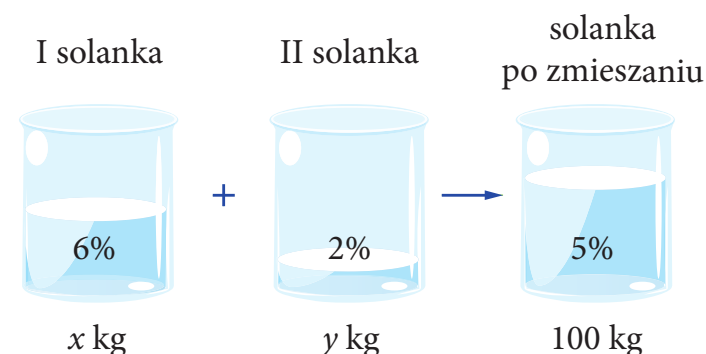
$$x + y = 100$$

$$0,06 \cdot x + 0,02 \cdot y = 0,05 \cdot 100$$

Zapisujemy układ równań i go rozwiązujemy:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 0,06x + 0,02y = 5 \end{cases} \cdot (-50) \\ + \begin{cases} x + y = 100 \\ -3x - y = -250 \end{cases} \\ \hline -2x = -150 \quad / : (-2) \\ x = 75$$

Stężenie procentowe roztworu określa, jaki procent masy całego roztworu stanowi masa rozpuszczonej substancji. Roztwór soli nazywany jest **solanką**.



Stąd otrzymujemy rozwiązanie układu: $x = 75$ i $y = 25$. Sprawdzamy otrzymane rozwiązanie: $25 + 75 = 100$ oraz $0,06 \cdot 75 + 0,02 \cdot 25 = 5$.

Aby otrzymać 100 kg solanki 5-procentowej, należy zmieszać 75 kg solanki 6-procentowej i 25 kg solanki 2-procentowej.

Ćwiczenie 1

- Ile kilogramów solanki o stężeniu 13% należy zmieszać z solanką o stężeniu 6%, aby otrzymać 35 kg solanki o stężeniu 9%?
- Do 5-procentowego roztworu soli dosypano taką jej ilość, że otrzymano 95 g roztworu o stężeniu 6%. Ile soli dosypano?

Łódź płynąca z prądem i pod prąd

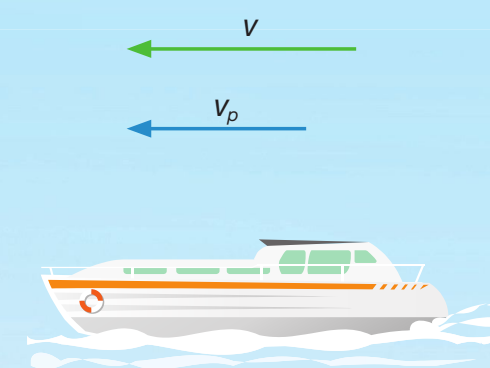
Gdy rozpatrujemy ruch łodzi na rzece, ważnym pojęciem jest prędkość własna łodzi.

Prędkość własna łodzi to prędkość, jaką osiąga łódź na stojącej wodzie.

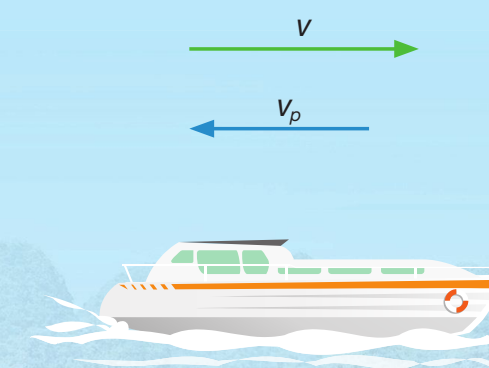
$$\text{prędkość} = \frac{\text{droga}}{\text{czas}}$$



Na prędkość, z jaką po rzece porusza się łódź, wpływa prędkość prądu rzeki. Oznaczmy przez v prędkość własną łodzi, a przez v_p prędkość prądu rzeki.



Prędkość łodzi poruszającej się z prądem rzeki jest równa $v + v_p$



Prędkość łodzi płynącej pod prąd jest równa $v - v_p$



Zadania

1. W pewnym liceum uczy się 500 osób. Jeżeli liczba dziewcząt zmniejszyłaby się o 40%, a liczba chłopców zwiększyłaby się o 60%, to liczba osób uczęszczających do tej szkoły by się nie zmieniła. Ile dziewcząt, a ilu chłopców uczy się w tym liceum?

2. Paweł i Bartek pracowali w wakacje przy zbiorze owoców. Paweł zarobił 110% tego co Bartek i jeszcze 280 zł, natomiast Bartek dostał 60% tego co Paweł i jeszcze 240 zł. Ile zarobił każdy z nich?

3. Kwotę 10 000 zł podzielono na dwie części. Jedną z nich wpłacono do banku A na lokatę roczną oprocentowaną 3% w skali roku, drugą do banku B na lokatę roczną oprocentowaną 4% w skali roku. Po roku z lokat otrzymano łączne 10 340 zł. Jaką kwotę wpłacono do banku A, a jaką do banku B? Przeanalizuj przedstawiony obok początek rozwiązania tego zadania i je dokończ.

4. Kwotę 20 000 zł zainwestowano w dwie różne lokaty roczne oferowane przez bank X i bank Y. Lokata w banku X oprocentowana była 3,5% w skali roku, a w banku Y – 4,5% w skali roku. Po roku wypłacono z lokat 20 840 zł. Jaką kwotę złożono na lokacie w banku X, a jaką w banku Y?
- Oznaczamy niewiadome:
 x – kwota w zł wpłacona do banku A,
 y – kwota w zł wpłacona do banku B.
$$\begin{cases} x + y = 10\,000 \\ 1,03x + 1,04y = 10\,340 \end{cases}$$

Przykład 2

Łódź motorowa płynąca z prądem rzeki przebyła trasę pomiędzy przystaniami odległymi o 36 kilometrów w 2 godziny, drogę powrotną natomiast w 3 godziny. Oblicz prędkość własną łodzi i prędkość prądu rzeki.

W tego typu zadaniach zakładamy, że wszystkie prędkości są stałe. Oznaczamy przez v – prędkość własną łodzi, a przez v_p – prędkość prądu rzeki. Informacje podane w zadaniu możemy przedstawić w tabeli.

	Odległość	Prędkość	Czas
Płynięcie z prądem	36 km	$v + v_p$	2 h
Płynięcie pod prąd	36 km	$v - v_p$	3 h

Prędkość łodzi płynącej z prądem jest równa $\frac{36\text{ km}}{2\text{ h}} = 18\text{ km/h}$, a prędkość łodzi płynącej pod prąd $\frac{36\text{ km}}{3\text{ h}} = 12\text{ km/h}$.

Otrzymujemy układ równań i rozwiązujemy go metodą przeciwnych współczynników:

$$\begin{cases} v + v_p = 18 \\ v - v_p = 12 \end{cases}$$

+

$$\begin{aligned} 2v &= 30 \\ v &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} v = 15 \\ v + v_p = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 15 \\ v_p = 3 \end{cases}$$

Sprawdzenie: $2(15 + 3) = 36$, $3(15 - 3) = 36$.
Prędkość własna łodzi była równa 15 km/h, a prędkość prądu rzeki 3 km/h.

Ćwiczenie 2

Płynąc w dół rzeki, łódź pokonała 24 kilometry w 2 godziny. Droga powrotna łodzi trwała trzy razy dłużej. Oblicz prędkość własną łodzi oraz prędkość prądu rzeki.

Ćwiczenie 3

Pierwszego dnia łódź motorowa płynąca 2 godziny z prądem rzeki, a następnie 3 godziny pod prąd przebyła trasę długości 58 km. Drugiego dnia, płynąc 3 godziny z prądem oraz 4 godziny pod prąd, przepłynęła trasę długości 82 km. Oblicz prędkość własną łodzi i prędkość prądu rzeki.

Czy wiesz, że...

Mosiądz to stop miedzi, w którym głównym dodatkiem jest cynk. Z mosiądzu wykonuje się na przykład dzwony okrętowe.

5. Zawartość miedzi w dwóch różnych stopach wynosi 40% i 80%. Ile każdego z tych stopów należy użyć, aby otrzymać 2 kg stopu zawierającego 50% miedzi?

6. Mamy do dyspozycji dwa stopy miedzi o różnej jej zawartości. Jeśli użyjemy 2 kg pierwszego i 6 kg drugiego, to otrzymamy stop o zawartości 55% miedzi. Jeśli natomiast użyjemy 3 kg pierwszego i 5 kg drugiego, to otrzymamy stop o zawartości 52,5% miedzi. Jaka jest zawartość miedzi w każdym z tych stopów?

134 3. Układy równań

3.5. Układy równań – zadania tekstowe (2) 135



Powtórzenie

Zestaw I

1. Rozwiąż układ równań.

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{x}{12} + \frac{y}{8} = 1 \\ \frac{x-2}{4} - \frac{y-6}{2} = 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{3x-1}{2} - \frac{4y-7}{3} = 2 \\ \frac{3y-6}{4} - \frac{5-x}{6} = -1\frac{5}{12} \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y}{2} = 0,95 \\ \frac{2x-2}{5} + \frac{3-2y}{2} = 3 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{2x-y}{5} - \frac{y+2x}{4} = 1,2 \\ \frac{2x+3y}{12} - \frac{4x-y}{8} = 0,25 \end{cases}$$

2. Czy rozwiązaniem układu równań jest para liczb o różnych znakach?

$$\text{a) } \begin{cases} 2x = 3(1-y) + 2y \\ 3(y-x) = y-1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} y = \frac{1}{3}(x-1) \\ 3(x+1) = -(y+1) \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{-2+x}{2} + 5 = x + \frac{y+8}{3} \\ \frac{2+3x}{4} = \frac{2y+6}{2} \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{x-2}{4} - \frac{y-3}{3} = \frac{x+y}{6} \\ \frac{x+y-1}{3} - x = \frac{y-1}{4} \end{cases}$$

3. Określ liczbę rozwiązań układu równań.

$$\text{a) } \begin{cases} 2(2y+1) = 6(4-x) \\ 3x+2y = 11 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} -2x+2y = y-2 \\ 2(y-3x) = 6-y \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 0,2y = \frac{6x+y}{5} + 1 \\ x-1 = \frac{y-5}{6} \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{1}{2}x - y = \frac{2-x}{4} \\ x - \frac{x+y}{2} = 1 - \frac{2x-3y}{2} \end{cases}$$

4. a) Suma cyfr pewnej liczby dwucyfrowej jest równa 13. Gdybyśmy zamienili miejscami cyfry tej liczby, wtedy otrzymalibyśmy liczbę o 45 większą od szukanej. Co to za liczba?

b) Dana jest dwucyfrowa liczba A oraz liczba B otrzymana z przestawienia cyfr liczby A . Liczba A jest o 7 większa od podwojonej liczby B , a ich suma jest równa 121. Wyznacz te liczby.

c) Jeśli do licznika pewnego ułamka dodamy 1, a od jego mianownika odejmiemy 1, to otrzymamy $\frac{1}{2}$. Jeśli natomiast od licznika odejmiemy 1, a do mianownika dodamy 1, to otrzymamy $\frac{1}{3}$. Co to za ułamek?

5. Na wycieczkę pojechało 23 uczniów. Na postoju dwie dziewczynki i jeden chłopiec zostali w autokarze. Wśród dzieci, które opuściły pojazd, było trzy razy mniej chłopców niż dziewczynek. Ile dziewczynek, a ilu chłopców pojechało na wycieczkę?

7. Roman przygotowuje się do zawodów rowerowych. Na sobotnim treningu przejechał 90 kilometrów w ciągu 5 godzin. Część trasy wiodła po drogach asfaltowych, część po gruntowych. Na drogach asfaltowych średnia prędkość jazdy wynosiła 20 km/h, a na drogach gruntowych 15 km/h. Ile czasu Roman jechał po drogach asfaltowych? Jaką odległość w tym czasie pokonał?

8. Z miast A i B wyruszają jednocześnie naprzeciw siebie ze stałymi prędkościami dwa pociągi. Jeden z nich jedzie z prędkością dwukrotnie większą niż drugi. Spotykają się po godzinie i 20 minutach. Gdyby wolniejszy pociąg jechał z prędkością o 10 km/h większą, spotkanie nastąpiłoby po godzinie i 12 minutach. Jaka jest odległość między miastami A i B ?



9. Pociąg pokonał 120 km w ciągu godziny i 45 minut. Pierwszy odcinek trasy przebył z prędkością 80 km/h, a drugi – ze względu na roboty torowe – z prędkością 40 km/h. Jaka była długość drugiego odcinka?

Sprawdź się

10. Po zmieszaniu roztworów soli 5- i 10-procentowego otrzymano 200 g roztworu 8-procentowego. Ile było roztworu 5-procentowego?

11. Zmieszano 60 g 10-procentowego roztworu soli z roztworami 8- i 5-procentowym. W rezultacie otrzymano 150 g roztworu o stężeniu 8%. Ile gramów roztworu 5-procentowego wykorzystano?

12. Do 7-procentowej solanki dolano 3 litry wody i dosypano pewną ilość soli. W rezultacie otrzymano 8,5 kg solanki o stężeniu 10%. Ile soli dosypano? Przyjmij, że 1 litr wody ma masę 1 kg.

13. Pan Tomek podzielił kwotę 17 000 zł na trzy części: 2000 zł odłożył do szuflady, a pozostałe dwie części ulokował na lokatach oprocentowanych odpowiednio 2% i 2,5% w skali roku. Po roku miał do dyspozycji 17 350 zł. Jaką kwotę ulokował na lokacie 2-procentowej?

14. Z kwoty 10 000 zł wydzielono x zł i złożono na lokacie oprocentowanej 2,5% w skali roku, pozostałe y zł złożono na lokacie o oprocentowaniu rocznym wynoszącym 2,75%. Po roku z obu lokat odebrano 10 260 zł. Oblicz x i y .

6. Na straganie można kupić banany i jabłka. Jedno jabłko kosztuje 1,20 zł, a jeden banan 1,80 zł. Krysia kupiła kilka owoców i zapłaciła 7,20 zł. Piotr kupił tyle bananów, ile Krysia jabłek, i tyle jabłek, ile Krysia bananów. Za zakupy zapłacił 7,80 zł. Ile jabłek i ile bananów kupiła Krysia?
7. W dwóch skrzynkach znajdowało się 60 jabłek. Po przełożeniu połowy jabłek z drugiej skrzynki do pierwszej w pierwszej skrzynce było cztery razy więcej jabłek, niż zostało w drugiej. Ile jabłek było w każdej skrzynce na początku?
8. W hurtowni wafle są pakowane w większe pudełka, a cukierki – w mniejsze. Pudełko z waflami waży 5,20 kg, a z cukierkami 3,20 kg. Do sklejenia większego pudełka zużywa się 1,60 m taśmy, a do mniejszego 1,20 m. Na zamówienie jednego ze sklepów przygotowano transport 20 pudełek z tymi słodyczami i zużyto do tego 30 m taśmy. Czy całą dostawę można przewieźć wózkiem, którego dozwolona ładowność jest równa 100 kg?
9. Student ma do skserowania 30 kartek, z których część jest zapisana jednostronnie, a pozostałe – dwustronnie. W punkcie usługowym kserowanie jednostronne kosztuje 20 gr, a dwustronne 30 gr. Student skserował swoje kartki tak, że otrzymał taką samą kopię jak oryginał (30 kartek) i zapłacił 7,40 zł. Ile kosztowałyby jego odbitki, gdyby każdą zapisaną stronę kserował na osobnej kartce?

Zestaw II

1. Rozwiąż układ równań.
- a) $\begin{cases} x - 2y = 28 - (3x - 2y) \\ 13(x - y) = 24(2x - y) - 149 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2(2x - y) - 12(y - 2x) = 98 \\ 2y + 0,1x = -0,1(x - 4y - 24) \end{cases}$
2. Podaj, ile rozwiązań ma układ równań dla $m = 1$, a ile – dla $m = -2$.
- a) $\begin{cases} 2x - my = 1 \\ mx - 2y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + my = 2 \\ mx + y = 4 - 2m \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - |m|y = m^2 \\ -x + 2y = -4 \end{cases}$
3. Dla jakich wartości parametrów m i k para liczb: $x = 3$, $y = 2$ jest rozwiązaniem układu równań?
- a) $\begin{cases} mx + ky = 5 \\ (k - 1)x - 2my = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (1 - m)x + 4ky = 10 \\ (m - 2k)x - (4k + m)y = -8 \end{cases}$

4. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}y = 0,25 \\ (x - 1)^2 = (2 - x)^2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - y - 6 = 0 \\ (3x - 1)(1 + 3x) + y = (1 - 3x)^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (y + 2)^2 = y^2 + x \\ (2x - 1)^2 = 4x^2 - y \end{cases}$ e) $\begin{cases} (x - y)(x + y) = x^2 - (y - 1)^2 \\ (x + y)(x + 2) - xy = x^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (3x - 1)^2 = 9x^2 + y \\ 2x + 4y^2 = (1 - 2y)^2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} (x - 8)^2 = (x + 8)(x + 8) + y \\ x(y - 1) = y(x - 2) \end{cases}$

5. a) Roztwór soli o stężeniu 5% zmieszano z roztworem soli o stężeniu 40% i otrzymano 1,4 kg roztworu soli o stężeniu 30%. Ile gramów każdego z tych roztworów użyto?
- b) Laborant potrzebuje 10 g roztworu azotanu potasu o stężeniu 9%. Ma do dyspozycji roztwory tego związku o stężeniach 6% i 10%. Ile gramów jednego roztworu i ile drugiego powinien zmieszać?
- c) Do 240 g roztworu soli kuchennej dolano roztwór tej soli o stężeniu dwukrotnie większym i otrzymano 400 g roztworu o stężeniu 7%. Oblicz stężenia roztworów, które zmieszano.
6. Jubiler dysponuje dwoma rodzajami stopu złota. W jednym na każde 37,5 g czystego złota przypada 62,5 g miedzi, drugi ma próbę 750. Ile gramów każdego z tych stopów należy stopić, aby otrzymać 100 g złota próby 585?

Uwaga. Próba złota – zawartość złota w stopie wyrażona w promilach.

7. Dwa samochody poruszające się ze średnimi prędkościami v_1 i v_2 wyruszyły jednocześnie naprzeciwko siebie z miejscowości oddalonych o 450 km. Samochody te minęły się po upływie 3 godzin. Gdyby wolniejszy samochód jechał z prędkością o połowę większą, to spotkanie nastąpiłoby po upływie $2\frac{1}{2}$ godziny. Oblicz prędkości, z jakimi poruszały się te samochody.
8. Na trasie między Opolem a Warszawą, o długości 320 km, kursują busy i autokary. Bus wyjechał z Opola o godzinie 15.00 i poruszał się ze średnią prędkością 60 km/h. Autokar wyruszył z Warszawy o godzinę później, a jego średnia prędkość wynosiła 70 km/h. O której godzinie i w jakiej odległości od Opola pojazdy się minęły?
9. Samochód przejechał pierwszą część trasy ze średnią prędkością 70 km/h. Drugą część trasy, dłuższą o 60 km, pokonał ze średnią prędkością 90 km/h. Jego średnia prędkość na całej trasie była równa 80 km/h. Oblicz długość całej trasy.



Rozwiązując zadania tekstowe, spotkamy się także z takimi, w których mamy trzy niewiadome. Jednak możemy jedną z nich opisać za pomocą pozostałych i otrzymać układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi.

Przykład 1

Dany jest trójkąt o kątach α , β , γ , przy czym suma miar kątów α i β jest równa 105° oraz spełniona jest równość $\alpha + 2\beta + 3\gamma = 400^\circ$. Wyznacz te kąty.

Zauważmy, że $\alpha = 105^\circ - \beta$.

Możemy więc napisać układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi:

$$\begin{cases} (105^\circ - \beta) + 2\beta + 3\gamma = 400^\circ \\ (105^\circ - \beta) + \beta + \gamma = 180^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta + 3\gamma = 295^\circ \\ \gamma = 75^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = 70^\circ \\ \gamma = 75^\circ \end{cases}$$

Pamiętaj, że po rozwiązaniu układu równań warto sprawdzić, czy otrzymane rozwiązanie spełnia warunki zadania.

Zatem $\alpha = 105^\circ - \beta = 35^\circ$.

Odpowiedź: $\alpha = 35^\circ$, $\beta = 70^\circ$, $\gamma = 75^\circ$

→ Zadanie 17, str. 144

Przykład 2

W skarbonce znajduje się 18 monet – są to monety 1-, 2- i 5-złotowe. Razem dają one kwotę 48 zł. Monet 5-złotowych jest o dwie mniej niż monet 1-złotowych. Oblicz, ile monet każdego nominału znajduje się w skarbonce.

Zauważmy, że w tym zadaniu również mamy trzy niewiadome:

x – liczba monet 1-złotowych,

y – liczba monet 2-złotowych,

z – liczba monet 5-złotowych.

Z treści zadania wynika, że $z = x - 2$.

Otrzymujemy zatem układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi:

$$\begin{cases} x + y + (x - 2) = 18 \\ x + 2y + 5(x - 2) = 48 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para liczb: $x = 9$ oraz $y = 2$ (sprawdź).

Zatem $z = x - 2 = 7$.

Odpowiedź: W skarbonce znajduje się 9 monet 1-złotowych, 2 monety 2-złotowe oraz 7 monet 5-złotowych.

→ Zadanie 19, str. 144



W zadaniach 1–9 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

Kuba jest o 5 lat starszy od Magdy. Wiek Magdy stanowi $\frac{2}{3}$ wieku Kuby. Który z poniższych układów równań opisuje tę sytuację?

Przyjęto oznaczenia: k – wiek Kuby, m – wiek Magdy.

A. $\begin{cases} k = m - 5 \\ m = \frac{2}{3}k \end{cases}$ B. $\begin{cases} k = m + 5 \\ m = \frac{3}{2}k \end{cases}$ C. $\begin{cases} k = m + 5 \\ m = \frac{2}{3}k \end{cases}$ D. $\begin{cases} k = m - 5 \\ m = \frac{3}{2}k \end{cases}$

Zadanie 2 (0–1)

W trójkącie równoramiennym miara kąta między ramionami jest o 18° mniejsza od miary kąta przy podstawie.

Przyjęto oznaczenia: α – miara kąta przy podstawie, β – miara kąta między ramionami, a następnie ułożono układ równań opisujący sytuację z zadania:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 180^\circ \\ \alpha = \beta + 18^\circ \end{cases}$$

Wskaż układ równań równoważny temu układowi.

A. $\begin{cases} 2\alpha + \beta = 180^\circ \\ \beta = \alpha + 18^\circ \end{cases}$ B. $\begin{cases} 2\alpha = 144^\circ \\ \alpha = \beta + 18^\circ \end{cases}$ C. $\begin{cases} 2\alpha = 108^\circ \\ 3\beta = 144^\circ \end{cases}$ D. $\begin{cases} 2\alpha = 132^\circ \\ 3\beta = 144^\circ \end{cases}$

Zadanie 3 (0–1)

Wskaż parę liczb, która nie spełnia układu równań $\begin{cases} -4x + 2y = -6 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

A. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -9 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -4 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases}$

Zadanie 4 (0–1)

Układ równań $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ -6x + 4y = m \end{cases}$ nie jest sprzeczny dla

A. $m = 12$ B. $m = 3$ C. $m = -3$ D. $m = -12$

Zadanie 5 (0–1)

Układ równań $\begin{cases} 2m^2x - 3y = 5 \\ 4x - 6y = -10m \end{cases}$ jest układem nieoznaczonym dla

A. $m = -\frac{1}{2}$ B. $m = -1$ C. $m = 1$ D. $m = \frac{1}{2}$



Zadanie 6 (0-1)

Wskaż równanie, które należy dopisać do równania $3x - 4y = 6$, aby otrzymać nieoznaczony układ równań.

- A. $3x - 4y = -6$ C. $\frac{3}{2}x - 2y = -3$
B. $-3x + 4y = 6$ D. $-\frac{3}{2}x + 2y = -3$

Zadanie 7 (0-1)

Wskaż rozwiązanie układu równań $\begin{cases} 5x - 2y = 27 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$

- A. $\begin{cases} x = -5 \\ y = -1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -5 \\ y = 1 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$

Zadanie 8 (0-1)

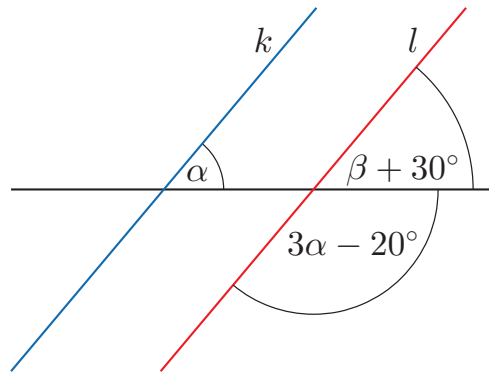
Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 2x + y = -4 \\ mx - y = m - 1 \end{cases}$ jest para liczb ujemnych dla

- A. $m = -\frac{5}{2}$ B. $m = -\frac{1}{2}$ C. $m = \frac{1}{3}$ D. $m = \frac{3}{2}$

Zadanie 9 (0-1)

Proste k i l na rysunku obok są równoległe. Wynika stąd, że

- A. $\begin{cases} \alpha = 60^\circ \\ \beta = 30^\circ \end{cases}$ C. $\begin{cases} \alpha = 45^\circ \\ \beta = 15^\circ \end{cases}$
B. $\begin{cases} \alpha = 50^\circ \\ \beta = 20^\circ \end{cases}$ D. $\begin{cases} \alpha = 55^\circ \\ \beta = 15^\circ \end{cases}$



Zadanie 10 (0-1)

Dana jest dwucyfrowa liczba M . Suma cyfry jedności i cyfry dziesiątek tej liczby jest równa 8. Różnica między liczbą powstałą przez przestawienie cyfr liczby M oraz liczbą M jest równa 54.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Różnica między cyfrą jedności a cyfrą dziesiątek liczby M jest równa 6.	P	F
Suma liczby M i liczby powstałej z przestawienia jej cyfr jest równa 88.	P	F



Zadanie 11 (0-1)

Adam jest o dwa lata starszy od Tomka. Trzy lata temu mieli w sumie 24 lata. Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Adam i Tomek mają w sumie 30 lat.	P	F
Za cztery lata Tomek skończy 18 lat.	P	F

Zadanie 12 (0-2)

Dane są dwa układy równań:

I. $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 2x - y = 12 \end{cases}$ II. $\begin{cases} -3x + y = 10 \\ x + 2y = -8 \end{cases}$

Każdemu z tych układów przyporządkuj równoważny mu układ równań. Wpisz obok numerów układów równań w tabeli poniżej właściwe odpowiedzi wybrane spośród A–F.

Numer zadania	Układ równań	Równoważny układ równań
12.1	I	?
12.2	II	?

- A. $\begin{cases} y = 10 - 3x \\ -x = 22 \end{cases}$ C. $\begin{cases} y = 10 - 3x \\ 5x = 22 \end{cases}$ E. $\begin{cases} y = -2 \\ 3x - y = -10 \end{cases}$
B. $\begin{cases} y = 10 + 3x \\ 5x - 10y = 12 \end{cases}$ D. $\begin{cases} y = 10 + 3x \\ -x - 10y = 12 \end{cases}$ F. $\begin{cases} y = 3x - 10 \\ x = -2y - 8 \end{cases}$

Zadanie 13 (0-1)

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Układ równań $\begin{cases} \sqrt{2}x - y = \sqrt{2} \\ 2x - \sqrt{2}y = 2 \end{cases}$ jest

A.	oznaczony,	ponieważ jest spełniony przez	1.	wszystkie pary liczb rzeczywistych.
B.	nieoznaczony,		2.	nieskończenie wiele par liczb rzeczywistych.
			3.	tylko jedną parę liczb rzeczywistych.

**Zadanie 14 (0-2)**

Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Jednym z rozwiązań układu równań $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}y = 1 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$ jest para liczb

A. $x = \frac{7}{2}, y = -\frac{5}{2}$

E. $x = -\frac{2}{9}, y = 6\frac{1}{3}$

B. $x = \frac{5}{2}, y = -\frac{3}{2}$

F. $x = -\frac{4}{9}, y = 6\frac{2}{3}$

C. $x = \frac{3}{2}, y = -\frac{1}{2}$

G. $x = -\frac{7}{9}, y = 7\frac{1}{3}$

D. $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$

H. $x = -\frac{8}{9}, y = 8\frac{2}{3}$

Zadanie 15 (0-2)

Para liczb $x = 2, y = 3$ jest rozwiązaniem układu równań utworzonego przez dwa spośród poniższych równań. Wskaż te równania.

I. $x - 2y = -4$ II. $2x + 3y = 15$ III. $2x - 3y = -5$ IV. $3x - y = 2$

Zadanie 16 (0-2)

Bankomat wypłacił kwotę 940 zł w banknotach o nominałach 10 zł, 20 zł i 50 zł. Banknotów 10-złotowych było tyle samo co banknotów 50-złotowych, a banknotów 20-złotowych było o 7 więcej niż 50-złotowych. Ile było banknotów każdego rodzaju?

Zadanie 17 (0-2) → Przykład 1, str. 140

Różnica miar kątów α i β pewnego trójkąta wynosi 30° . Kąt γ tego trójkąta ma miarę o 20° większą od sumy miar kątów α i β . Wyznacz kąty tego trójkąta.

Zadanie 18 (0-3)

Cztery lata temu Kasia i jej dwaj bracia bliźniacy mieli razem 22 lata. Za dwa lata Kasia będzie miała tyle lat, ile obaj jej bracia razem. Oblicz, ile lat będzie mieć Kasia, gdy jej bracia będą mieli po 18 lat.

Zadanie 19 (0-3) → Przykład 2, str. 140

Tomek ma w skarbonce trzydzieści jeden monet, w tym: trzy monety 5-złotowe, monety 1- i 2-złotowe oraz monety 10- i 50-groszowe. Liczba monet 10-groszowych jest taka sama jak liczba monet 50-groszowych, a monet 1-złotowych jest dwukrotnie więcej niż monet 2-złotowych. Łączna kwota w skarbonce wynosi 42 zł. Oblicz, ile jest monet każdego rodzaju.

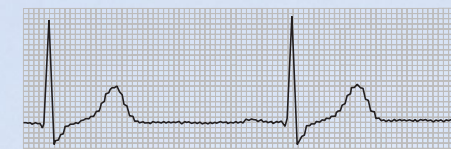
Zadanie 20 (0-3)

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 4(x+y)^2 - 4y(2x+y) = (2x)^2 + x + y \\ (x-1)(y+1) = (x+2)(y-2) \end{cases}$

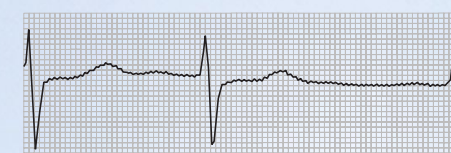
4 Funkcje

U osób wyczynowo uprawiających sport regularnie przeprowadza się specjalistyczne badania lekarskie.

Elektrokardiografię wykonuje się za pomocą przyrządu, który odbiera i wzmacnia impulsy elektryczne. Jako wynik badania otrzymujemy elektrokardiogram – wykres funkcji napięcia elektrycznego, wytworzonego na skutek skurczu mięśnia sercowego, w zależności od czasu.



Prawidłowa czynność serca



Zaburzenie rytmu serca



4.1. Pojęcie funkcji

Przykład 1

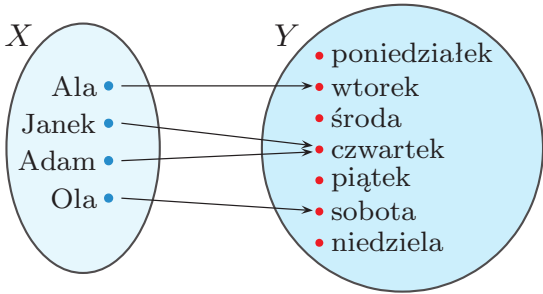
W szkolnym turnieju piłki nożnej wzięło udział pięć drużyn: A, B, C, D i E . Grano systemem każdy z każdym. Za zwycięstwo przyznawano 3 pkt, za remis 1 pkt, a za przegraną 0 pkt. Najmniejsza możliwa do zdobycia liczba punktów to 0, a największa to 12. Każdej drużynie przyporządkowano sumę zdobytych punktów – wyniki turnieju przedstawiono w tabeli.

Drużyna	A	B	C	D	E
Zdobyte punkty	3	7	8	1	8



Przykład 2

Na przedstawionym obok grafie każdej z czterech osób przyporządkowano dzień tygodnia, w którym dana osoba się urodziła. Zbiór osób oznaczono literą X , a zbiór dni tygodnia – literą Y .

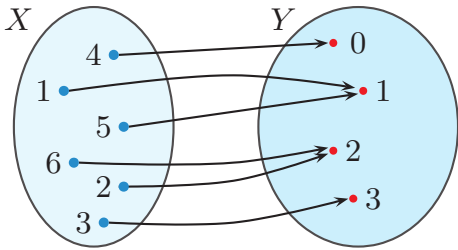


Omówione powyżej przyporządkowania są przykładami **funkcji**. W każdym z nich są wskazane dwa zbiory, często oznaczane przez X i Y , oraz określony sposób przyporządkowania elementom zbioru X elementów zbioru Y – można to zrobić np. za pomocą tabeli, grafu lub opisu słownego.

Przykład 3

Każdej liczbie ze zbioru $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ przyporządkowano jej resztę z dzielenia przez 4. Zbiór możliwych reszt oznaczono literą Y . Przyporządkowanie to przedstawiono za pomocą tabeli i grafu.

Liczba	1	2	3	4	5	6
Reszta	1	2	3	0	1	2



Ćwiczenie 1

Każdej liczbie ze zbioru $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ przyporządkowano liczbę ze zbioru $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ będącą jej resztą z dzielenia przez 5. Przedstaw to przyporządkowanie za pomocą tabeli i grafu.

Definicja

Funkcją ze zbioru X w zbiór Y nazywamy przyporządkowanie, w którym każdemu elementowi $x \in X$ odpowiada dokładnie jeden element $y \in Y$.

Zbiór X nazywamy **dziedzina** funkcji, a jego elementy **argumentami**.

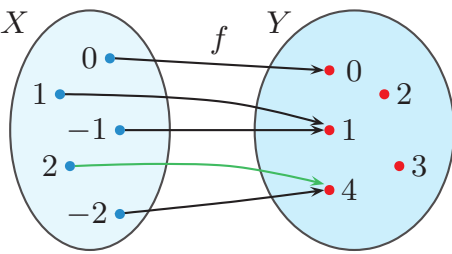
Zbiór Y nazywamy **przeciwdziedzina** funkcji. Jeśli element zbioru Y jest przyporządkowany jakiemuś elementowi zbioru X , to nazywamy go **wartością funkcji**.

Funkcje zwykle oznaczamy małymi literami, na przykład f, g, h .

Mówiąc o funkcji f ze zbioru X w zbiór Y , używamy zapisu $f: X \rightarrow Y$, a wartość, jaką funkcja f przyjmuje dla argumentu x , oznaczamy przez $f(x)$.

Przykład 4

Dane są zbiory $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ i $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Funkcję f ze zbioru X w zbiór Y , która każdej liczbie przyporządkowuje jej kwadrat, określono za pomocą grafu i tabeli.



Argument x	-2	-1	0	1	2
Wartość funkcji $f(x)$	4	1	0	1	4

Zwróć uwagę na to, że liczby 2 i 3 należą do przeciwdziedziny funkcji f , ale nie są wartościami tej funkcji.

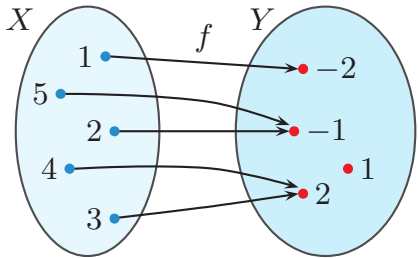
Funkcja f dla argumentu $x = 2$ przyjmuje wartość $y = 4$, co zapisujemy „ $f(2) = 4$ ” i czytamy: „ f od 2 jest równe 4”.

Wartość $y = 4$ funkcja f przyjmuje również dla argumentu $x = -2$, zatem $f(-2) = 4$.

Ćwiczenie 2

Dane są zbiory $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $Y = \{-2, -1, 1, 2\}$ oraz funkcja $f: X \rightarrow Y$ przedstawiona za pomocą grafu.

- a) Podaj wartości funkcji f dla argumentów parzystych.
- b) Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość 2, a dla jakich – wartość 1?
- c) Przedstaw funkcję f za pomocą tabeli.



Ćwiczenie 3

Dane są zbiory $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ i $Y = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$. Funkcja $f: X \rightarrow Y$ przyporządkowuje każdemu argumentowi połowę jego kwadratu. Przedstaw tę funkcję za pomocą grafu i tabeli. Które elementy zbioru Y nie są wartościami funkcji f ? Które wartości są przyjmowane dla więcej niż jednego argumentu?

Ćwiczenie 4

Funkcję $f: \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \rightarrow \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ przedstawiono za pomocą tabeli.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	1	1	-2	0	2	1	3	3	3	4

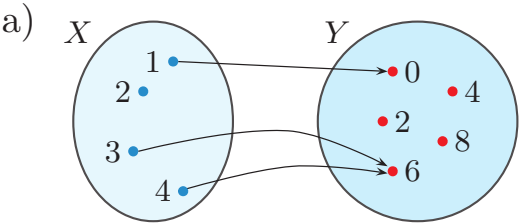
Dla których argumentów zachodzi równość:

- a) $f(x) = 0$, b) $f(x) = 1$, c) $f(x) = -2$, d) $f(x) = -1$?

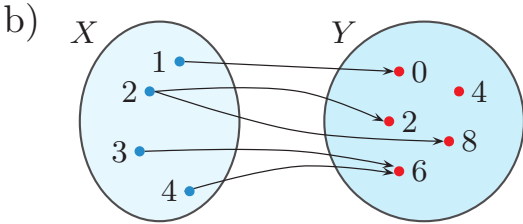
Zauważmy, że zgodnie z definicją przyporządkowanie jest funkcją ze zbioru X w zbiór Y , jeżeli **każdemu** elementowi zbioru X przyporządkowany jest **dokładnie jeden** element zbioru Y .

D Przykład 5

Uzasadnij, że na poniższym grafie nie przedstawiono funkcji ze zbioru X w zbiór Y .



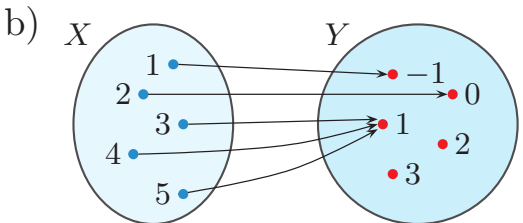
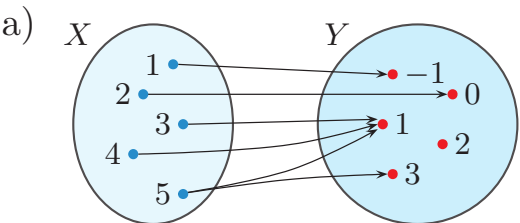
Liczbę 2 należącej do zbioru X nie przyporządkowano żadnego elementu zbioru Y . Zatem graf nie przedstawia funkcji ze zbioru X w zbiór Y .



Liczbę 2 należącej do zbioru X przyporządkowano dwa elementy zbioru Y . Zatem graf nie przedstawia funkcji ze zbioru X w zbiór Y .

Ćwiczenie 5

Czy na poniższym grafie przedstawiono funkcję ze zbioru X w zbiór Y ? Jeśli tak, to podaj argument, dla którego funkcja ta przyjmuje wartość 0.



Definicja

Miejszem zerowym funkcji f nazywamy taki argument x , dla którego:

$$f(x) = 0$$

Przykład 6

Funkcja $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$ przedstawiona za pomocą tabeli ma dwa miejsca zerowe: -1 i 2 .

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1	0	4	3	0

Ćwiczenie 6

Funkcja f każdej liczbie ze zbioru $X = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ przyporządkowuje:

- a) liczbę o 2 mniejszą, c) kwadrat tej liczby pomniejszony o 1,
b) liczbę o 3 większą, d) sześcian tej liczby pomniejszony o 8.

Przedstaw za pomocą tabeli funkcję f i podaj jej miejsca zerowe.

Zadania

1. Funkcję $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ przedstawiono za pomocą tabeli. Przedstaw tę funkcję za pomocą grafu i podaj jej miejsca zerowe.

a)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	3	2	0	2	3

b)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	0	1	2	3

2. Funkcja $f: \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ została podana w postaci tabeli. Przedstaw ją za pomocą grafu oraz opisu słownego. Dla ilu argumentów przyjmuje ona wartości nieparzyste?

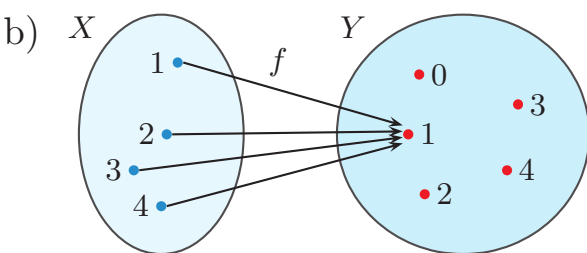
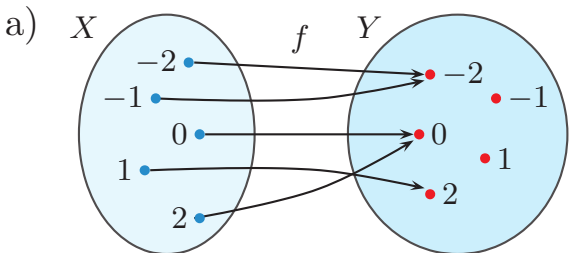
a)

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	2	3	4	5

b)

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2	1	0	1	2	3

3. Funkcję $f: X \rightarrow Y$ przedstawiono w postaci grafu. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli i podaj jej miejsca zerowe.



4. Dane są zbiory $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ oraz $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Funkcja $f: X \rightarrow Y$ każdemu argumentowi przyporządkowuje jego kwadrat.

- a) Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli i grafu.
b) Które elementy zbioru Y nie są wartościami funkcji f ? Które wartości są przyjmowane dla więcej niż jednego argumentu?

5. Funkcja f została podana w postaci tabeli. Określ jej dziedzinę, a następnie przedstaw tę funkcję za pomocą grafu oraz opisu słownego. Dla ilu argumentów przyjmuje ona wartości dodatnie?

a)

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-4	-3	-2	-1	0	1

b)

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	3	2	1	0	-1	-2

6. Funkcja f każdej liczbie ze zbioru $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ przyporządkowuje jej kwadrat pomniejszony o 4. Dla których argumentów funkcja ta przyjmuje wartości ujemne? Czy ma ona miejsca zerowe?

- D** 7. Rozważmy przyporządkowanie, w którym danej liczbie odpowiada jej pierwiastek kwadratowy. Uzasadnij, że to przyporządkowanie nie jest funkcją ze zbioru X w zbiór Y dla:

- a) $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $Y = \mathbb{Q}$, b) $X = \{-1, 0, 1, 2\}$, $Y = \mathbb{R}$.

8. Funkcja f każdej dwucyfrowej liczby naturalnej przyporządkowuje jej resztę z dzielenia przez n . Ile miejsc zerowych ma funkcja f ?

- a) $n = 2$ b) $n = 4$ c) $n = 5$ d) $n = 10$

Sprawdź się

9. Funkcję $f: \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ przedstawiono za pomocą tabeli. Przedstaw tę funkcję za pomocą grafu. Dla ilu argumentów zachodzi równość $f(x) = x$? Czy funkcja f ma miejsca zerowe? Jeżeli tak, podaj je.

a)

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-1	2	-1	2	0	2

b)

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-1	1	1	-2	2	1

10. Funkcja f każdej liczbie ze zbioru $X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ przyporządkowuje liczbę przeciwną do jej kwadratu. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli. Dla ilu argumentów przyjmuje ona wartość większą od -2 ?

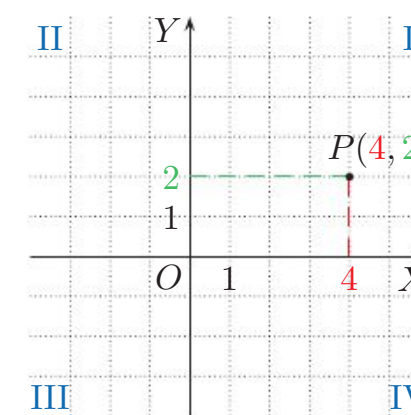
11. Funkcja f każdej dwucyfrowej liczby naturalnej przyporządkowuje sumę jej cyfr, np. $f(24) = 6$. Podaj wszystkie wartości, które może przyjmować funkcja f . Dla jakich argumentów przyjmuje ona wartość 3, a dla jakich 7?

Przypomnij sobie

Układ współrzędnych

Prostokątny układ współrzędnych (lub krótko: układ współrzędnych) to układ dwóch prostopadłych osi liczbowych o wspólnym początku. Oś pozioma nazywana jest osią OX lub **osią odciętych**, a oś pionowa to oś OY lub inaczej **oś rzędnych**.

Każdy punkt płaszczyzny jest w układzie współrzędnych jednoznacznie określony przez parę liczb zwanych **współrzędnymi**. Na przykład punktowi P na rysunku obok odpowiadają współrzędne $(4, 2)$.

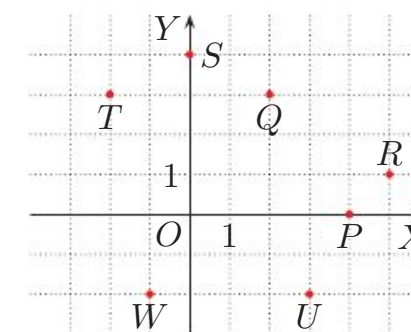


Układ współrzędnych dzieli płaszczyznę na **ćwiartki**, które oznaczamy cyframi rzymskimi. Punkt P należy do I ćwiartki układu. Kolejne numerujemy przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Punkty leżące na osiach układu nie należą do żadnej ćwiartki.

Prostokątny układ współrzędnych nazywany jest również **kartezjańskim układem współrzędnych** na cześć francuskiego matematyka, fizyka i filozofa René Descartes'a [czyt. rene dekarta] (1596–1650), zwanego w Polsce Kartezjuszem.

1. Odczytaj współrzędne punktów P, Q, R, S, T, U, W (rysunek obok).



2. Podaj, w której ćwiartce układu współrzędnych położony jest punkt:

- a) $A(-3, 6)$, c) $C(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$,
b) $B(4, -11)$, d) $D(-50, -60)$.

3. Naskicuj układ współrzędnych, a następnie zaznacz w nim punkty:

$$A(0, 5), B(-2, 4), C(-1, -4), D(6, 1\frac{1}{2}), E(-2, 0), F(3, -3)$$

4. Naskicuj prostokąt $ABCD$. Ile punktów kratowych leży wewnątrz tego prostokąta?

- a) $A(1, -1), B(4, -1), C(4, 3), D(1, 3)$
b) $A(-4, -2), B(5, -2), C(5, 4), D(-4, 4)$

Punktami kratowymi nazywamy punkty, których obie współrzędne są liczbami całkowitymi.

5. Dane są trójkąt T_1 o wierzchołkach $A(-4, -2), B(2, -2)$ i $C(-4, 4)$ oraz trójkąt T_2 o wierzchołkach $D(0, 2), E(8, 2)$ i $F(4, 6)$. Do wnętrza którego z tych trójkątów należy więcej punktów kratowych i o ile?

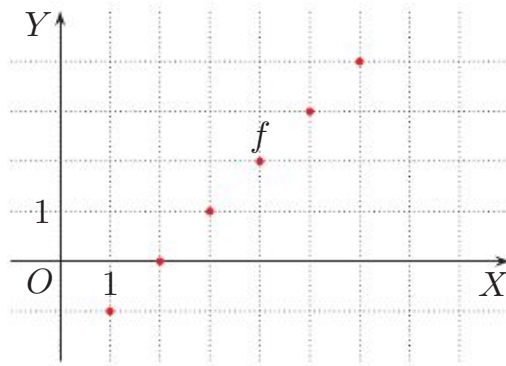
4.2. Szkicowanie wykresu funkcji (1)

Funkcję, której argumenty i wartości są liczbami, nazywamy **funkcją liczbową**. W dalszym ciągu rozdziału będziemy rozpatrywać tylko takie funkcje. Jednym ze sposobów przedstawienia funkcji liczbowej jest wykres.

Przykład 1

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Funkcja f przyporządkowuje każdemu argumentowi liczbę o 2 mniejszą. Poniżej tę funkcję przedstawiono za pomocą tabeli oraz wykresu.

x	1	2	3	4	5	6
$y = f(x)$	-1	0	1	2	3	4



Do wykresu funkcji f należą punkty o współrzędnych (x, y) , gdzie x jest argumentem, a y – wartością funkcji. Są to punkty: $(1, -1)$, $(2, 0)$, $(3, 1)$, $(4, 2)$, $(5, 3)$ i $(6, 4)$.

Definicja

Wykresem funkcji $f: X \rightarrow Y$ w układzie współrzędnych nazywamy zbiór wszystkich takich punktów (x, y) , że $x \in X$ oraz $y = f(x)$.

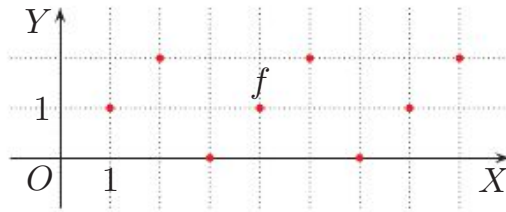
Ćwiczenie 1

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Funkcja f przyporządkowuje każdemu argumentowi liczbę o 2 większą. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli oraz wykresu.

Przykład 2

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Funkcja f przyporządkowuje każdemu argumentowi jego resztę z dzielenia przez 3. Poniżej tę funkcję przedstawiono za pomocą tabeli oraz wykresu.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	1	2	0	1	2	0	1	2



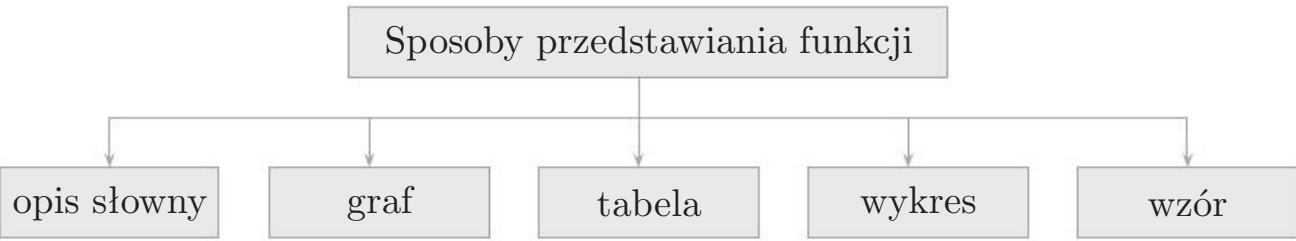
Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji, która każdej liczbie ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ przyporządkowuje jej resztę z dzielenia przez: a) 2, b) 4.

Często jest możliwe określenie funkcji za pomocą wzoru. Na przykład:

Opis słowny	Dziedzina	Wzór
Funkcja f przyporządkowuje każdemu argumentowi x liczbę o 3 większą.	$\mathbb{R}$	$f(x) = x + 3$
Funkcja f przyporządkowuje każdemu argumentowi x jego połowę powiększoną o 1.	$(-\infty; 2]$	$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$
Funkcja f przyporządkowuje każdemu argumentowi x jego kwadrat.	$[1; \infty)$	$f(x) = x^2$

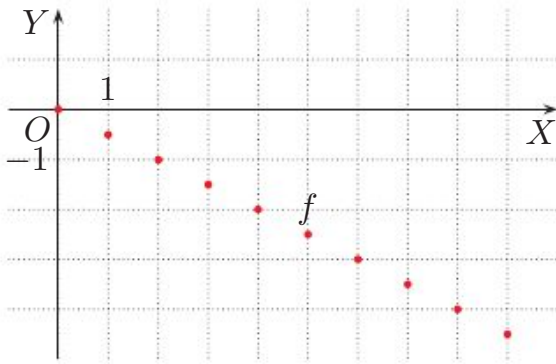
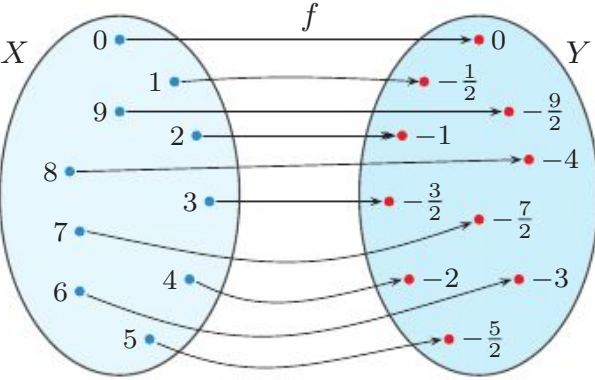
Uwaga. Wzór funkcji $f(x) = x + 3$ możemy zapisać też w postaci $y = x + 3$.



Przykład 3

Funkcja f każdej jednocyfrowej liczbie naturalnej przyporządkowuje liczbę przeciwną do jej połowy. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli, grafu i wykresu. Podaj jej wzór.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-2	$-\frac{5}{2}$	-3	$-\frac{7}{2}$	-4	$-\frac{9}{2}$



Funkcję f można określić wzorem $f(x) = -\frac{1}{2}x$, gdzie dziedziną jest zbiór $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres oraz podaj wzór funkcji f , która każdej liczbie należącej do zbioru $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ przyporządkowuje:

- a) liczbę o 3 mniejszą,
- b) połowę kwadratu tej liczby.

Przed naszkicowaniem wykresu funkcji należy zwrócić uwagę na jej dziedzinę.

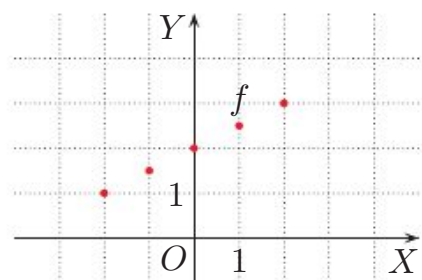
Przykład 4

Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy trzech różnych funkcji określonych tym samym wzorem, ale których dziedzinami są kolejno:

I. zbiór $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

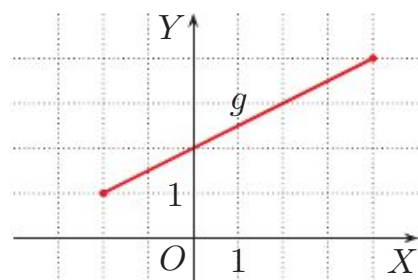
II. przedział $[-2; 4]$

III. przedział $(-2; 4)$



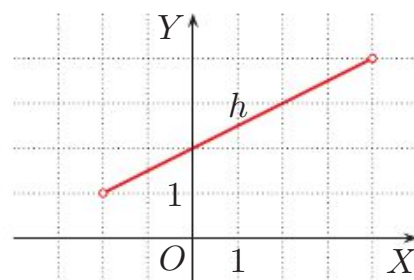
$$f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$$



$$g: [-2; 4] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x + 2$$



$$h: (-2; 4) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h(x) = \frac{1}{2}x + 2$$

- Wykresem funkcji f (rysunek I) jest pięć punktów.
- Wykresem funkcji g (rysunek II) jest odcinek łączący punkty $(-2, 1)$ i $(4, 4)$ – jego końce zaznaczono pełnymi kółkami.
- Na rysunku III puste kółka w punktach $(-2, 1)$ i $(4, 4)$ oznaczają, że punkty te nie należą do wykresu funkcji h (ponieważ liczby -2 i 4 nie należą do dziedziny tej funkcji).

Jeśli dziedziną funkcji $f(x) = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, jest przedział domknięty $[x_1; x_2]$, to wykresem tej funkcji jest odcinek. Aby go naszkicować, wystarczy obliczyć wartości $f(x_1)$ i $f(x_2)$. Jeśli dziedziną funkcji f jest przedział otwarty, to jej wykresem jest odcinek bez swoich końców.

Przykład 5

Naszkicuj wykres funkcji $f: [-2; 6) \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$.

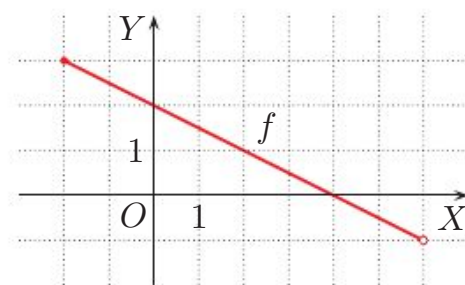
Obliczamy wartość funkcji dla $x = -2$:

$$f(-2) = -\frac{1}{2} \cdot (-2) + 2 = 3$$

Obliczamy wartość wyrażenia $-\frac{1}{2}x + 2$ dla $x = 6$:

$$-\frac{1}{2} \cdot 6 + 2 = -1$$

Wykresem funkcji f jest odcinek łączący punkty $(-2, 3)$ i $(6, -1)$ bez końca w punkcie $(6, -1)$.



Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

a) $D = [-2; 3]$, $f(x) = x + 1$

c) $D = (0; 5)$, $f(x) = x - 1$

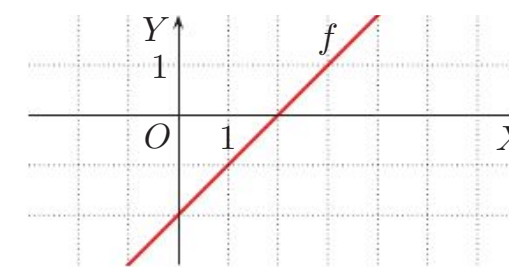
b) $D = [-2; 6)$, $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$

d) $D = (-4; 2]$, $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

Dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbb{R}$ wykresem funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x) = ax + b$ jest prosta. Takie funkcje będą szczegółowo omawiane w następnym rozdziale.

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = x - 2$.

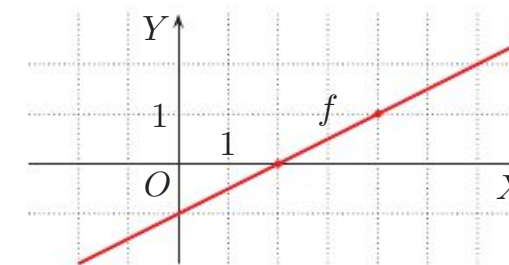
Aby naszkicować wykres tej funkcji, wystarczy obliczyć jej wartości dla dwóch dowolnych argumentów (dlaczego?), zaznaczyć odpowiednie punkty i poprowadzić przez nie prostą.



Przykład 6

Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$.

Obliczamy wartości funkcji f dla dwóch dowolnych argumentów, np. dla $x = 2$ i $x = 4$: $f(2) = 0$, $f(4) = 1$. Do wykresu funkcji f należą punkty $(2, 0)$ oraz $(4, 1)$. Szkicujemy prostą przechodzącą przez te punkty.



Ćwiczenie 5

Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem:

a) $f(x) = 2x$, b) $f(x) = -x$, c) $f(x) = x - 1$, d) $f(x) = -2x + 2$.

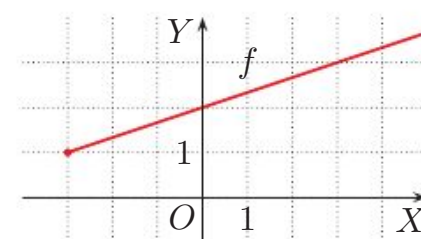
Przykład 7

Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy funkcji określonych tym samym wzorem, ale których dziedzinami są kolejno:

I. przedział $[-3; \infty)$

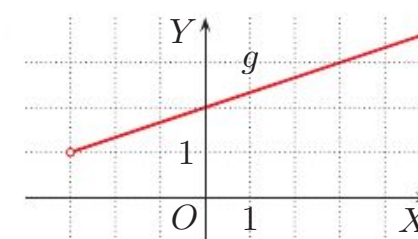
II. przedział $(-3; \infty)$

III. przedział $(-\infty; 3]$



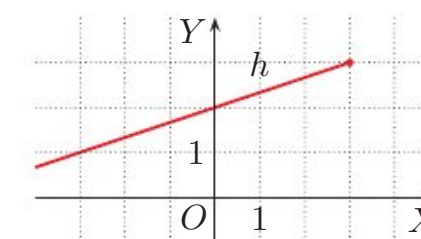
$$f: [-3; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x + 2$$



$$g: (-3; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{1}{3}x + 2$$



$$h: (-\infty; 3] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h(x) = \frac{1}{3}x + 2$$

Wykresami funkcji f i h są półproste domknięte (z początkiem). Wykresem funkcji g jest półprosta otwarta (bez początku).

Ćwiczenie 6

Naszkicuj wykres funkcji $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x) = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{2}$.

a) $D = (-\infty; 2)$ b) $D = (-\infty; 2]$ c) $D = (2; \infty)$ d) $D = [2; \infty)$

Zadania

- Naszkicuj wykres funkcji $f: \{-1, 0, 1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$, która każdej liczbie z dziedziny przyporządkowuje:
 - liczbę o 1 mniejszą,
 - liczbę przeciwną,
 - jej wartość bezwzględną,
 - jej kwadrat.
- Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli i naszkicuj jej wykres.
 - $f(x) = x + 3$
 - $f(x) = \frac{1}{2}x$
 - $f(x) = |\frac{1}{2}x|$
 - $f(x) = -|x|$
- Funkcja f podana została za pomocą tabeli. Naszkicuj wykres tej funkcji i spróbuj odgadnąć wzór, którym mogłaby być określona.
 - | | | | | | | |
|--------|----|----|----|----|----|---|
| x | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $f(x)$ | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 |
 - | | | | | | | |
|--------|----|----|---|---|---|---|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $f(x)$ | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
 - | | | | | | | |
|--------|----------------|---|---------------|---|---------------|---|
| x | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | 2 |
| $f(x)$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
 - | | | | | | | |
|--------|----------------|----|---------------|---|---------------|---|
| x | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | 2 |
| $f(x)$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
- Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = x + 1$, której dziedziną jest przedział:
 - $[0; 4]$,
 - $[-2; 3]$,
 - $[1; \infty)$,
 - $(-\infty; 2]$.

Sprawdź się

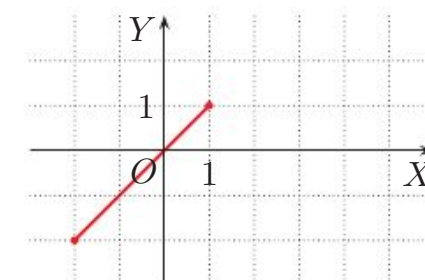
- Funkcję $f: \{-1, 0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ przedstawiono za pomocą tabeli. Przedstaw tę funkcję za pomocą grafu i wykresu.
 - | | | | | | |
|--------|----|---|----|---|---|
| x | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $f(x)$ | 2 | 1 | -1 | 2 | 1 |
 - | | | | | | |
|--------|----|---|----|----|---|
| x | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $f(x)$ | -2 | 3 | -1 | -2 | 0 |
- Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli oraz wykresu.
 - $f(x) = 2x$
 - $f(x) = x - 2$
 - $f(x) = x + 3$
- Naszkicuj wykres funkcji $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.
 - $D = [-3; 3]$, $f(x) = x - 2$
 - $D = (-1; 4)$, $f(x) = 2x - 3$
 - $D = [-2; \infty)$, $f(x) = x + 3$
 - $D = (0; \infty)$, $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$

4.3. Szkicowanie wykresu funkcji (2)

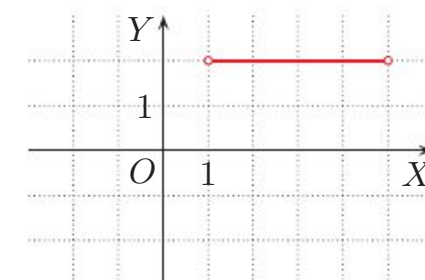
Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in [-2; 1] \\ 2 & \text{dla } x \in (1; 5) \end{cases}$

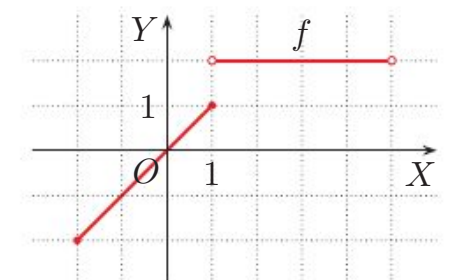
Zauważ, że dziedziną funkcji f jest przedział $[-2; 5]$.



Fragment wykresu funkcji f dla $x \in [-2; 1]$



Fragment wykresu funkcji f dla $x \in (1; 5)$



Wykres funkcji f

Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji f .

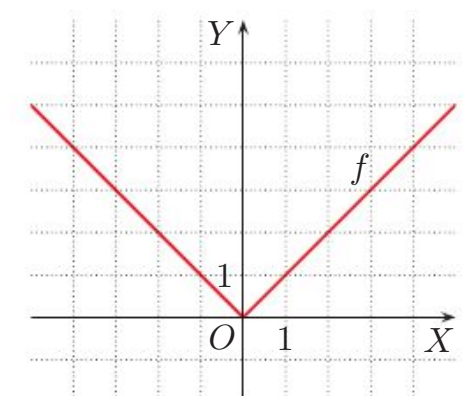
- $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \in [-2; 1] \\ 2 & \text{dla } x \in (1; 4) \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in [-4; -2] \\ x & \text{dla } x \in (-2; 3] \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-3; -1) \\ -x & \text{dla } x \in [-1; 4] \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ 3 & \text{dla } x \in [1; \infty) \end{cases}$

Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danej za pomocą wzoru $f(x) = |x|$.

W tabeli podano wartości funkcji f dla **wybranych** argumentów. Tabelę taką nazywamy **tabelą wartości funkcji**.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	3	2	1	0	1	2	3



Wzór tej funkcji można zapisać w postaci: $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ x & \text{dla } x \in [0; \infty) \end{cases}$

Ćwiczenie 2

Sporządź tabelę wartości funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dla całkowitych argumentów x , takich że $|x| \leq 3$. Naszkicuj wykres tej funkcji i zapisz jej wzór bez użycia symbolu wartości bezwzględnej.

- $f(x) = |2x|$
- $f(x) = |3x|$
- $f(x) = |\frac{1}{2}x|$
- $f(x) = -|x|$

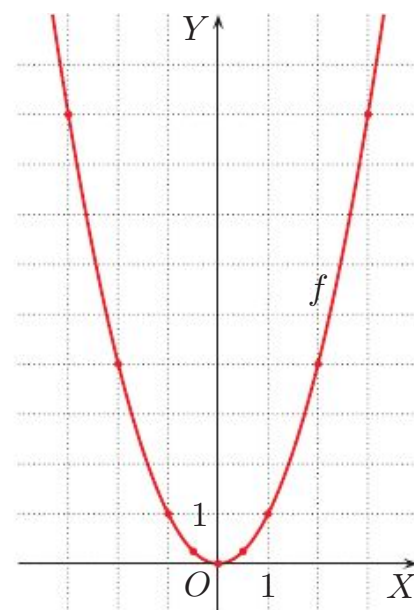
Przykład 3

Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej za pomocą wzoru $f(x) = x^2$.

Aby naszkicować wykres funkcji $f(x) = x^2$, sporządzamy tabelę jej wartości dla wybranych argumentów.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9

Wyznaczone punkty zaznaczamy w układzie współrzędnych i łączymy je krzywą, jak na rysunku – w ten sposób otrzymujemy wykres funkcji f .



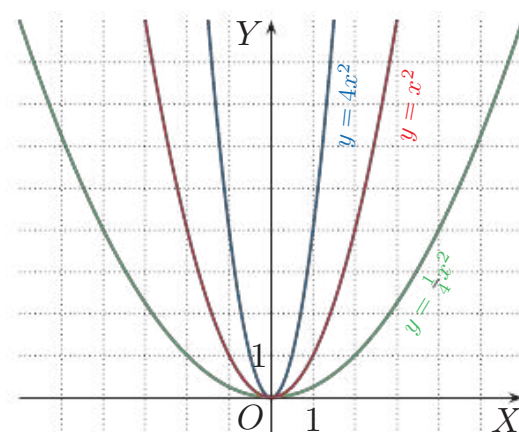
Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji danej wzorem $f(x) = x^2$, o podanej dziedzinie D .

- a) $D = [-2; 2]$ b) $D = [1; 3]$ c) $D = [0; \infty)$

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = x^2$, $y = 4x^2$.

Dziedziną każdej z tych funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych.



Ćwiczenie 4

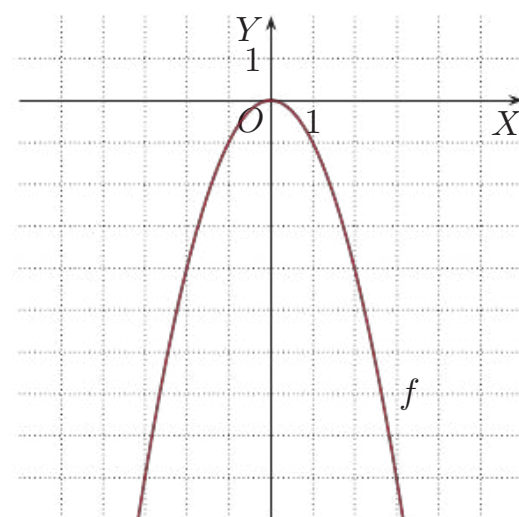
Sporządź tabelę wartości funkcji f dla podanych argumentów.

- a) $f(x) = 4x^2$, $x \in \{-2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\}$
b) $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, $x \in \{-4, -2, -1, 0, 1, 2, 4\}$

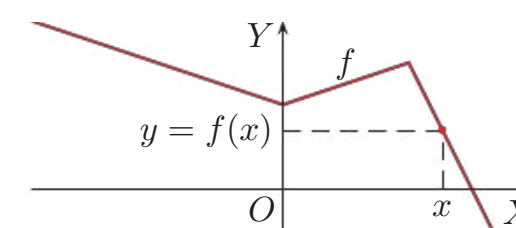
Ćwiczenie 5

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej za pomocą wzoru $f(x) = -x^2$.

- a) Sporządź tabelę wartości tej funkcji dla $x \in \{-3, -2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$.
b) Naszkicuj wykres funkcji $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ określonej za pomocą wzoru $g(x) = -x^2$, o dziedzinie $D = [-1; 2]$.



Z wykresu funkcji można czasem odczytać wartość, jaką przyjmuje ona dla danego argumentu. Zauważmy, że dla argumentu x istnieje dokładnie jedna wartość y taka, że punkt (x, y) należy do wykresu funkcji f .

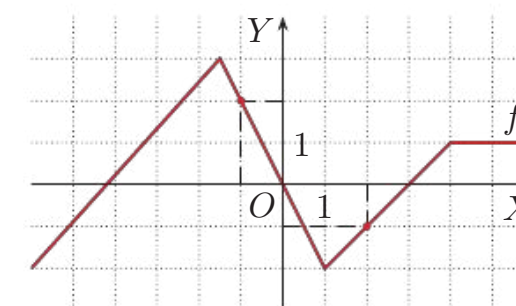


Przykład 4

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Odczytaj z niego wartości funkcji dla argumentów $x = -1$ oraz $x = 2$.

Dla $x = -1$ odczytujemy $f(-1) = 2$.

Dla $x = 2$ odczytujemy $f(2) = -1$.



Ćwiczenie 6

Wykresem funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest prosta przechodząca przez punkty A i B . Naszkicuj ten wykres i odczytaj z niego wartości funkcji dla $x = 1$ i dla $x = 7$.

- a) $A(-3, -1)$, $B(5, 3)$ b) $A(3, 0)$, $B(5, -3)$

Ćwiczenie 7

Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj jej wartości dla $x = 1$ oraz $x = 3$.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} -3 & \text{dla } x \in (-\infty; -2] \\ x & \text{dla } x \in (-2; 4) \\ 4 & \text{dla } x \in [4; \infty) \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2] \\ -x & \text{dla } x \in (-2; 2) \\ 3 & \text{dla } x \in [2; \infty) \end{cases}$$

Czasami dokładne odczytanie wartości funkcji z wykresu może być trudne lub niemożliwe, ale możemy ją obliczyć, gdy znamy wzór funkcji.

Przykład 5

Oblicz wartości funkcji $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = 5x^2 - 6x$ i $h(x) = x^3 - 1$ dla argumentu $x = 2$. Czy punkt $P(2, 7)$ należy do wykresu którejś z tych funkcji?

Obliczamy wartości funkcji dla $x = 2$:

$$f(2) = 2^2 + 3 = 4 + 3 = 7$$

$$g(2) = 5 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 = 20 - 12 = 8 \neq 7$$

$$h(2) = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$$

Punkt o danych współrzędnych należy do wykresu funkcji $y = f(x)$, jeśli po wstawieniu jego współrzędnych odpowiednio na miejsce x i y do wzoru funkcji otrzymamy równość prawdziwą.

Zatem punkt P należy do wykresu funkcji f oraz do wykresu funkcji h .

Ćwiczenie 8

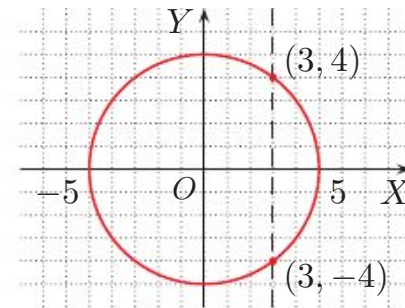
Sprawdź, czy punkt P należy do wykresu funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- a) $f(x) = 3x^2 + 1$, $P(-2, -11)$ b) $f(x) = -2x^2 - x$, $P(-\frac{1}{2}, 0)$

Funkcja każdemu argumentowi x przyporządkowuje tylko jedną wartość y , więc do wykresu funkcji nie mogą należeć dwa punkty o tej samej odciętej.

Przykład 6

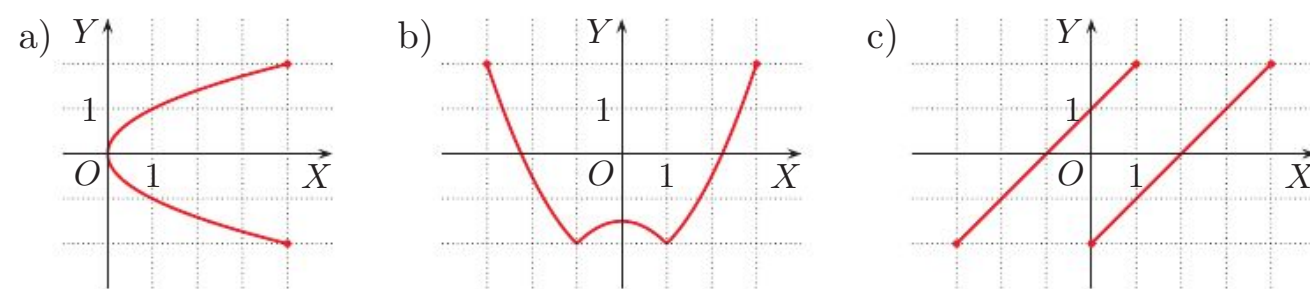
Okrąg (rysunek obok) nie jest wykresem funkcji, gdyż można wskazać takie liczby x , którym odpowiadają dwie różne wartości y_1, y_2 , np. dla $x = 3$ mamy $y_1 = -4$ i $y_2 = 4$. Jest to sprzeczne z definicją funkcji.



Żadna prosta pionowa (równoległa do osi OY) nie przecina wykresu funkcji w więcej niż jednym punkcie.

Ćwiczenie 9

Czy na rysunku przedstawiono wykres funkcji? Odpowiedź uzasadnij.



Zadania

- Naszkcuj wykres funkcji danej wzorem $f(x) = |x|$ o podanej dziedzinie D .
a) $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ b) $D = (-4; 4)$ c) $D = [-2; \infty)$

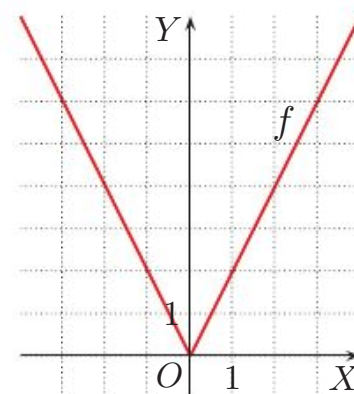
- Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej za pomocą wzoru $f(x) = |2x|$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = |2x|$ o podanej dziedzinie D .

- a) $D = (-4; 2)$ b) $D = [-2, 4]$

- Naszkcuj wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej za pomocą wzoru $f(x) = \left|\frac{1}{2}x\right|$.

- Naszkcuj wykres funkcji określonej za pomocą wzoru $f(x) = \left|\frac{1}{2}x\right|$ o podanej dziedzinie D .

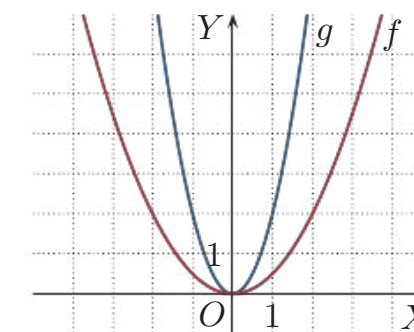
- a) $D = \{-5, -4, -2, 0, 2, 4, 5\}$ b) $D = (-4; 4)$ c) $D = [-2; \infty)$



- Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ oraz $g(x) = 2x^2$.

a) Który spośród punktów $P(1, 2)$, $Q(4, 8)$, $R(-2, 8)$, $S(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ należy do wykresu funkcji g ?

b) Podaj pięć punktów o obu współrzędnych całkowitych należących do wykresu funkcji f .



- Naszkcuj wykres funkcji f . Podaj jej wartości dla $x = -3$ oraz dla $x = 2$.

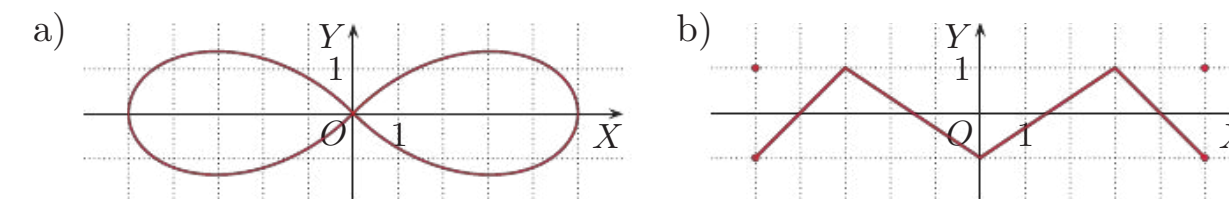
a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; 1] \\ x & \text{dla } x \in (1; 4] \\ 4 & \text{dla } x \in (4; \infty) \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{dla } x \in (-\infty; -3] \\ -x & \text{dla } x \in (-3; 2] \\ 2 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -4 & \text{dla } x \in (-\infty; -2] \\ 2x & \text{dla } x \in (-2; 2) \\ 1 & \text{dla } x \in [2; \infty) \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -3] \\ |x| & \text{dla } x \in [-3; 3] \\ 3 & \text{dla } x \in (3; \infty) \end{cases}$

- Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Który z punktów $P(-1, -5)$, $Q(2, -9)$ należy do wykresu tej funkcji?

a) $f(x) = -\frac{3}{2}x - 6$ b) $f(x) = -4x^2 + x$ c) $f(x) = x^3 - 4x^2$

- Czy na rysunku przedstawiono wykres funkcji? Odpowiedź uzasadnij.



Sprawdź się

- Naszkcuj wykres funkcji f . Podaj jej wartości dla $x = -4$ oraz dla $x = 4$.

a) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in (-\infty; 0] \\ 2x & \text{dla } x \in (0; \infty) \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ |x| & \text{dla } x \in [-2; \infty) \end{cases}$

- Naszkcuj wykres funkcji $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x) = x^2$.

a) $D = [-1; 1]$ b) $D = (-1; 1)$ c) $D = [-3; 2)$ d) $D = (-2; 3]$

- Naszkcuj wykres funkcji $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x) = -x^2$.

a) $D = (-2; 3)$ b) $D = [-2; 3]$ c) $D = (-3; 2)$ d) $D = [-3; 2)$

- Podaj sześć punktów o obu współrzędnych całkowitych należących do wykresu funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x) = \frac{1}{3}x^2$.



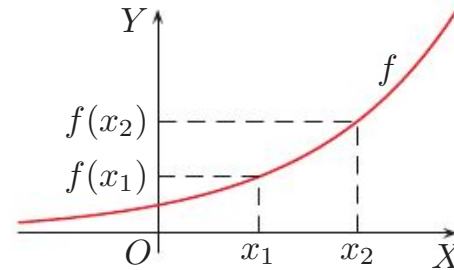
4.4. Monotoniczność funkcji

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji f . Zauważ, że większemu argumentowi odpowiada większa wartość funkcji.

Definicja

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **rosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) < f(x_2)$$



Uwaga. Warunek z definicji można też zapisać: jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

Przykład 1

Wykaż, że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x - 4$ jest rosnąca.

Założmy, że $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ są dowolnymi argumentami, takimi że $x_1 < x_2$.

Wówczas $f(x_1) = \frac{1}{2}x_1 - 4$ oraz $f(x_2) = \frac{1}{2}x_2 - 4$.

$$f(x_2) - f(x_1) = \left(\frac{1}{2}x_2 - 4\right) - \left(\frac{1}{2}x_1 - 4\right) = \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) > 0$$

ponieważ na podstawie założenia $x_2 - x_1 > 0$.

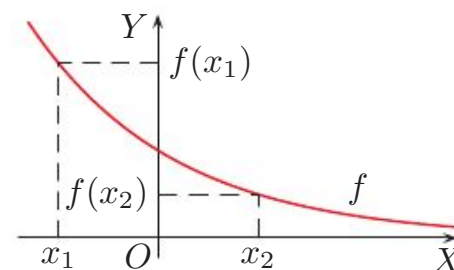
Oznacza to, że funkcja f jest rosnąca.

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji f . Zauważ, że większemu argumentowi odpowiada mniejsza wartość funkcji.

Definicja

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **malejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) > f(x_2)$$



Uwaga. Warunek z definicji można też zapisać: jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_2) - f(x_1) < 0$.

Przykład 2

Wykaż, że funkcja $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = \frac{4}{x}$ jest malejąca.

Założmy, że $x_1, x_2 \in (0; \infty)$ są dowolnymi argumentami, takimi że $x_1 < x_2$.

Wówczas $f(x_1) = \frac{4}{x_1}$ oraz $f(x_2) = \frac{4}{x_2}$.

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{4}{x_2} - \frac{4}{x_1} = \frac{4x_1 - 4x_2}{x_1x_2} = \frac{4(x_1 - x_2)}{x_1x_2} < 0$$

ponieważ na podstawie założenia $x_1x_2 > 0$ oraz $x_1 - x_2 < 0$.

Oznacza to, że funkcja f jest malejąca.

Ćwiczenie 1

Uzasadnij, że:

a) funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = -2x + 6$ jest malejąca,

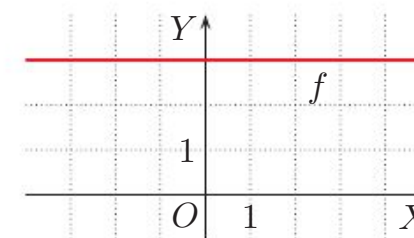
b) funkcja $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = -\frac{4}{x}$ jest rosnąca,

c) funkcja $f: (-\infty; 0) \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = -\frac{2}{x}$ jest rosnąca.

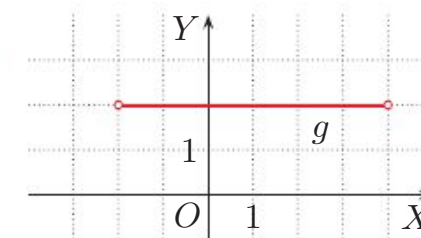
Definicja

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **stałą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ prawdziwa jest równość: $f(x_1) = f(x_2)$.

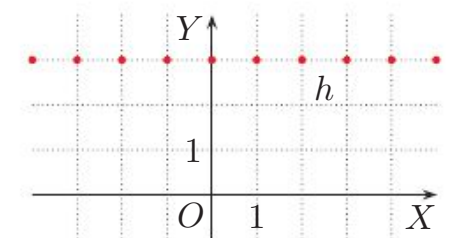
Na poniższych rysunkach przedstawiono wykresy funkcji stałych.



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3$$



$$g: (-2; 4) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2$$

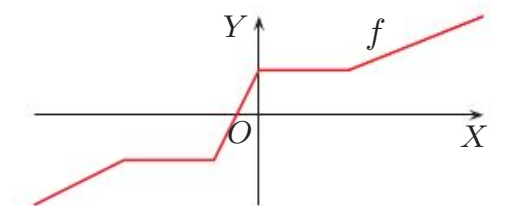


$$h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = 3$$

Definicja

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **niemalejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

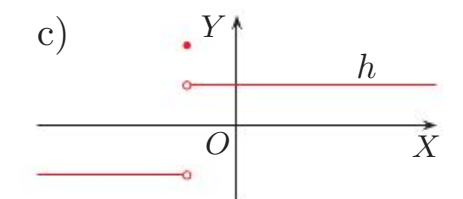
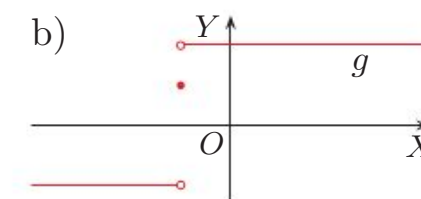
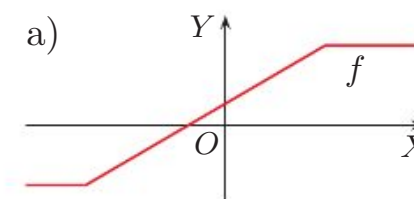
$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) \leq f(x_2)$$



Przykład funkcji niemalejącej

Ćwiczenie 2

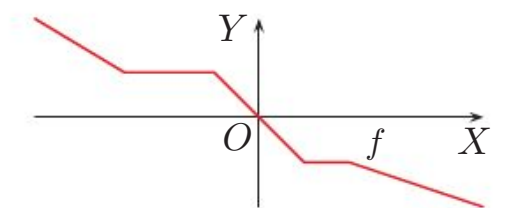
Czy na poniższym rysunku przedstawiono wykres funkcji niemalejącej?



Definicja

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **nierosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) \geq f(x_2)$$

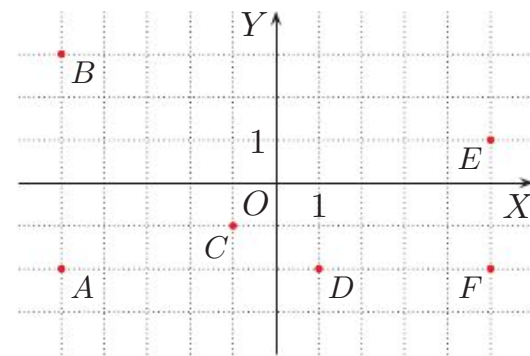


Przykład funkcji nierosnącej

Ćwiczenie 3

a) Naszkicuj wykres funkcji nierosnącej $f: [-5; 5] \rightarrow \mathbb{R}$, tak aby należały do niego cztery spośród punktów $A-F$.

b) Czy można naszkicować wykres funkcji niemalejącej $f: [-5; 5] \rightarrow \mathbb{R}$, tak aby należały do niego cztery spośród punktów $A-F$?



Każda funkcja malejąca jest funkcją nierosnącą, a każda funkcja rosnąca jest funkcją niemalejącą.

Funkcja stała jest zarówno funkcją niemalejącą, jak i nierosnącą.

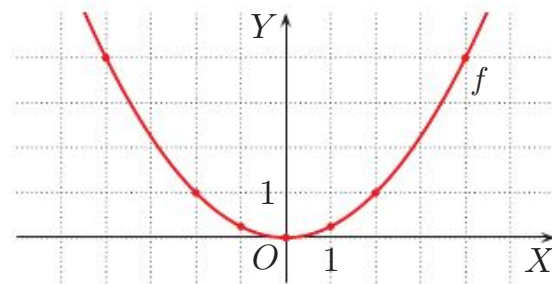
Definicja

Funkcje rosnące, malejące, nierosnące, niemalejące i stałe nazywamy funkcjami **monotonicznymi**.

Przykład 3

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x) = \frac{1}{4}x^2$.

Funkcja f rozpatrywana w całej swojej dziedzinie nie jest monotoniczna. Jest to funkcja **przedziałami monotoniczna**.



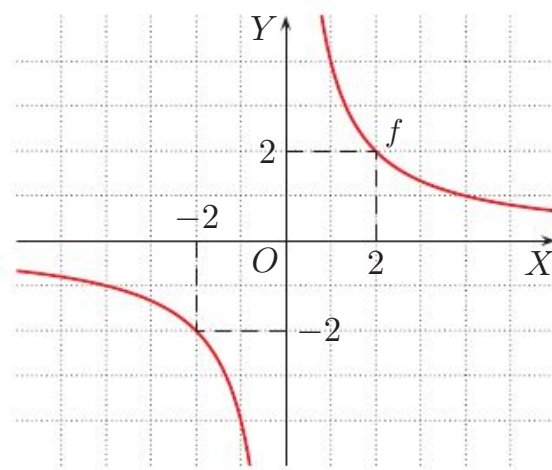
W przedziale $(-\infty; 0]$ funkcja f maleje, a w przedziale $[0; \infty)$ – rośnie. Przedziały te nazywamy przedziałami monotoniczności tej funkcji.

Przykład 4

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: (-\infty; 0) \cup (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = \frac{4}{x}$. Funkcja ta jest malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty; 0)$, $(0; \infty)$.

Jednak funkcja f nie jest funkcją malejącą w zbiorze $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$. Na przykład dla pary argumentów -2 i 2 mamy:

$$-2 < 2 \text{ i } f(-2) = -2 < f(2) = 2$$

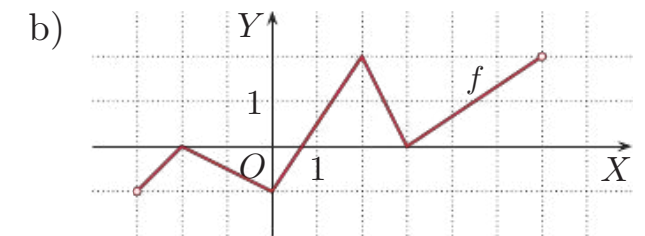
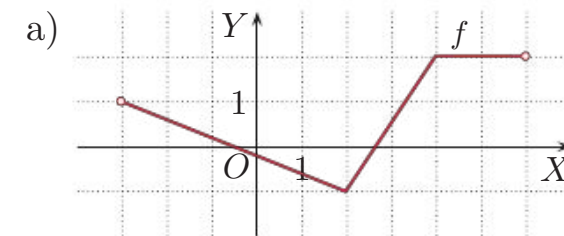


Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji, która jest przedziałami rosnąca, ale nie jest funkcją monotoniczną.

Zadania

1. Dany jest wykres funkcji $f: (-3; 6) \rightarrow \mathbb{R}$. Podaj przedziały monotoniczności tej funkcji.

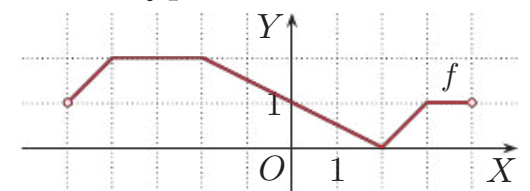


2. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: (-5; 4) \rightarrow \mathbb{R}$. Podaj jej przedziały monotoniczności. Które z poniższych zdań są prawdziwe?

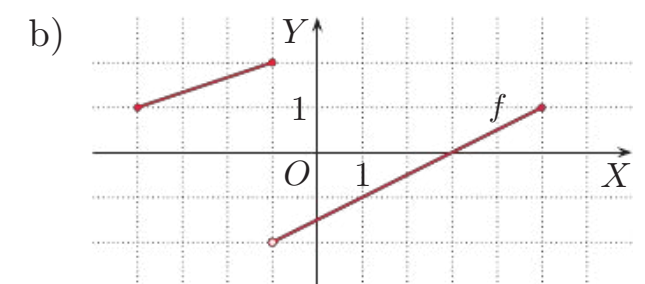
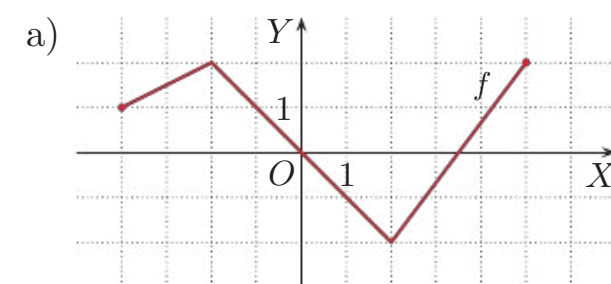
A. Funkcja f jest nierosnąca w $[-4; 2]$.

B. Funkcja f jest niemalejąca w $(-5; -2]$.

C. Funkcja f jest niemalejąca w $[2; 4)$.



D 3. Dany jest wykres funkcji $f: [-4; 5] \rightarrow \mathbb{R}$. Uzasadnij, że funkcja ta nie jest monotoniczna. Podaj przedziały monotoniczności tej funkcji.

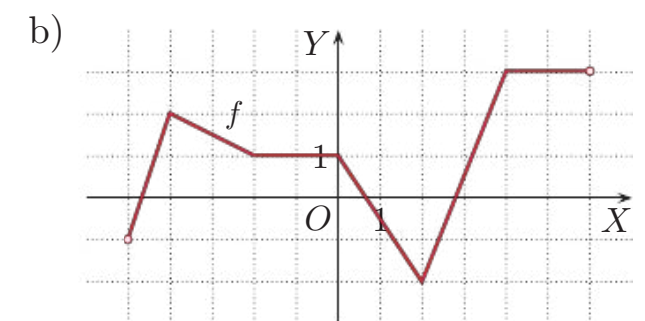
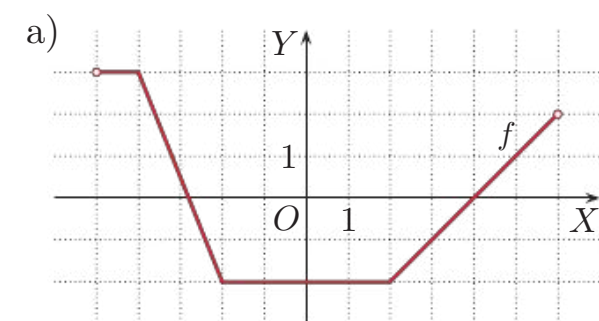


Sprawdź się

4. Naszkicuj wykres funkcji f . Czy jest to funkcja monotoniczna?

a) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 2 & \text{dla } x < 0 \\ 2 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{dla } x < 0 \\ \frac{1}{4}x - 1 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$

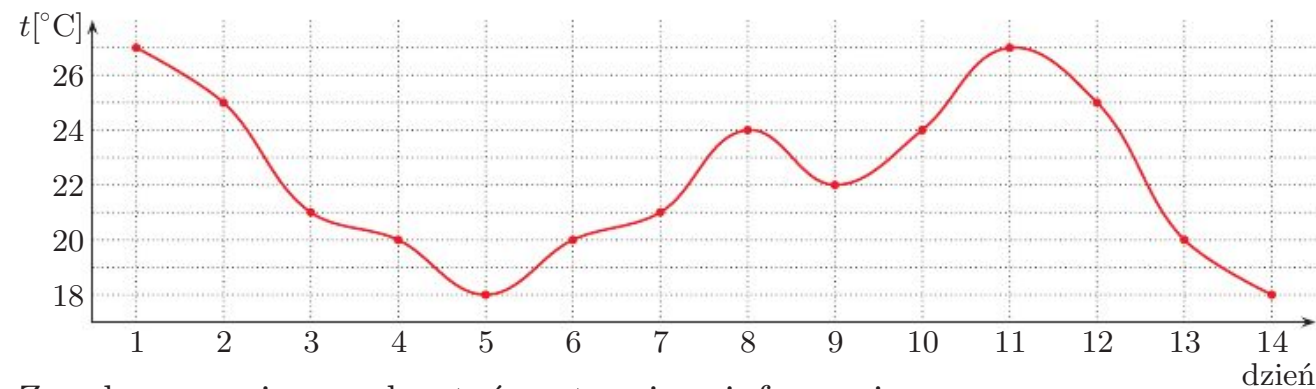
5. Odczytaj z wykresu funkcji $f: (-5; 6) \rightarrow \mathbb{R}$ przedziały, w których funkcja rośnie, maleje, jest niemalejąca.



Przypomnij sobie

Wykorzystanie wykresu do prezentacji informacji

Na poniższym wykresie przedstawiono zmiany temperatury powietrza w pewnym mieście w dwóch pierwszych tygodniach sierpnia podane przez jeden z serwisów meteorologicznych. Temperaturę mierzono każdego dnia w południe. Otrzymane punkty wykresu zwyczajowo łączy się krzywą ilustrującą ciągły proces zmiany temperatury.



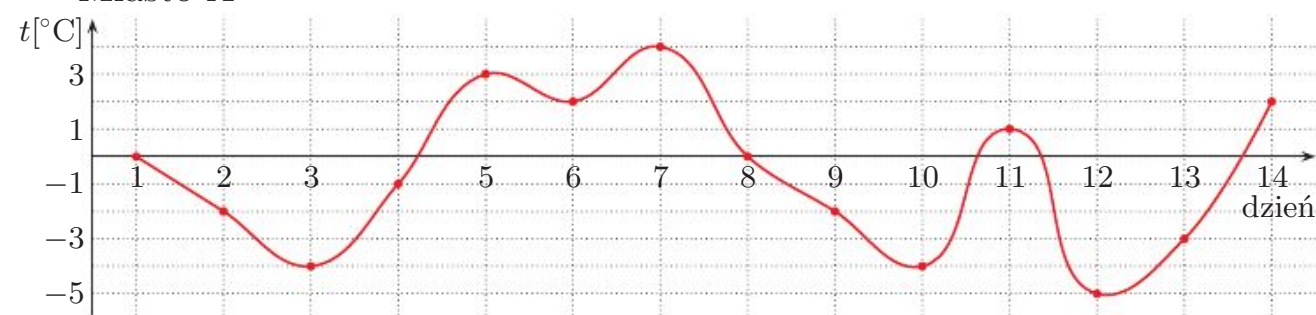
Z wykresu możemy odczytać następujące informacje:

- najwyższa temperatura odnotowana w tym okresie to 27°C (1 i 11 sierpnia),
- najniższa temperatura odnotowana w tym okresie to 18°C (5 i 14 sierpnia).

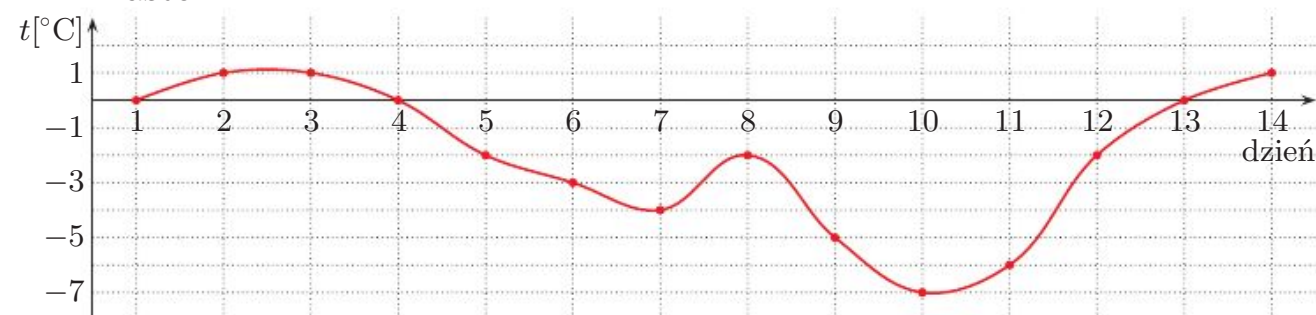
1. Na poniższych wykresach przedstawiono zmiany temperatury powietrza w miastach A i B w pierwszych dwóch tygodniach stycznia. Dla każdego miasta odczytaj z wykresu:

- najniższą temperaturę i podaj dni, w których była ona odnotowana,
- najwyższą temperaturę i podaj dni, w których była ona odnotowana,
- dni, w których temperatura była ujemna.

Miasto A



Miasto B



4.5. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (1)

Odczytywanie dziedziny funkcji

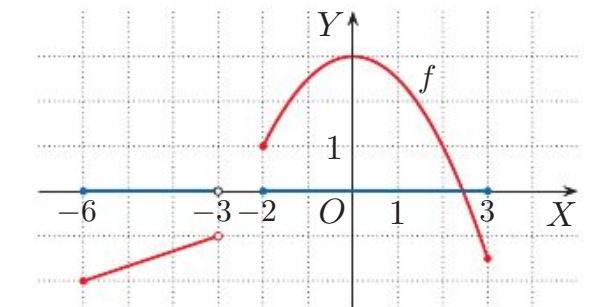
Dziedzina funkcji $y = f(x)$ to zbiór wszystkich argumentów x , dla których funkcja jest określona. Dziedzinę funkcji f oznaczamy przez D lub D_f .

Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f . Jej dziedziną jest zbiór:

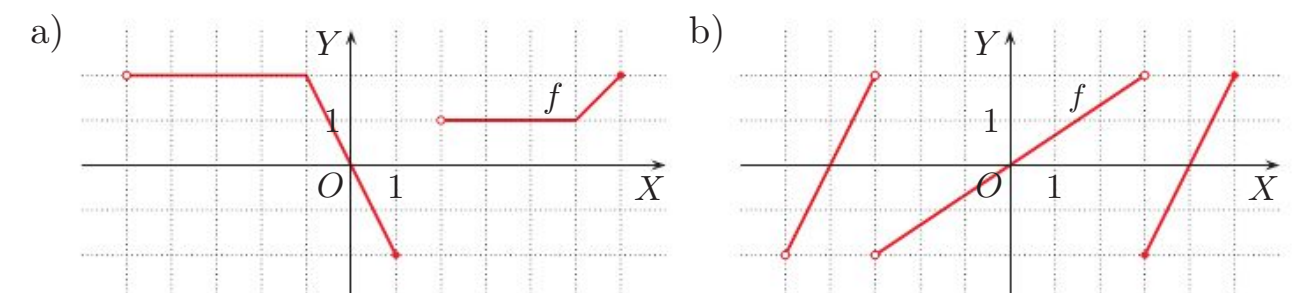
$$D = [-6; -3] \cup [-2; 3]$$

Na rysunku został on zaznaczony na osi OX kolorem niebieskim.



Ćwiczenie 1

Z wykresu funkcji f odczytaj jej dziedzinę.



Odczytywanie zbioru wartości funkcji

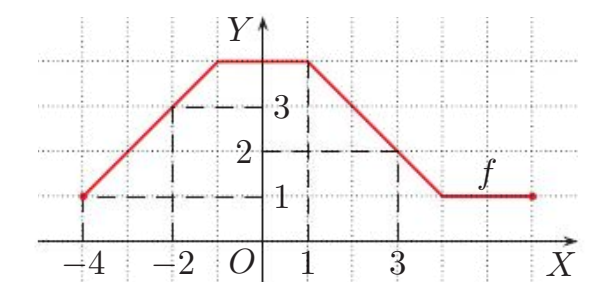
Z wykresu funkcji można odczytać nie tylko wartość, jaką ta funkcja przyjmuje dla danego argumentu, lecz także zbiór wszystkich liczb, które są wartościami tej funkcji. Zbiór ten nazywamy **zbiorem wartości** funkcji.

Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: [-4; 6] \rightarrow \mathbb{R}$. Odczytaj z niego $f(-4)$, $f(-2)$, $f(1)$ i $f(3)$ oraz zbiór wartości funkcji f .

Z wykresu odczytujemy wartości funkcji: $f(-4) = 1$, $f(-2) = 3$, $f(1) = 4$ i $f(3) = 2$.

Wartościami funkcji f są wszystkie liczby y spełniające warunek $1 \leq y \leq 4$. Zatem zbiorem wartości funkcji f jest przedział $[1; 4]$.



Definicja

Zbiór wartości funkcji $f: D \rightarrow Y$ to zbiór tych wszystkich $y \in Y$, dla których istnieje taki argument $x \in D$, że $f(x) = y$.

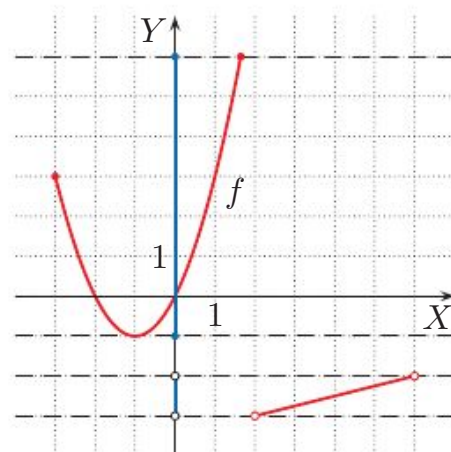
Zbiór wartości funkcji f oznaczamy przez $f(D)$ lub $f(D_f)$.

Przykład 3

Z wykresu funkcji f odczytaj jej zbiór wartości.

Przy odczytywaniu zbioru wartości funkcji wygodnie jest poprowadzić odpowiednie proste poziome (równoległe do osi OX).

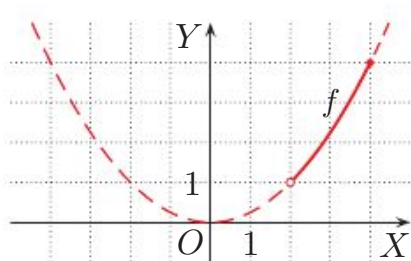
Zbiór wartości $f(D) = (-3; -2) \cup [-1; 6]$ został zaznaczony na osi OY kolorem niebieskim.



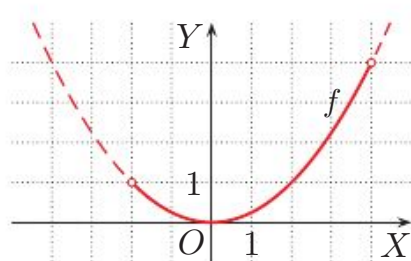
Ćwiczenie 2

Linia ciągłą przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ o dziedzinie D . Odczytaj z wykresu zbiór wartości funkcji f .

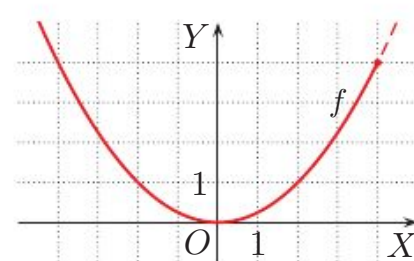
a) $D = (2; 4]$



b) $D = (-2; 4)$

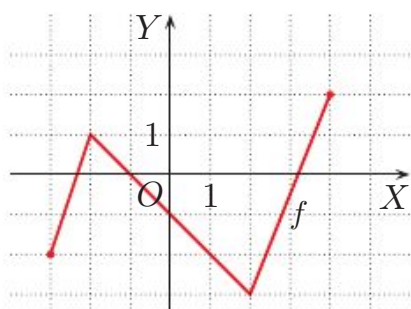


c) $D = (-\infty; 4]$

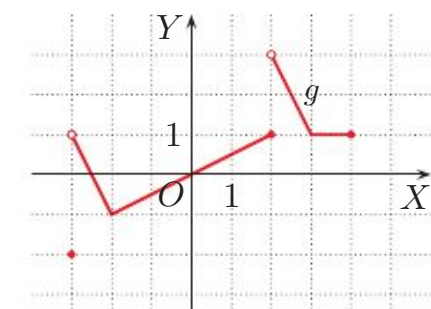


Ćwiczenie 3

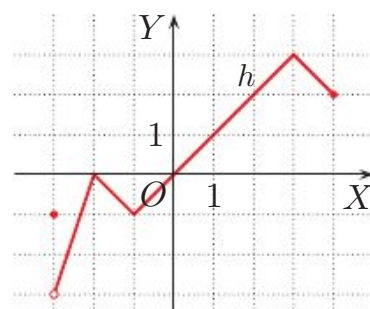
Na rysunkach przedstawiono wykresy funkcji f , g i h określonych w przedziale $[-3; 4]$. Najmniejsze wartości każdej z tych funkcji podano pod wykresami. Odczytaj ich największe wartości. Dla jakich argumentów są one przyjmowane?



Najmniejsza wartość funkcji f jest równa -3 . Jest ona przyjmowana dla $x = 2$.



Najmniejsza wartość funkcji g jest równa -2 . Jest ona przyjmowana dla $x = -3$.



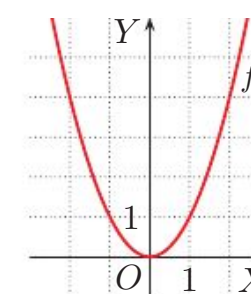
Funkcja h nie przyjmuje najmniejszej wartości.

Przykład 4

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = x^2$ o dziedzinie $D = \mathbb{R}$.

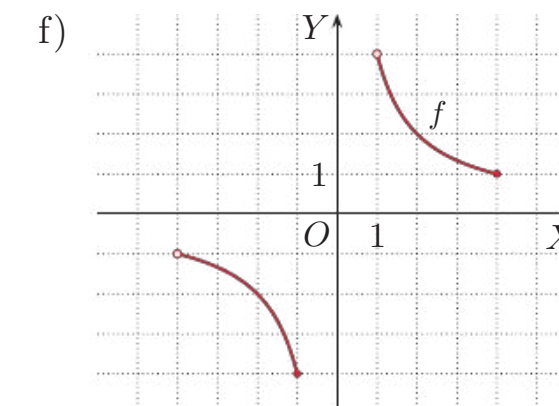
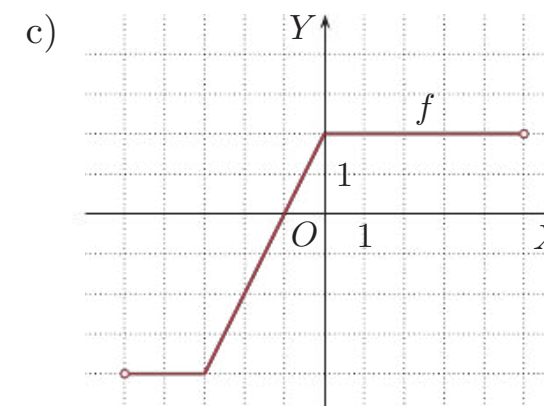
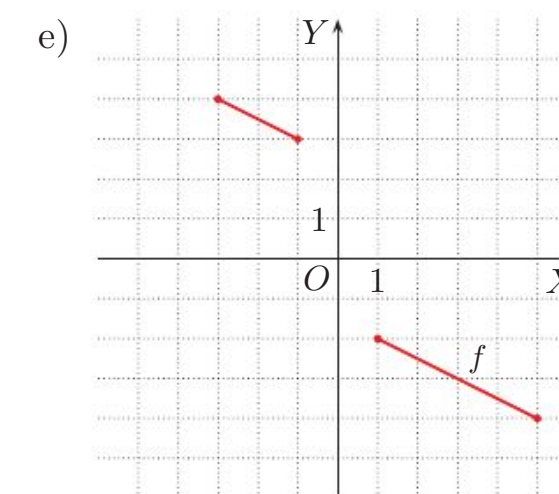
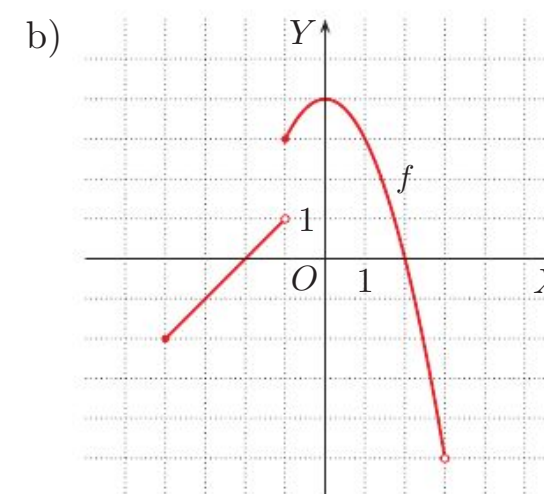
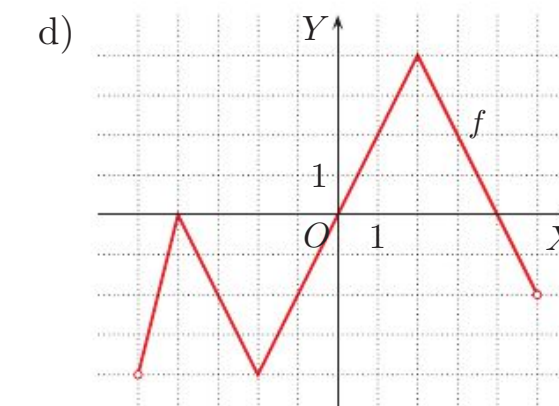
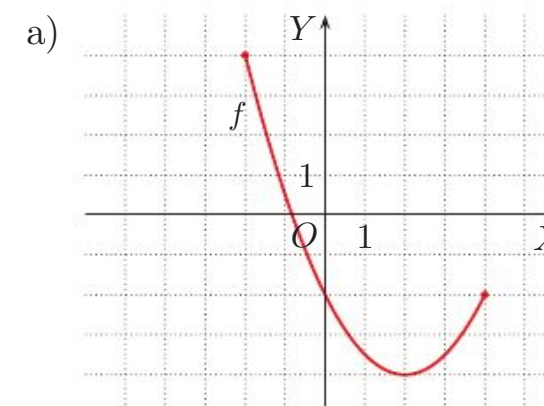
Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $[0; \infty)$.

Najmniejsza wartość funkcji f , równa 0 , jest przyjmowana dla $x = 0$. Funkcja f nie przyjmuje wartości największej.

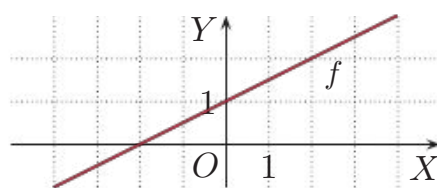


Zadania

1. Odczytaj z wykresu funkcji f jej dziedzinę, zbiór wartości, najmniejszą wartość i największą wartość oraz argumenty, dla których są one przyjmowane.



2. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$. Podaj zbiór wartości funkcji, której dziedziną jest zbiór D , określonej tym samym wzorem.

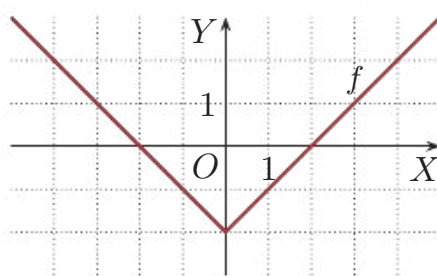


- a) $D = [-4; 4]$ b) $D = [-4; -2] \cup [0; 4]$ c) $D = [-4; 0) \cup (2; 4]$
3. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ o dziedzinie D . Odczytaj z wykresu zbiór wartości tej funkcji.
- a) $D = [-4; 6]$ b) $D = [-4; 0] \cup [2; 4]$ c) $D = [-4; -2] \cup [4; 6]$

4. Podany zbiór jest zbiorem wartości funkcji $f(x) = 2x - 4$. Określ dziedzinę tej funkcji.

- a) $(-3; 4]$ b) $(-2; 2) \cup (2; \infty)$ c) $(0; 2) \cup \{3\}$ d) $\{0, 2, 3\}$

5. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = |x| - 2$. Dla funkcji $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ określonej tym samym wzorem podaj wartości największą i najmniejszą oraz argumenty, dla których są one przyjmowane.



- a) $D = [-4; -1]$ b) $D = [-3; 4]$ c) $D = [-2; \infty)$

6. Naszkicuj wykres dowolnej funkcji $f: [-2; 6] \rightarrow \mathbb{R}$, której zbiór wartości jest równy:

- a) $[-2; 6)$, b) $[-4; 0] \cup (1; 4]$, c) $[-2; 3) \cup \{5\}$, d) $\{0, 4\}$.

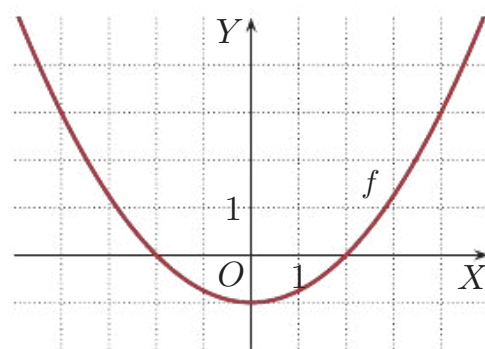
Sprawdź się

7. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -\frac{1}{2}x - 2$ o dziedzinie D . Odczytaj z wykresu zbiór wartości tej funkcji.

- a) $D = [0; 4]$ b) $D = (-1; 2)$ c) $D = [-1; 0] \cup [1; 3]$

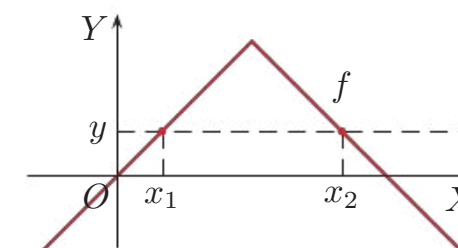
8. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej za pomocą wzoru $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$. Wyznacz zbiór wartości funkcji $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$, której dziedziną jest przedział:

- a) $[2; 4]$, c) $(-4; 2)$,
b) $(-2; 0)$, d) $(-\infty; 4]$.



4.6. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (2)

Na podstawie wykresu funkcji możemy podać argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość. Zwróć uwagę na to, że funkcja f , której wykres przedstawiono obok, przyjmuje wskazaną wartość y dla dwóch argumentów: x_1 i x_2 .



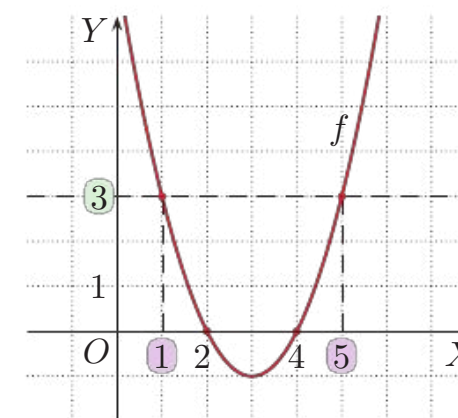
Przykład 1

Dany jest wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Odczytaj, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość 3 oraz podaj jej miejsca zerowe.

Rysujemy prostą $y = 3$. Przecina ona wykres funkcji w punktach $(1, 3)$ i $(5, 3)$.

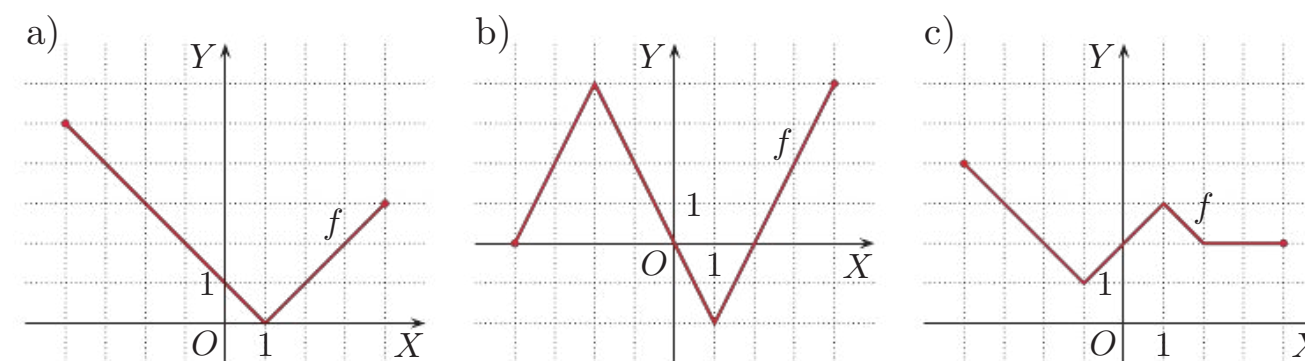
Zatem funkcja f przyjmuje wartość równą 3 dla $x = 1$ i $x = 5$.

Miejscami zerowymi tej funkcji są liczby 2 i 4.



Ćwiczenie 1

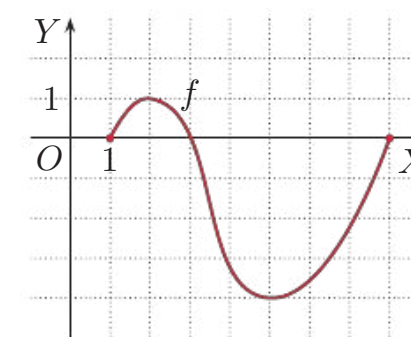
Na podstawie wykresu funkcji $f: [-4; 4] \rightarrow \mathbb{R}$ podaj jej miejsca zerowe oraz te argumenty x , dla których spełnione jest równanie $f(x) = 2$.



Przykład 2

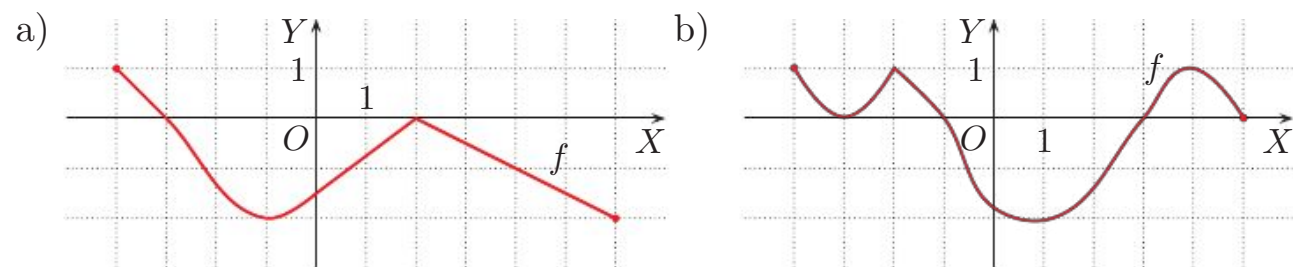
Dany jest wykres funkcji $f: [1; 8] \rightarrow \mathbb{R}$. Odczytujemy z niego:

- równanie $f(x) = 0$ jest spełnione dla $x = 1$, $x = 3$, $x = 8$,
- nierówność $f(x) > 0$ zachodzi dla $x \in (1; 3)$,
- nierówność $f(x) \leq 0$ zachodzi dla $x \in \{1\} \cup [3; 8]$.



Ćwiczenie 2

Z wykresu funkcji f odczytaj jej miejsca zerowe, zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 0$ oraz nierówności $f(x) \leq 0$.

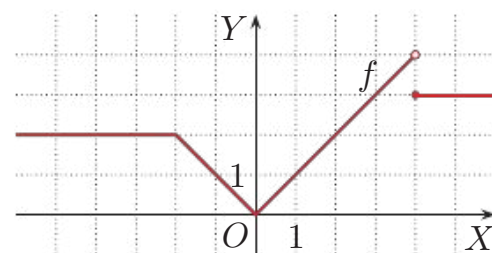


Przykład 3

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ |x| & \text{dla } x \in [-2; 4) \\ 3 & \text{dla } x \in [4; \infty) \end{cases}$$

Odczytaj z wykresu zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 2$ oraz nierówności $f(x) \geq 2$.



Nierówność $f(x) > 2$ zachodzi dla $x \in (2; \infty)$, a nierówność $f(x) \geq 2$ zachodzi dla $x \in (-\infty; -2] \cup [2; \infty)$.

Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Odczytaj z niego:

- rozwiązanie równania $f(x) = 3$ i zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 3$,
- rozwiązanie równania $f(x) = 1$ i zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leq 1$.

a) $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{dla } x \in (-\infty; -5) \\ |x| & \text{dla } x \in [-5; 3) \\ 1 & \text{dla } x \in [3; \infty) \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ |x| & \text{dla } x \in [-1; 1] \\ 3 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$

Przykład 4

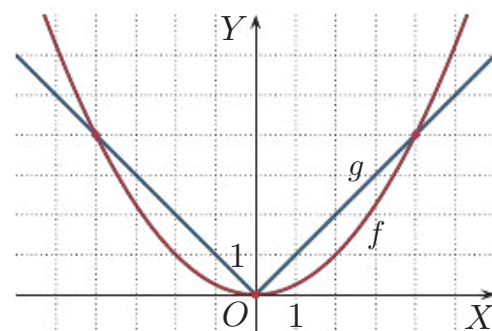
Rozwiąż graficznie równanie $\frac{1}{4}x^2 = |x|$ oraz nierówność $\frac{1}{4}x^2 < |x|$.

W jednym układzie współrzędnych szkicujemy wykresy funkcji $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ i $g(x) = |x|$.

Z wykresów odczytujemy:

$$\frac{1}{4}x^2 = |x| \text{ dla } x = -4, x = 0, x = 4,$$

$$\frac{1}{4}x^2 < |x| \text{ dla } x \in (-4; 0) \cup (0; 4).$$

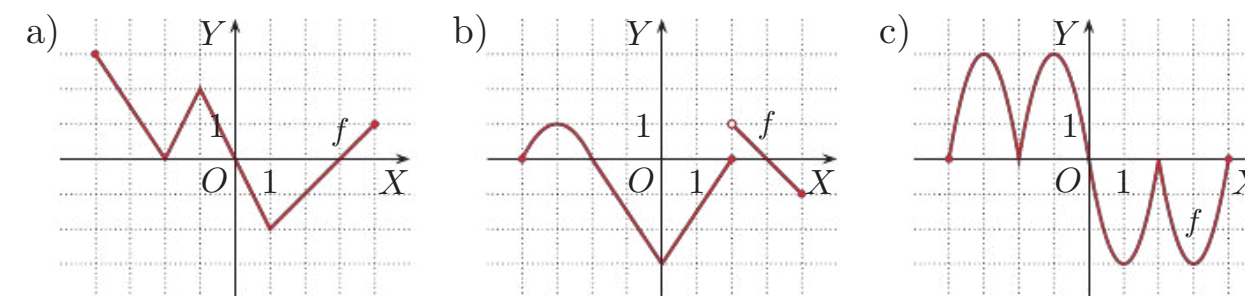


Ćwiczenie 4

Odczytaj z wykresów funkcji $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ i $g(x) = |x|$ z przykładu 4. zbiór rozwiązań nierówności $\frac{1}{4}x^2 \geq |x|$.

Zadania

1. Z wykresu funkcji $f: [-4; 4] \rightarrow \mathbb{R}$ odczytaj jej miejsca zerowe oraz zbiory rozwiązań nierówności $f(x) > 0$ i $f(x) \geq 0$.



2. Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Odczytaj z wykresu rozwiązanie równania $f(x) = -1$ oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leq 3$.

a) $f(x) = 2x + 1$ b) $f(x) = -x - 2$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

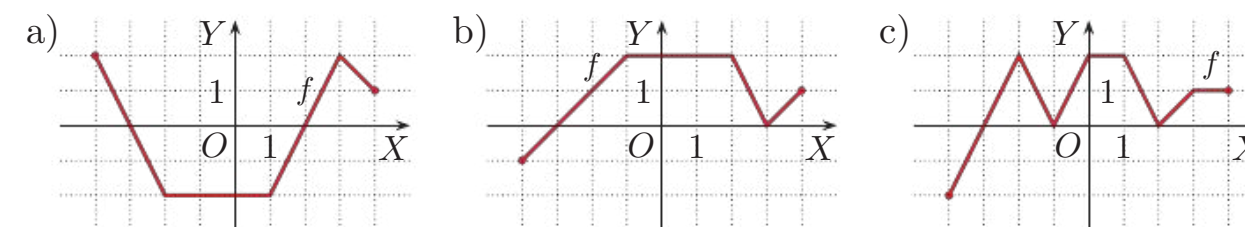
3. Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a następnie odczytaj z niego rozwiązanie równania $f(x) = 1$ oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq 1$.

a) $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{dla } x \in (-\infty; -4) \\ |x| & \text{dla } x \in [-4; 1) \\ 3 & \text{dla } x \in [1; \infty) \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -2] \\ |2x| & \text{dla } x \in (-2; 2) \\ 2 & \text{dla } x \in [2; \infty) \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -4) \\ |x| & \text{dla } x \in [-4; 2) \\ 4 & \text{dla } x \in [2; \infty) \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ |2x| & \text{dla } x \in [-2; 1] \\ 1 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$

Sprawdź się

4. Odczytaj z wykresu funkcji $f: [-4; 4] \rightarrow \mathbb{R}$ jej miejsca zerowe oraz zbiory rozwiązań nierówności $f(x) < 0$ i $f(x) \leq 0$.



5. Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a następnie odczytaj z niego rozwiązanie równania $f(x) = 2$ oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) < 1$.

a) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ \frac{1}{2}x & \text{dla } x \in [0; \infty) \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{dla } x \in (-\infty; 2] \\ 2 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$

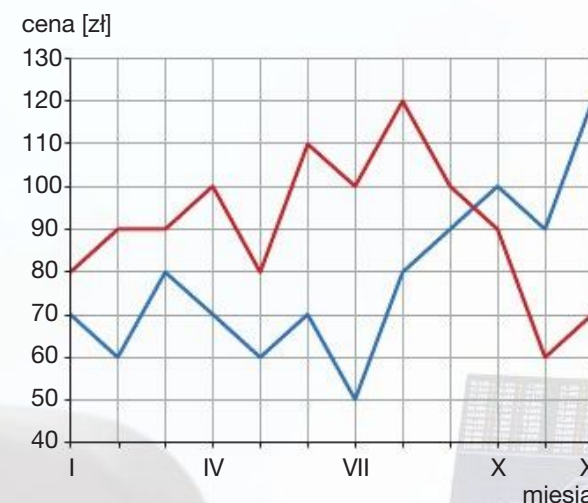
Wykresy jako nośnik informacji finansowych

Wiele informacji finansowych jest prezentowanych w postaci wykresów. Poniżej przedstawiono zmiany kursu franka szwajcarskiego w stosunku do złotego w okresie od 2 stycznia do 29 lutego 2024 r. Taki wykres składa się z punktów odpowiadających kursom franka w kolejnych dniach – zwyczajowo łączy się je odcinkami. Poprawia to czytelność wykresu.



1 Na rysunku przedstawiono ceny akcji spółki X (kolor czerwony) i spółki Y (kolor niebieski) na koniec kolejnych miesięcy 2023 roku.

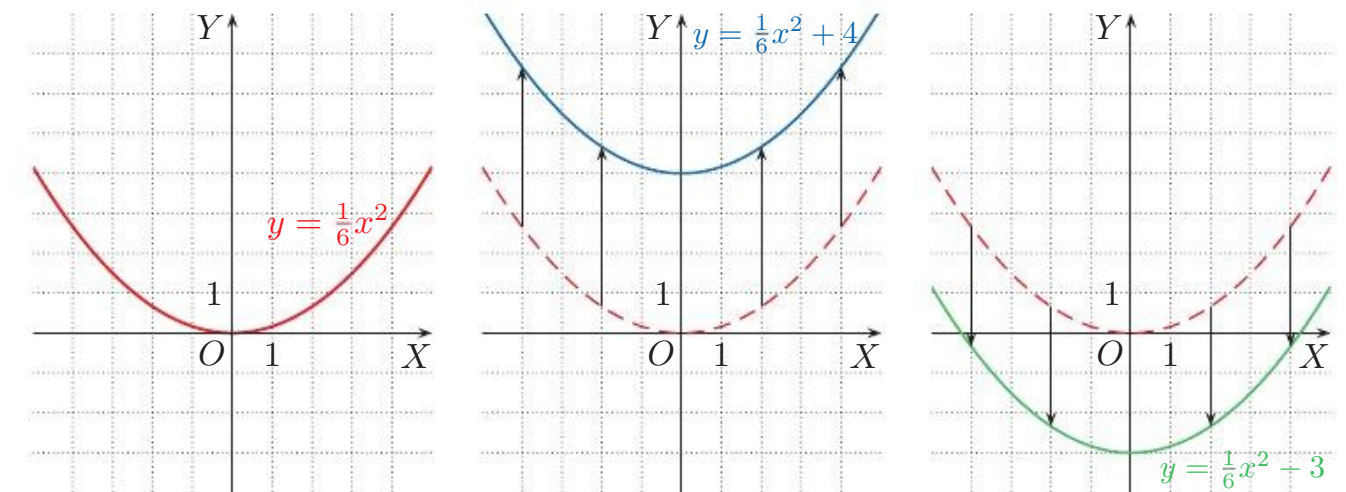
- Jaki jest największy możliwy zysk przy zakupie i sprzedaży po 3 miesiącach jednej akcji spółki X, a jaki – spółki Y?
- Jaka jest największa możliwa strata przy zakupie i sprzedaży po 5 miesiącach jednej akcji spółki X, a jaka – spółki Y?



4.7. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OY

Przykład 1

Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy funkcji $y = \frac{1}{6}x^2$, $y = \frac{1}{6}x^2 + 4$ oraz $y = \frac{1}{6}x^2 - 3$.



Wykresy funkcji $y = \frac{1}{6}x^2 + 4$ i $y = \frac{1}{6}x^2 - 3$ można otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \frac{1}{6}x^2$ wzdłuż osi OY o odpowiednią liczbę jednostek.

Twierdzenie

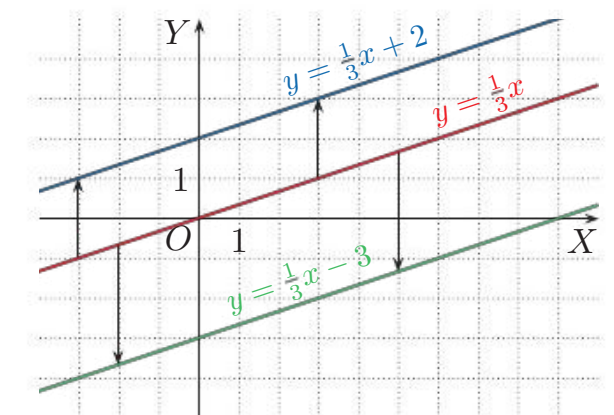
Wykres funkcji $y = f(x) + q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek w górę wzdłuż osi OY.

Wykres funkcji $y = f(x) - q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek w dół wzdłuż osi OY.

Przykład 2

Jeśli przesuniemy wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x$ o 2 jednostki w górę, to otrzymamy wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x + 2$.

Jeśli przesuniemy wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x$ o 3 jednostki w dół, to otrzymamy wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x - 3$.

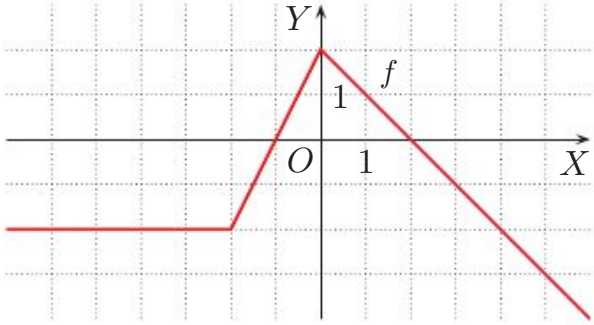
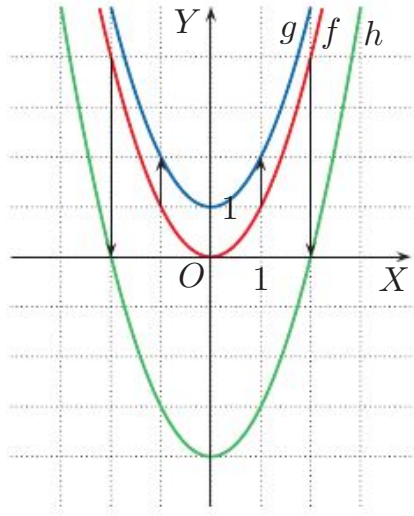


Ćwiczenie 1

Stosując odpowiednie przesunięcie wykresu funkcji $y = |x|$, naszkicuj wykres i podaj zbiór wartości funkcji:

- $y = |x| + 2$,
- $y = |x| - 2$,
- $y = |x| - 3$,
- $y = |x| + \frac{1}{2}$.

Zadania

- Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. Naszkicuj wykres funkcji g i podaj jej zbiór wartości.
 
 - $g(x) = f(x) + 2$
 - $g(x) = f(x) - 2$
 - $g(x) = f(x) - 3$
- Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie wykresy funkcji $g(x) = f(x) + 1$ oraz $h(x) = f(x) - 2$. Podaj zbiory wartości funkcji f , g i h .
 - $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ |2x| & \text{dla } x \in [-1; 2] \\ 4 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$
 - $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ |\frac{1}{2}x| & \text{dla } x \in [-2; 2] \\ 3 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$
- Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |x|$, a następnie naszkicuj wykres funkcji $g(x) = |x| + a$ oraz podaj wartość parametru a w przypadku, gdy:
 - zbiorem wartości funkcji g jest przedział $[1; \infty)$,
 - miejscami zerowymi funkcji g są liczby -4 i 4 .
- Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = x^2$ oraz wykresy funkcji g i h . Podaj wzory funkcji g i h .
 
- Naszkicuj wykres funkcji $y = x^2$, a następnie wykres funkcji f . Podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ dla $m \in \{-3, -1, 2\}$.
 - $f(x) = x^2 + 2$
 - $f(x) = x^2 - 1$
 - $f(x) = x^2 - 3$
 - $f(x) = x^2 - 9$

Sprawdź się

- Naszkicuj wykres funkcji $y = \frac{1}{2}x$, a następnie wykres funkcji:
 - $y = \frac{1}{2}x + 5$,
 - $y = \frac{1}{2}x - 4$,
 - $y = \frac{1}{2}x - 6$,
 - $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.
- Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \frac{1}{2}|x|$, a następnie wykres funkcji f . Podaj zbiór wartości funkcji f .
 - $f(x) = \frac{1}{2}|x| + 3$
 - $f(x) = \frac{1}{2}|x| - 1$
 - $f(x) = \frac{1}{2}|x| - 3$

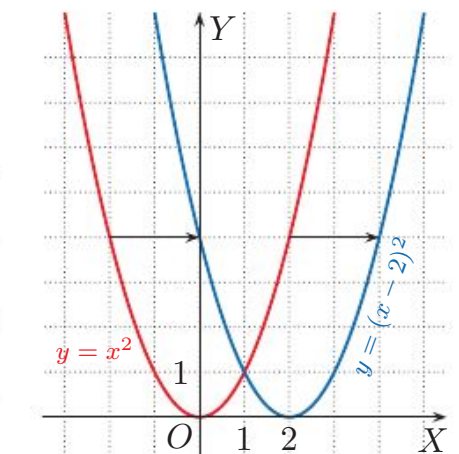
4.8. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OX

Przykład 1

Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $y = x^2$ oraz $y = (x - 2)^2$ naszkicowane na podstawie odpowiednich tabel wartości funkcji.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

x	-1	0	1	2	3	4	5
$y = (x - 2)^2$	9	4	1	0	1	4	9

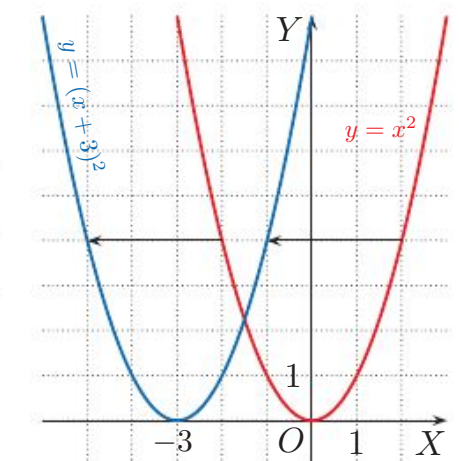


Zauważmy, że wykres funkcji $y = (x - 2)^2$ możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = x^2$ o 2 jednostki w prawo wzdłuż osi OX .

Przykład 2

Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $y = x^2$ oraz $y = (x + 3)^2$ naszkicowane na podstawie odpowiednich tabel wartości funkcji.

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
$y = (x + 3)^2$	9	4	1	0	1	4	9



Zauważmy, że wykres funkcji $y = (x + 3)^2$ możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = x^2$ o 3 jednostki w lewo wzdłuż osi OX .

Twierdzenie

Wykres funkcji $y = f(x - p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek w prawo wzdłuż osi OX .

Wykres funkcji $y = f(x + p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek w lewo wzdłuż osi OX .

Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji g , stosując odpowiednie przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = |x|$. Podaj miejsce zerowe funkcji g .

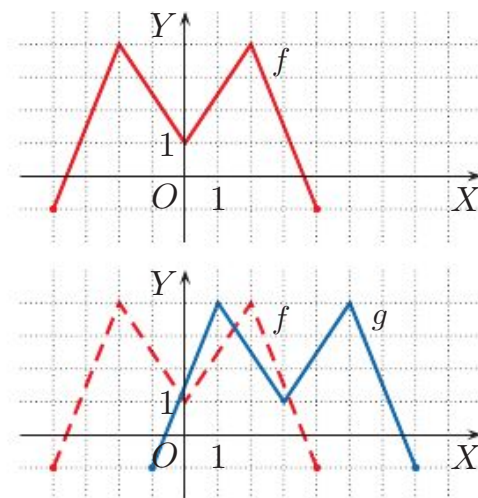
- $g(x) = |x - 1|$
- $g(x) = |x + 2|$
- $g(x) = |x + 3|$
- $g(x) = |x - 4|$

Przykład 3

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: [-4; 4] \rightarrow \mathbb{R}$. Naskicuj wykres funkcji $g(x) = f(x - 3)$ i podaj jej dziedzinę.

Wykres funkcji $g(x) = f(x - 3)$ otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji $y = f(x)$ o 3 jednostki w prawo.

Dziedziną funkcji g jest przedział $[-1; 7]$.



Ćwiczenie 2

Naskicuj wykres funkcji g , stosując odpowiednie przesunięcie wykresu funkcji f z przykładu 3. Podaj dziedzinę funkcji g .

a) $g(x) = f(x - 2)$ b) $g(x) = f(x + 3)$ c) $g(x) = f(x + 4)$

Ćwiczenie 3

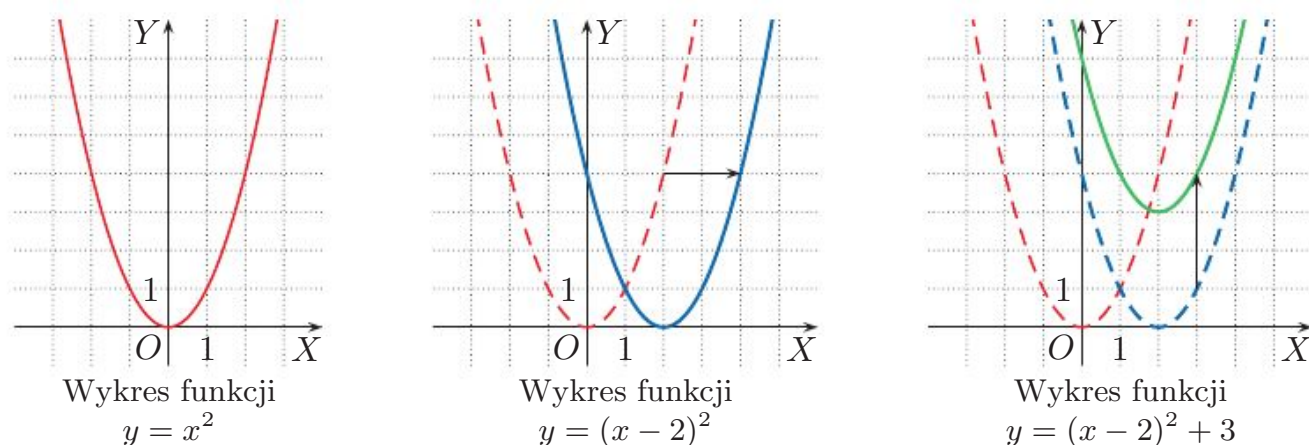
Naskicuj wykres funkcji f , a następnie stosując odpowiednie przesunięcie, naskicuj wykresy funkcji $g(x) = f(x - 3)$ i $h(x) = f(x + 2)$.

a) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \leq 0 \\ \frac{1}{3}x & \text{dla } x > 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x + 3 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$

Przykład 4

Naskicuj wykres funkcji $y = (x - 2)^2 + 3$.

Wykres funkcji $y = x^2$ przesuwamy najpierw o 2 jednostki w prawo wzdłuż osi OX , a następnie otrzymany wykres przesuwamy o 3 jednostki w górę wzdłuż osi OY .



Ćwiczenie 4

Naskicuj wykres funkcji f .

a) $f(x) = (x - 2)^2 - 1$ b) $f(x) = (x + 3)^2 - 2$ c) $f(x) = (x + 1)^2 + 1$

Zadania

1. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = x^2$, a następnie stosując odpowiednie przesunięcie, naskicuj wykres funkcji g . Podaj jej miejsce zerowe.

a) $g(x) = (x - 1)^2$ b) $g(x) = (x + 1)^2$ c) $g(x) = (x + 2)^2$

2. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = |2x|$, a następnie stosując odpowiednie przesunięcie, naskicuj wykres funkcji g .

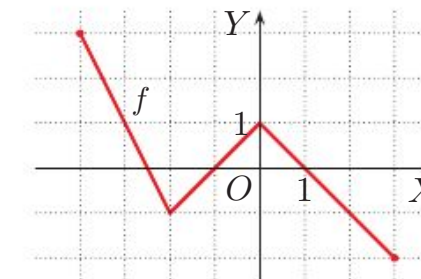
a) $g(x) = |2(x - 3)|$ b) $g(x) = |2(x - 2)|$ c) $g(x) = |2(x + 2)|$

3. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = |3x|$, a następnie stosując odpowiednie przesunięcie, naskicuj wykres funkcji g .

a) $g(x) = |3(x - 1)|$ b) $g(x) = |3x + 3|$ c) $g(x) = |3x + 12|$

4. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: [-4; 3] \rightarrow \mathbb{R}$. Naskicuj wykres funkcji g i podaj jej dziedzinę.

a) $g(x) = f(x - 2)$ c) $g(x) = f(x + 1)$
b) $g(x) = f(x - 3)$ d) $g(x) = f(x + 2)$



5. Naskicuj wykres funkcji f . Podaj jej miejsca zerowe i zbiór wartości.

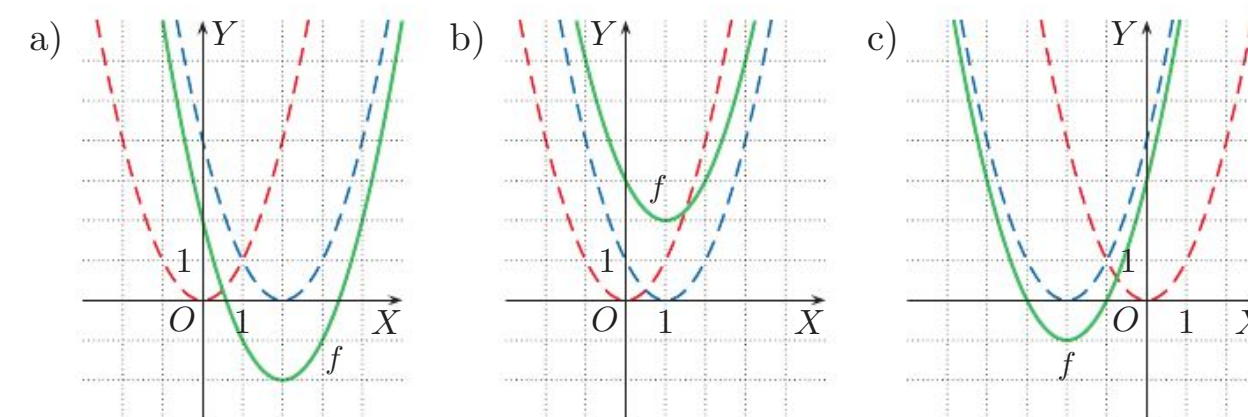
a) $f(x) = |x + 2| + 3$ b) $f(x) = |x - 2| - 3$ c) $f(x) = |x + 1| - 2$

6. Wykres funkcji g otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = |x|$:

- a) o 3 jednostki w prawo i 2 jednostki w górę,
b) o 4 jednostki w lewo i 3 jednostki w dół,
c) o 1 jednostkę w lewo i 2 jednostki w górę.

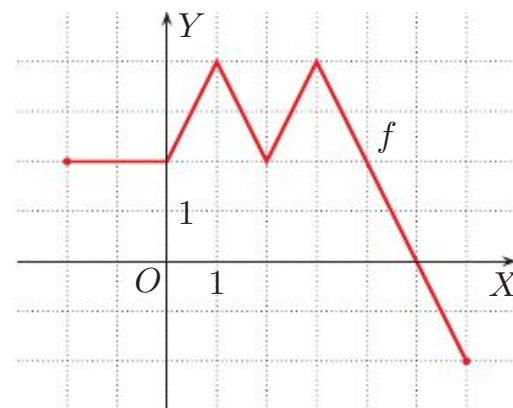
Podaj wzór funkcji g i naskicuj jej wykres.

7. Wykres funkcji f otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $y = x^2$. Podaj wzór funkcji f .





8. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: [-2; 6] \rightarrow \mathbb{R}$. Naskicuj wykres funkcji g , odczytaj jej dziedzinę i zbiór wartości.



- a) $g(x) = f(x+2) + 1$
 b) $g(x) = f(x+4) - 2$
 c) $g(x) = f(x-1) + 2$
 d) $g(x) = f(x-2) - 4$

9. Oblicz pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji f i osią OX .

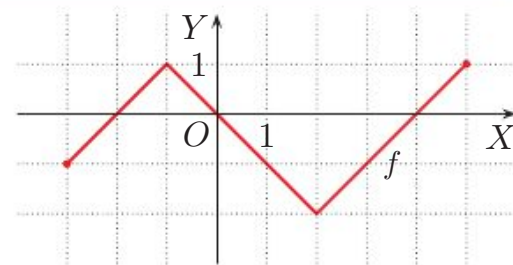
- a) $f(x) = |x-3| - 2$ b) $f(x) = |x+1| - 4$

10. Oblicz pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji f i g .

- a) $f(x) = |2x|$, $g(x) = |x-2| + 1$
 b) $f(x) = |2x| - 2$, $g(x) = |x-1| + 1$

Sprawdź się

11. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: [-3; 5] \rightarrow \mathbb{R}$. Podaj dziedzinę i miejsca zerowe funkcji g .



- a) $g(x) = f(x-3)$
 b) $g(x) = f(x+2)$

12. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = |2x|$, a następnie wykresy funkcji g i h . Podaj zbiory wartości oraz miejsca zerowe funkcji g i h .

- a) $g(x) = |2(x+1)|$, $h(x) = |2(x+1)| - 1$
 b) $g(x) = |2(x-4)|$, $h(x) = |2(x-4)| - 2$

13. Naskicuj wykresy funkcji f i g .

- a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in (-\infty; 2) \\ 2 & \text{dla } x \in [2; \infty) \end{cases}$, $g(x) = f(x+3)$
 b) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ 1 & \text{dla } x \in [-1; \infty) \end{cases}$, $g(x) = f(x-5)$
 c) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ x & \text{dla } x \in [-1; \infty) \end{cases}$, $g(x) = f(x-2) + 4$
 d) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in (-\infty; 2) \\ -x & \text{dla } x \in [2; \infty) \end{cases}$, $g(x) = f(x+3) + 1$

4.9. Przekształcanie wykresu przez symetrię względem osi OX

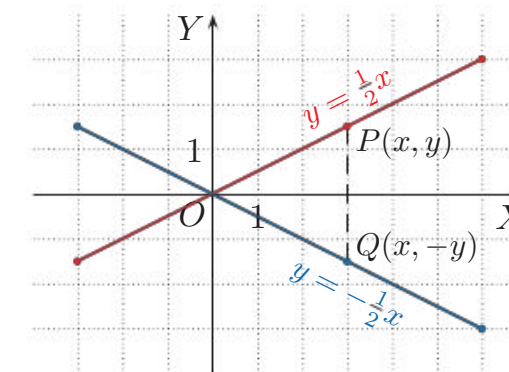
Przykład 1

Naskicuj wykresy funkcji $y = \frac{1}{2}x$ i $y = -\frac{1}{2}x$ określonych dla $x \in [-3; 6]$.

W tabeli obok podano wartości tych funkcji dla wybranych argumentów.

x	-3	-2	0	1	3	4	6
$y = \frac{1}{2}x$	$-1\frac{1}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	2	3
$y = -\frac{1}{2}x$	$1\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	-2	-3

Dla porównania wykresy tych funkcji narysowano w jednym układzie współrzędnych. Zauważmy, że wykresy funkcji $y = \frac{1}{2}x$ oraz $y = -\frac{1}{2}x$ są symetryczne względem osi OX – punktowi $P(x, y)$, należącemu do wykresu funkcji $y = \frac{1}{2}x$, odpowiada punkt $Q(x, -y)$, należący do wykresu funkcji $y = -\frac{1}{2}x$.



Przykład 2

Naskicuj wykresy funkcji $y = \frac{1}{4}x^2$ i $y = -\frac{1}{4}x^2$ określonych dla $x \in [-4; 4]$.

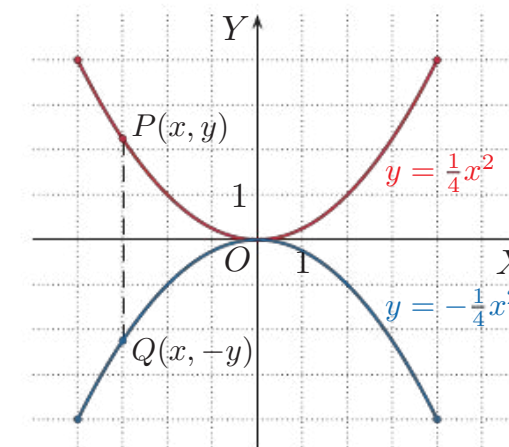
W tabeli obok podano wartości tych funkcji dla wybranych argumentów.

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
$y = \frac{1}{4}x^2$	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4
$y = -\frac{1}{4}x^2$	-4	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-1	-4

Wykresy funkcji:

$$y = \frac{1}{4}x^2 \text{ oraz } y = -\frac{1}{4}x^2$$

są symetryczne względem osi OX – punktowi $P(x, y)$, należącemu do wykresu funkcji $y = \frac{1}{4}x^2$, odpowiada punkt $Q(x, -y)$, należący do wykresu funkcji $y = -\frac{1}{4}x^2$.



Twierdzenie

Wykres funkcji $y = -f(x)$ otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OX .



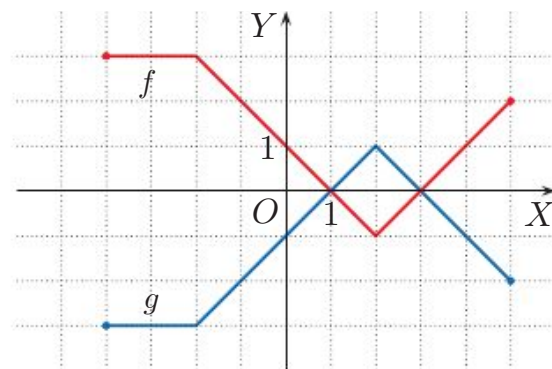
Ćwiczenie 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f oraz wykres funkcji:

$$g(x) = -f(x)$$

Dla każdej z tych funkcji podaj:

- jej dziedzinę i zbiór wartości,
- przedziały, w których jest ona rosnąca.



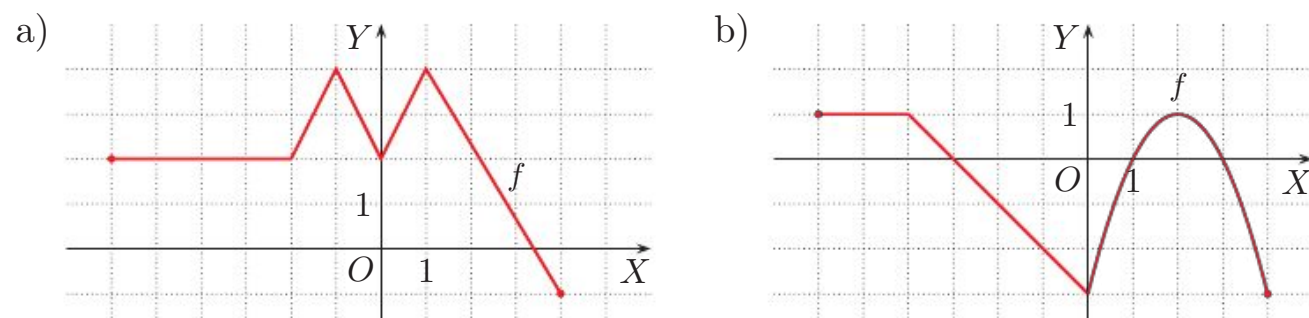
Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykresy funkcji f i g oraz podaj ich zbiory wartości.

- $f(x) = |x|$, $g(x) = -|x|$
- $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2$

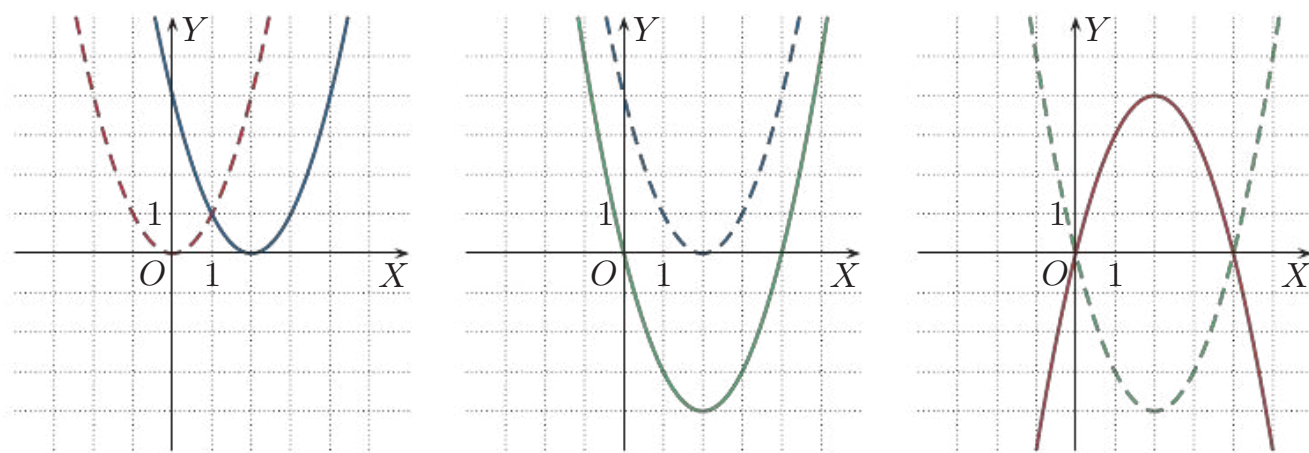
Ćwiczenie 3

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji $f: [-6; 4] \rightarrow \mathbb{R}$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj zbiory wartości funkcji f i g .



Przykład 3

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = x^2$, a następnie kolejno wykresy funkcji: $g(x) = f(x - 2)$, $h(x) = f(x - 2) - 4$, $k(x) = -[f(x - 2) - 4]$.



Linia przerywaną zaznaczono wykres funkcji:
 $f(x) = x^2$
 linią ciągłą – wykres funkcji:
 $g(x) = (x - 2)^2$

Linia przerywaną zaznaczono wykres funkcji:
 $g(x) = (x - 2)^2$
 linią ciągłą – wykres funkcji:
 $h(x) = (x - 2)^2 - 4$

Linia przerywaną zaznaczono wykres funkcji:
 $h(x) = (x - 2)^2 - 4$
 linią ciągłą – wykres funkcji:
 $k(x) = -[(x - 2)^2 - 4]$

Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |x|$ określonej dla $x \in [-4; 4]$, a następnie kolejno wykresy podanych funkcji.

- $g(x) = f(x) - 3$, $h(x) = -(f(x) - 3)$
- $g(x) = f(x) + 1$, $h(x) = -(f(x) + 1)$
- $g(x) = f(x - 1)$, $h(x) = -f(x - 1)$

Ćwiczenie 5

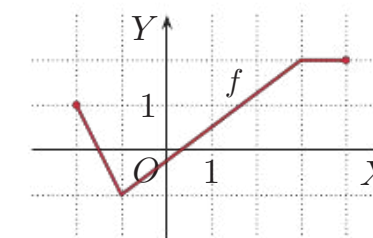
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in (-\infty; 2) \\ 2 & \text{dla } x \in [2; \infty) \end{cases}$, a następnie kolejno wykresy podanych funkcji.

- $g(x) = f(x) - 3$, $h(x) = f(x - 2) - 3$, $k(x) = -[f(x - 2) - 3]$
- $g(x) = f(x + 3)$, $h(x) = f(x + 3) + 1$, $k(x) = -[f(x + 3) + 1]$

Ćwiczenie 6

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f . Naszkicuj wykres funkcji g .

- $g(x) = -f(x - 1)$
- $g(x) = -f(x + 2)$



Zadania

- Sporządź tabelę wartości funkcji $y = f(x)$ i $y = -f(x)$ dla:

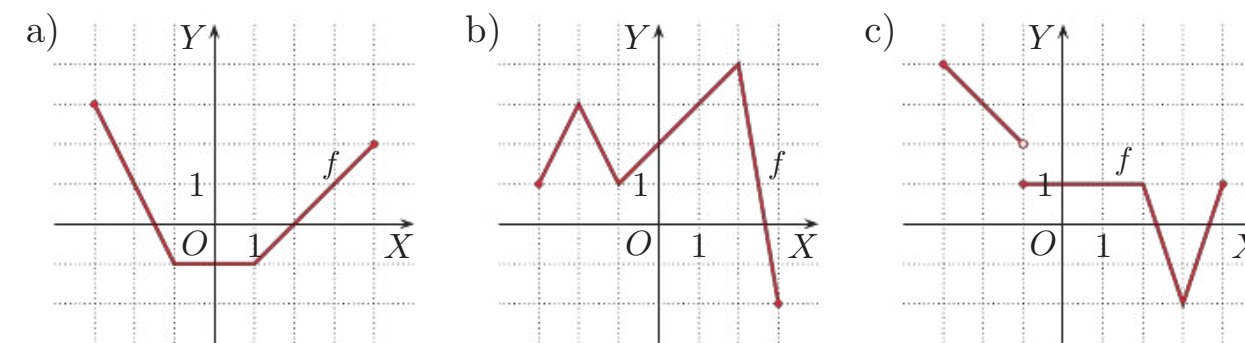
$$x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

- $f(x) = 2x + 1$
- $f(x) = \frac{1}{2}x^2$
- $f(x) = x^2 - x$

- Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \left|\frac{1}{2}x\right|$ określonej dla $x \in [-4; 4]$, a następnie kolejno wykresy podanych funkcji.

- $g(x) = \left|\frac{1}{2}x\right| - 1$, $h(x) = -\left(\left|\frac{1}{2}x\right| - 1\right)$
- $g(x) = \left|\frac{1}{2}x\right| + 1$, $h(x) = -\left(\left|\frac{1}{2}x\right| + 1\right)$

- Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f . Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = -f(x)$ oraz podaj zbiory wartości funkcji f i g .

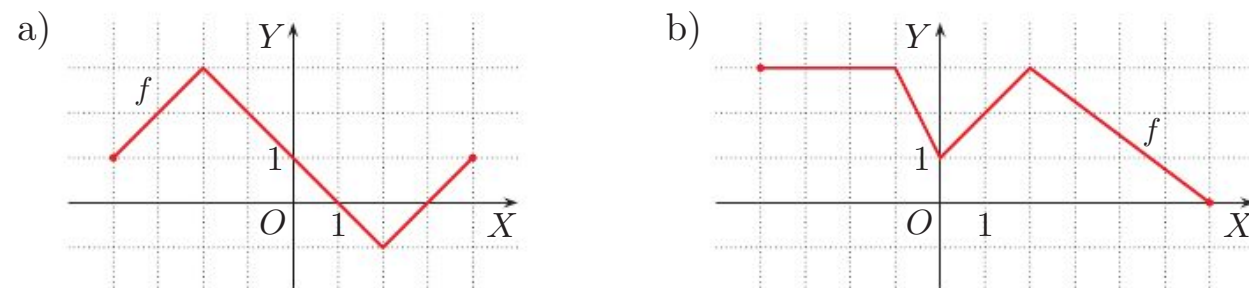




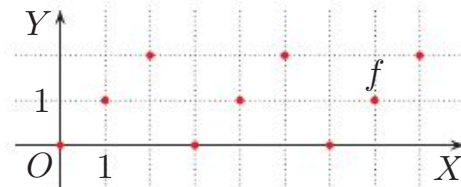
4. Naskicuj wykres funkcji f oraz wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj przedziały monotoniczności funkcji f i g .

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{dla } x \leq 0 \\ 2 & \text{dla } x > 0 \end{cases} & \text{c) } f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \leq 0 \\ \frac{1}{3}x & \text{dla } x > 0 \end{cases} \\ \text{b) } f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \leq -2 \\ -x & \text{dla } -2 < x \leq 3 \\ -3 & \text{dla } x > 3 \end{cases} & \text{d) } f(x) = \begin{cases} 4 & \text{dla } x \leq -2 \\ -2x & \text{dla } -2 < x \leq 1 \\ x-3 & \text{dla } x > 1 \end{cases} \end{array}$$

5. Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji f . Naskicuj wykresy funkcji $g(x) = -f(x-2)$ i $h(x) = -f(x+1)$. Podaj dziedziny i zbiory wartości funkcji g i h .



6. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f , która każdej liczbie naturalnej n przyporządkowuje jej resztę z dzielenia przez 3. Naskicuj wykres funkcji $g(n) = -f(n)$.

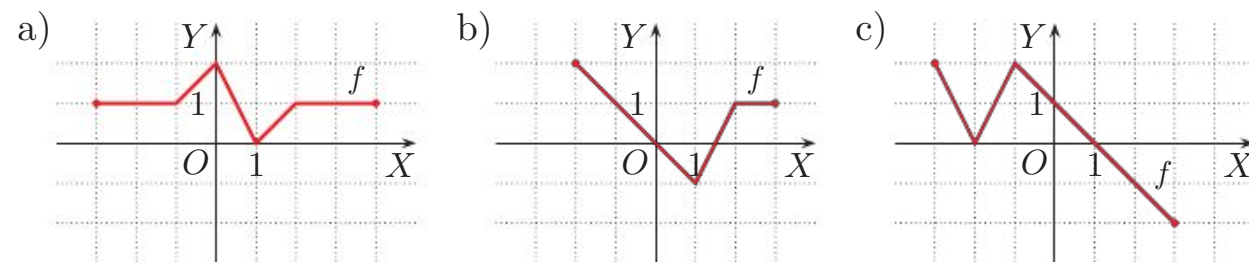


Sprawdź się

7. Naskicuj wykresy funkcji f i $g(x) = -f(x)$. Podaj punkty wspólne tych wykresów.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = |x| - 1 & \text{c) } f(x) = |x - 2| & \text{e) } f(x) = \left|\frac{1}{2}x\right| - 2 \\ \text{b) } f(x) = |x| + 2 & \text{d) } f(x) = |x + 2| & \text{f) } f(x) = |2x| + 1 \end{array}$$

8. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f . Naskicuj wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj zbiór wartości funkcji g oraz jej przedziały monotoniczności.



4.10. Przekształcanie wykresu przez symetrię względem osi OY

Przykład 1

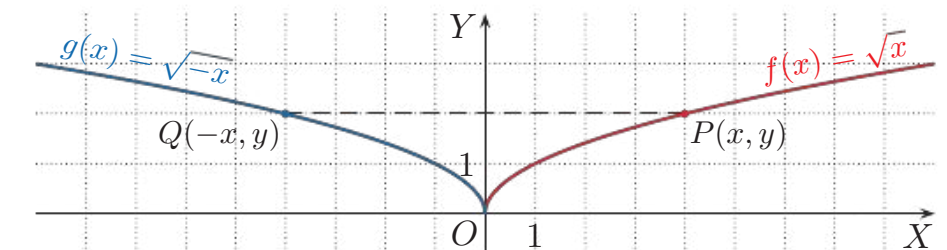
Naskicuj wykres funkcji $f: [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ danej za pomocą wzoru $f(x) = \sqrt{x}$ oraz wykres funkcji $g: (-\infty; 0] \rightarrow \mathbb{R}$ danej za pomocą wzoru $g(x) = \sqrt{-x}$.

Zauważmy, że:

$$g(-4) = f(4) = 2$$

$$g(-1) = f(1) = 1$$

$$g\left(-\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$



Wykresy funkcji f i g są symetryczne względem osi OY – punktowi $P(x,y)$, należącemu do wykresu funkcji f , odpowiada punkt $Q(-x,y)$, należący do wykresu funkcji g .

Twierdzenie

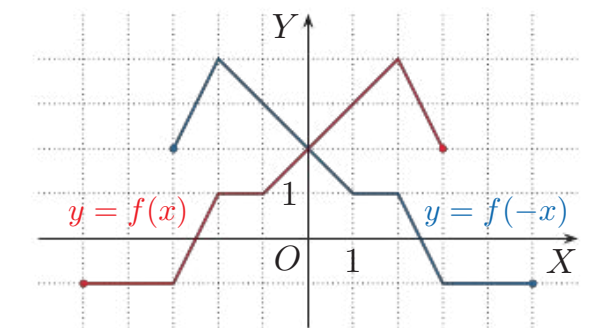
Wykres funkcji $y = f(-x)$ otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OY.

Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji $y = f(x)$ oraz $y = f(-x)$.

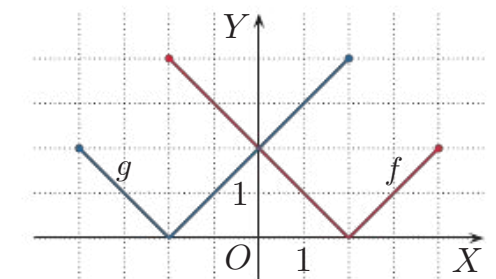
Zwróć uwagę na to, że dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest przedział $[-5; 3]$, a dziedziną funkcji $y = f(-x)$ jest przedział $[-3; 5]$.

Funkcje $y = f(x)$ i $y = f(-x)$ mają ten sam zbiór wartości.



Ćwiczenie 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: [-2; 4] \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = |x-2|$ oraz wykres funkcji $g(x) = f(-x)$. Podaj dziedzinę funkcji g oraz miejsca zerowe funkcji f i g .



Ćwiczenie 2

Dana jest funkcja $f: [-2; 6] \rightarrow \mathbb{R}$, której miejscami zerowymi są liczby $-1, 0, 3$ i 5 . Podaj dziedzinę i miejsca zerowe funkcji $g(x) = f(-x)$.

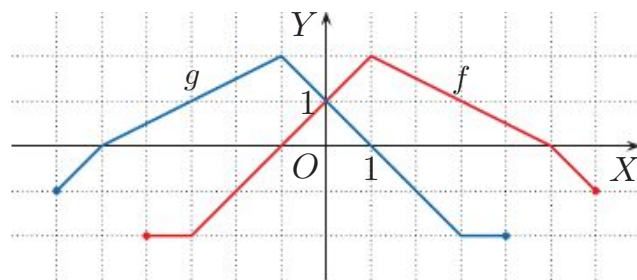




Przykład 3

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: [-4; 6] \rightarrow \mathbb{R}$ oraz wykres funkcji $g(x) = f(-x)$.

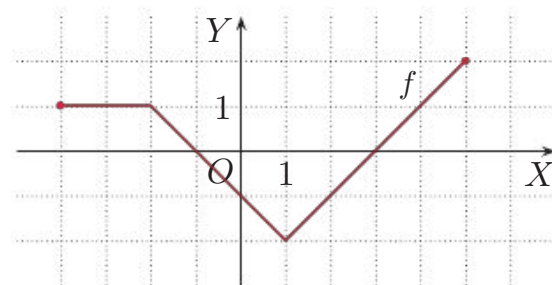
W tabeli poniżej porównano informacje dotyczące tych funkcji.



Funkcja	f	g
Dziedzina	$[-4; 6]$	$[-6; 4]$
Miejsca zerowe	-1 i 5	-5 i 1
Przedziały monotoniczności	stała w $[-4; -3]$ rośnie w $[-3; 1]$ maleje w $[1; 6]$	stała w $[3; 4]$ rośnie w $[-6; -1]$ maleje w $[-1; 3]$

Ćwiczenie 3

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: [-4; 5] \rightarrow \mathbb{R}$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(-x)$. Podaj jej dziedzinę i miejsca zerowe oraz przedziały monotoniczności funkcji f i g .



Przykład 4

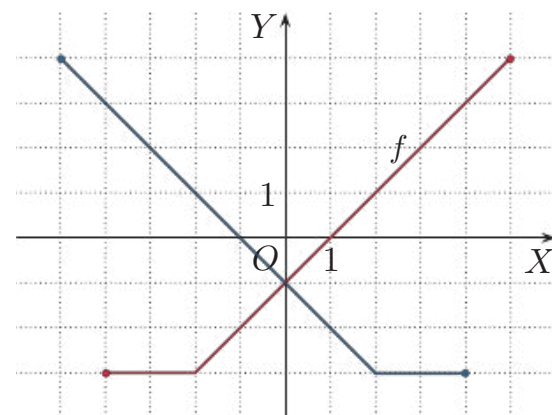
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{dla } x \in [-4; -2] \\ x - 1 & \text{dla } x \in (-2; 5] \end{cases}$$

oraz wykres funkcji $g(x) = f(-x)$.

Zauważ, że funkcja g dana jest wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{dla } x \in [-5; 2] \\ -3 & \text{dla } x \in (2; 4] \end{cases}$$

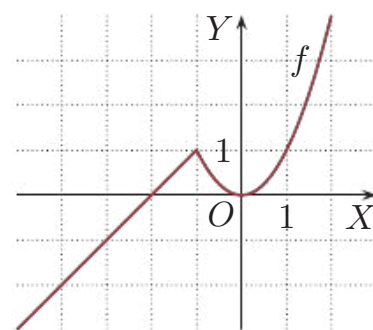


Ćwiczenie 4

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji:

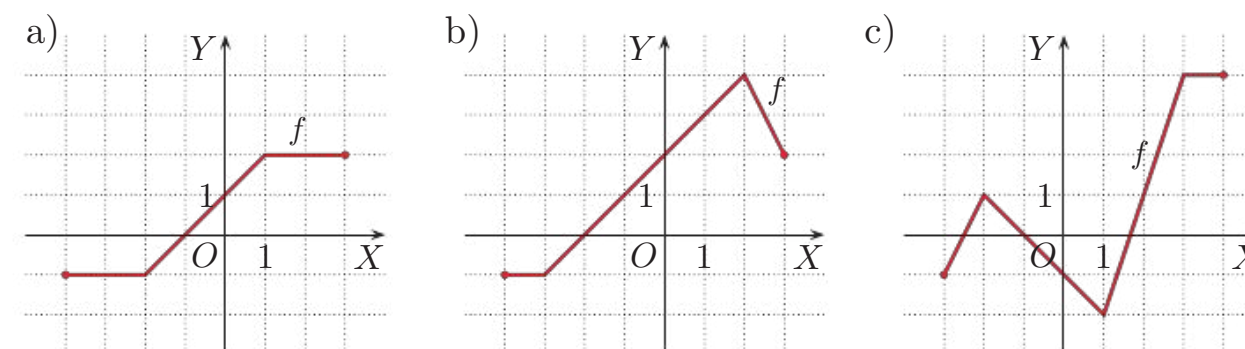
$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -1] \\ x^2 & \text{dla } x \in (-1; \infty) \end{cases}$$

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(-x)$ i podaj jej wzór.



Zadania

1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f . Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(-x)$ oraz podaj dziedziny funkcji f i g .



2. Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie wykres funkcji $g(x) = f(-x)$ oraz podaj jej wzór.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} -3 & \text{dla } x \in [-5; -3) \\ x & \text{dla } x \in [-3; 3] \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in [-4; -2) \\ -x & \text{dla } x \in [-2; 6] \end{cases}$$

3. Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie kolejno wykresy funkcji g i h .

$$\text{a) } f(x) = |x|, \quad g(x) = f(x - 2), \quad h(x) = f(-x - 2)$$

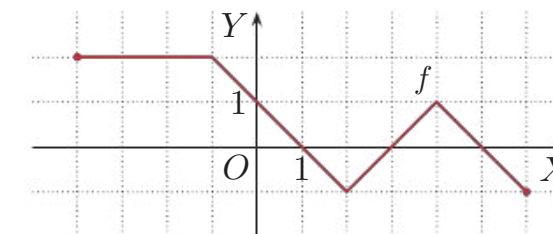
$$\text{b) } f(x) = x^2, \quad g(x) = f(x + 2), \quad h(x) = f(-x + 2)$$

4. Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie wykresy funkcji $g(x) = f(-x)$ i $h(x) = -f(x)$. Podaj przedziały monotoniczności funkcji f , g i h .

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; 2) \\ x & \text{dla } x \in [2; 3) \\ 3 & \text{dla } x \in [3; \infty) \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ -x & \text{dla } x \in [-1; 4] \\ -4 & \text{dla } x \in (4; \infty) \end{cases}$$

Sprawdź się

5. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: [-4; 6] \rightarrow \mathbb{R}$. Podaj dziedzinę funkcji $g(x) = f(-x)$ i naszkicuj jej wykres. Podaj miejsca zerowe funkcji f i g .



6. Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie wykresy funkcji $g(x) = f(-x)$ i $h(x) = -f(x)$. Podaj przedziały monotoniczności funkcji f , g i h .

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in (-\infty; 4) \\ 4 & \text{dla } x \in [4; \infty) \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ -1 & \text{dla } x \in [1; \infty) \end{cases}$$

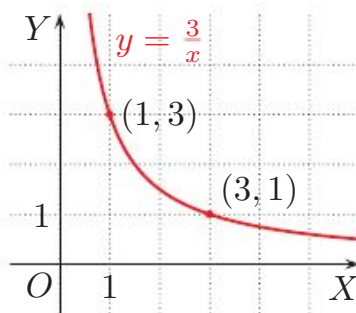


4.11. Proporcjonalność odwrotna

Przykład 1

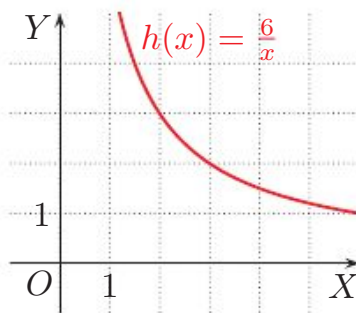
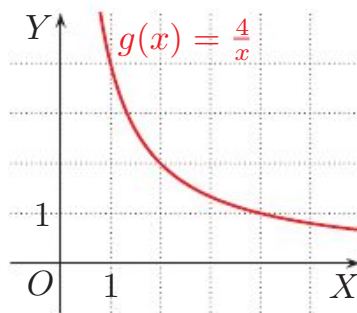
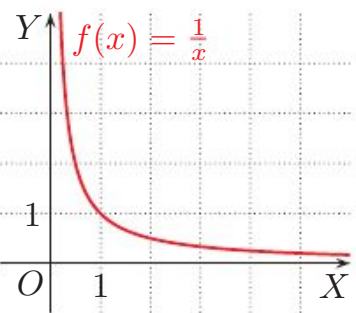
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $y = \frac{3}{x}$, gdzie $x > 0$. Zwróć uwagę na to, że jeśli punkt (x, y) należy do wykresu tej funkcji, to jego współrzędne spełniają zależność $x \cdot y = 3$.

Jedynymi punktami o współrzędnych całkowitych należącymi do wykresu tej funkcji są punkty $(1, 3)$ i $(3, 1)$.



Ćwiczenie 1

Funkcje f , g i h , których wykresy przedstawiono poniżej, określone są dla $x > 0$. Podaj punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu każdej z nich.



Definicja

Funkcję postaci $y = \frac{a}{x}$, gdzie $x > 0$ oraz $a \in \mathbb{R}_+$, nazywamy **proporcjonalnością odwrotną**. Wielkości x i y nazywamy **odwrotnie proporcjonalnymi**, a liczbę a – **współczynnikiem proporcjonalności** odwrotnej.

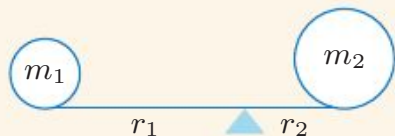
Jeśli wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne, to ich iloczyn jest stały. Wzór proporcjonalności odwrotnej możemy również zapisać w postaci $x \cdot y = a$.

Czy wiesz, że...

Dwie masy m_1 i m_2 umieszczone na równoważni w odległościach r_1 i r_2 od punktu podparcia znajdują się w równowadze, jeśli zachodzi równość:

$$m_1 \cdot r_1 = m_2 \cdot r_2$$

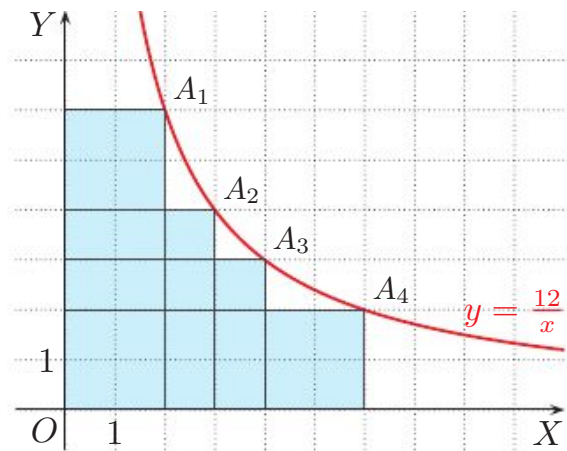
Oznacza to, że masa i jej odległość od punktu podparcia są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi. Odkrycie tego prawa (zwanego też zasadą dźwigni) zawdzięczamy Archimedesowi (ok. 287 r. p.n.e. – ok. 212 r. p.n.e.).



Przykładem wielkości odwrotnie proporcjonalnych są długości x i y boków prostokąta o ustalonym polu P . Zachodzi wówczas zależność $x \cdot y = P$.

Przykład 2

Rozpatrzmy prostokąty, każdy o polu równym 12 i dwóch bokach x , y zawartych w osiach układu współrzędnych (rysunek obok). Wierzchołki A_1 , A_2 , A_3 i A_4 tych prostokątów łączymy krzywą, która jest wykresem funkcji $y = \frac{12}{x}$, gdzie $x > 0$. Ich współrzędne (x, y) spełniają zależność $x \cdot y = 12$.



Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{6}{x}$, gdzie $x > 0$, i narysuj prostokąt, którego jeden z wierzchołków należy do wykresu tej funkcji, a dwa boki zawierają się w osiach układu współrzędnych. Ile jest równe pole tego prostokąta? Czy odpowiedź zależy od wyboru wierzchołka należącego do wykresu funkcji f ?

Zauważ, że jeśli wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne, to wraz ze wzrostem jednej z nich druga proporcjonalnie maleje.

Przykład 3

W tabeli podano, ile kilogramów winogron możemy kupić za 24 zł w zależności od ceny za jeden kilogram.

x – cena [zł]	4	5	6	8	12
y – masa [kg]	6	4,8	4	3	2

Wraz ze wzrostem ceny za kilogram x proporcjonalnie maleje liczba kilogramów winogron y , które możemy kupić za 24 zł.

Wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne: $y = \frac{24}{x}$.

Ćwiczenie 3

Na zakup jabłek przeznaczono kwotę 9 zł. Niech x oznacza cenę za kilogram, a y – liczbę kilogramów jabłek, które możemy kupić.

x [zł]	1,5	2	3	4,5	6
y [kg]	?	?	?	?	1,5

- Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.
- W układzie współrzędnych zaznacz punkty odpowiadające wartościom z tabeli i korzystając z nich, naszkicuj wykres funkcji $y = \frac{9}{x}$, gdzie $x > 0$.

Zadania

1. Wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij. Podaj wzór tej proporcjonalności i naskicuj jej wykres.

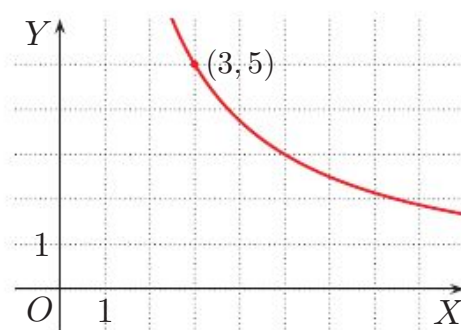
a)

x	1	2	2,5	4	5
y	?	?	3,2	?	?

b)

x	1	2	2,5	4	5
y	?	?	?	2,5	?

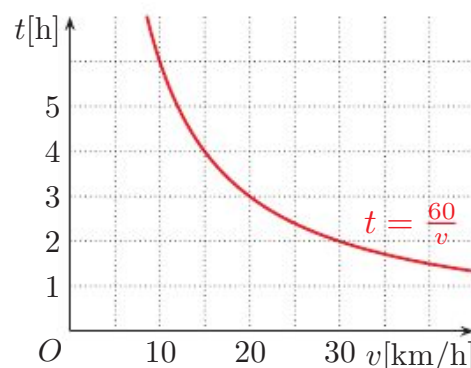
2. Pewną stałą kwotę k zł przeznaczono na zakup śliwek. Na wykresie przedstawiono zależność między ceną x w złotych za kilogram a liczbą kilogramów y , które można w tej cenie kupić. Podaj wartość k i przedstaw za pomocą tabeli zależność między x i y dla $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.



Czas t potrzebny do przebycia drogi s ze średnią prędkością v wyraża się wzorem $t = \frac{s}{v}$.

3. Rowerzysta ma do przebycia dystans 60 km. Na wykresie przedstawiono zależność czasu jego jazdy od średniej prędkości. Ile czasu zajmie rowerzyście pokonanie całego dystansu, jeśli będzie jechał z prędkością:

- a) 15 km/h, c) 24 km/h,
b) 18 km/h, d) 25 km/h?



4. Samochód ma do przebycia trasę 240 km. Dobierz odpowiednio jednostki na osiach układu współrzędnych i naskicuj wykres zależności między średnią prędkością samochodu a czasem podróży.

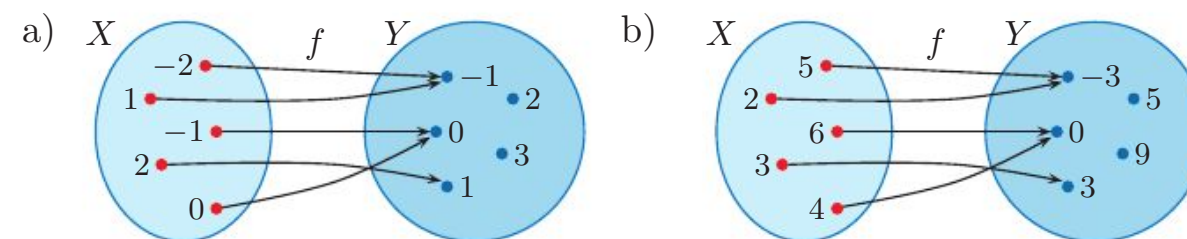
Sprawdź się

5. Naskicuj wykres funkcji $y = f(x)$, gdzie $x > 0$. Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych należy do wykresu tej funkcji?
- a) $f(x) = \frac{2}{x}$ b) $f(x) = \frac{5}{x}$ c) $f(x) = \frac{8}{x}$ d) $f(x) = \frac{18}{x}$
6. Rozważmy n -kąty foremne o obwodzie równym 12. Sporządź odpowiednią tabelę i naskicuj wykres funkcji opisującej zależność długości boku n -kąta od liczby jego boków dla $n \leq 12$. Podaj dziedzinę tej funkcji.

Powtórzenie

Zestaw I

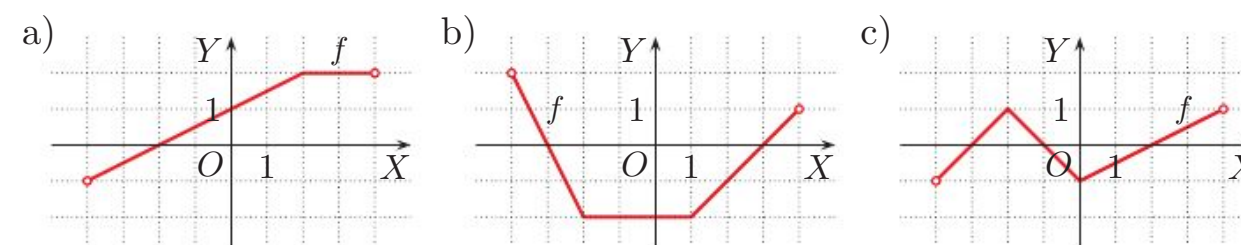
1. Funkcję f przedstawiono w postaci grafu. Podaj jej dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe oraz wartość najmniejszą i wartość największą. Sporządź tabelę i naskicuj wykres funkcji f .



2. Naskicuj wykres funkcji $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ określonej za pomocą wzoru $f(x) = |x|$. Odczytaj z wykresu zbiór wartości funkcji f .

- a) $X = \{-4, -1, 0, 1, 3\}$ b) $X = [-4; 4]$ c) $X = [-2; \infty)$

3. Dany jest wykres funkcji $f: (-4; 4) \rightarrow \mathbb{R}$. Podaj jej przedziały monotoniczności i miejsca zerowe oraz argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie.



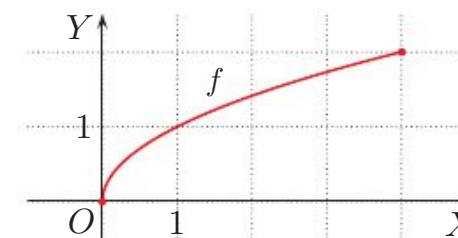
4. Naskicuj wykres funkcji f , korzystając z wykresu funkcji $y = |x|$.

- a) $f(x) = |x| - \frac{1}{2}$ c) $f(x) = |x - 5|$ e) $f(x) = |x + 3| - 2$
b) $f(x) = |x| + 4$ d) $f(x) = |x + \frac{5}{2}|$ f) $f(x) = |x - 2| + 3$

5. Naskicuj wykres funkcji f , a następnie wykresy funkcji $g(x) = f(x) + 3$ i $h(x) = f(x) - 2$. Podaj zbiory wartości funkcji g i h .

- a) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in [-3; 1] \\ -1 & \text{dla } x \in (1; 4] \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} -4 & \text{dla } x \in (-4; -2) \\ 2x & \text{dla } x \in [-2; 2) \end{cases}$

6. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: [0; 4] \rightarrow \mathbb{R}$ określonej za pomocą wzoru $f(x) = \sqrt{x}$. Podaj dziedziny funkcji $g(x) = f(x + 2)$ i $h(x) = f(x - 3)$ oraz naskicuj ich wykresy.



7. Dziedziną funkcji f jest zbiór D . Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj wzór funkcji g oraz zbiory wartości funkcji f i g .

a) $f(x) = x - 2$, $D = [-2; 1]$ b) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$, $D = [-2; 4]$

8. Dziedziną funkcji f jest zbiór D . Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie wykres funkcji $g(x) = f(-x)$. Podaj dziedzinę i wzór funkcji g oraz jej wartość najmniejszą i wartość największą.

a) $f(x) = x - 1$, $D = [1; 3]$ b) $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$, $D = [-4; 2]$

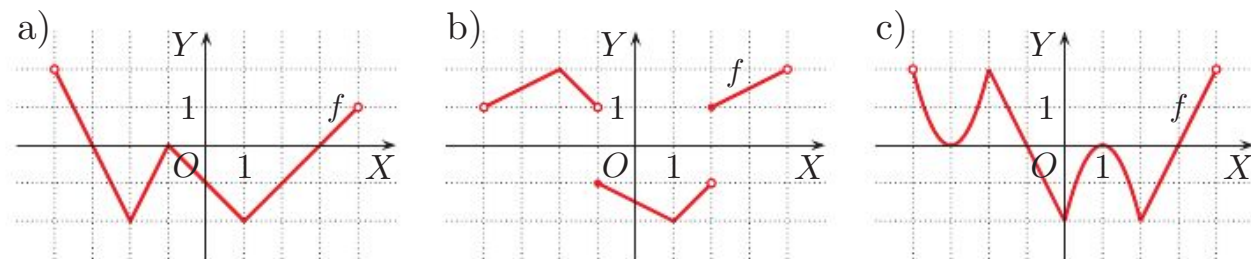
- D** 9. Uzasadnij, że nie istnieje funkcja, do której wykresu należą punkty: $(-5, 1)$, $(-2, -1)$, $(-2, -2)$, $(0, -3)$, $(4, 1)$.

Zestaw II

1. Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Podaj wartości $f(3\sqrt{2})$ i $f(\sqrt{2} - 6)$.

a) $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{dla } x < -4 \\ x + 1 & \text{dla } -4 \leq x < 2 \\ 1 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \leq -3 \\ -x & \text{dla } -3 < x < 3 \\ 4 & \text{dla } x \geq 3 \end{cases}$

2. Dany jest wykres funkcji $f: (-4; 4) \rightarrow \mathbb{R}$. Odczytaj z wykresu rozwiązanie równania $f(x) = -2$ oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) < 0$.



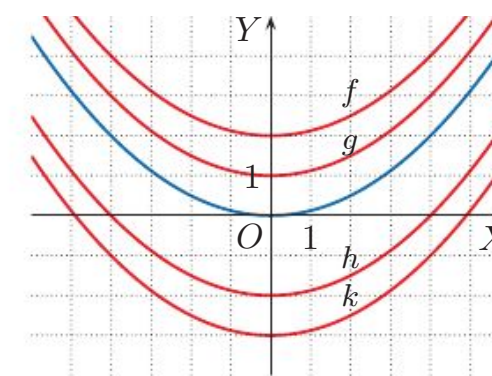
3. Wykres funkcji g przechodzi przez punkt $(0, 1)$. Wykres ten można otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji f wzdłuż osi OY . Naszkicuj wykresy funkcji f i g .

a) $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{dla } x \leq 0 \\ 3 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dla } x < -2 \\ -2 & \text{dla } x \geq -2 \end{cases}$

4. Wykres funkcji g przechodzi przez punkt $(-2, 0)$. Wykres ten można otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji f wzdłuż osi OX . Naszkicuj wykresy funkcji f i g .

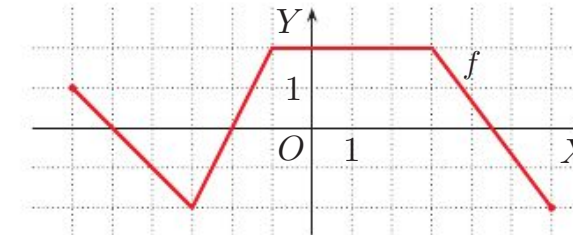
a) $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{dla } x \leq -1 \\ -x + 1 & \text{dla } x > -1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{dla } x \leq -3 \\ -x - 2 & \text{dla } x > -3 \end{cases}$

5. Przedstawione na rysunku obok wykresy funkcji f , g , h , k otrzymano przez odpowiednie przesunięcia wykresu funkcji $y = \frac{1}{8}x^2$ zaznaczonego kolorem niebieskim.



- a) Podaj wzory funkcji f , g , h , k .
b) Do którego wykresu należą poszczególne punkty: $P(8, 6)$, $Q(-4, 3)$, $R(2, 2\frac{1}{2})$?

6. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: [-6; 6] \rightarrow \mathbb{R}$. Naszkicuj wykres funkcji:

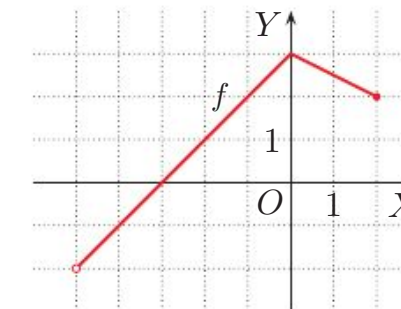


- a) $y = -f(x)$, b) $y = f(-x)$.

7. Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie wykresy funkcji $g(x) = -f(x)$ i $h(x) = f(-x)$. Podaj zbiory wartości funkcji: f , g i h .

a) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x < -2 \\ x & \text{dla } x \geq -2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dla } x < 1 \\ 3 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$

8. Dziedziną funkcji f (rysunek obok) jest przedział $(-5; 2]$. Podaj dziedzinę i naszkicuj wykres funkcji g .



- a) $g(x) = f(x - 3)$ c) $g(x) = -f(x - 2)$
b) $g(x) = f(2 + x)$ d) $g(x) = -f(1 + x)$

9. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ jej kwadrat pomniejszony o podwójną wartość tej liczby. Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie wykres funkcji $g(x) = f(-x)$.

10. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej:

- a) jej resztę z dzielenia przez 3 powiększoną o 1,
b) jej resztę z dzielenia przez 4 pomniejszoną o 4,
c) połowę jej reszty z dzielenia przez 5.

Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj zbiory wartości obu funkcji.

11. Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $x > 0$ oraz $a \in \mathbb{R}$, przechodzi przez punkt $(\frac{5}{2}, \frac{28}{5})$. Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych należy do wykresu funkcji f ? Naszkicuj wykres tej funkcji.



Przykład 1

Ile miejsc zerowych ma funkcja f ?

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ \frac{1}{2}x + 3 & \text{dla } x \in [-2; 2) \\ -2x + 8 & \text{dla } x \in [2; \infty) \end{cases}$$

- A. zero B. jedno C. dwa D. trzy

Aby wskazać poprawną odpowiedź, możemy postąpić na różne sposoby.

- Miejsca zerowe funkcji f możemy wyznaczyć, rozwiązując równania:

$$-2x - 2 = 0, \text{ skąd } x = -1, \text{ ale } -1 \notin (-\infty; -2)$$

$$\frac{1}{2}x + 3 = 0, \text{ skąd } x = -6, \text{ ale } -6 \notin [-2; 2)$$

$$-2x + 8 = 0, \text{ skąd } x = 4 \in [2; \infty)$$

Liczby -1 i -6 nie są miejscami zerowymi funkcji f , jedynym jej miejscem zerowym jest liczba 4 .

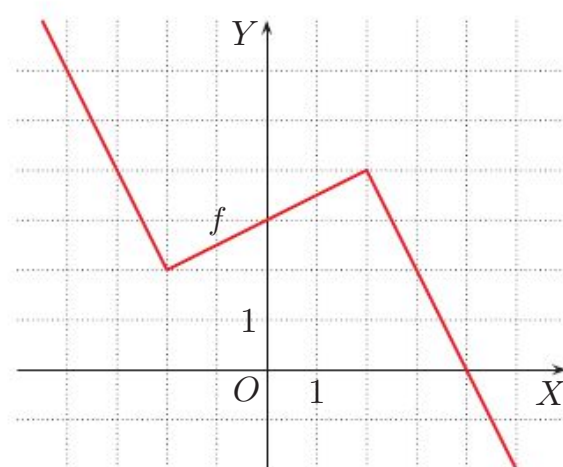
Zatem funkcja f ma jedno miejsce zerowe.

- Możemy też naszkicować wykres funkcji f i odczytać z niego liczbę jej miejsc zerowych.

Odpowiedź: B

→ Zadanie 6, str. 195

→ Zadanie 19, str. 198



Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: [-2; 6] \rightarrow \mathbb{R}$. Suma miejsc zerowych funkcji $g(x) = f(-x)$ jest równa

- A. -2 B. -4 C. -6 D. -8

Aby wskazać poprawną odpowiedź, możemy postąpić na różne sposoby.

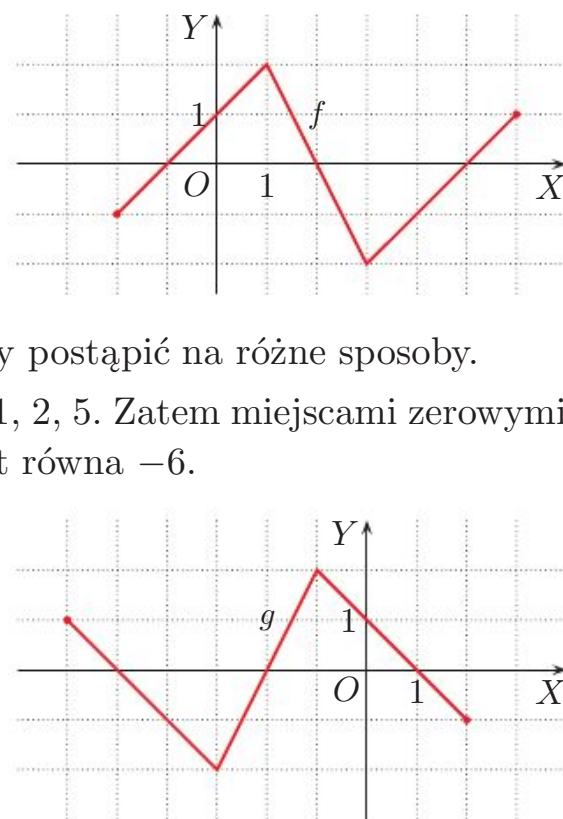
- Miejscami zerowymi funkcji f są liczby: $-1, 2, 5$. Zatem miejscami zerowymi funkcji g są liczby: $1, -2, -5$. Ich suma jest równa -6 .

- Możemy też naszkicować wykres funkcji g i odczytać z niego jej miejsca zerowe. Są to liczby: $-5, -2$ i 1 . Ich suma jest równa -6 .

Odpowiedź: C

→ Zadanie 9, str. 196

→ Zadanie 20, str. 198



W zadaniach 1–10 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej jej resztę z dzielenia przez 4. Niech $a = f(129)$. Wówczas

- A. $a > f(29)$ B. $a = f(59)$ C. $a < f(89)$ D. $a = f(149)$

Zadanie 2 (0–1)

Liczba $-\frac{3}{2}$ jest miejscem zerowym funkcji danej wzorem

- A. $y = x^2 + \frac{9}{4}$ B. $y = x^3 - \frac{27}{8}$ C. $y = \frac{3}{2} - \frac{2}{3}x^2$ D. $y = \frac{3}{2} - \frac{4}{9}x^3$

Zadanie 3 (0–1)

Liczba -2 nie jest miejscem zerowym funkcji danej wzorem

- A. $y = \sqrt{x+2}$ B. $y = x^2 - 2$ C. $y = x^3 + 8$ D. $y = \frac{2}{x} + 1$

Zadanie 4 (0–1)

Do wykresu funkcji $f(x) = x + \sqrt{x^2}$ należy punkt

- A. $A(-2, 0)$ B. $B(4, 6)$ C. $C(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ D. $D(-4, -8)$

Zadanie 5 (0–1)

Do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{3}(x-1)^2$ należy punkt

- A. $(-2\sqrt{3}, -13\sqrt{3})$ C. $(-2\sqrt{3}, -13\sqrt{3} + 12)$
B. $(2\sqrt{3}, 13\sqrt{3})$ D. $(2\sqrt{3}, 13\sqrt{3} - 12)$

Zadanie 6 (0–1) → Przykład 1, str. 194

Ile miejsc zerowych ma funkcja f ?

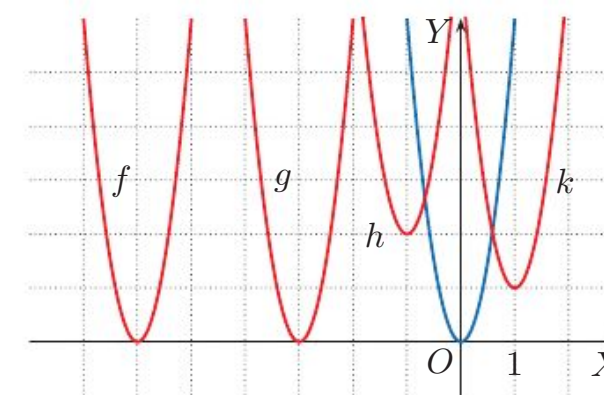
$$f(x) = \begin{cases} |x| - 2 & \text{dla } x \in (-\infty; 4) \\ \frac{1}{2}x + 2 & \text{dla } x \in [4; \infty) \end{cases}$$

- A. zero B. jedno C. dwa D. trzy

Zadanie 7 (0–1)

Wykresy funkcji f, g, h, k otrzymano przez odpowiednie przesunięcia wykresu funkcji $y = 6x^2$. Zatem

- A. $f(x) = 6(x^2 - 12x + 36)$
B. $g(x) = 6(x^2 + 6x + 9)$
C. $h(x) = 6(x^2 - 2x + 1) + 2$
D. $k(x) = 6(x^2 - 1) + 1$





Zadanie 8 (0-1)

Jeśli $D_f = [-5; 3]$, to dziedziną funkcji $g(x) = f(x - 1) + 2$ jest zbiór

- A. $[-2; 6]$ B. $[-3; 5]$ C. $[-4; 4]$ D. $[-6; 2]$

Zadanie 9 (0-1) → Przykład 2, str. 194

Funkcja f ma pięć miejsc zerowych: $-5, -3, -1, 0, 2$. Wynika stąd, że suma miejsc zerowych funkcji $y = -f(-x)$ jest równa

- A. -9 B. -7 C. 7 D. 9

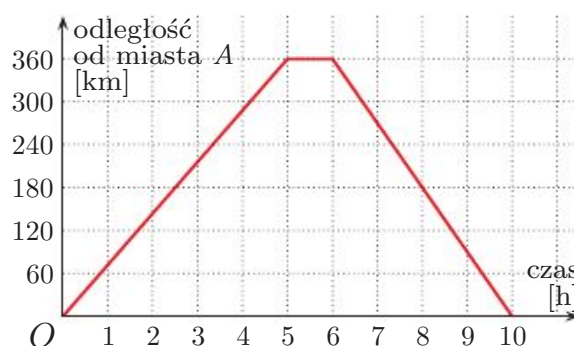
Zadanie 10 (0-1)

Do wykresu funkcji $f(x) = ax^2$ należy punkt $(-\sqrt{3}, -\frac{3}{2})$. Zatem do tego wykresu należy również punkt

- A. $(\sqrt{3}, -\frac{9}{4})$ B. $(\sqrt{3}, \frac{3}{2})$ C. $(-3, -\frac{3}{2})$ D. $(-3, -\frac{9}{2})$

Zadanie 11 (0-1)

Przejazd samochodem z miasta A do odległego o 360 km miasta B i z powrotem zajął (razem z godzinnym postojem) 10 godzin. Na wykresie obok przedstawiono, jak zmieniała się w tym czasie odległość od miasta A .



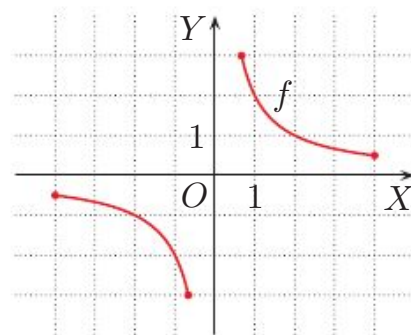
Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Średnia prędkość przejazdu z miasta A do miasta B wynosiła 90 km/h.	P	F
Średnia prędkość na całej trasie (bez postoju) wynosiła 72 km/h.	P	F

Zadanie 12 (0-1)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = \frac{2}{x}$, której dziedziną jest zbiór $D = [-4; -\frac{2}{3}] \cup [\frac{2}{3}; 4]$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.



Do zbioru wartości funkcji f należy siedem liczb całkowitych.	P	F
Funkcja f jest funkcją malejącą.	P	F



Zadanie 13 (0-2)

Funkcja $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$ jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych różnych od zera.

Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Do wykresu funkcji f nie należy punkt

- A. $(-1, 0)$ D. $(-2, \frac{15}{4})$ G. $(\sqrt{2}, \frac{3}{2})$
B. $(1, 0)$ E. $(\frac{1}{2}, -\frac{15}{4})$ H. $(-\sqrt{2}, \frac{3}{2})$
C. $(0, 1)$ F. $(-\frac{1}{4}, -\frac{255}{16})$ I. $(-\sqrt{2}, -\frac{3}{2})$

Zadanie 14 (0-1)

Dziedziną funkcji f jest przedział $[-4; 2]$.

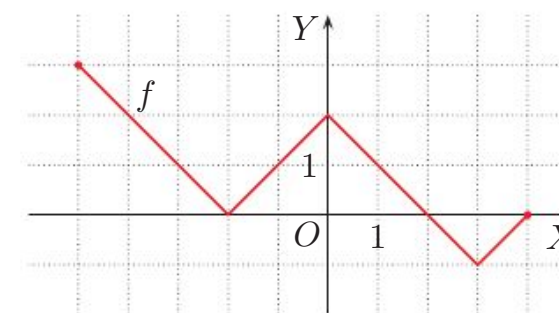
Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Dziedziną funkcji $g(x) = f(x + 2)$ jest przedział

A.	$[-6; 0]$,	ponieważ wykres funkcji g otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji f o 2 jednostki	1.	do góry.
B.	$[-2; 4]$,		2.	w prawo.
			3.	w lewo.

Zadanie 15

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f: [-5; 4] \rightarrow \mathbb{R}$.



Zadanie 15.1 (0-1)

Uzupełnij zdanie tak, aby było prawdziwe.

Zbiorem rozwiązań nierówności $f(x) \leq 1$ jest $\boxed{?}$.

Zadanie 15.2 (0-1)

Uzupełnij zdanie tak, aby było prawdziwe.

Najdłuższym przedziałem, w którym funkcja f jest rosnąca, jest $\boxed{?}$.

Zadanie 16 (0-1)

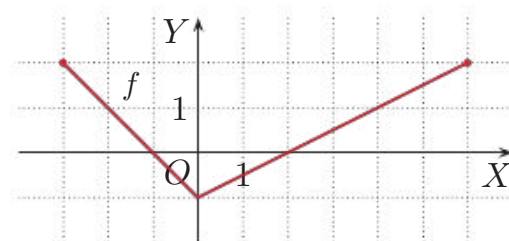
Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f(x) = \begin{cases} -3x + 5 & \text{dla } x < 2 \\ -5x + 3 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$

Zadanie 17 (0-2)

Funkcja f określona na zbiorze liczb rzeczywistych jest funkcją nierosnącą, a punkty $(-6, 4)$, $(-3, 2)$, $(1, 2)$ i $(4, -5)$ należą do jej wykresu. Wyznacz wartość $f(-2\sqrt{2})$.

Zadanie 18 (0-2)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: [-3; 6] \rightarrow \mathbb{R}$. Podaj dziedzinę funkcji $g(x) = f(-x)$ i naszkicuj jej wykres.


Zadanie 19 (0-2) → Przykład 1, str. 194

Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{dla } x < -1 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & \text{dla } -1 \leq x \leq 3 \\ x - 2 & \text{dla } x > 3 \end{cases}$

Zadanie 20 (0-3) → Przykład 2, str. 194

Miejscami zerowymi funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ są liczby -3 , 2 i 4 . Wyznacz sumę miejsc zerowych funkcji $g(x) = f(-x + 6)$.

Zadanie 21 (0-4)

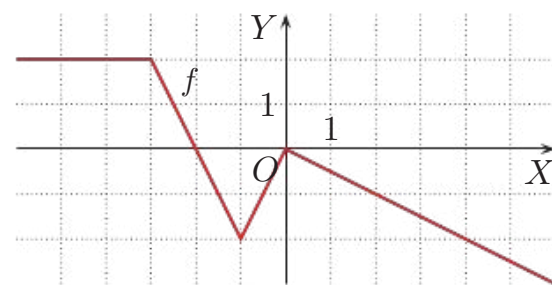
Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = 2x + 2$. Naszkicuj wykresy funkcji $g(x) = -f(x)$ i $h(x) = f(x - 4)$. Oblicz pole obszaru ograniczonego osią OX i wykresami funkcji g i h .

Zadanie 22 (0-4)

Zbiór X jest zbiorem liczb naturalnych mniejszych od 12. Funkcja f każdej liczbie ze zbioru X przyporządkowuje resztę z dzielenia przez 4. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(x) - 1$ i podaj jej miejsca zerowe.

Zadanie 23 (0-4)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj przedziały monotoniczności funkcji g i odczytaj zbiór rozwiązań nierówności $g(x) \leq 0$.


D Zadanie 24 (0-1)

Podstawą trójkąta równoramiennego jest odcinek o końcach $(0, 0)$ i $(a, 0)$, gdzie $a > 0$. Trzeci wierzchołek trójkąta należy do wykresu funkcji $y = \frac{4}{x}$, gdzie $x > 0$. Uzasadnij, że pole tego trójkąta nie zależy od wyboru parametru a .

5 Funkcja liniowa

Dla snowboardzisty czy narciarza kąt nachylenia stoku jest bardzo ważny. Jest to jeden z czynników branych pod uwagę podczas ustalania stopnia trudności trasy narciarskiej.

Kąt nachylenia terenu ma też zasadnicze znaczenie w zagadnieniach inżynierskich, takich jak budowa dróg czy kolei. Przy badaniu kąta nachylenia terenu wykorzystuje się pojęcie kąta nachylenia prostej.

O nachyleniu prostej będącej wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$ decyduje współczynnik a .

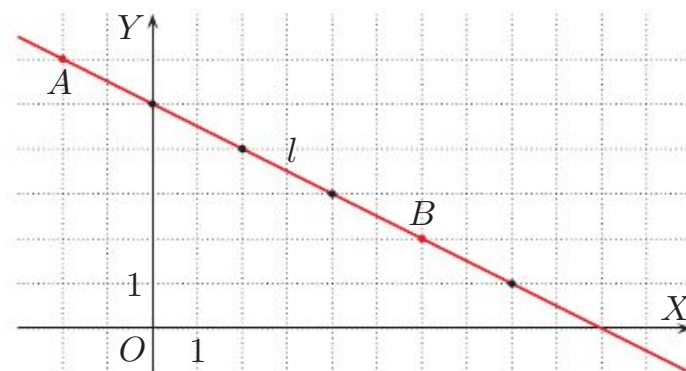


Punkty kratowe należące do prostej

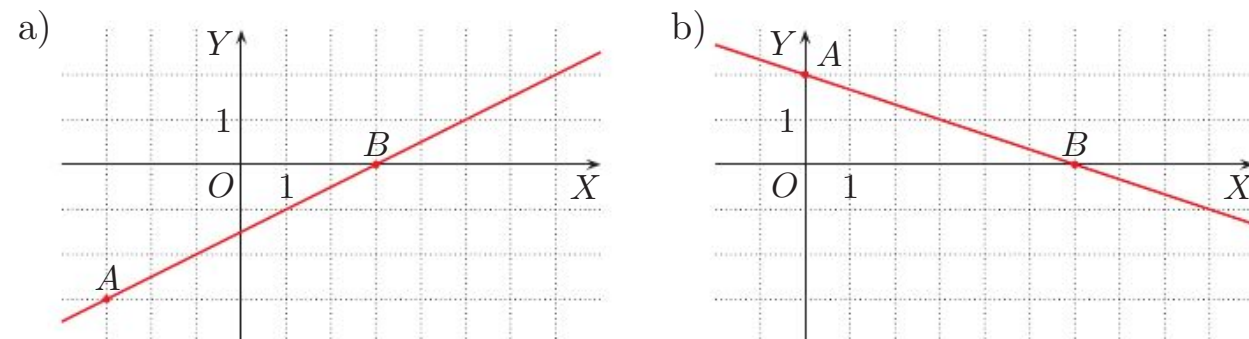
Punkty kratowe to punkty, których obie współrzędne są całkowite.

Punkty $A(-2, 6)$ i $B(6, 2)$ należą do prostej l . Do odcinka AB należą również następujące punkty kratowe: $(0, 5)$, $(2, 4)$ i $(4, 3)$.

Punkt $(8, 1)$ jest punktem kratowym, który należy do prostej l , ale nie należy do odcinka AB .



1. Podaj współrzędne wszystkich punktów kratowych należących do odcinka AB oraz dowolnych trzech punktów kratowych należących do prostej l , ale nienależących do odcinka AB .



Przykład 1

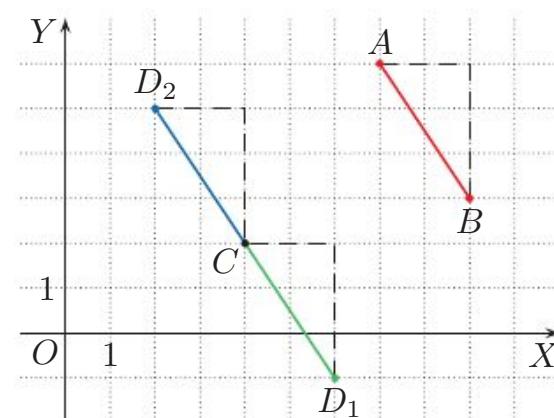
Dane są punkty $A(7, 6)$, $B(9, 3)$ i $C(4, 2)$. Wyznacz współrzędne punktu D tak, aby odcinki AB i CD były równoległe oraz miały równe długości.

W układzie współrzędnych rysujemy odcinek AB i zaznaczamy punkt C .

Zauważmy, że aby przenieść się z punktu A do punktu B , przesuwamy się o 2 jednostki w prawo i o 3 jednostki w dół.

Zatem warunki zadania są spełnione przez dwa punkty:

$$D_1(6, -1) \text{ i } D_2(2, 5)$$



2. Wyznacz współrzędne punktu D tak, aby odcinki AB i CD były równoległe oraz miały równe długości.

$$\text{a) } A(-2, 2), B(2, 4), C(3, 1) \quad \text{b) } A(-1, 4), B(2, 1), C(4, 2)$$

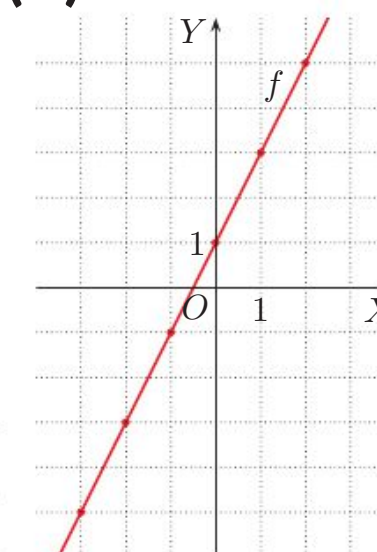
5.1. Wykres funkcji liniowej (1)

Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji określonej za pomocą wzoru $f(x) = 2x + 1$, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych.

Aby naszkicować wykres funkcji $f(x) = 2x + 1$, sporządzamy tabelę wartości funkcji dla wybranych argumentów.

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-5	-3	-1	1	3	5



Otrzymane punkty zaznaczamy w układzie współrzędnych. Zwróć uwagę, że wszystkie te punkty leżą na jednej prostej – jest ona wykresem funkcji f .

Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji f , której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych.

$$\text{a) } f(x) = x + 2 \quad \text{b) } f(x) = 2x - 1 \quad \text{c) } f(x) = -x \quad \text{d) } f(x) = -x + 3$$

Definicja

Funkcję $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem $f(x) = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, nazywamy **funkcją liniową**.

Wykresem funkcji $f(x) = ax + b$ (używamy też zapisu $y = ax + b$) jest **prosta**. Aby naszkicować wykres tej funkcji, wystarczy znaleźć dwa należące do niego punkty i poprowadzić przez nie prostą (przez dwa różne punkty przechodzi tylko jedna prosta). Prosta ta ma równanie $y = ax + b$. Powiemy też krótko: prosta $y = ax + b$.

Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{5}{3}x - 1$.

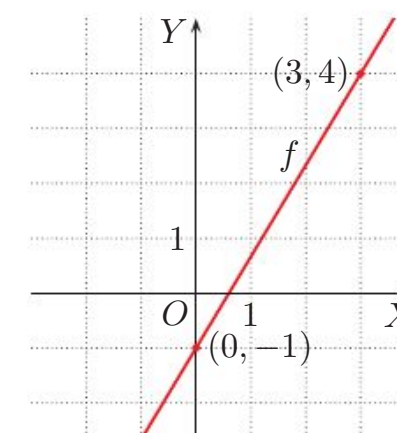
$$\text{Dla } x = 0 \text{ mamy } f(0) = \frac{5}{3} \cdot 0 - 1 = -1.$$

$$\text{Dla } x = 3 \text{ mamy } f(3) = \frac{5}{3} \cdot 3 - 1 = 4.$$

Otrzymane wyniki można przedstawić w tabeli.

x	0	3
$f(x)$	-1	4

Punkty $(0, -1)$ i $(3, 4)$ należą do wykresu funkcji f .



Ćwiczenie 2

Znajdź dwa punkty kratowe należące do wykresu funkcji f . Naskicuj ten wykres.

a) $f(x) = \frac{3}{2}x - 2$ b) $f(x) = -\frac{3}{5}x$ c) $f(x) = \frac{3}{4}x + 2$ d) $f(x) = -\frac{4}{7}x - 1$

Definicja

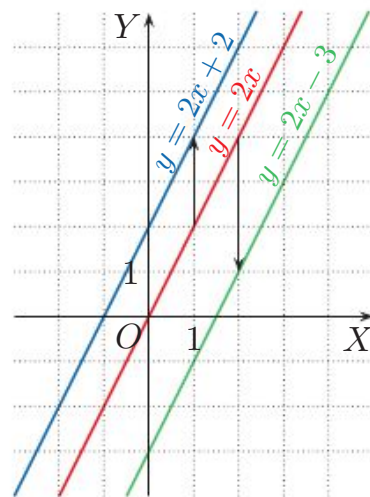
Liczbę a występującą we wzorze funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ nazywamy **współczynnikiem kierunkowym** prostej, a liczbę b – **wyrazem wolnym**.

Przykład 3

Wykresy funkcji liniowych $y = 2x + 2$ i $y = 2x - 3$ są prostymi równoległymi. Każdy z nich możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = 2x$ wzdłuż osi OY .

Po przesunięciu prostej $y = 2x$:

- o 2 jednostki w górę otrzymamy prostą $y = 2x + 2$,
- o 3 jednostki w dół otrzymamy prostą $y = 2x - 3$.



Ćwiczenie 3

Naskicuj wykres funkcji $y = 3x$, a następnie wykres funkcji f .

a) $f(x) = 3x + 1$ b) $f(x) = 3x + 3$ c) $f(x) = 3x - 2$ d) $f(x) = 3x - \frac{1}{2}$

Zauważmy, że wykresy funkcji liniowych o tym samym współczynniku kierunkowym są prostymi równoległymi. Proste, które są wykresami funkcji liniowych o różnych współczynnikach kierunkowych, nie są równoległe.

Twierdzenie

Proste dane równaniami $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2$.

Uwaga. Zdanie: „ p wtedy i tylko wtedy, gdy q ” oznacza, że prawdziwe są dwa zdania: „jeżeli p , to q ” oraz „jeżeli q , to p ”

Ćwiczenie 4

Które spośród prostych $l_1, l_2, \dots, l_8$ są równoległe?

$l_1: y = \frac{1}{2}x - 3$ $l_3: y = -\frac{1}{2}x + 3$ $l_5: y = 8 - \frac{1}{2}x$ $l_7: y = 1 - 2x$
 $l_2: y = 2x - 3$ $l_4: y = 4 + 2x$ $l_6: y = 2x - \sqrt{3}$ $l_8: y = \sqrt{5} - \frac{1}{2}x$

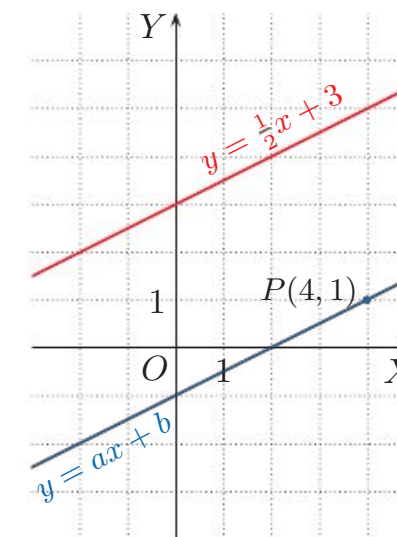
Przykład 4

Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykresem jest prosta przechodząca przez punkt $P(4, 1)$ i równoległa do prostej $y = \frac{1}{2}x + 3$.

Szukana funkcja liniowa ma wzór postaci $y = ax + b$, a jej wykresem jest prosta równoległa do prostej $y = \frac{1}{2}x + 3$, więc $a = \frac{1}{2}$.

Aby obliczyć współczynnik b , podstawiamy współrzędne punktu $P(4, 1)$ do równania $y = \frac{1}{2}x + b$ i otrzymujemy $1 = \frac{1}{2} \cdot 4 + b$, skąd $b = -1$.

Zatem warunki zadania spełnia funkcja $y = \frac{1}{2}x - 1$.



Ćwiczenie 5

Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykresem jest prosta równoległa do prostej l i przechodząca przez punkt P .

- a) $l: y = 2x - 4$, $P(3, 7)$ c) $l: y = -\frac{2}{3}x + 3$, $P(3, -4)$
b) $l: y = -3x + 5$, $P(-\frac{1}{3}, 2)$ d) $l: y = -\frac{3}{5}x - \frac{1}{2}$, $P(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$

Zadania

1. Naskicuj wykres funkcji. Które z punktów $P(4, 3)$, $Q(2, 5)$, $R(-2, -3)$ należą do jej wykresu?

- a) $y = x + 3$ c) $y = 2x - 5$ e) $y = -x + 7$ g) $y = -3x + 6$
b) $y = x - 1$ d) $y = 3x - 1$ f) $y = -2x - 7$ h) $y = -4x - 3$

2. Naskicuj wykres funkcji. Podaj trzy punkty kratowe należące do tego wykresu.

- a) $y = \frac{1}{2}x - 2$ c) $y = -\frac{1}{2}x + 3$ e) $y = \frac{2}{3}x - 1$ g) $y = -\frac{3}{4}x + 4$
b) $y = \frac{1}{3}x + 4$ d) $y = -\frac{1}{4}x - 2$ f) $y = \frac{5}{2}x + 2$ h) $y = -\frac{5}{3}x - 2$

3. Które spośród prostych $l_1, l_2, \dots, l_8$ są równoległe?

$l_1: y = 5x - \frac{1}{2}$ $l_3: y = \frac{1}{5}x - \sqrt{3}$ $l_5: y = -\frac{1}{5}x + 3$ $l_7: y = 4 - \frac{1}{5}x$
 $l_2: y = -\frac{1}{5}x$ $l_4: y = 5x - \frac{1}{5}$ $l_6: y = \frac{1}{5} + 5x$ $l_8: y = 5x - \sqrt{5}$

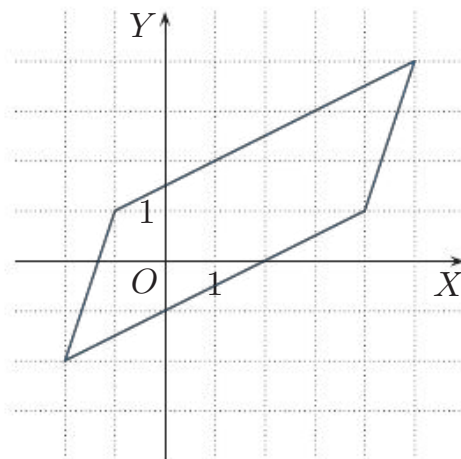
4. Czy czworokąt, którego boki są zawarte w prostych k, l, m, n , jest trapezem? Czy czworokąt ten jest równoległobokiem? Odpowiedź uzasadnij.

- a) $k: y = -\frac{3}{4}x + 3$, $l: y = 0,3x - 2$, $m: y = \frac{1}{3}x + 4$, $n: y = 6 - 0,75x$
b) $k: y = 2\sqrt{2}x - 4$, $l: y = 4 - 2,5x$, $m: y = 1 + \sqrt{8}x$, $n: y = -\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$

5. Wyznacz wzór funkcji, której wykresem jest prosta równoległa do prostej o podanym równaniu i przechodząca przez punkt P .

a) $y = 4x - 2$, $P(0, 5)$ c) $y = -\frac{4}{3}x + 6$, $P(-6, 5)$
b) $y = -3x + 4$, $P(1, 8)$ d) $y = \frac{5}{12}x - 3$, $P(-\frac{4}{5}, \frac{2}{3})$

6. Dwa boki równoległoboku są zawarte w prostych $y = \frac{1}{2}x - 1$ i $y = 3x + 4$ (rysunek obok). Wyznacz równania prostych zawierających pozostałe boki równoległoboku.



7. Jedna z podstaw trapezu o wierzchołkach $A(0, -3)$, $B(4, 0)$, $C(-2, 4)$, $D(-3, -1)$ jest zawarta w prostej $y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$. Wyznacz równanie prostej zawierającej drugą podstawę trapezu.

8. Proste l_1 i l_2 są równoległe do prostej k . Do prostej l_1 należy punkt A , a do prostej l_2 punkt B . Wyznacz równania tych prostych.

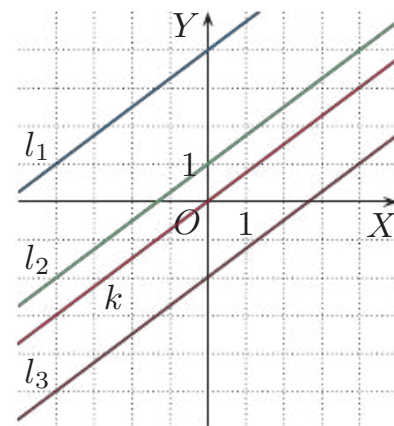
a) $k: y = \sqrt{3}x - 3$, $A(2\sqrt{3}, 6)$, $B(1 - \sqrt{3}, \sqrt{3} - 4)$
b) $k: y = (\sqrt{2} - 1)x + 6$, $A(\sqrt{8}, 3 - \sqrt{2})$, $B(1 + \sqrt{2}, 4)$

Sprawdź się

9. Odczytaj współczynnik kierunkowy podanej prostej, a następnie ją naszkicuj.

a) $y = x - 3$ c) $y = 3 - 2x$ e) $y = \frac{1}{2}x + 2$ g) $y = \frac{1}{2}(6 - 5x)$
b) $y = 2x + 4$ d) $y = 2 - 5x$ f) $y = \frac{x+6}{3}$ h) $y = \frac{1}{3}(4x - 6)$

10. Proste przedstawione na rysunku obok są równoległe do prostej $k: y = \frac{3}{4}x$. Podaj ich równania.



11. Wśród trzech podanych prostych wskaż dwie proste równoległe.

a) $y = 2 - \frac{1}{3}x$, $y = 2x - \frac{1}{3}$, $y = \frac{6-x}{3}$
b) $y = 2(x - 4)$, $y = 4(1 - \frac{x}{2})$, $y = -2(x + 1)$
c) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$, $y = \sqrt{3}x - 3$, $y = \frac{x-1}{\sqrt{3}}$

12. Wyznacz wzór funkcji f , której wykresem jest prosta równoległa do prostej $y = -6x + 5$ i przechodząca przez punkt P .

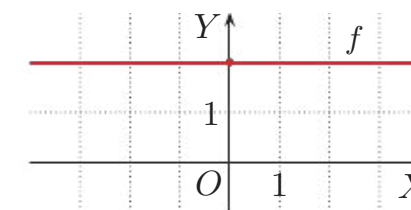
a) $P(1, -4)$ b) $P(\frac{2}{3}, 2)$ c) $P(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5})$ d) $P(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 3\sqrt{2} + 2)$

5.2. Wykres funkcji liniowej (2)

Szczególnym przypadkiem funkcji liniowej jest funkcja stała.

Przykład 1

Funkcja $f(x) = 2$ dla dowolnego argumentu $x \in \mathbb{R}$ przyjmuje wartość równą 2. Jej wykresem jest prosta równoległa do osi OX i przechodząca przez punkt $(0, 2)$.



Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = ax + b$ o współczynnikach:

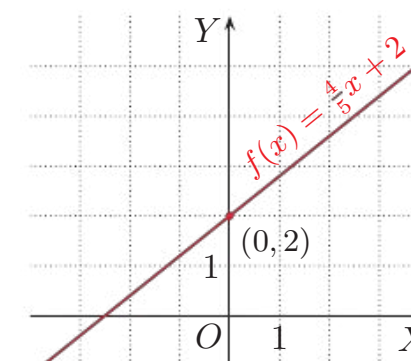
a) $a = 0$, $b = 1$, b) $a = 0$, $b = -\frac{3}{2}$, c) $a = 0$, $b = 0$.

Współczynnik b we wzorze funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ wskazuje punkt przecięcia prostej będącej wykresem funkcji z osią OY .

Przykład 2

Wyznacz współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji $f(x) = \frac{4}{5}x + 2$ z osią OY .

Jeśli podstawimy $x = 0$ do wzoru funkcji, to otrzymamy rzędną punktu, w którym jej wykres przecina oś OY . Zatem $f(0) = \frac{4}{5} \cdot 0 + 2 = 2$, czyli wykres przecina oś OY w punkcie $(0, 2)$.



Twierdzenie

Prosta będąca wykresem funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ przecina oś OY w punkcie $(0, b)$.

Przykład 3

Wyznacz wzór funkcji, której wykres przecina oś OY w punkcie $(0, 3)$ oraz jest prostą równoległą do prostej o równaniu $y = \frac{3}{4}x - 6$.

Szukany wzór funkcji ma postać $f(x) = ax + b$.

Z warunków zadania: $a = \frac{3}{4}$, $b = 3$, zatem $f(x) = \frac{3}{4}x + 3$.

Ćwiczenie 2

Wyznacz wzór funkcji, której wykresem jest prosta równoległa do prostej l i przecinająca oś OY w punkcie P .

a) $l: y = 3x - 4$, $P(0, 6)$ b) $l: y = -\frac{3}{4}x + 1$, $P(0, -\frac{3}{2})$

Ćwiczenie 3

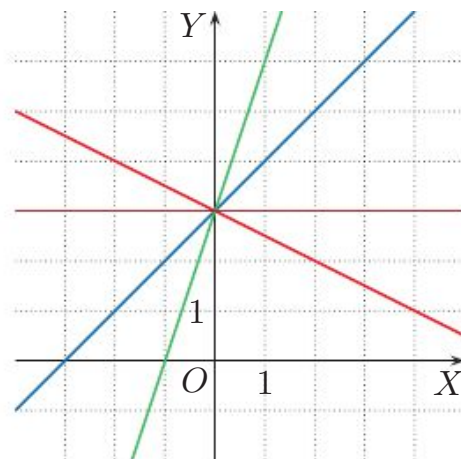
Na rysunku przedstawiono proste przechodzące przez punkt $(0, 3)$. Są one wykresami funkcji liniowych:

$$f_1(x) = x + 3, \quad f_3(x) = -\frac{1}{2}x + 3,$$

$$f_2(x) = 3, \quad f_4(x) = 3x + 3.$$

a) Oblicz wartości tych funkcji dla $x = 1$.

b) Dla każdej z tych funkcji określ, która prosta jest jej wykresem.



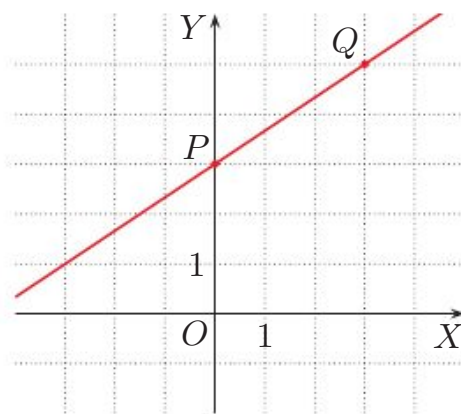
Czy wiesz, że...

Zbiór wszystkich prostych przechodzących przez ustalony punkt nazywamy **pękiem prostych**, a punkt przecięcia tych prostych – **środkiem pęku**.

Przykład 4

Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkty $P(0, 3)$ i $Q(3, 5)$.

Szukana funkcja ma wzór postaci $y = ax + b$. Jej wykres przecina oś OY w punkcie $(0, 3)$, więc $b = 3$. Aby wyznaczyć współczynnik a , podstawiamy współrzędne punktu $Q(3, 5)$ do równania $y = ax + 3$ i dostajemy $5 = 3a + 3$, skąd $a = \frac{2}{3}$. Zatem szukany wzór funkcji to: $y = \frac{2}{3}x + 3$.



Ćwiczenie 4

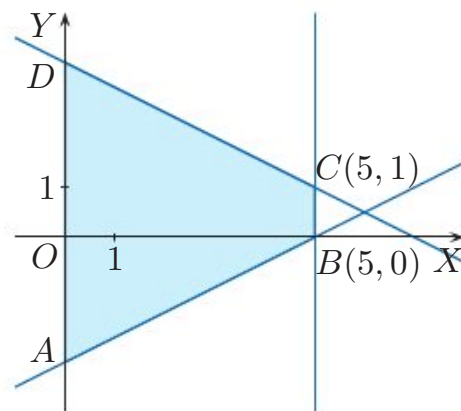
Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkty P i Q . Czy punkt R należy do wykresu tej funkcji?

- a) $P(0, 5)$, $Q(4, 2)$, $R(8, -1)$ b) $P(0, -4)$, $Q(-3, -9)$, $R(6, 5)$

Ćwiczenie 5

a) Ramiona trapezu $ABCD$ zawierają się w prostych $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ i $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ (rysunek obok). Wyznacz współrzędne wierzchołków A i D , a następnie oblicz pole tego trapezu.

b) Proste $y = \frac{5}{3}x + 5$ i $y = -\frac{1}{3}x - 1$ przecinają się w punkcie $(-3, 0)$. Oblicz pole trójkąta ograniczonego tymi prostymi i osią OY .



Zadania

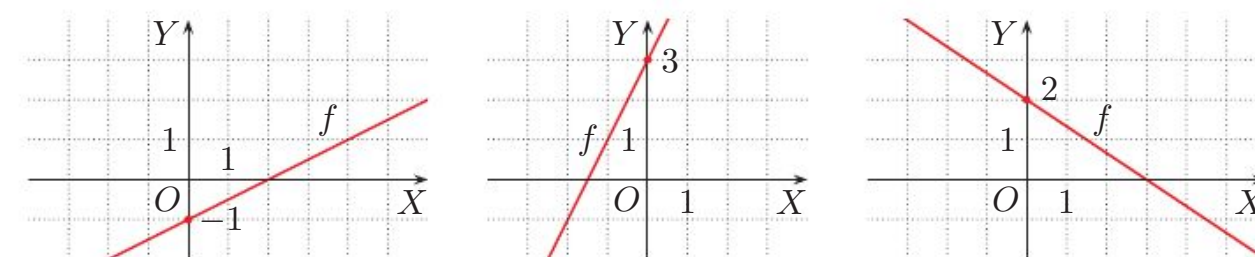
1. Naskicuj w jednym układzie współrzędnych te spośród prostych $l_1, \dots, l_8$, które przecinają oś OY w punkcie $(0, 2)$, a w drugim te, które przecinają oś OY w punkcie $(0, -1)$.

$$l_1: y = 3x + 2 \quad l_3: y = -1 \quad l_5: y = -2x + 2 \quad l_7: y = \frac{1}{2}x - 1$$

$$l_2: y = 3x - 1 \quad l_4: y = 2 \quad l_6: y = -2x - 1 \quad l_8: y = \frac{1}{2}x + 2$$

2. Sprawdź, czy punkt Q należy do wykresu funkcji liniowej f , jeśli należy do niego punkt P .

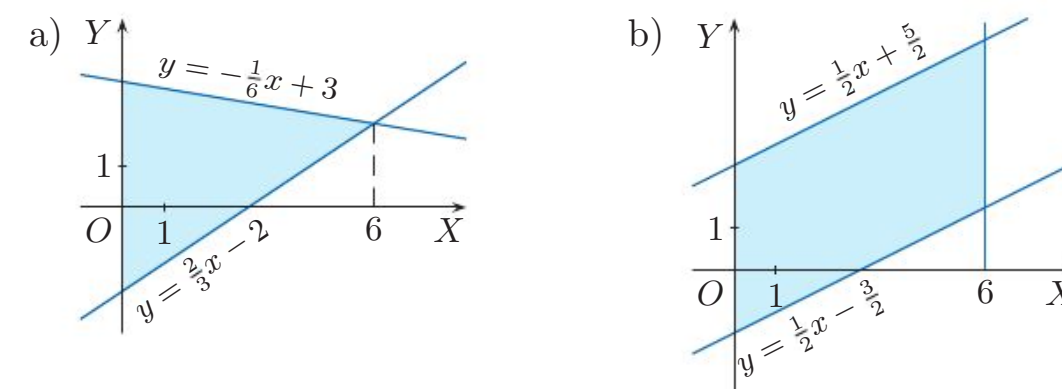
- a) $P(8, 3)$, $Q(16, 9)$ b) $P(-6, -9)$, $Q(7, 19)$ c) $P(9, -4)$, $Q(8, -3\frac{1}{3})$



3. Wykres funkcji liniowej przechodzi przez punkt P i przecina oś OY w punkcie $(0, 4)$. Wyznacz wzór tej funkcji i naskicuj jej wykres.

- a) $P(2, 6)$ b) $P(-6, 1)$ c) $P(5, -11)$ d) $P(\frac{3}{4}, -2)$

4. Skorzystaj z danych na rysunku i oblicz pole zacieniowanej figury.



Sprawdź się

5. Prosta l przecina oś OY w punkcie P , a prosta k – w punkcie Q . Naskicuj te proste. Podaj długość odcinka PQ .

- a) $l: y = 2x + 6$, $k: y = x + 3$ b) $l: y = -\frac{1}{4}x - 2$, $k: y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

6. Naskicuj w jednym układzie współrzędnych proste k_1 , k_2 , k_3 i k_4 . Podaj punkty, w których te proste przecinają oś rzędnych.

a) $k_1: y = \frac{1}{3}x$, $k_2: y = \frac{1}{3}x - 4$, $k_3: y = \frac{1}{3}x + 3$, $k_4: y = \frac{1}{3}x + 5$

b) $k_1: y = -2x$, $k_2: y = -2x - 1$, $k_3: y = -2x + 8$, $k_4: y = -2x + \frac{1}{2}$

5.3. Własności funkcji liniowej

Miejsce zerowe funkcji liniowej

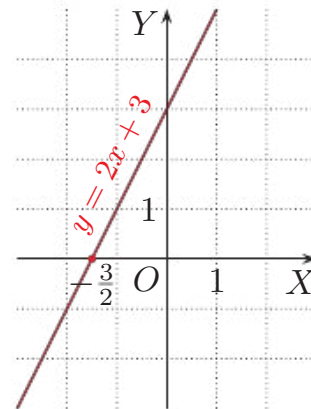
Przykład 1

Wyznacz miejsce zerowe funkcji liniowej $y = 2x + 3$ (wykres obok).

Aby wyznaczyć miejsce zerowe tej funkcji, rozwiążemy równanie:

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= 0 \\ 2x &= -3 \\ x &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Zatem miejsce zerowe jest równe $-\frac{3}{2}$.



Ćwiczenie 1

Uzasadnij podane obok twierdzenie.

Ćwiczenie 2

Wyznacz miejsce zerowe funkcji:

a) $y = -4x + 6$, b) $y = -3x - 4$, c) $y = \frac{1}{2}x + 3$, d) $y = \frac{7}{3}x - \frac{14}{9}$.

Ćwiczenie 3

Dla jakich wartości współczynników a , b funkcja $f(x) = ax + b$:

a) nie ma miejsc zerowych, b) ma nieskończenie wiele miejsc zerowych?

Przykład 2

Oblicz pole trójkąta wyznaczonego przez osie układu współrzędnych i wykres funkcji $f(x) = \frac{9}{16}x + 3$ (rysunek obok).

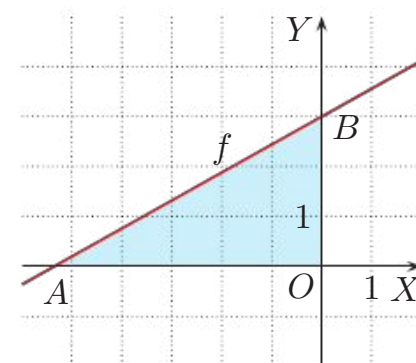
Wyznaczamy miejsce zerowe funkcji f :

$$\frac{9}{16}x + 3 = 0 \text{ dla } x = -\frac{16}{3}. \text{ Zatem } |OA| = \frac{16}{3}.$$

Punkt B ma współrzędne $(0, 3)$, stąd $|OB| = 3$.

Obliczamy pole trójkąta AOB :

$$P = \frac{1}{2}|OA| \cdot |OB| = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{3} \cdot 3 = 8$$



Symbolem $|OA|$ oznaczamy długość odcinka OA .

Ćwiczenie 4

Oblicz pole trójkąta wyznaczonego przez osie układu współrzędnych i wykres funkcji f .

a) $f(x) = 2x + 4$ b) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 2$ c) $f(x) = -\frac{1}{2}x - 4$ d) $f(x) = \frac{5}{3}x - 5$

Monotoniczność funkcji liniowej

Funkcja liniowa może być funkcją rosnącą, malejącą lub stałą.

Przypomnijmy, że funkcję f nazywamy **rosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów x_1, x_2 spełniony jest warunek: jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) < f(x_2)$.

Jeśli $a > 0$, to funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ jest **rosnąca**.

Dowód

Rozpatrzmy funkcję $f(x) = ax + b$, gdzie $a > 0$.

Niech x_1, x_2 będą dowolnymi argumentami takimi, że $x_1 < x_2$.

Wówczas mamy:

$$\begin{aligned} x_1 &< x_2 \quad / \cdot a \\ ax_1 &< ax_2 \\ ax_1 + b &< ax_2 + b \end{aligned}$$

Mnożymy obie strony nierówności przez liczbę $a > 0$, zatem nie zmieniamy jej zwrotu.

Oznacza to, że $f(x_1) < f(x_2)$. Zatem f jest funkcją rosnącą.

Funkcja f jest funkcją **malejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów x_1, x_2 spełniony jest warunek: jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) > f(x_2)$.

Jeśli $a < 0$, to funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ jest **malejąca**.

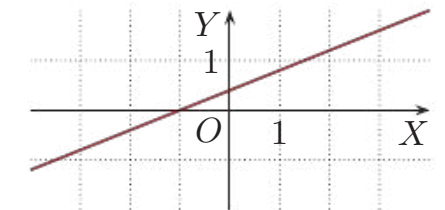
Ćwiczenie 5

Udowodnij powyższe twierdzenie.

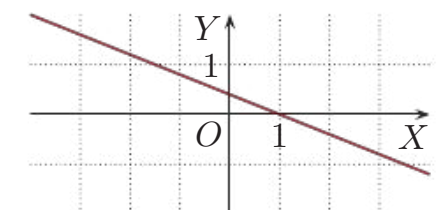
Funkcja f jest funkcją **stałą**, jeśli dla dowolnych argumentów x_1, x_2 prawdziwa jest równość: $f(x_1) = f(x_2)$.

Jeśli $a = 0$, to funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ jest funkcją **stałą**.

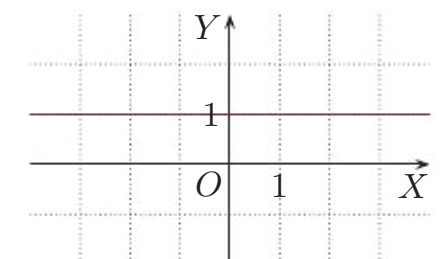
Jeśli funkcja liniowa jest funkcją stałą, to jej wykresem jest prosta równoległa do osi OX .



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej, której wartości rosną wraz ze wzrostem argumentów.



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej, której wartości maleją wraz ze wzrostem argumentów.



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej, która przyjmuje stałe tę samą wartość.

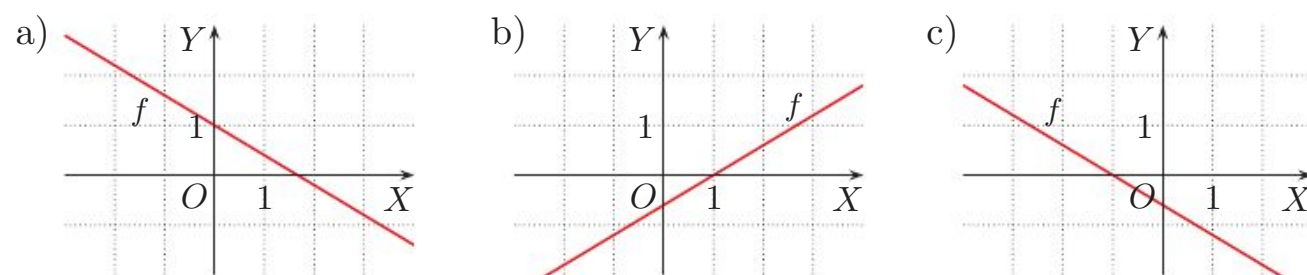
Ćwiczenie 6

Określ monotoniczność funkcji f .

- a) $f(x) = 5x - 12$ c) $f(x) = (3 - 2\sqrt{2})x$
b) $f(x) = 8 - 3x$ d) $f(x) = -3$

Ćwiczenie 7

Dany jest wykres funkcji $f(x) = ax + b$. Podaj znaki współczynników a i b .

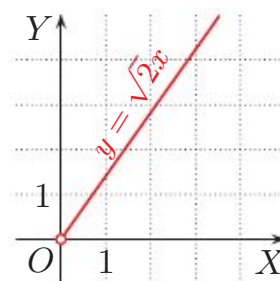


■ Proporcjonalność prosta

Przypomnijmy, że zależność między dwiema dodatnimi wielkościami x i y daną wzorem $y = ax$, gdzie $a \in \mathbb{R}_+$, nazywamy **proporcjonalnością prostą**. Wielkości x i y nazywamy **wprost proporcjonalnymi**, a liczbę a – **współczynnikiem proporcjonalności** prostej.

Przykład 3

Długość boku kwadratu x i długość jego przekątnej y są wielkościami wprost proporcjonalnymi: zachodzi równość $y = \sqrt{2}x$. Zależność tę przedstawiono na wykresie obok.



Ćwiczenie 8

Czy opisane wielkości są odwrotnie proporcjonalne, czy wprost proporcjonalne? Podaj wzór tej proporcjonalności.

- a) Długość boku trójkąta równobocznego i jego obwód.
b) Długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego o ustalonym polu P .
c) Obwód i promień okręgu.
d) Długości przekątnych rombu o ustalonym polu P .

Ćwiczenie 9

Wielkości x i y są wprost proporcjonalne. Podaj wzór tej proporcjonalności, a następnie uzupełnij poniższą tabelę. Naszkicuj wykres tej proporcjonalności.

a)

x	$\frac{3}{4}$	1	2
y	$2\frac{1}{4}$	?	?

b)

x	1	1,8	?
y	?	1,2	2

c)

x	$2\frac{1}{3}$	?	14
y	$1\frac{2}{3}$	5	?

Ćwiczenie 10

a) Samochód jedzie autostradą ze stałą prędkością. W półtorej godziny pokonał 165 km. Oblicz odległość, jaką ten samochód pokona w dwie i pół godziny.

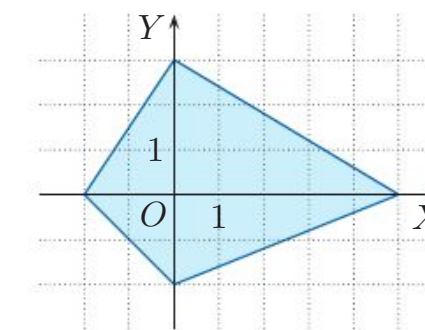
Dla ruchu ze stałą prędkością v przebyta droga s jest wprost proporcjonalna do czasu t :

$$s = v \cdot t$$

b) Samochód jadący ze stałą prędkością znalazł się 60 km od punktu początkowego o godzinie 13.00. O godzinie 15.24 był już od tego punktu oddalony o 252 km. Jak daleko od punktu początkowego był ten samochód o 16.00?

Zadania

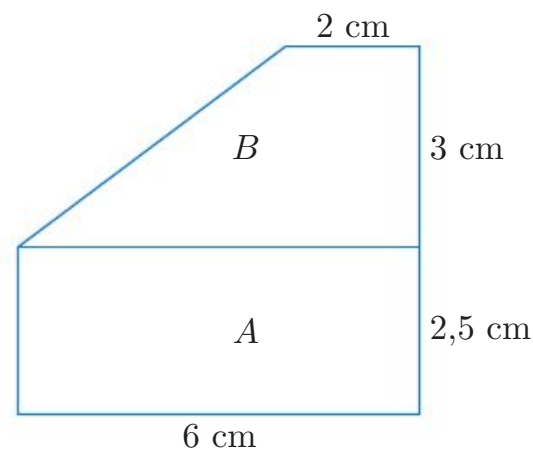
- Przez które ćwiartki układu współrzędnych przechodzi prosta będąca wykresem funkcji f ?
a) $f(x) = -\frac{3}{2}x + 1$ c) $f(x) = -8x - 3$ e) $f(x) = (1 - \sqrt{2})x + 3$
b) $f(x) = 4x + 1$ d) $f(x) = 12x - 1$ f) $f(x) = -5$
- Określ monotoniczność funkcji $f(x) = mx - 4$ dla:
a) $m = \sqrt{3} - 2$, b) $m = 5 - 2\sqrt{5}$, c) $m = 3 - \sqrt[3]{-27}$.
- Określ monotoniczność funkcji f w zależności od parametru m .
a) $f(x) = (5 - m)x$ b) $f(x) = (1 + 5m)x$ c) $f(x) = (|m| - 1)x$
- Określ monotoniczność funkcji, której wykresem jest prosta przechodząca przez podane punkty.
a) $(-8, 6)$ i $(4, 12)$ c) $(6, \sqrt{5})$ i $(10, \sqrt{5})$ e) $(-1, \frac{2}{3})$ i $(2, \frac{7}{12})$
b) $(-37, -9)$ i $(-9, -37)$ d) $(3\sqrt{2}, 7)$ i $(2\sqrt{3}, 5)$ f) $(\frac{2}{3}, -8)$ i $(\frac{3}{5}, -7)$
- Wyznacz wzór funkcji liniowej, do której wykresu należy punkt:
a) $(0, 4)$ i która przyjmuje wartości ujemne tylko dla $x < -6$,
b) $(0, -\frac{1}{2})$ i która przyjmuje wartości dodatnie tylko dla $x > 2$,
c) $(0, -2)$ i która przyjmuje wartości nieujemne tylko dla $x \leq -4$.
- Wyznacz wzory funkcji liniowych, w których wykresach zawierają się:
a) boki przedstawionego obok czworokąta,
b) boki czworokąta o wierzchołkach:
 $A(-48, 0)$, $B(0, -72)$, $C(36, 0)$, $D(0, 144)$.



7. Wykres pewnej funkcji liniowej i osie układu współrzędnych ograniczają trójkąt równoramienny. Wyznacz wzór tej funkcji, jeśli wiadomo, że:
- przyjmuje ona wartości ujemne tylko dla $x > 3$,
 - do jej wykresu należy punkt $(0, -4)$.

- D** 8. a) Uzasadnij, że długość boku kwadratu i jego obwód są wielkościami wprost proporcjonalnymi,
 b) Uzasadnij, że długość boku kwadratu i jego pole nie są wielkościami wprost proporcjonalnymi (mimo że wraz ze wzrostem długości boku kwadratu rośnie jego pole).

9. Przykładem wielkości wprost proporcjonalnych są odległość na mapie (planie) i odpowiadająca jej odległość w terenie. Na rysunku poniżej przedstawiono plan sąsiadujących ze sobą działek budowlanych A i B.



Skala mapy (planu) to stosunek odległości na mapie do odpowiadających im odległości rzeczywistych.

- Działka A ma kształt prostokąta, którego krótszy bok ma długość 15 m. Oblicz obwód tej działki.
 - Działka B ma kształt trapezu prostokątnego. Czy na jej ogrodzenie wystarczy 95 m bieżących siatki, jeśli brama ma mieć szerokość 2 m?
10. Prostokątną działkę budowlaną o wymiarach $20 \text{ m} \times 30 \text{ m}$ przedstawiono na planie w postaci prostokąta o wymiarach $x \text{ cm} \times (x + 2) \text{ cm}$. Wyznacz skalę tego planu.

Sprawdź się

11. Wyznacz punkty, w których prosta o podanym równaniu przecina osie układu współrzędnych. Naszkicuj tę prostą i określ monotoniczność funkcji, której jest ona wykresem.
- $y = 3x + 6$
 - $y = -2x - 3$
 - $y = \frac{1}{2}x + 3$
 - $y = -\frac{2}{3}x - 2$
12. Oblicz pole trójkąta ograniczonego osiami układu współrzędnych i prostą:
- $y = -2x + 4$,
 - $y = 3x - 6$,
 - $y = -\frac{1}{4}x - 1$,
 - $y = 6x + 3$.
13. Podaj wzór proporcjonalności prostej, do której wykresu należy punkt:
- $(2\frac{1}{2}, 15)$,
 - $(2\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2})$,
 - $(3\frac{1}{2}, 2\frac{4}{5})$.

5.4. Równanie prostej na płaszczyźnie

Jeśli znamy współrzędne dwóch różnych punktów należących do prostej, możemy wyznaczyć jej równanie. Dla prostej będącej wykresem funkcji liniowej wyznaczamy równanie postaci $y = ax + b$.

Definicja

Równanie postaci $y = ax + b$ nazywamy **równaniem kierunkowym prostej**.

Przykład 1

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $C(-2, 1)$ i $D(4, 3)$.

Aby wyznaczyć współczynniki a, b równania $y = ax + b$, rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 1 = a \cdot (-2) + b \\ 3 = a \cdot 4 + b \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Równania układu otrzymujemy,} \\ \text{podstawiając współrzędne punktów } C \text{ i } D \\ \text{do równania } y = ax + b. \end{array}$$

$$\begin{cases} b = 2a + 1 \\ 3 = 4a + 2a + 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Wyznaczamy } b \text{ z pierwszego równania} \\ \text{i podstawiamy do drugiego równania} \end{array}$$

$$\begin{cases} b = 2a + 1 \\ 6a = 2 \end{cases}$$

Stąd $a = \frac{1}{3}$ oraz $b = 2 \cdot \frac{1}{3} + 1 = \frac{5}{3}$, czyli równanie prostej ma postać $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.

Ćwiczenie 1

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty C i D.

- $C(-1, -5), D(3, 3)$
- $C(-2, 4), D(8, -1)$
- $C(-3, -3), D(6, 3)$

Przykład 2

Sprawdź, czy punkty $A(-1, -1)$, $B(2, 5)$ i $C(6, 12)$ są współliniowe, czyli czy leżą na jednej prostej.

Równanie prostej AB zapisujemy w postaci $y = ax + b$ i rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} -1 = a \cdot (-1) + b \\ 5 = a \cdot 2 + b \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Równania układu otrzymujemy,} \\ \text{podstawiając współrzędne punktów } A \text{ i } B \\ \text{do równania } y = ax + b. \end{array}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para liczb $a = 2$ i $b = 1$. Zatem równanie prostej AB ma postać $y = 2x + 1$. Współrzędne punktu C nie spełniają tego równania ($12 \neq 2 \cdot 6 + 1$), więc punkty A, B, C nie są współliniowe.

Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy punkty A , B , C są współliniowe.

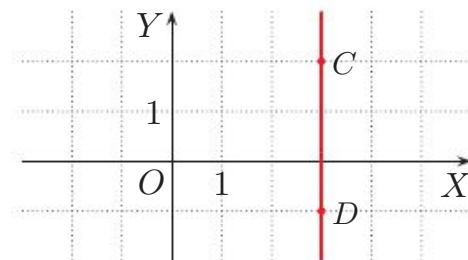
- a) $A(0, 1)$, $B(6, 2)$, $C(12, 3)$ c) $A(-2, 6)$, $B(2, -2)$, $C(5, -7)$
b) $A(8, 3)$, $B(6, 4)$, $C(-2, 8)$ d) $A(-4, 5)$, $B(7, 5)$, $C(7, 2\sqrt{6})$

Przykład 3

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $C(3, 2)$ i $D(3, -1)$.

Do szukanej prostej należą wszystkie punkty o pierwszej współrzędnej równej 3. Jej równanie ma postać $x = 3$.

Zwróć uwagę na to, że prosta równoległa do osi OY nie jest wykresem funkcji (dlaczego?), a jej równania nie można zapisać w postaci kierunkowej.

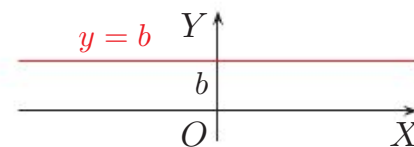


Ćwiczenie 3

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty C i D . Czy ta prosta jest wykresem funkcji liniowej?

- a) $C(4, -6)$, $D(4, 6)$ b) $C(-5, 1)$, $D(3, 9)$ c) $C(\frac{1}{5}, 9)$, $D(\frac{1}{5}, 7)$

Równanie prostej $y = b$ (równoległej do osi OX) jest równaniem w postaci kierunkowej. Dla tej prostej współczynnik $a = 0$.



Ćwiczenie 4

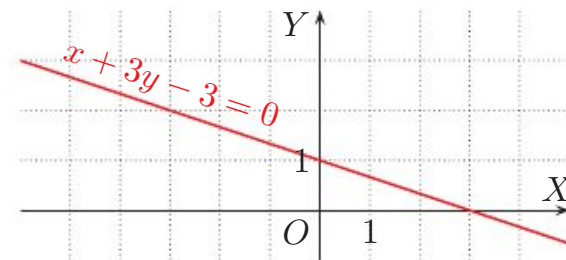
Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty C i D .

- a) $C(-5, -3)$, $D(7, -3)$ b) $C(4, \frac{1}{2})$, $D(8, \frac{1}{2})$ c) $C(-3, 4)$, $D(3, 6)$

Przykład 4

Naszkicuj prostą daną za pomocą równania $x + 3y - 3 = 0$.

Równanie przekształcamy do postaci kierunkowej $y = -\frac{1}{3}x + 1$ i następnie szkicujemy prostą.



Definicja

Równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie $A \neq 0$ lub $B \neq 0$, nazywamy **równaniem ogólnym prostej**.

Równanie każdej prostej na płaszczyźnie (również prostej równoległej do osi OY) można zapisać w postaci $Ax + By + C = 0$.

Ćwiczenie 5

Naszkicuj prostą daną równaniem ogólnym.

- a) $-x + 2y - 4 = 0$ b) $6x + 3y - 9 = 0$ c) $\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y + 2 = 0$

Jedna prosta może mieć wiele równań ogólnych. Na przykład każde z poniższych równań opisuje tę samą prostą.

- I. $2x + y - 4 = 0$ II. $4x + 2y - 8 = 0$ III. $x + \frac{1}{2}y - 2 = 0$

Zauważ, że po przekształceniu do postaci kierunkowej w każdym z powyższych przykładów otrzymujemy równanie $y = -2x + 4$.

Ćwiczenie 6

Które z poniższych równań opisują tę samą prostą?

- $l: -\frac{3}{4}x + y - 1 = 0$ $n: 9x - 12y + 12 = 0$ $p: 3x - 4y + 4 = 0$
 $m: -3x + 4y + 4 = 0$ $o: 6x - 8y + 12 = 0$ $r: -\frac{3}{2}x + 2y - 2 = 0$

Przykład 5

Równanie kierunkowe prostej l ma postać $y = \frac{2}{3}x - 4$. Zapisz równanie ogólne tej prostej.

Równanie ogólne prostej l otrzymamy, przenosząc wszystkie wyrazy równania $y = \frac{2}{3}x - 4$ na jedną stronę:

$$\frac{2}{3}x - y - 4 = 0$$

Inne równania ogólne tej prostej to np. $-\frac{2}{3}x + y + 4 = 0$ lub $2x - 3y - 12 = 0$.

Ćwiczenie 7

Zapisz równanie prostej l w postaci ogólnej: $Ax + By + C = 0$, gdzie A , B , C są liczbami całkowitymi.

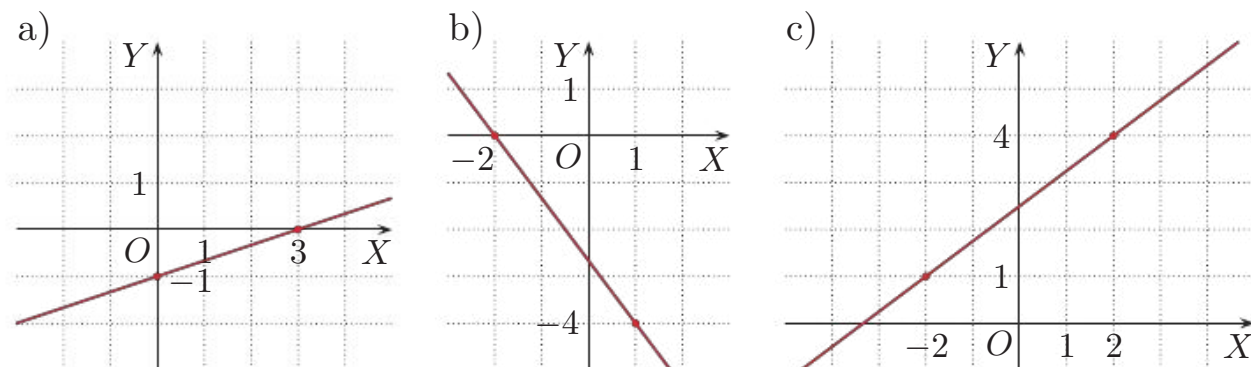
- a) $l: y = -\frac{1}{4}x + 3$ b) $l: y = \frac{2}{5}x - \frac{1}{2}$ c) $l: y = -\frac{5}{3}x + \frac{2}{7}$

Zadania

1. Sprawdź, czy punkt C należy do prostej AB .

- a) $A(1, 3)$, $B(7, 4)$, $C(13, 5)$ d) $A(-6, 3)$, $B(4, 3)$, $C(6, 4)$
b) $A(9, 0)$, $B(4, 5)$, $C(0, 9)$ e) $A(3, 0)$, $B(3, 7)$, $C(3, \sqrt{6})$
c) $A(-5, 4)$, $B(-1, -4)$, $C(2, 9)$ f) $A(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $B(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $C(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

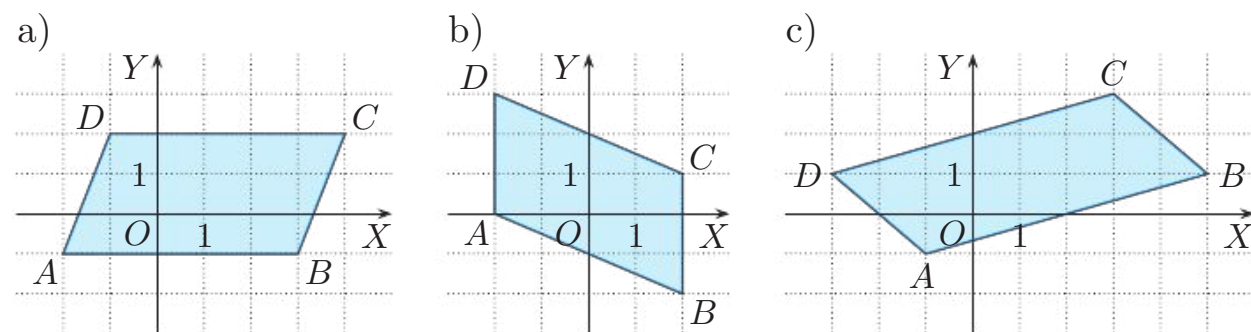
2. Równanie prostej przedstawionej na rysunku zapisz w postaci kierunkowej oraz w postaci ogólnej. Czy punkt $A(-10, -5)$ lub punkt $B(-3, \frac{8}{3})$ należy do tej prostej?



3. Naskicuj prostą o podanym równaniu. Wyznacz współrzędne punktów, w których przecina ona osie układu współrzędnych.

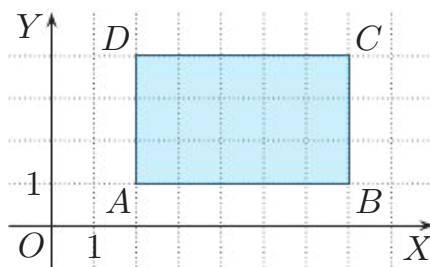
a) $2x - y + 2 = 0$ c) $-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y - 2 = 0$ e) $-4(y - \frac{1}{4}x) = 16$
b) $10x + 5y - 5 = 0$ d) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y - 2\frac{1}{4} = 0$ f) $2(1 - \frac{1}{3}y) - 4x = 0$

4. Zapisz w postaci ogólnej równania prostych, w których są zawarte boki równoległoboku $ABCD$.



Sprawdź się

5. Które z poniższych równań opisują tę samą prostą?
 $l: -2x + 4y + 6 = 0$ $n: x - 2y - 3 = 0$ $p: -6x - 8y + 4 = 0$
 $m: 3x + 4y - 2 = 0$ $o: -2x + 4y - 6 = 0$ $r: -3x + 6y + 9 = 0$
6. Zapisz w postaci ogólnej równanie prostej przechodzącej przez punkt $(4, 3)$ i przecinającej oś OY w podanym punkcie.
a) $(0, -5)$ b) $(0, 6)$ c) $(0, 3)$
7. Dany jest prostokąt $ABCD$ (rysunek obok). Wyznacz równania prostych, w których zawierają się boki oraz przekątne tego prostokąta.



5.5. Współczynnik kierunkowy prostej

Twierdzenie

Współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$ przechodzącej przez punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) , gdzie $x_1 \neq x_2$, dany jest wzorem:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Dowód

Podstawiamy współrzędne punktów (x_1, y_1) i (x_2, y_2) do równania prostej i zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases}$$

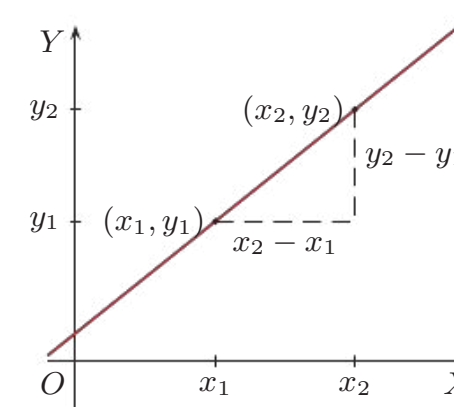
Odejmujemy równania stronami i otrzymujemy:

$$y_2 - y_1 = ax_2 - ax_1$$

czyli $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$, skąd:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Uwaga:
 $x_1 \neq x_2$



Przykład 1

Oblicz współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty $A(-2, 3)$ i $B(4, 6)$.

Mamy $(x_1, y_1) = (-2, 3)$ oraz $(x_2, y_2) = (4, 6)$.

Zatem współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$ przechodzącej przez punkty A i B jest równy:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 3}{4 - (-2)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Ćwiczenie 1

Oblicz współczynnik kierunkowy prostej, do której należą punkty A i B .

a) $A(3, 7), B(9, 12)$ b) $A(3, 5), B(-7, -5)$ c) $A(12, -2), B(6, 8)$

Ćwiczenie 2

Czy prosta przechodząca przez punkty $P(4, 8)$ i $Q(-2, -1)$ jest równoległa do prostej przechodzącej przez punkty R i S ?

a) $R(0, 6), S(-4, 0)$ b) $R(-2, 4), S(1, 7)$ c) $R(5, -\frac{5}{2}), S(8, 2)$

D Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A(-3, -5)$, $B(6, -2)$, $C(4, 2)$ oraz $D(-5, -1)$ jest równoległobokiem.

■ Interpretacja geometryczna współczynnika kierunkowego

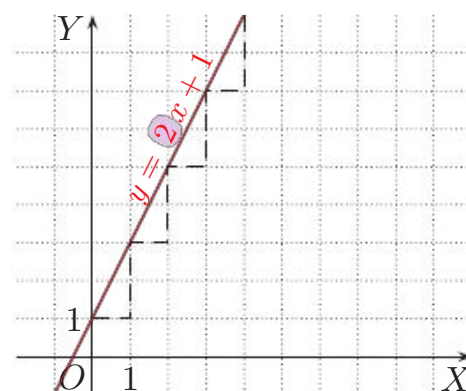
Współczynnik kierunkowy prostej pozwala określić, jak bardzo jest ona „stroma”.

Przykład 2

W przypadku prostej będącej wykresem funkcji:

$$y = 2x + 1$$

wzrostowi argumentu o 1 jednostkę odpowiada wzrost wartości funkcji o 2 jednostki.



Ćwiczenie 4

Wykonaj rysunek i przedstaw interpretację geometryczną współczynnika kierunkowego podanej prostej.

a) $y = x + 2$

b) $y = 3x + 2$

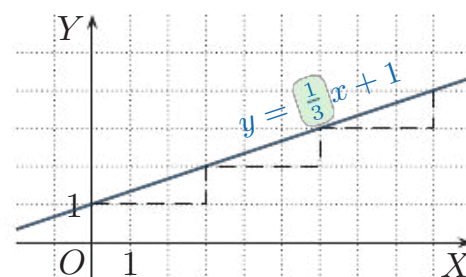
c) $y = 4x + 2$

Przykład 3

W przypadku prostej będącej wykresem funkcji:

$$y = \frac{1}{3}x + 1$$

wzrostowi argumentu o 1 jednostkę odpowiada wzrost wartości funkcji o $\frac{1}{3}$ jednostki (czyli wzrostowi argumentu o 3 jednostki odpowiada wzrost wartości funkcji o 1 jednostkę).



Ćwiczenie 5

Wykonaj rysunek i przedstaw interpretację geometryczną współczynnika kierunkowego podanej prostej.

a) $y = \frac{1}{2}x + 2$

b) $y = \frac{1}{4}x + 2$

c) $y = \frac{1}{7}x + 2$

Przykład 4

W przypadku prostej będącej wykresem funkcji:

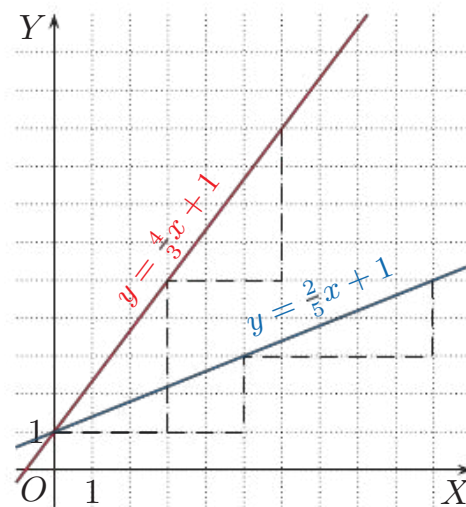
$$y = \frac{4}{3}x + 1$$

wzrostowi argumentu o 1 jednostkę odpowiada wzrost wartości funkcji o $\frac{4}{3}$ jednostki (czyli wzrostowi argumentu o 3 jednostki odpowiada wzrost wartości funkcji o 4 jednostki).

W przypadku prostej będącej wykresem funkcji:

$$y = \frac{2}{5}x + 1$$

wzrostowi argumentu o 5 jednostek odpowiada wzrost wartości funkcji o 2 jednostki.



Ćwiczenie 6

Wykonaj rysunek i przedstaw interpretację geometryczną współczynnika kierunkowego podanej prostej.

a) $y = \frac{5}{3}x - 2$

b) $y = \frac{3}{4}x - 2$

c) $y = \frac{3}{5}x - 2$

Jeśli prosta będąca wykresem funkcji liniowej ma ujemny współczynnik kierunkowy, to ze wzrostem argumentu funkcji maleje jej wartość.

Przykład 5

W przypadku prostej będącej wykresem funkcji:

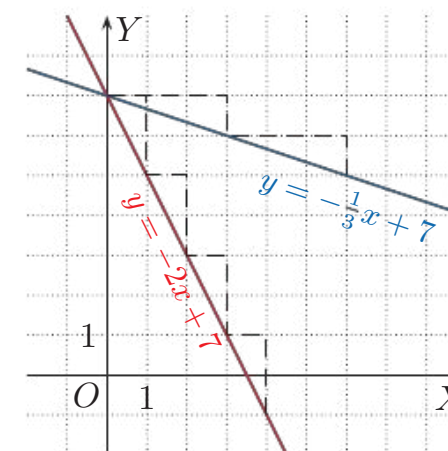
$$y = -2x + 7$$

wzrostowi argumentu o 1 jednostkę odpowiada spadek wartości funkcji o 2 jednostki.

W przypadku prostej będącej wykresem funkcji:

$$y = -\frac{1}{3}x + 7$$

wzrostowi argumentu o 3 jednostki odpowiada spadek wartości funkcji o 1 jednostkę.



Ćwiczenie 7

Wykonaj rysunek i przedstaw interpretację geometryczną współczynnika kierunkowego podanej prostej.

a) $y = -3x + 4$

b) $y = -4x + 4$

c) $y = -\frac{1}{2}x + 4$

d) $y = -\frac{1}{4}x + 4$

Ćwiczenie 8

Wykonaj rysunek i przedstaw interpretację geometryczną współczynnika kierunkowego podanej prostej.

a) $y = -\frac{4}{3}x - 3$

b) $y = -\frac{2}{5}x - 3$

c) $y = -\frac{3}{7}x - 3$

d) $y = -\frac{4}{7}x - 3$

Przykład 6

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $P(3, -7)$ i $Q(-2, 3)$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej PQ o równaniu $y = ax + b$:

$$a = \frac{3 - (-7)}{-2 - 3} = \frac{10}{-5} = -2$$

Następnie do równania $y = -2x + b$ podstawiamy współrzędne jednego z punktów P lub Q . Dla $P(3, -7)$ otrzymujemy: $-7 = -2 \cdot 3 + b$, stąd $b = -1$. Równanie prostej ma zatem postać $y = -2x - 1$.

Ćwiczenie 9

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty P i Q .

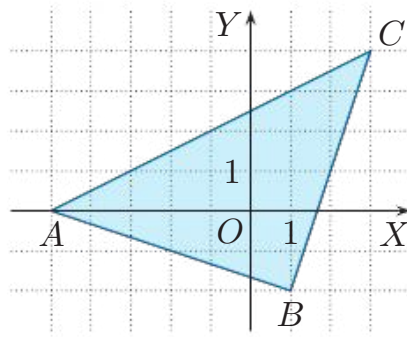
a) $P(4, 5), Q(-4, 9)$

b) $P(4, -13), Q(2, -7)$

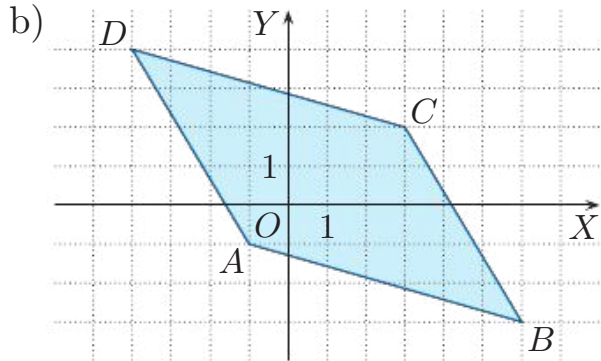
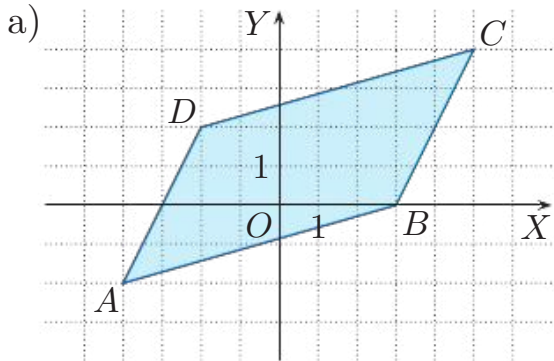
c) $P(3, 3), Q(1, \frac{7}{3})$

Zadania

- Odczytaj z rysunku współrzędne wierzchołków trójkąta ABC . Podaj współczynniki kierunkowe prostych zawierających jego boki.
- Oblicz współczynniki kierunkowe prostych, w których są zawarte boki czworokąta $ABCD$, gdzie $A(-4, -2)$, $B(2, 1)$, $C(0, 3)$, $D(-5, 4)$.
- Oblicz współczynnik kierunkowy i wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty P i Q .
a) $P(3, 4)$, $Q(7, 6)$ c) $P(\frac{1}{3}, 1)$, $Q(\frac{1}{2}, -1)$ e) $P(-2, -6)$, $Q(8, -6)$
b) $P(-2, 7)$, $Q(2, -1)$ d) $P(3, \frac{7}{3})$, $Q(2, \frac{1}{3})$ f) $P(\sqrt{3}, 4)$, $Q(3\sqrt{3}, 10)$



- D** 4. Oblicz współczynniki kierunkowe i wyznacz równania prostych zawierających boki czworokąta $ABCD$. Uzasadnij, że jest on równoległobokiem.



- D** 5. Oblicz współczynniki kierunkowe prostych, w których zawierają się boki czworokąta $PQRS$. Uzasadnij, że czworokąt ten jest trapezem i nie jest równoległobokiem.

- a) $P(0, -5)$, $Q(9, 1)$, $R(6, 11)$, $S(-6, 3)$
b) $P(-8, 5)$, $Q(-6, -2)$, $R(4, -6)$, $S(7, -1)$

Sprawdź się

- Naszczuj proste o współczynnikach kierunkowych 1, 2, 3, -2 i -3 , przecinające się w punkcie P .
a) $P(0, 2)$ b) $P(0, -4)$ c) $P(3, 0)$ d) $P(-4, -2)$
- Podaj, który ze współczynników kierunkowych prostych zawierających boki trójkąta ABC jest największy, a który – najmniejszy.
a) $A(0, -2)$, $B(3, 4)$, $C(-2, 2)$ b) $A(6, 3)$, $B(0, 1)$, $C(-2, -1)$

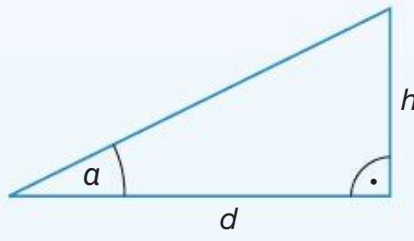
Nachylenie trasy

Współczynnik kierunkowy prostej mówi nam o jej nachyleniu, o tym, jak bardzo ta prosta jest „stroma”.

Nachylenie trasy

Nachylenie trasy często podaje się w procentach. Wyraża się je wzorem:

$$n = \frac{h}{d} \cdot 100\%$$



Nachylenie równe 100% odpowiada kątowi 45° , a nachylenie 10% – kątowi około 6° .

Kąt α	5°	10°	15°	20°	30°	45°
Nachylenie	ok. 9%	ok. 18%	ok. 27%	ok. 36%	ok. 58%	100%

Skocznia narciarska

Największa skocznia narciarska na świecie znajduje się w Vikersund w Norwegii. Ma ponad pół kilometra długości: od najwyższej belki startowej do końca odjazdu jest około 570 metrów. Maksymalne nachylenie zeskoku to 38° .

- 1** Wyszukaj informacje dotyczące nachylenia poszczególnych części skoczni narciarskiej: rozbiegu, progu, grzbietu skoczni i zeskoku.





5.6. Warunek prostokątności prostych

Przykład 1

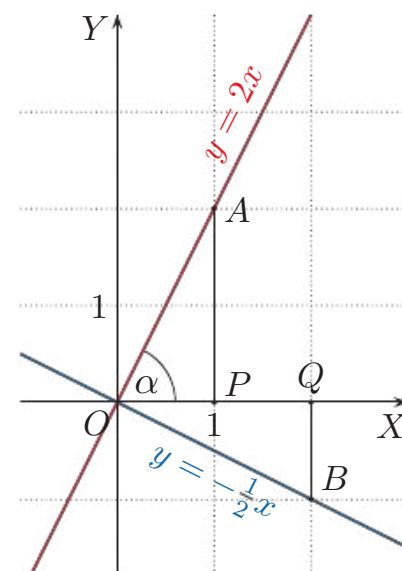
Wykaż, że proste $y = 2x$ i $y = -\frac{1}{2}x$ są prostopadłe.

Punkt $A(1, 2)$ należy do prostej $y = 2x$, a punkt $B(2, -1)$ do prostej $y = -\frac{1}{2}x$ (rysunek obok). Trójkąty prostokątne OPA i BQO mają przyprostokątne tej samej długości, są więc przystające.

Przyjmijmy, że $|\sphericalangle AOP| = \alpha$, wówczas w trójkącie BQO mamy: $|\sphericalangle OBQ| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle BOQ| = 90^\circ - \alpha$. Stąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |\sphericalangle AOB| &= |\sphericalangle AOP| + |\sphericalangle BOQ| = \\ &= \alpha + 90^\circ - \alpha = 90^\circ \end{aligned}$$

Zatem proste $y = 2x$ i $y = -\frac{1}{2}x$ są prostopadłe.



Symbolem $|\sphericalangle AOB|$ oznaczamy miarę kąta AOB .

Ćwiczenie 1

Udowodnij, stosując metodę pokazaną w przykładzie 1., że podane proste są prostopadłe.

- a) $y = 3x$ i $y = -\frac{1}{3}x$ b) $y = \frac{3}{4}x$ i $y = -\frac{4}{3}x$ c) $y = \sqrt{2}x$ i $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$

Twierdzenie

Proste $y = a_1x + b_1$ ($a_1 \neq 0$) i $y = a_2x + b_2$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a_2 = -\frac{1}{a_1} \quad (\text{czyli } a_1 \cdot a_2 = -1)$$

Przykład 2

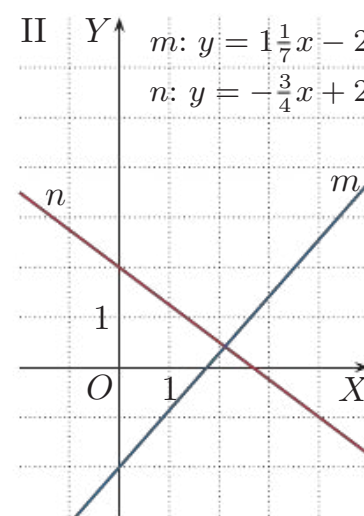
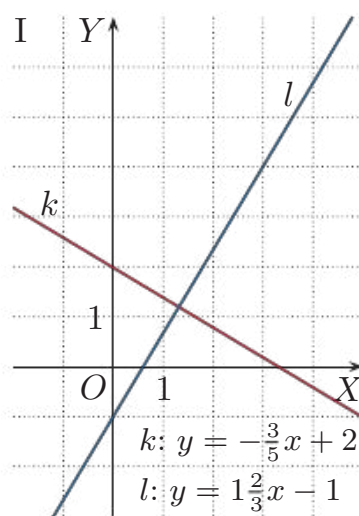
Sprawdź, czy proste przedstawione na rysunkach I i II są prostopadłe.

I. Współczynniki kierunkowe prostych k i l są odpowiednio równe: $a_1 = -\frac{3}{5}$ i $a_2 = 1\frac{2}{3}$.

$a_1 \cdot a_2 = -1$, więc proste k i l są prostopadłe.

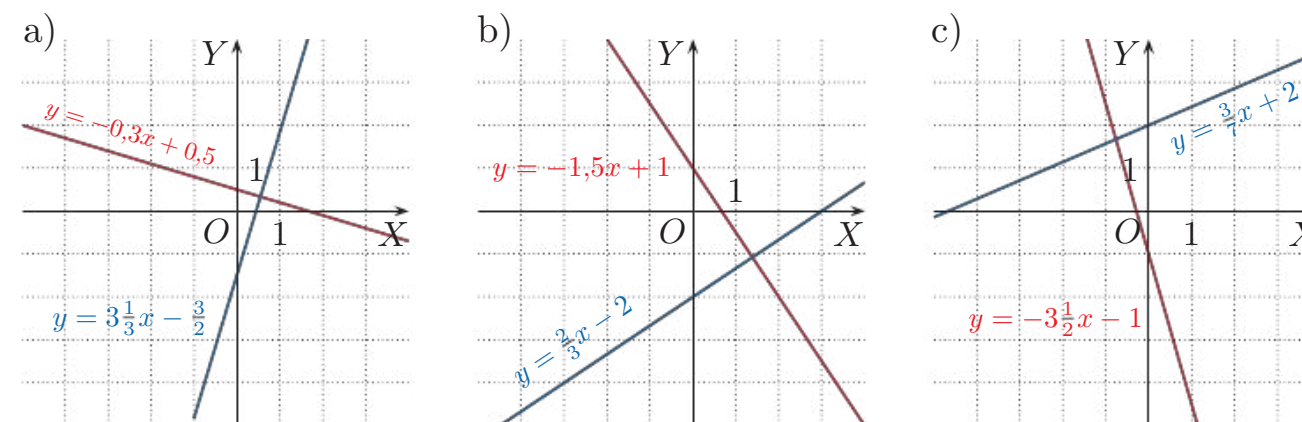
II. Współczynniki kierunkowe prostych m i n są odpowiednio równe: $a_1 = 1\frac{1}{7}$ i $a_2 = -\frac{3}{4}$.

$a_1 \cdot a_2 \neq -1$, więc proste m i n nie są prostopadłe.



Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy proste przedstawione na rysunku są prostopadłe.



Przykład 3

Prosta k jest prostopadła do prostej $y = \frac{3}{8}x - 4$. Oblicz współczynnik kierunkowy prostej k .

Oznaczmy przez a współczynnik kierunkowy prostej k . Wówczas:

$$a = \frac{-1}{\frac{3}{8}} = -\frac{8}{3}$$

Ćwiczenie 3

Oblicz współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do podanej prostej.

- a) $y = \frac{1}{5}x + 4$ b) $y = 9x$ c) $y = -2\frac{1}{3}x - 3$ d) $y = \frac{\sqrt{2}}{6}x - 1$

Ćwiczenie 4

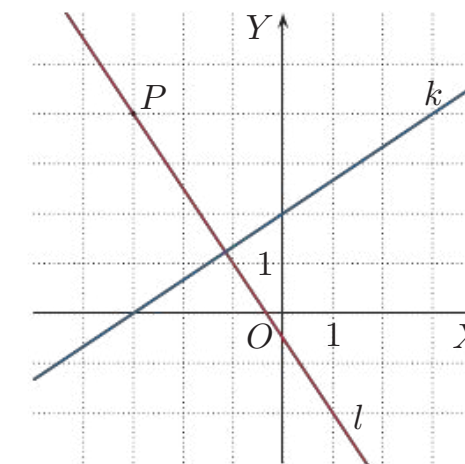
Uzasadnij, że jeśli proste $y = a_1x$ i $y = a_2x$ są prostopadłe, to dla dowolnych liczb b_1, b_2 prostopadłe są też proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$.

Przykład 4

Prosta k ma równanie $y = \frac{2}{3}x + 2$. Wyznacz równanie prostej l prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt $P(-3, 4)$.

Równanie prostej l ma postać $y = -\frac{3}{2}x + b$ (ponieważ $l \perp k$). Podstawiamy do równania współrzędne punktu $P(-3, 4)$ i otrzymujemy $4 = -\frac{3}{2} \cdot (-3) + b$, stąd $b = -\frac{1}{2}$.

Prosta l ma zatem równanie $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.



Ćwiczenie 5

Wyznacz równanie prostej prostopadłej do podanej prostej i przechodzącej przez punkt P .

- a) $y = -3x + 2$, $P(0, -1)$ b) $y = -0.1x$, $P(1, 9)$ c) $y = \frac{3}{7}x + 9$, $P(3, 2)$

**Przykład 5**

Miejszem zerowym funkcji liniowej jest liczba 3, a jej wykresem jest prosta l prostopadła do prostej $4x + 3y - 7 = 0$. Wyznacz równanie prostej l .

Równanie $4x + 3y - 7 = 0$ przekształcamy do postaci kierunkowej:

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$$

Stąd równanie prostej l ma postać $y = \frac{3}{4}x + b$. Podstawiamy współrzędne punktu $(3, 0)$ i otrzymujemy $0 = \frac{3}{4} \cdot 3 + b$, czyli $b = -\frac{9}{4}$.

Prosta l ma zatem równanie $y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{4}$.

Ćwiczenie 6

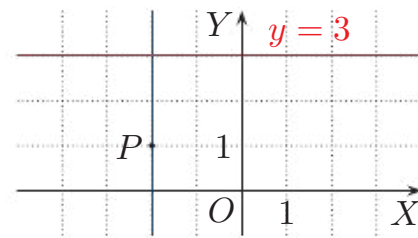
Miejszem zerowym funkcji liniowej jest liczba -2 . Wyznacz równanie prostej będącej wykresem tej funkcji i jednocześnie prostopadłej do podanej prostej.

- a) $3x + 2y + 6 = 0$ b) $2x - \frac{1}{2}y - 5 = 0$ c) $-\frac{3}{4}x + \frac{9}{8}y + 3 = 0$

Przykład 6

Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej $y = 3$ i przechodzącej przez punkt $P(-2, 1)$.

Powyższe warunki spełnia prosta $x = -2$.

**Ćwiczenie 7**

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(6, -5)$ i prostopadłej do podanej prostej.

- a) $y = -3$ b) $x = -3$ c) $x = -2\sqrt{3}$

Zadania

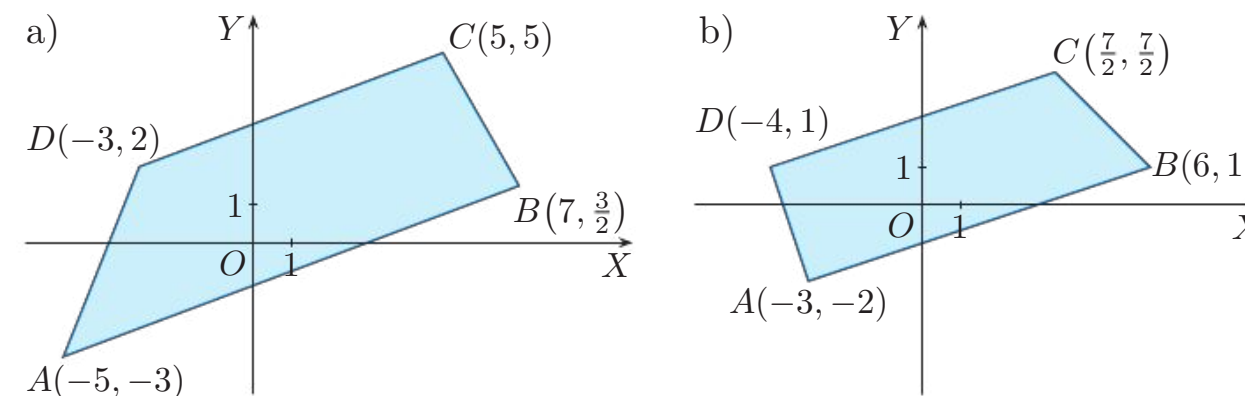
- Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej l i przechodzącej przez punkt P .

a) $l: y = -3x + 1, P(3, -2)$ c) $l: y = -\frac{4}{3}x + 11, P(-4, -2)$
 b) $l: y = \frac{2}{3}x - 3, P(4, 1)$ d) $l: y = 3\frac{1}{2}x - 3, P(14, -4)$
- Wyznacz równania prostych AB, AC i BC . Czy trójkąt ABC jest prostokątny?

a) $A(1, 5), B(4, 2), C(7, 5)$ c) $A(-7, -2), B(8, -2), C(-2, 3)$
 b) $A(-2, -1), B(0, -3), C(4, 5)$ d) $A(4\frac{1}{2}, 6), B(-2, -\frac{1}{2}), C(4\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
- Punkty A, B, C i D są kolejnymi wierzchołkami rombu. Wyznacz równania prostych, w których są zawarte przekątne tego rombu.

a) $A(-2, -6), B(5, -3), C(8, 4)$ b) $A(-1, -2), B(6, -1), D(-6, 3)$

- D** 4. Uzasadnij, że przedstawiony na rysunku czworokąt $ABCD$ jest trapezem. Czy jest to trapez prostokątny?



- D** 5. Uzasadnij, że czworokąt $PQRS$ jest prostokątem.
- a) $P(-5, 0), Q(-1, -6), R(8, 0), S(4, 6)$
 b) $P(-8, -2), Q(6, -8), R(9, -1), S(-5, 5)$
- D** 6. Punkty $A(0, 0)$ i $C(2, 8)$ są wierzchołkami prostokąta $ABCD$, którego przekątna BD jest zawarta w prostej $y = -\frac{1}{4}x + 4\frac{1}{4}$. Uzasadnij, że prostokąt ten jest kwadratem. Oblicz jego obwód i pole.
7. Dany jest trójkąt prostokątny ABC , którego przeciwprostokątna jest zawarta w prostej $y = 3x + 10$, a odcinek BC jest przyprostokątną. Wyznacz współrzędne wierzchołka A tego trójkąta.
- a) $B(-2, -8), C(-2, 4)$ b) $B(-6, -8), C(-6, 7)$
8. Proste prostopadłe l_1 i l_2 przecinają się w punkcie $(2, 4)$, a jedna z nich przecina oś OX w punkcie $(-6, 0)$.
- a) Wyznacz równania prostych l_1 i l_2 .
 b) O ile procent jest większe pole trójkąta ograniczonego prostymi l_1, l_2 i osią OX od pola trójkąta ograniczonego tymi prostymi i osią OY ?

Sprawdź się

9. Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej l i przechodzącej przez punkt $P(6, -2)$.
- a) $l: y = -2x + 4$ c) $l: y = -\frac{2}{3}x + 6$ e) $l: 3x + y - 3 = 0$
 b) $l: y = 3x - 1$ d) $l: y = 1,5x - 2,5$ f) $l: x + 2y - 3 = 0$
10. Punkty A, B, C są wierzchołkami prostokąta $ABCD$. Wyznacz równania prostych zawierających jego boki.
- a) $A(-2, 1), B(1, -2), C(6, 3)$ b) $A(-15, 3), B(-3, -3), C(0, 3)$

Układy równań

1. Czy wskazana para liczb (x, y) spełnia podany układ równań?

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} 2x - y = 3 \\ -3x + y = -5 \end{cases}, (2, 1) & \text{c)} \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 10x - \frac{7}{2}y = 13 \end{cases}, (4, 5) \\ \text{b)} \begin{cases} -\frac{1}{3}x + y = 7 \\ 2x + \frac{3}{4}y = -3 \end{cases}, (-3, 4) & \text{d)} \begin{cases} 6x - y = 32 \\ -5x - 2y = -36 \end{cases}, (4, -8) \end{array}$$

2. Wyznacz parę liczb (x, y) spełniającą podany układ równań.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + 2y = 11 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} y = 2x + 8 \\ y = -x - 1 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} x + y - 8 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} 3x + y = 2 \\ -4x + \frac{1}{2}y = -10 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 5 \\ y = -2x - 5 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 4x - \frac{3}{2}y + 3 = 0 \end{cases} \end{array}$$

D 3. Uzasadnij, że podany układ równań jest sprzeczny.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ -4x + 6y = 6 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} -\frac{1}{3}x + y = 2 \\ 2x - 6y = -8 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} -4x + 9y = -12 \\ \frac{2}{3}x - \frac{3}{2}y = -2 \end{cases} \end{array}$$

D 4. Uzasadnij, że podany układ równań jest nieoznaczony. Podaj trzy pary całkowitych liczb (x, y) spełniających ten układ.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 3x - y = 4 \\ -6x + 2y = -8 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 3 \\ 2x - y = -12 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} -\frac{1}{3}x + 2y = 1 \\ x - 6y = -3 \end{cases} \end{array}$$

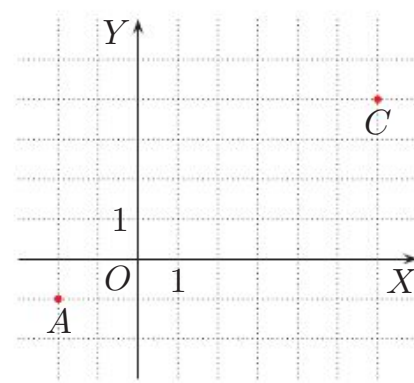
D 5. Para liczb (x_1, y_1) spełnia układ równań I, a para liczb (x_2, y_2) spełnia układ równań II. Uzasadnij, że $x_1 = x_2$.

$$\text{I. } \begin{cases} 3x + 4y + 2 = 0 \\ 2x + 5y - 8 = 0 \end{cases} \quad \text{II. } \begin{cases} 3x - y + 6 = 0 \\ -5x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

6. Para liczb (x_1, y_1) spełnia układ równań I, a para liczb (x_2, y_2) spełnia układ równań II.

$$\text{I. } \begin{cases} x + 3y = 3 \\ \frac{1}{2}x - y = 4 \end{cases} \quad \text{II. } \begin{cases} 3x + y = -2 \\ -2x + \frac{1}{2}y = 6 \end{cases}$$

Czy czworokąt, którego kolejnymi wierzchołkami są punkty A , $B(x_1, y_1)$, C i $D(x_2, y_2)$, jest prostokątem?

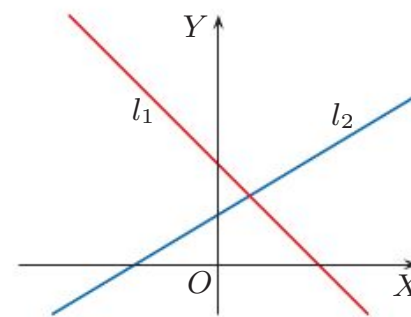


5.7. Interpretacja geometryczna układu równań liniowych

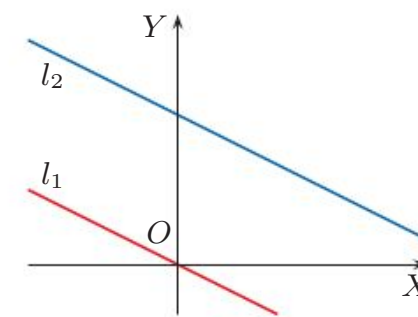
Rozpatrzmy proste l_1 i l_2 opisane równaniami układu:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

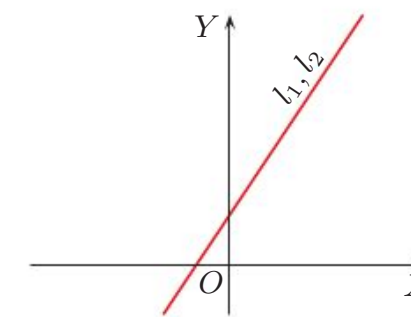
Współrzędne punktów (x, y) należących jednocześnie do obu prostych są rozwiązaniami tego układu. Może zachodzić jedna z poniższych sytuacji.



Układ oznaczony (ma jedno rozwiązanie) – proste przecinają się w jednym punkcie.



Układ sprzeczny (nie ma rozwiązań) – proste są równoległe i różne.



Układ nieoznaczony (ma nieskończenie wiele rozwiązań) – proste się pokrywają.

Przykład 1

Rozwiąż graficznie układ równań:

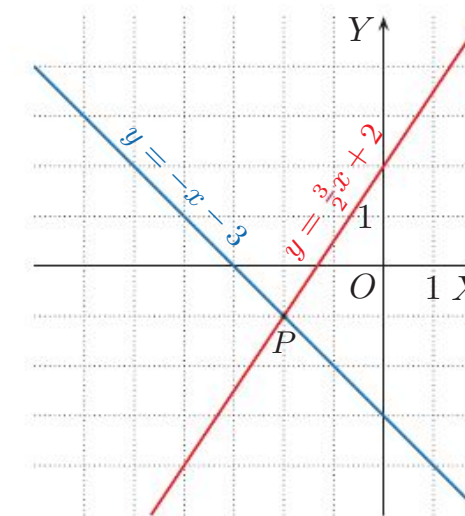
$$\begin{cases} x + y = -3 \\ 3x - 2y = -4 \end{cases}$$

Przekształcamy równania układu do postaci kierunkowej:

$$\begin{cases} y = -x - 3 \\ y = \frac{3}{2}x + 2 \end{cases}$$

Szkicujemy obie proste i odczytujemy współrzędne ich punktu przecięcia: $P(-2, -1)$.

Rozwiązaniem układu jest więc para liczb: $x = -2$, $y = -1$ (poprawność rozwiązania można sprawdzić, podstawiając je do układu równań).



Ćwiczenie 1

Rozwiąż graficznie układ równań. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 2x - y = -4 \\ x + y = 1 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 4x - y = 3 \\ -x + 2y = 8 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \end{array}$$

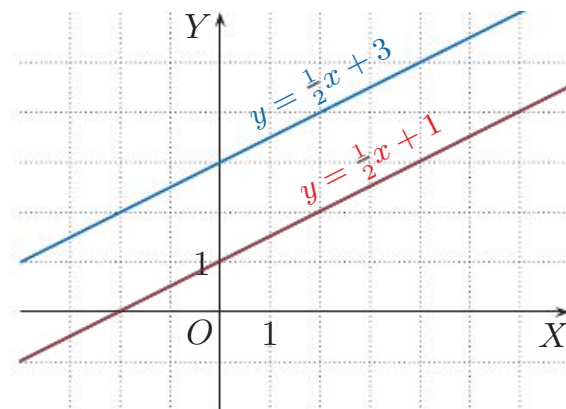
Przykład 2

Rozwiąż graficznie układ równań $\begin{cases} 2x - 4y = -4 \\ x - 2y = -6 \end{cases}$

Równania układu przekształcamy do postaci kierunkowej i szkicujemy obie proste.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ y = \frac{1}{2}x + 3 \end{cases}$$

Są to proste równoległe – nie mają punktów wspólnych. Zatem układ równań nie ma rozwiązania – jest sprzeczny.



Przykład 3

Rozwiąż graficznie układ równań:

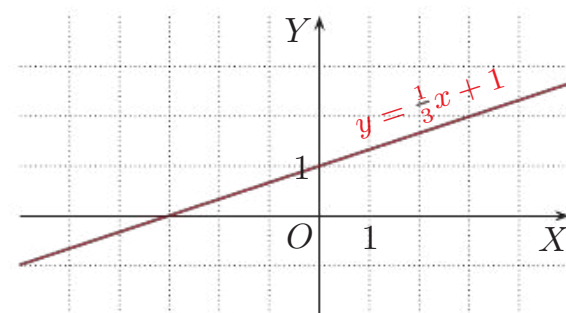
$$\begin{cases} x - 3y = -3 \\ 2x - 6y = -6 \end{cases}$$

Obydwa równania opisują tę samą prostą o równaniu kierunkowym $y = \frac{1}{3}x + 1$.

Układ ma zatem nieskończenie wiele rozwiązań. Są nimi wszystkie pary liczb $(x, \frac{1}{3}x + 1)$, gdzie $x \in \mathbb{R}$.

Rozwiązaniem tego układu są na przykład pary: $(-3, 0)$, $(0, 1)$ czy $(3, 2)$.

Podaj trzy inne pary liczb będące rozwiązaniami tego układu równań.



Ćwiczenie 2

Rozwiąż graficznie układ równań.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x - y = -1 \\ -x + y = 3 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 2x - y = 6 \\ 0,5y - x = -3 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} -3x + 2y = 2 \\ 6x - 4y = 8 \end{cases} \end{array}$$

Czasami nie musimy przekształcać równań układu, aby określić, czy jest on oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny. Wystarczy przyjrzeć się współczynnikom przy niewiadomych oraz wyrazom wolnym.

Ćwiczenie 3

Określ, bez rozwiązywania układu równań, czy jest to układ oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ -3x + 2y = 1 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 2x + y = 1 \\ -3x + y = -4 \end{cases} \end{array}$$

Zadania

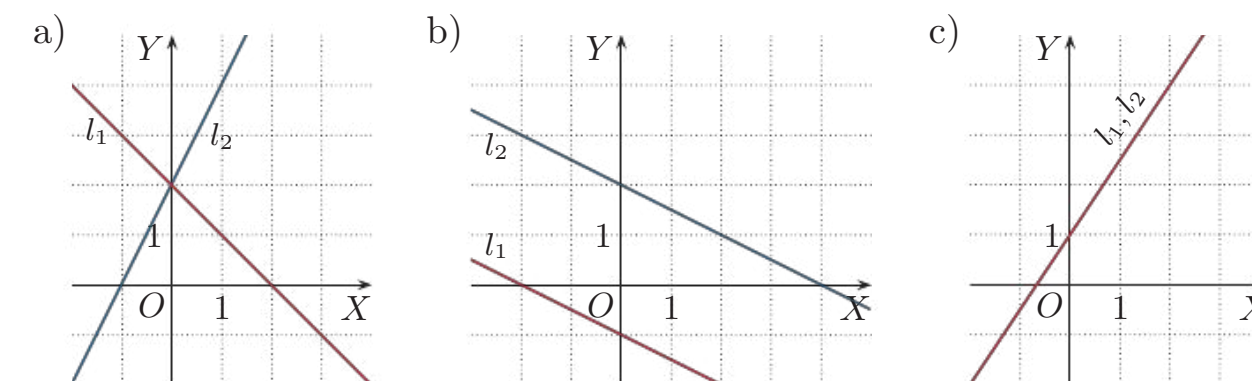
1. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 3 \\ y + x = 7 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ -\frac{4}{3}x + 2y = -4 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} y = -2x + 2 \\ 4y + 3x = -12 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} y - 2x = 4 \\ 9x - 2y = -3 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 3y + x = 9 \\ y + 3 = -\frac{1}{3}x \end{cases} \end{array}$$

2. Rozwiąż graficznie układ równań. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ x = 3 + 2y \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 0,5x + 2y = 1 \\ y = 2 - x \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} y = 6x + 2 \\ \frac{3-y}{2} + 3x = 0 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} y = 2x - 2 \\ -2x + 3y = 6 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 2x = 6 - y \\ \frac{y-1}{3} = x \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 2y - 1 = x \\ 6y - 3x = 3 \end{cases} \end{array}$$

3. Napisz układ równań, którego interpretację geometryczną przedstawiono na rysunku.



4. Dany jest układ równań:

$$\begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x + b_2 \end{cases}$$

Jakie warunki powinny spełniać współczynniki a_1, a_2, b_1, b_2 , aby układ był:

a) nieoznaczony, b) sprzeczny, c) oznaczony?

5. Narysuj równoległobok, którego boki są zawarte w podanych prostych. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego równoległoboku.

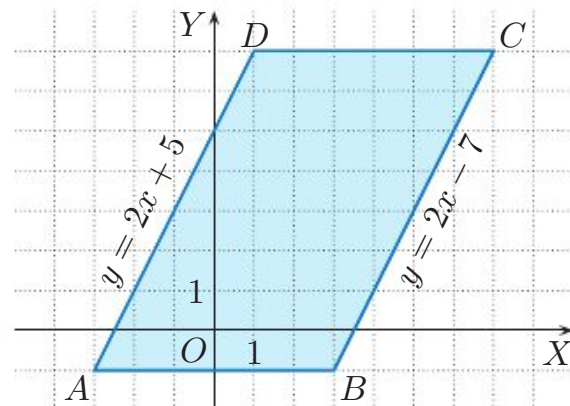
$$\begin{array}{l} \text{a)} y = x - 2, y = x - 6, y + 3 = 0, y - 2 = 0 \\ \text{b)} y = \frac{1}{2}x + 3, y = \frac{1}{2}x - 2, y = -2x - 7, y = -2x + 8 \\ \text{c)} 3x - y = -2, 3x - y = 4, x - 2y = 6, x - 2y = -14 \end{array}$$

6. Trzy boki trapezu prostokątnego $ABCD$ są zawarte w prostych $y = \frac{1}{3}x - 2$, $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$, $y = 2x + 3$. Wierzchołek B jest punktem przecięcia osi OX z prostą $y = \frac{1}{3}x - 2$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trapezu.

7. Dany jest równoległobok $ABCD$ (rysunek obok).

a) Punkt P jest punktem przecięcia prostej AD z prostą $y = -x + 2$. Oblicz pole trójkąta ABP .

b) Punkt Q jest punktem przecięcia prostej BC z prostą $y = -2x + 7$. Oblicz pole trapezu $ABQD$.



- D** 8. a) Uzasadnij, że trójkąt, którego boki są zawarte w prostych $x + y = 0$, $x - y = 0$ i $y = 3$, ma pole równe polu trójkąta o wierzchołkach $A(0,0)$, $B(2,2)$, $C(9,0)$.
b) Uzasadnij, że trójkąt, którego boki są zawarte w prostych $2x - y = 0$, $y - x - 2 = 0$ i $y + 2 = 0$, ma pole równe połowie pola równoległoboku o wierzchołkach $A(-2,-1)$, $B(4,-1)$, $C(6,2)$, $D(0,2)$.

Sprawdź się

9. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

a) $\begin{cases} x + y = -4 \\ 2x + y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$

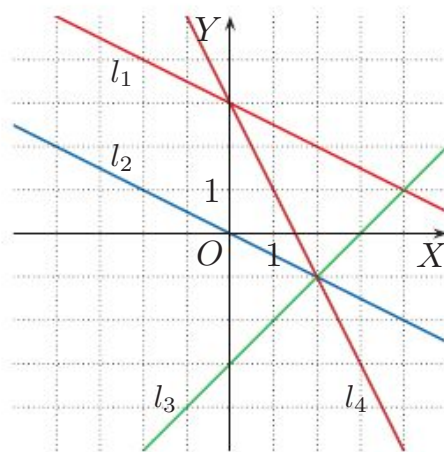
10. Sprawdź, czy współrzędne punktu $P(x,y)$, który jest punktem przecięcia prostych l_1 i l_2 , spełniają warunek $x^2 + y^2 < 25$.

a) $l_1: y = -x + 1$, $l_2: y = \frac{1}{3}x + 5$ c) $l_1: y = 2x + 1$, $l_2: y = 4x + 5$
b) $l_1: y = x - 2$, $l_2: y = -\frac{1}{2}x + 4$ d) $l_1: y = -\frac{1}{2}x - 2$, $l_2: y = -2x + 4$

11. Która para prostych na rysunku obok przedstawia interpretację geometryczną układu równań?

a) $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ \frac{1}{2}x + y = 3 \end{cases}$

12. Podaj równanie dowolnej prostej, które wraz z równaniem prostej l_3 (rysunek obok) tworzy układ sprzeczny.



5.8. Funkcja liniowa – zastosowania

Przykład 1

Funkcja $f(x) = 1500 + 12x$, gdzie $D_f = \mathbb{N}$, opisuje miesięczne koszty (w złotych) firmy Skrzat, produkującej krasnale ogrodowe: 1500 zł to koszt stały, 12 zł to koszt wyprodukowania jednego krasnala, x – liczba krasnali.

a) Naskicuj wykres funkcji f .

b) Jaki był półroczny zysk firmy, jeśli w tym czasie wyprodukowano 1800 krasnali i sprzedano je po 37 zł za sztukę?

Dochód ze sprzedaży:

$$1800 \cdot 37 = 66\,600 \text{ [zł]}$$

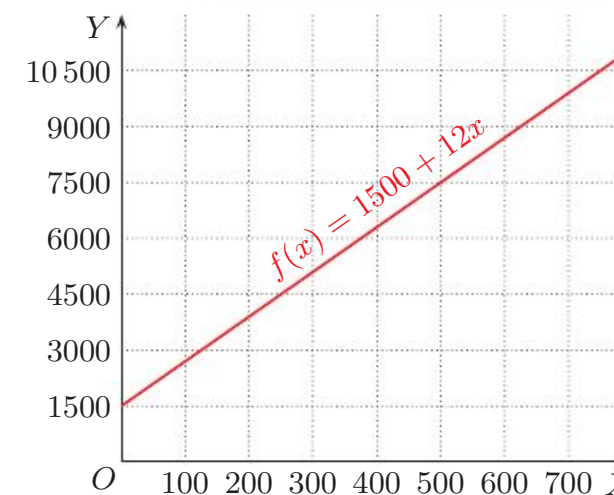
Koszty po 6 miesiącach:

$$6 \cdot 1500 + 12 \cdot 1800 = 30\,600 \text{ [zł]}$$

Półroczny zysk:

$$66\,600 - 30\,600 = 36\,000 \text{ [zł]}$$

zysk = dochód – koszty



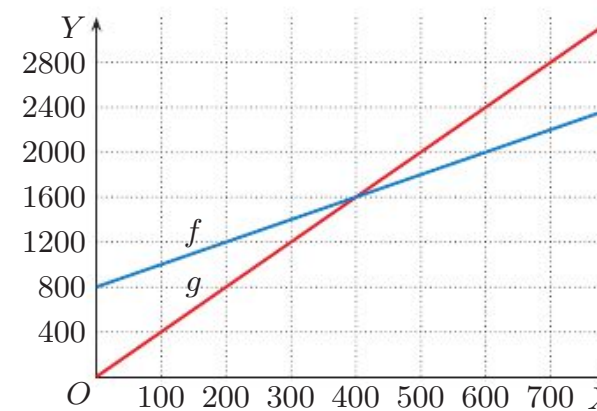
Ćwiczenie 1

W firmie opisanej w przykładzie 1. podjęto decyzję o produkcji większych krasnali, przy czym koszt wyprodukowania takiego krasnala wyniósł 20 zł (koszty stałe pozostały bez zmian). Naskicuj wykres funkcji g opisującej obecne miesięczne koszty tej firmy.

Ćwiczenie 2

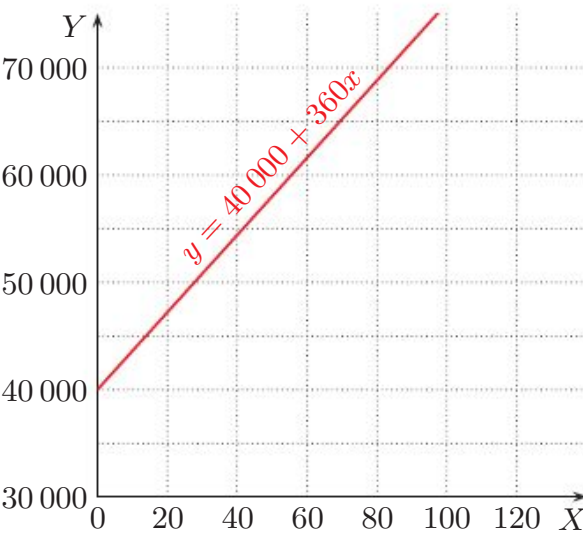
Funkcja $f(x) = 2x + 800$, gdzie $D_f = \mathbb{N}$, opisuje dzienne koszty, jakie ponosi firma produkująca pokarm dla kotów: 800 zł to stały koszt dzienny, x – liczba puszek pokarmu wyprodukowanych dziennie, a 2 zł – koszt wyprodukowania jednej puszki. Dochody firmy opisuje funkcja $g(x) = 4x$, gdzie $D_g = \mathbb{N}$, x jest liczbą sprzedanych dziennie puszek pokarmu, a 4 zł to cena jednej puszki. Przyjmując, że liczba wyprodukowanych i sprzedanych danego dnia puszek jest taka sama, podaj wielkość dziennej produkcji, dzięki której firma osiągnie:

- a) zerowy wynik ekonomiczny (dochód jest równy kosztom),
b) dzienny zysk w wysokości 400 zł,
c) dzienny zysk w wysokości 1400 zł.



Zadania

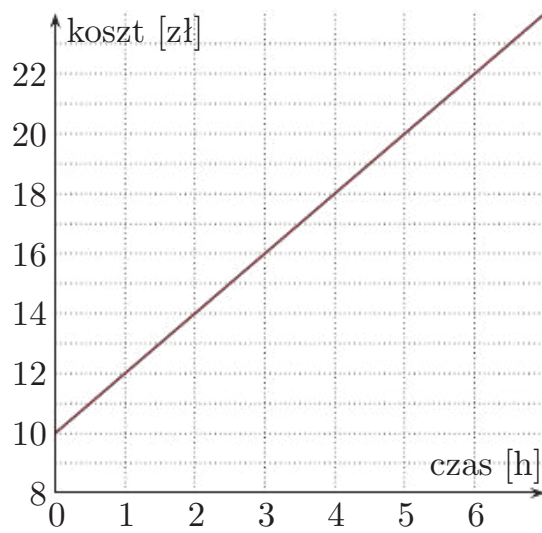
1. Samochód *A* kosztuje 34 tys. zł i spala 8 l benzyny na 100 km, a samochód *B* kosztuje 40 tys. zł i spala 6 l benzyny na 100 km. Cena benzyny wynosi średnio 6 zł za litr. Niech *x* oznacza liczbę przejechanych tysięcy kilometrów, *y* – cenę samochodu plus koszty paliwa w złotych (pozostałe koszty pomijamy). Na zamieszczonym obok wykresie przedstawiono łączny koszt dla samochodu *B*.



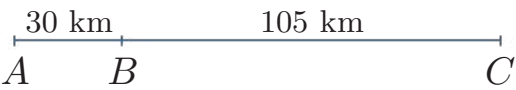
- a) Naskicuj analogiczny wykres dla samochodu *A*.
- b) Jeżeli zakupiono samochód *B*, to po przejechaniu ilu kilometrów zwróci się różnica w cenie?
2. Przeczytaj informacje dotyczące warunków wypożyczenia rowerów w wypożyczalniach Wagabunda i Szprycha (*x* oznacza liczbę godzin).

WYPOŻYCZALNIA WAGABUNDA		WYPOŻYCZALNIA SZPRYCHA	
• Rower górski	10 zł + 2 <i>x</i> zł	• Rower górski	6 zł + 3 <i>x</i> zł
• Rower dziecięcy	6 zł + 2 <i>x</i> zł	• Rower dziecięcy	2 zł + 3 <i>x</i> zł

Na wykresie obok przedstawiono koszt wypożyczania roweru górskiego w wypożyczalni Wagabunda w zależności od czasu.



- a) Naskicuj analogiczny wykres dla wypożyczalni Szprycha.
- b) Odczytaj z wykresów, na ile godzin korzystniejsze jest wypożyczenie roweru górskiego z wypożyczalni Wagabunda, a na ile z wypożyczalni Szprycha.
- c) Trzyosobowa rodzina chce wypożyczyć dwa rowery górskie i jeden rower dziecięcy. Na ile godzin korzystniejsze jest wypożyczenie roweru górskiego z wypożyczalni Wagabunda?

3. Piotr i Stefan wyruszają na wycieczkę rowerową do miasta *C* o tej samej godzinie.  Piotr startuje z miasta *B* i jedzie ze stałą prędkością 15 km/h, a Stefan z miasta *A* i jedzie ze stałą prędkością 22,5 km/h.
- a) Naskicuj wykres pokazujący odległość Piotra od miasta *C* w zależności od czasu oraz w tym samym układzie współrzędnych – wykres pokazujący odległość Stefana od miasta *C* w zależności od czasu.
- b) Po jakim czasie Stefan dogoni Piotra?
- c) O ile Piotr musiałby zwiększyć swoją średnią prędkość, aby Stefan dogonił go dopiero w mieście *C*?
4. Z miasta *A* o godzinie 8.00 wyjechał rowerzysta poruszający się z prędkością 20 km/h. Dwie godziny później z miasta *A* w tę samą stronę wyjechał samochód, który poruszał się z prędkością 60 km/h. Naskicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy zależności liczby kilometrów przejechanych przez każdy z pojazdów od czasu, jaki upłynął od rozpoczęcia podróży przez pierwszy z nich. Oblicz na podstawie wykresu:
- a) o której godzinie samochód wyprzedził rowerzystę,
- b) jaki dystans dzielił rowerzystę i samochód o godzinie 10.30,
- c) o której godzinie samochód oddalił się od rowerzysty o 40 km.

Sprawdź się

5. Z miejscowości *A* do oddalonej o 40 km miejscowości *B* wyruszył rowerzysta jadący z prędkością 16 km/h. Jednocześnie z miejscowości *B* do miejscowości *A* wyruszył drugi rowerzysta, który poruszał się z tą samą prędkością.
- a) Przedstaw na wykresie i za pomocą wzoru odległość każdego z rowerzystów od miejscowości *A* w zależności od czasu.
- b) Zapisz wzór określający odległość między rowerzystami w zależności od czasu. W jakim czasie od chwili rozpoczęcia podróży odległość ta była równa 8 km?
6. Wynajęcie lokalu *A* na dyskotekę kosztuje 400 zł za salę i 10 zł za każdego uczestnika. Wynajęcie lokalu *B* kosztuje 100 zł za salę i 15 zł za każdego uczestnika. Naskicuj wykresy przedstawiające koszty zorganizowania dyskoteki w lokalach *A* i *B* w zależności od liczby uczestników. Dla jakiej liczby uczestników koszty te będą równe?



Powtórzenie

Zestaw I

- Naszkicuj prostą l . Podaj, które z punktów P, Q, R należą do tej prostej.
 - $l: y = 2x - 4, P(5, 6), Q(-3, -10), R(-\frac{7}{2}, -11)$
 - $l: y = \frac{1}{2}x + 2, P(-8, -2), Q(9, \frac{11}{2}), R(17, 10\frac{1}{2})$
- Naszkicuj wykres funkcji f . Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości ujemne, a dla jakich większe od 2?
 - $f(x) = \frac{2}{3}x + 4$
 - $f(x) = -3x + 5$
 - $f(x) = -2,5x - 3$
- Wyznacz punkty przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych. Oblicz pole obszaru ograniczonego osiami układu współrzędnych i wykresem funkcji f .
 - $f(x) = -\frac{1}{3}x + 3$
 - $f(x) = \frac{4}{7}x - 8$
 - $f(x) = -3x - 7,5$
- Określ monotoniczność funkcji f w zależności od parametru m .
 - $f(x) = (m + \frac{1}{2})x - 7$
 - $f(x) = (6 - \frac{2}{3}m)x + 9$
- Sprawdź, czy punkty A, B i C należą do wykresu tej samej funkcji liniowej.
 - $A(-4, 1), B(8, 7), C(11, 5)$
 - $A(2, -7), B(3, -10), C(-2, 5)$
 - $A(-4, 4), B(-2, 0), C(1, -6)$
 - $A(-4, -3), B(-2, -2), C(12, 5)$
- Punkty P i Q należą do wykresu funkcji $y = ax$. Oblicz k .
 - $P(\frac{2}{3}, 2), Q(5, k)$
 - $P(k, 6), Q(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$
 - $P(1, 8, 2, 4), Q(12, k)$
- Wyznacz wzór funkcji, której wykresem jest prosta równoległa do prostej l i przechodząca przez punkt P . Czy ta funkcja jest malejąca?
 - $l: y = \frac{3}{4}x - 9, P(-8, 3)$
 - $l: y = -\frac{1}{3}x + 7, P(6, 5)$
 - $l: y = -6x + 27, P(\frac{5}{12}, \frac{1}{3})$
 - $l: y = \frac{1}{4}x - 11, P(-6, 1)$
- Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(-3, -1)$ i prostopadłej do prostej l .
 - $l: y = \frac{1}{2}x - 7$
 - $l: y = -4,5x - 5$
 - $l: y = -6$
 - $l: x = 11$
 - $l: 3x - 5y - 1 = 0$
 - $l: x - y = y + x$
- Wyznacz wzór funkcji liniowej f , która spełnia podane warunki.
 - $f(-2) = -4$ i $f(4) = -1$
 - $f(-3) = 2$ i $f(3) = 6$
 - $f(-8) = 6$ i $f(-3) = 4$
 - $f(0) = 0$ i $f(\sqrt{2}) = 2$

Zestaw II

- Wykresem funkcji f jest prosta l . Wyznacz zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości niedodatnie.
 - $l: y = 6x + 18$
 - $l: y = -\frac{5}{2}x - 10$
 - $l: \sqrt{2}x + y - 4 = 0$
- Wyznacz równania prostych, w których zawarte są boki trójkąta o wierzchołkach A, B, C . Czy jest to trójkąt prostokątny?
 - $A(0, 0), B(8, 6), C(-6, 8)$
 - $A(-6, 0), B(1, 1), C(-3, 4)$
- Wyznacz równania prostych zawierających boki czworokąta o wierzchołkach $A(-2, -3), B(4, 0), C(2, 4), D(-4, 1)$. Uzasadnij, że czworokąt ten jest prostokątem.
- Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.
 - $\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + y = -4 \end{cases}$
 - $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -6x + 4y = 8 \end{cases}$
 - $\begin{cases} 0,5y - 0,125x = 1,5 \\ \frac{1}{8}y - \frac{1}{64}x = \frac{1}{2} \end{cases}$
 - $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - 3y = -15 \end{cases}$
 - $\begin{cases} 3x + 4y = -19 \\ \frac{1}{2}x - y = -1,5 \end{cases}$
 - $\begin{cases} 2y - \frac{3x-4}{2} = 0 \\ y - 1,5x = 5 \end{cases}$
- Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta, którego boki są zawarte w prostych l_1, l_2 i l_3 . Narysuj ten trójkąt i oblicz jego pole.
 - $l_1: y = x + 2, l_2: y = -x + 2, l_3: y = -3x + 6$
 - $l_1: 2x - y + 6 = 0, l_2: 3x - 4y + 4 = 0, l_3: y - 4 = 0$
 - $l_1: x - 2y - 4 = 0, l_2: 3x + 4y - 28 = 0, l_3: x + 2 = 0$
- Przekątne rombu są zawarte w prostych $3x + 4y = 10$ i $4x - 3y = 5$, a dwa spośród jego boków w prostych $x - 2y - 5 = 0$ i $x - 2y + 5 = 0$. Narysuj podane proste i odczytaj współrzędne wierzchołków rombu. Wyznacz równania prostych, w których są zawarte pozostałe boki rombu.
- Narysuj trójkąt prostokątny, którego boki są zawarte w prostych k, l, m i odczytaj współrzędne jego wierzchołków. Wyznacz współrzędne spodka wysokości opuszczonej z wierzchołka kąta prostego.
 - $k: y = 2x + 2, l: y = \frac{3}{4}x - 3, m: y = -\frac{4}{3}x + 5\frac{1}{3}$
 - $k: y = -2x - 7, l: y = 2x - 3, m: y = \frac{1}{2}x + 3$
- Dwa boki równoległoboku są zawarte w prostych $y = \frac{1}{2}x - 1$ i $y = -\frac{2}{3}x + 6$, a jeden z jego wierzchołków ma współrzędne $(-1, 2)$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego równoległoboku.



Przykład 1

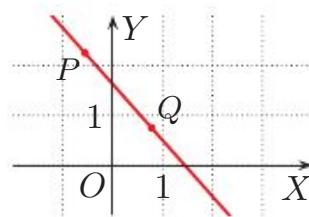
Prosta $y = ax + b$ przechodzi przez punkty P i Q . Dla której pary punktów P, Q współczynnik kierunkowy a jest ujemny?

- A. $P(-\frac{9}{5}, \frac{2}{3}), Q(-\frac{3}{5}, \frac{7}{3})$ C. $P(-\frac{7}{2}, -\frac{4}{3}), Q(\frac{5}{2}, \frac{8}{3})$
 B. $P(\frac{3}{7}, -\frac{7}{6}), Q(\frac{9}{7}, \frac{5}{6})$ D. $P(-\frac{5}{9}, \frac{9}{4}), Q(\frac{7}{9}, \frac{3}{4})$

Aby wskazać poprawną odpowiedź, możemy postąpić na różne sposoby.

- Obliczamy współczynniki kierunkowe prostych w każdym z przypadków A, B, C i D.

- Zaznaczamy punkty P i Q w układzie współrzędnych, aby sprawdzić, w którym przypadku prosta PQ jest wykresem funkcji malejącej (na rysunku obok przedstawiono prostą PQ dla przypadku D).



- Zauważmy, że tylko w przypadku D: $x_P < x_Q$ (gdyż $-\frac{5}{9} < \frac{7}{9}$) oraz $y_P > y_Q$ (gdyż $\frac{9}{4} > \frac{3}{4}$), zatem prosta PQ jest wykresem funkcji malejącej, czyli $a < 0$.

Odpowiedź: D

→ Zadanie 6, str. 237

Przykład 2

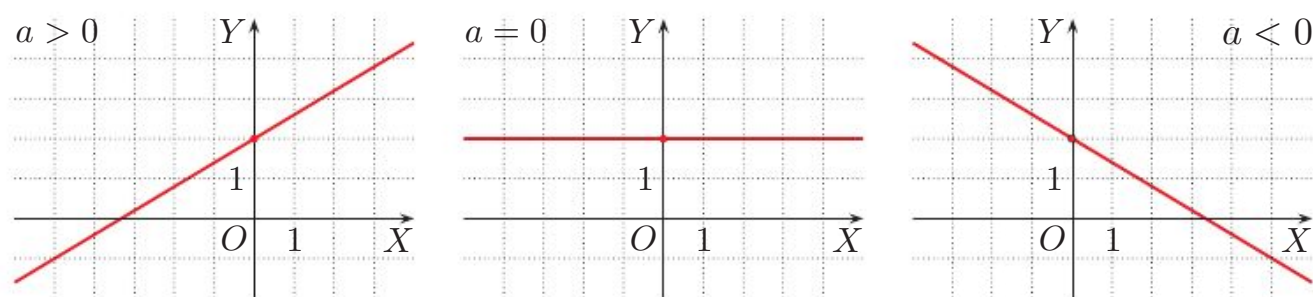
Która para punktów nie należy do prostej $y = ax + 2$ dla żadnej wartości współczynnika a ?

- A. $(-8, -5), (8, 9)$ C. $(-8, -6), (4, -2)$
 B. $(-9, 6), (9, -2)$ D. $(-10, 4), (5, 1)$

Aby wskazać poprawną odpowiedź, możemy postąpić na różne sposoby.

- Sprawdzamy współliniowość podanych punktów z punktem $(0, 2)$ w każdym z przypadków A, B, C i D.

- Zauważamy, że prosta $y = ax + 2$ nie może przechodzić jednocześnie przez punkty należące do III i IV ćwiartki układu współrzędnych (patrz rysunki), a takie punkty podano tylko w przypadku C.



Odpowiedź: C

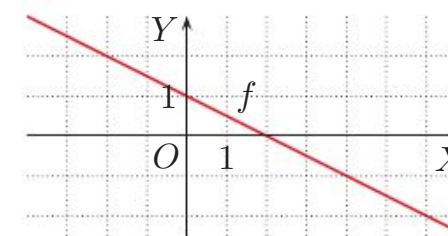
→ Zadanie 7, str. 237



W zadaniach 1–10 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji liniowej o wzorze



- A. $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ C. $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$
 B. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ D. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$

Zadanie 2 (0–1)

Przez którą ćwiartkę układu współrzędnych nie przechodzi wykres funkcji $f(x) = -\frac{2}{3}x - 4$?

- A. I B. II C. III D. IV

Zadanie 3 (0–1)

Miejsce zerowe funkcji $f(x) = \sqrt{2}x + 4$ jest równe

- A. $-2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. $2\sqrt{2}$

Zadanie 4 (0–1)

Prosta przechodząca przez punkt $(-1, 6)$ i przecinająca oś OX w punkcie o odciętej 1 przecina oś OY w punkcie o rzędnej

- A. 3 B. $\frac{3}{2}$ C. -3 D. -6

Zadanie 5 (0–1)

Punkt $A(2k, 7)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = 2x + 1$ dla

- A. $k = \frac{2}{3}$ B. $k = \frac{3}{2}$ C. $k = \frac{1}{2}$ D. $k = 7$

Zadanie 6 (0–1) → Przykład 1, str. 236

Prosta $y = ax + b$ przechodzi przez punkty P i Q . Dla której pary punktów P, Q współczynnik kierunkowy a jest dodatni?

- A. $P(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}), Q(\frac{11}{2}, -\frac{19}{2})$ C. $P(\frac{9}{2}, -\frac{11}{2}), Q(\frac{19}{2}, -\frac{7}{2})$
 B. $P(\frac{11}{2}, -\frac{19}{2}), Q(\frac{9}{2}, -\frac{11}{2})$ D. $P(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}), Q(\frac{19}{2}, -\frac{7}{2})$

Zadanie 7 (0–1) → Przykład 2, str. 236

Która para punktów nie należy do prostej $y = a(x - 2)$ dla żadnej wartości parametru a ?

- A. $(4, 1), (-4, -3)$ C. $(-3, -2), (-1, 3)$
 B. $(-3, -10), (1, -2)$ D. $(1, 3), (3, -3)$

Zadanie 8 (0–1)

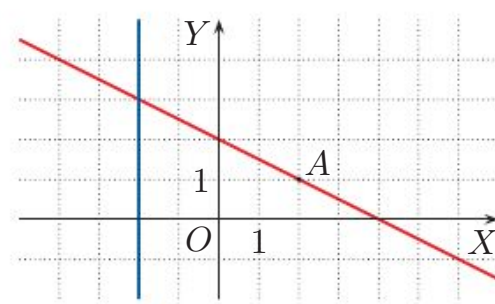
Proste $y = 3x + 3m$ i $y = (2m + 1)x + 6$ są prostopadłe wtedy, gdy

- A. $m = 0$ B. $m = -1$ C. $m = -\frac{1}{3}$ D. $m = -\frac{2}{3}$

**Zadanie 9 (0-1)**

Dwa boki trójkąta prostokątnego o kącie prostym przy wierzchołku A są zawarte w prostych przedstawionych na rysunku obok. Pole tego trójkąta jest równe

- A. 20 B. 24 C. 28 D. 40

**Zadanie 10 (0-1)**

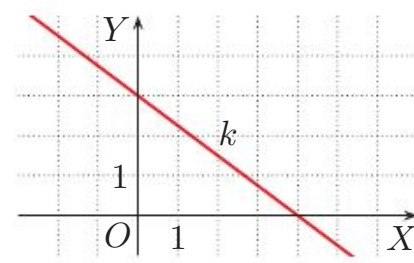
Dany jest czworokąt o kolejnych wierzchołkach $P(0, -5)$, $Q(3, -4)$, $R(4, -1)$ i $S(1, -2)$. W której prostej jest zawarta jedna z przekątnych tego czworokąta?

- A. $y = x + 5$ B. $y = -x + 5$ C. $y = x - 1$ D. $y = -x - 1$

Zadanie 11 (0-1)

Na rysunku obok przedstawiono prostą k .

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.



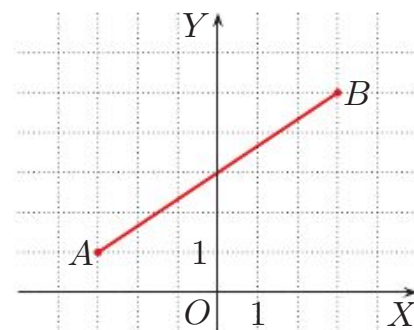
Prosta $y = -\frac{3}{4}x + 8$ jest równoległa do prostej k .

P**F**

Prosta $y = \frac{3}{4}x + 3$ jest prostopadła do prostej k .

P**F****Zadanie 12**

Na rysunku obok dany jest odcinek AB będący jednym z boków trójkąta ABC .

**Zadanie 12.1 (0-1)**

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Wysokość trójkąta ABC opuszczona z wierzchołka C jest zawarta w prostej o współczynniku kierunkowym równym $-\frac{2}{3}$.

P**F**

Jeśli wierzchołek C ma współrzędne $(9, -4)$, to trójkąt ABC jest prostokątny.

P**F****Zadanie 12.2 (0-2)**

Wierzchołek C ma współrzędne $(1, -1)$. Wyznacz równania prostych zawierających boki AC i BC tego trójkąta.

**Zadanie 13 (0-2)**

Na rysunku obok przedstawiono prostą k .

Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Prosta, która przecina prostą k w punkcie o obu współrzędnych całkowitych, dana jest równaniem

A. $y = -\frac{1}{3}x - 6$

E. $y = \frac{1}{3}x + 2$

B. $y = -x - 6$

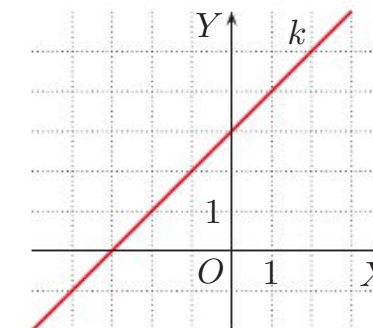
F. $y = \frac{1}{2}x + 2$

C. $y = -2x - 6$

G. $y = x + 2$

D. $y = -3x - 6$

H. $y = 3x + 2$

**Zadanie 14 (0-1)**

Punkty $K(-4, -5)$ i $M(8, 1)$ są przeciwległymi wierzchołkami rombu $KLMN$.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Przekątna LN tego rombu jest zawarta w prostej o współczynniku kierunkowym równym

A.	-2 ,	ponieważ przekątne rombu	1.	mają równe długości.
B.	$-\frac{1}{2}$,		2.	dzielią się na połowy.
			3.	są prostopadłe.

Zadanie 15

Dany jest trapez o kolejnych wierzchołkach $A(-4, -3)$, $B(4, 1)$, $C(4, 3)$ oraz $D(-4, 7)$.

D Zadanie 15.1 (0-2)

Uzasadnij, że przekątne tego trapezu nie są prostopadłe.

Zadanie 15.2 (0-3)

Wyznacz punkt, w którym przecinają się proste zawierające ramiona tego trapezu.

Zadanie 16 (0-2)

Dla jakiej liczby c miejsce zerowe funkcji $f(x) = \frac{2}{3}x + c$ jest równe 6?

D Zadanie 17 (0-2)

Uzasadnij, że proste $y = \frac{2}{3}x - (1 - x)$ i $y = 0,4x - (x - 1)$ są prostopadłe.



Zadanie 18 (0-2)

Prosta k jest prostopadła do prostej $l: y = \frac{1}{2}x + 2$ i przecina oś OX w tym samym punkcie co prosta l . Wyznacz równanie prostej k .

Zadanie 19 (0-2)

Znajdź największą liczbę całkowitą m , dla której prosta $y = (\frac{3}{2}m + 9)x - 4$ jest wykresem funkcji malejącej.

Zadanie 20 (0-4)

Oblicz pole trójkąta ograniczonego osią OX oraz prostymi $2x - y - 2 = 0$ i $x - 2y + 5 = 0$.

D Zadanie 21 (0-4)

Dwa boki trójkąta są zawarte w prostych $y = -\frac{3}{4}x + 4$ i $y = \frac{2}{3}x - 6$. Wykaż, że jeśli punkty $P(2, -4)$ i $Q(-2, 2)$ należą do trzeciego boku tego trójkąta, to jest on prostokątny.

Zadanie 22

Punkty $A(0, -5)$, $B(8, -3)$, $C(4, 5)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$.

D Zadanie 22.1 (0-2)

Uzasadnij, że równoległobok $ABCD$ nie jest prostokątem.

Zadanie 22.2 (0-4)

Wyznacz równania prostych, w których są zawarte odcinki AD i CD .

Zadanie 23 (0-4)

Punkty $(-3, -5)$ i $(3, 4)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątna jest zawarta w prostej $x = -3$. Oblicz pole tego trójkąta.

Zadanie 24 (0-4)

Prosta $y = \frac{5}{3}x + 5$ przecina osie układu współrzędnych w punktach A i B , a prosta $y = 1,5x - 6$ – w punktach C i D . Oblicz pole czworokąta $ABCD$.

Zadanie 25 (0-4)

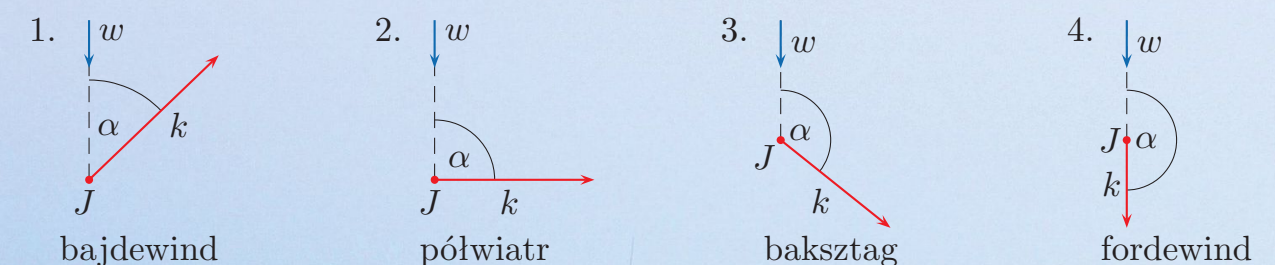
Punkty $P(-3, 0)$ i $S(-1, 4)$ są wierzchołkami prostokąta $PQRS$ oraz wierzchołek R leży na osi OX . Wyznacz współrzędne punktu przecięcia przekątnych tego prostokąta.

Zadanie 26 (0-4)

Punkty $A(-2, 0)$, $B(0, -2)$ i $C(4, 0)$ są wierzchołkami trapezu prostokątnego $ABCD$ o podstawach AD i BC . Wyznacz współrzędne wierzchołka D .

6 Planimetria

Jednym z pojęć omawianych w tym rozdziale jest pojęcie kąta. W żeglarskim od kąta między kierunkiem wiatru a kursem jachtu zależy ustawienie żagli. Na poniższych rysunkach podano nazwy kursów jachtu względem wiatru (strzałka w oznacza kierunek wiatru, punkt J – położenie jachtu, a strzałka k – kurs obrany przez jacht).



Kąty

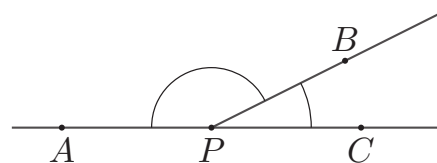
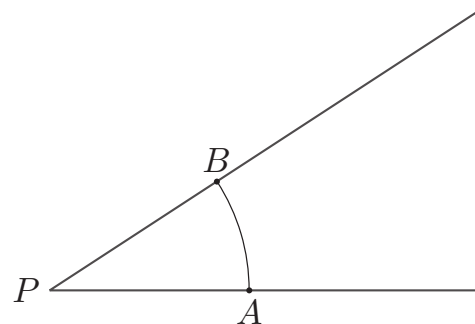
Kąt to jeden z dwóch obszarów płaszczyzny wyznaczony przez dwie półproste (zwane **ramionami kąta**) o wspólnym początku (zwanym **wierzchołkiem kąta**) wraz z tymi półprostymi.

Miarę kąta APB oznaczamy $|\sphericalangle APB|$.

Kąt wypukły ma miarę mniejszą od 180° lub równą 180° . Kąt o mierze większej od 180° nazywamy **wklęsłym**.

Dwa kąty wypukłe nazywamy **przyległymi**, gdy mają wspólne ramie, a ich pozostałe ramiona dopełniają się do prostej.

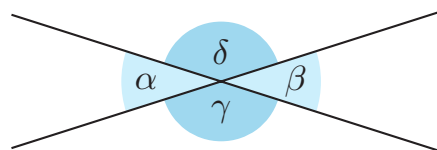
Kąty APB i BPC na rysunku obok są przyległe.



1. Wyznacz miary kątów przyległych, których stosunek miar jest równy:

- a) 1:2, b) 1:3, c) 1:5, d) 5:7.

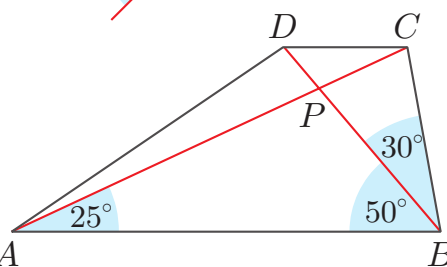
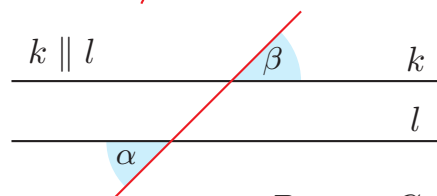
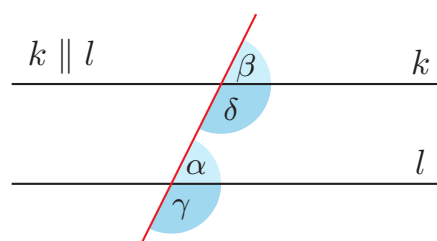
Dwie przecinające się proste tworzą dwie pary **kątów wierzchołkowych** α i β oraz γ i δ (rysunek obok). Zachodzą równości $\alpha = \beta$ oraz $\gamma = \delta$.



2. Przekątna prostokąta jest dwa razy dłuższa od jego krótszego boku. Wyznacz miary kątów wierzchołkowych utworzonych przez proste zawierające przekątną tego prostokąta.

Para prostych równoległych przeciętych trzecią prostą wyznacza **kąty odpowiadające** o równych miarach.

Na przykład na rysunku obok $\alpha = \beta$ i $\gamma = \delta$.

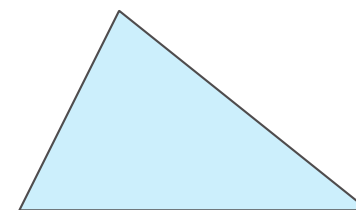


D 3. Na rysunku obok zaznaczono **kąty naprzemianległe** i oznaczono je α i β . Uzasadnij, że kąty te mają równe miary.

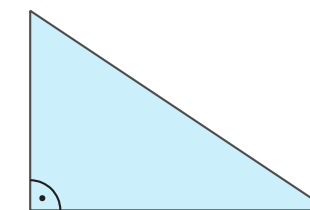
4. Punkt P jest punktem przecięcia przekątnych trapezu $ABCD$ (rysunek obok). Wyznacz miary kątów trójkąta CDP oraz trójkąta CBP .

6.1. Miary kątów w trójkącie

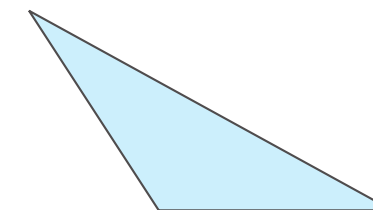
Przypomnijmy, że **trójkąt** to figura wyznaczona przez trzy punkty nieleżące na jednej prostej. Każdy z tych punktów jest **wierzchołkiem** trójkąta, a odcinki łączące wierzchołki nazywamy **bokami**. Trójkąty można klasyfikować ze względu na ich kąty.



Trójkąt ostrokątny ma wszystkie kąty ostre. (Kąt ostry to kąt o mierze mniejszej od 90°).



Trójkąt prostokątny ma jeden kąt prosty. (Kąt prosty to kąt o mierze równej 90°).



Trójkąt rozwartokątny ma jeden kąt rozwarty. (Kąt rozwarty to kąt o mierze większej od 90° i mniejszej od 180°).

Twierdzenie

Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180° .

Dowód

Rozpatrzmy trójkąt ostrokątny ABC (rysunek obok). Rysujemy pomocniczą prostą l równoległą do boku AB , przechodzącą przez wierzchołek C . Kąty α i α' są równe (jako kąty naprzemianległe). Również kąty β i β' są równe (jako kąty naprzemianległe).

Zatem $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma$.

Ponadto $\alpha' + \beta' + \gamma = 180^\circ$, więc również:

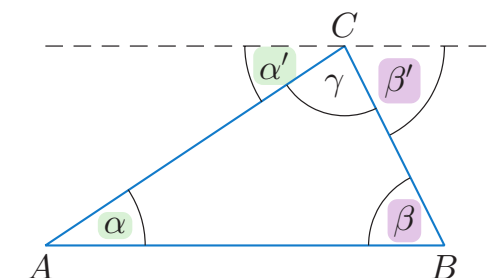
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Zauważmy, że powyższe rozumowanie jest takie samo dla trójkąta rozwartokątnego czy prostokątnego. Udowodniliśmy w ten sposób, że suma miar kątów wewnętrznych w dowolnym trójkącie jest równa 180° .

Uwaga. Tam, gdzie nie powoduje to nieporozumień, będziemy zamiennie używać określeń „kąt” i „miara kąta”.

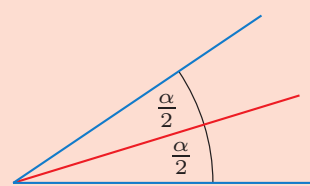
Ćwiczenie 1

- D** a) Wykaż, że trójkąt ABC , w którym kąt B jest dwa razy większy od kąta A , a kąt C jest trzy razy większy od kąta A , jest trójkątem prostokątnym.
b) Stosunek miar kątów trójkąta jest jak 1:4:5. Podaj miary tych kątów.



Definicja

Dwusieczną kąta nazywamy półprostą o początku w wierzchołku kąta, dzielącą ten kąt na dwa kąty o równych miarach.



Przykład 1

Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny ABC o kącie prostym przy wierzchołku B (rysunek poniżej). Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie P . Oblicz miarę kąta APC .

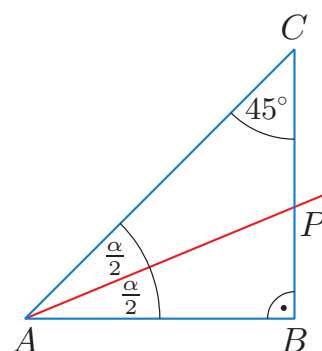
Trójkąt ABC jest prostokątny równoramienny, więc:

$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BCA| = 45^\circ$$

Stąd:

$$|\sphericalangle CAP| = \frac{1}{2} \cdot 45^\circ = 22,5^\circ$$

$$\text{Zatem } |\sphericalangle APC| = 180^\circ - (45^\circ + 22,5^\circ) = 112,5^\circ.$$

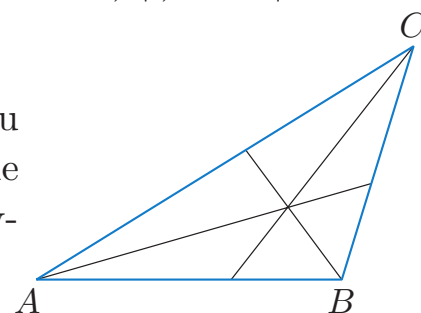


Ćwiczenie 2

Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C . Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie P . Oblicz miary kątów trójkąta APB w przypadku, gdy: a) $|\sphericalangle BAC| = 30^\circ$, b) $|\sphericalangle BAC| = 35^\circ$.

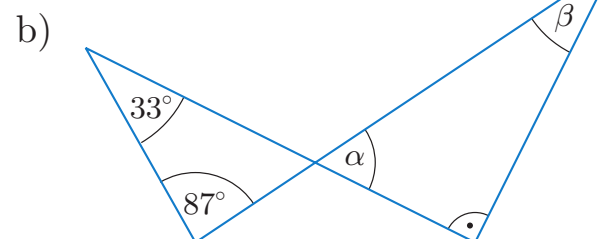
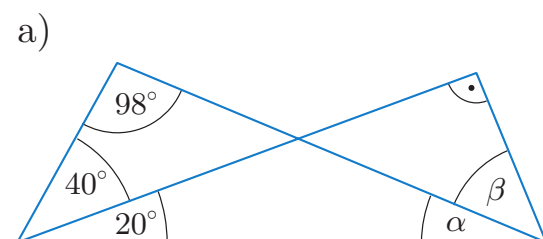
Ćwiczenie 3

Miary kątów CAB i CBA trójkąta ABC na rysunku obok są odpowiednio równe 32° i 108° . Dwusieczne kątów tego trójkąta dzielą go na sześć trójkątów. Wyznacz miary kątów tych trójkątów.



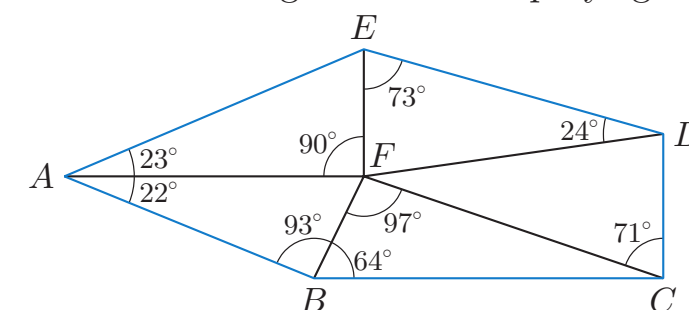
Zadania

1. Wyznacz miary kątów α i β .



2. Stosunek miar dwóch kątów trójkąta wynosi $2:3$, a miara trzeciego kąta jest o 26° większa od miary najmniejszego kąta. Wyznacz miary kątów tego trójkąta.

3. Do wykonania pomiarów geodezyjnych wykorzystuje się metodę zwaną **triangulacją**. Polega ona na podzieleniu mierzonego obszaru na przylegające do siebie trójkąty, czyli utworzeniu tak zwanej siatki triangulacyjnej. Oblicz brakujące miary kątów narysowanego obok fragmentu siatki triangulacyjnej.

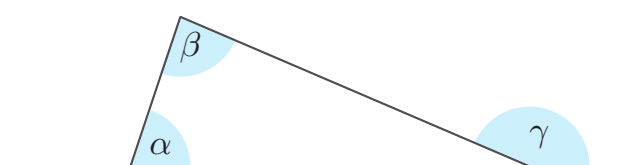


4. Dany jest trójkąt równoramienny ABC o ramionach AC i BC oraz kącie między nimi 40° . Oblicz miary kątów trójkątów powstałych z podzielenia trójkąta ABC dwusieczną kąta: a) ACB , b) CAB .

5. Miary kątów przyległych różnią się o 32° . Wyznacz te miary.

D 6. Uzasadnij, że dwusieczne kątów przyległych są prostopadłe.

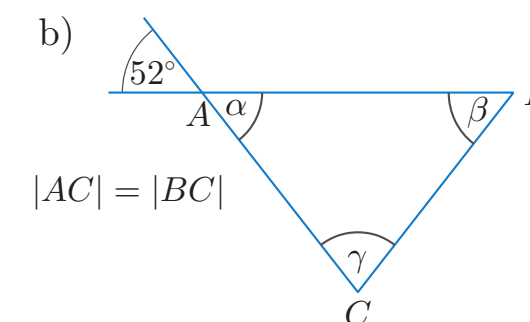
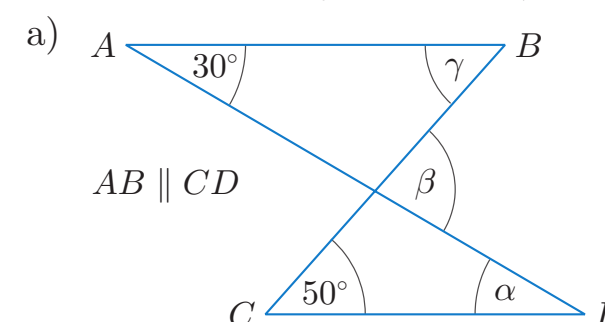
D 7. Wykaż, że miara kąta zewnętrznego γ trójkąta (rysunek obok) jest równa sumie miar kątów wewnętrznych α i β .



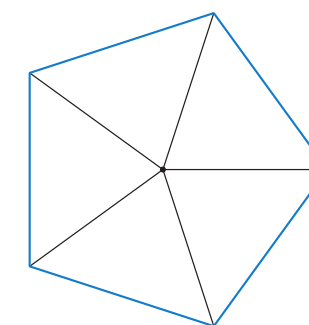
D 8. Wykaż, że suma miar kątów wewnętrznych czworokąta jest równa 360° .
Wskazówka. Podziel czworokąt przekątną na dwa trójkąty.

Sprawdź się

9. Wyznacz miary kątów α , β i γ .



10. Pięciokąt foremny można podzielić na pięć identycznych trójkątów równoramiennych (rysunek obok). Wyznacz miary kątów tych trójkątów.



11. Przekątne sześciokąta foremnego poprowadzone z jednego z jego wierzchołków podzieliły go na cztery trójkąty. Wyznacz miary kątów tych trójkątów.

6.2. Trójkąty przystające

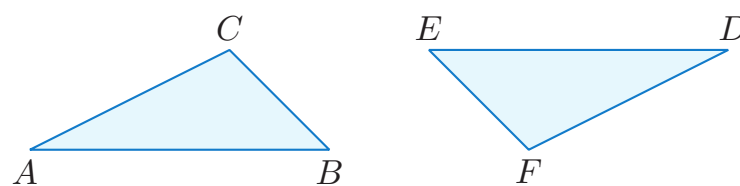
Figury **przystające** to, intuicyjnie, figury tego samego kształtu i wielkości. Dwa wielokąty są **przystające**, jeśli ich odpowiednie boki i odpowiednie kąty są równe.

Na tej lekcji omówimy przystawanie trójkątów.

Długość odcinka AB będziemy oznaczać $|AB|$.

Ćwiczenie 1

Trójkąty przedstawione na poniższym rysunku są przystające. Wskaż pary równych boków i równych kątów.



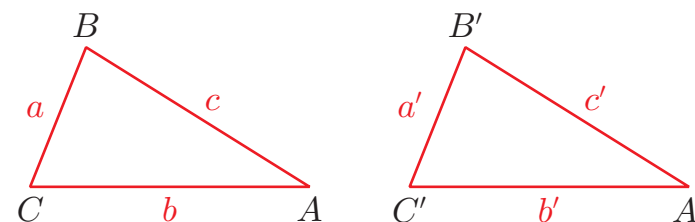
Do stwierdzenia, że trójkąty są przystające, nie jest konieczne porównanie aż 6 par wielkości (3 par kątów i 3 par boków). Przypomnijmy twierdzenia pozwalające wnioskować o przystawaniu trójkątów zwane **cechami przystawania trójkątów**.

Cecha BBB

Jeśli trzy boki jednego trójkąta są równe odpowiednim trzem bokom drugiego trójkąta, to trójkąty te są przystające.

Jeśli $a = a'$, $b = b'$ i $c = c'$, to trójkąty ABC i $A'B'C'$ są przystające, co zapisujemy:

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

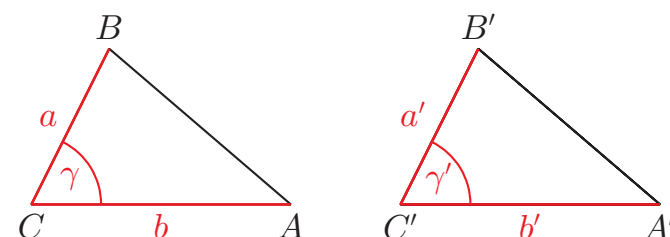


Cecha KBK

Jeśli dwa boki i kąt zawarty między nimi w jednym trójkącie są równe odpowiednim dwóm bokom i kątowi zawartemu między nimi w drugim trójkącie, to trójkąty te są przystające.

Jeśli $a = a'$, $b = b'$ i $\gamma = \gamma'$, to:

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

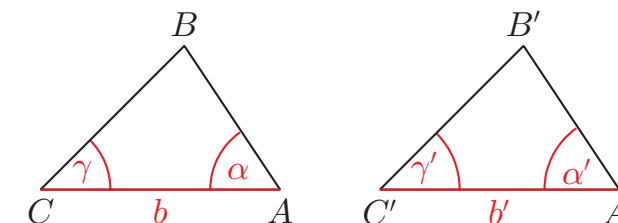


Cecha KBK

Jeśli bok i dwa leżące przy nim kąty w jednym trójkącie są równe odpowiedniemu bokowi i dwóm leżącym przy nim kątom w drugim trójkącie, to trójkąty te są przystające.

Jeśli $b = b'$, $\alpha = \alpha'$ i $\gamma = \gamma'$, to:

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$



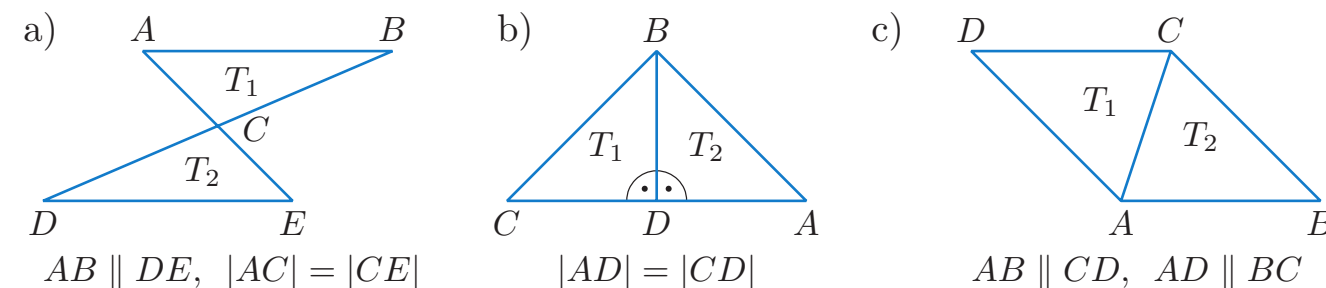
Ćwiczenie 2

Czy przystające są trójkąty, o których wiadomo, że:

- trzy kąty jednego z nich są równe trzem kątom drugiego,
- mają jedną parę równych kątów i dwie pary równych boków?

Ćwiczenie 3

Podaj cechę przystawania, na podstawie której można stwierdzić, że trójkąty T_1 i T_2 są przystające.



Definicja

Symetralną odcinka nazywamy prostą prostopadłą do tego odcinka, przechodzącą przez jego środek.

Przykład 1

Uzasadnij, że dowolny punkt symetralnej odcinka jest równo oddalony od końców tego odcinka.

Rozpatrzmy odcinek AB o środku S i jego symetralną l .

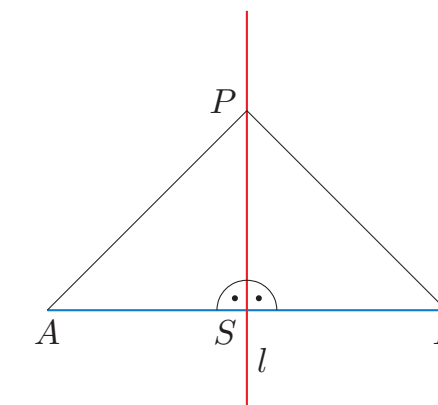
Niech P będzie dowolnym punktem symetralnej.

Jeśli $P = S$, to $|AP| = |BP|$.

Założmy teraz, że $P \neq S$.

Korzystając z cechy KBK, stwierdzamy, że trójkąty ASP i BSP są przystające (uzasadnij).

Zatem zachodzi równość $|AP| = |BP|$.



D Ćwiczenie 4

Uzasadnij, że punkt równo oddalony od końców odcinka leży na symetralnej tego odcinka.

Twierdzenie

Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

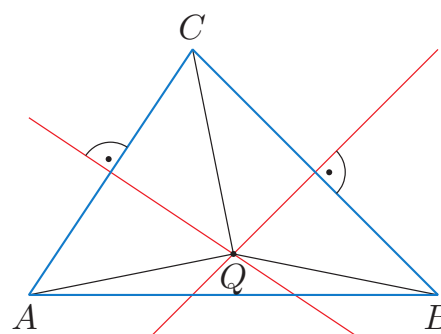
Dowód

Rozpatrzmy dowolny trójkąt i oznaczmy jego wierzchołki A , B , C (rysunek obok).

Niech Q będzie punktem przecięcia się symetralnych boków AC i BC .

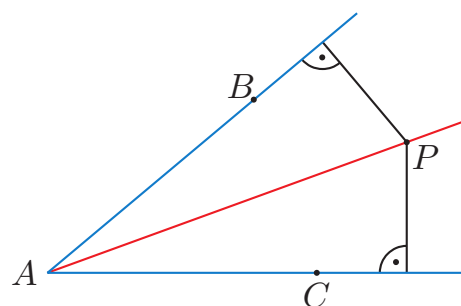
Punkt Q jest równo oddalony od końców boku AC , czyli $|AQ| = |CQ|$. Analogicznie otrzymujemy równość $|CQ| = |BQ|$.

Zatem $|AQ| = |BQ|$. Oznacza to, że punkt Q leży na symetralnej boku AB , czyli symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.



D Ćwiczenie 5

Półprosta AP jest dwusieczną kąta BAC (rysunek obok). Korzystając z cechy KBK przystawiania trójkątów, uzasadnij, że punkt P jest równo oddalony od ramion tego kąta.



Twierdzenie

Dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

D Ćwiczenie 6

Udowodnij podane wyżej twierdzenie.

Zauważmy, że nie z każdych trzech odcinków można zbudować trójkąt. Mówi o tym poniższe twierdzenie.

Nierówność trójkąta

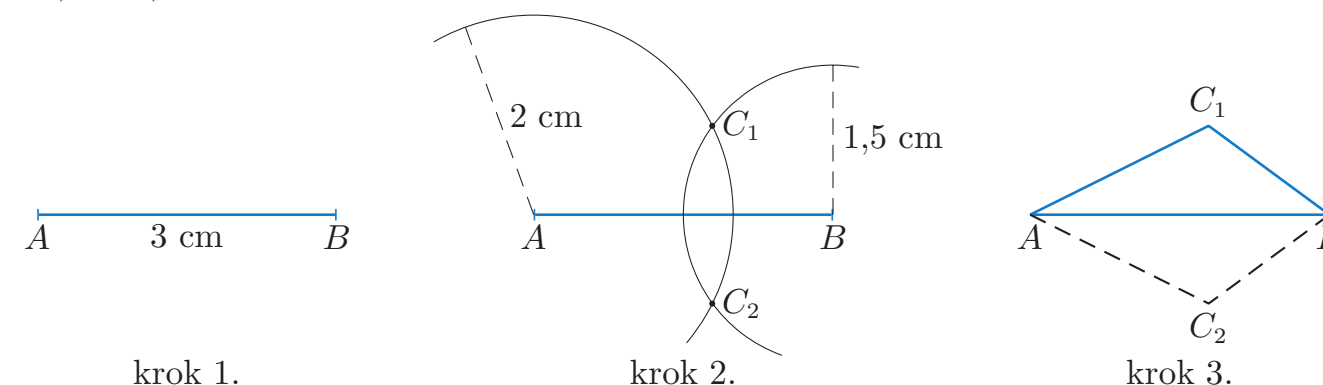
Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a + b > c$$

gdzie c jest długością najdłuższego odcinka.

Przykład 2

Skonstruuj (narysuj za pomocą cyrkla i linijki) trójkąt o bokach długości 1,5 cm, 2 cm i 3 cm.



W kroku 2. z punktów A i B zataczamy łuki okręgów, które przecinają się w punkcie C_1 oraz w punkcie C_2 . W wyniku tej konstrukcji otrzymaliśmy dwa trójkąty spełniające podany warunek: $\triangle ABC_1$ i $\triangle ABC_2$.

Ćwiczenie 7

Czy boki trójkąta mogą mieć podane długości?

- | | | | |
|---------------|-----------------------|--|---|
| a) 2, 3, 5 | c) 2, 2, $\sqrt{7}$ | e) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ | g) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$ |
| b) 17, 19, 35 | d) 7, 8, $\sqrt{225}$ | f) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ | h) 1, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}$ |

Ćwiczenie 8

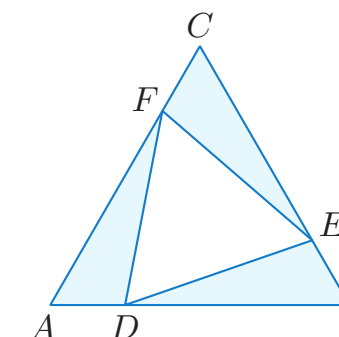
Na ile sposobów można zbudować trójkąt, jeżeli są do dyspozycji dwa odcinki długości 2 cm, trzy odcinki długości 3 cm i dwa odcinki długości 5 cm?

Zadania

- D 1. a) W prostokącie $ABCD$ punkt P jest środkiem boku AB . Uzasadnij, że trójkąty APD i BPC są przystające.

b) Uzasadnij, że punkt przecięcia przekątnych równoległoboku dzieli je na połowy.

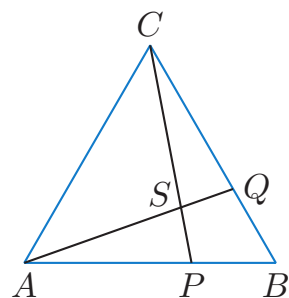
- D 2. Trójkąt ABC jest równoboczny (rysunek obok). Odcinki AD , BE i CF mają równe długości. Uzasadnij, że trójkąt DEF też jest równoboczny.



- D 3. Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C . Środkowe AP i BQ tego trójkąta przecinają się w punkcie O . Uzasadnij, że trójkąty AOQ i BOP są przystające.

Środkowa trójkąta to odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.

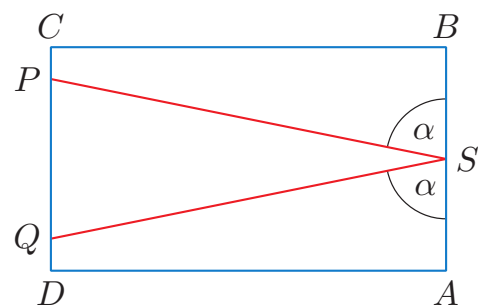
- D** 4. W trójkącie równobocznym ABC (rysunek obok) na bokach AB i BC wybrano odpowiednio punkty P i Q tak, że $|AP| = 2|BP|$ i $|CQ| = 2|BQ|$. Odcinki AQ i CP przecinają się w punkcie S . Uzasadnij, że trójkąty APS i CQS są przystające.



- D** 5. W czworokącie wypukłym $ABCD$ dwie pary boków są równe: $|AB| = |BC|$ oraz $|CD| = |DA|$. Przekątne AC i BD tego czworokąta przecinają się w punkcie O . Uzasadnij, że trójkąt AOB jest przystający do trójkąta COB oraz że trójkąt AOD jest przystający do trójkąta COD .

Uwaga. Wszystkie kąty wielokąta wypukłego mają miary mniejsze od 180° .

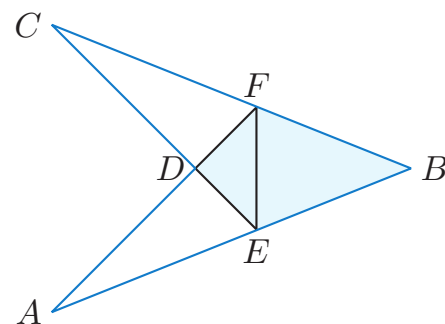
- D** 6. Kula bilardowa odbija się od bandy stołu bilardowego pod takim samym kątem, pod jakim w nią uderzyła (kąt α na rysunku). Kula przebyła drogę z P do S i z S do Q , gdzie S jest środkiem bandy AB . Uzasadnij, że $|PC| = |QD|$.



- D** 7. Uzasadnij, że jeśli wysokość trójkąta zawiera się w dwusiecznej kąta tego trójkąta, to trójkąt ten jest równoramienny.

- D** 8. W czworokącie $ABCD$ (rysunek obok) kąty EFB i FEB są równe oraz $|AE| = |CF|$. Uzasadnij, że:

- trójkąty BAF i BCE są przystające,
- czworokąt $DEBF$ ma dwie pary boków równych.



Sprawdź się

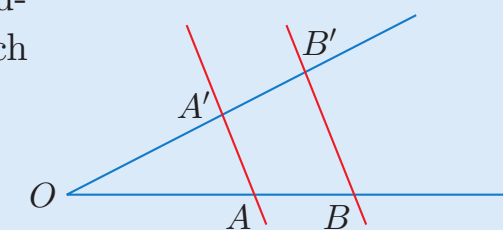
9. Na ile trójkątów przystających wszystkie osie symetrii podanej figury dzieli tę figurę?
- trójkąt równoboczny
 - kwadrat
 - sześciokąt foremny
- D** 10. Korzystając z odpowiedniej cechy przystawiania trójkątów, uzasadnij, że przekątna równoległoboku dzieli go na dwa trójkąty przystające.
- D** 11. Dany jest ośmiokąt foremny $ABCDEFGH$. Wykaż, że czworokąt $ACEG$ jest kwadratem.
12. Danych jest pięć odcinków o długościach 1 cm, 2 cm, 2,5 cm, 5 cm i 7 cm. Ile różnych trójkątów można zbudować z tych odcinków?

6.3. Twierdzenie Talesa

Twierdzenie Talesa

Jeżeli ramiona kąta AOA' są przecięte dwiema prostymi równoległymi AA' i BB' , to długości odcinków wyznaczonych przez te proste na jednym ramieniu tego kąta są proporcjonalne do długości odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu:

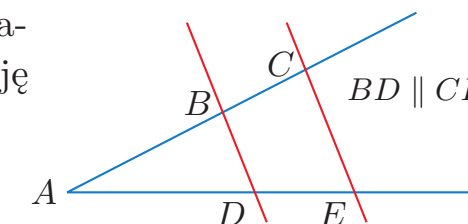
$$\frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{|A'B'|}{|AB|} \quad \text{oraz} \quad \frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{|OB'|}{|OB|}$$



Ćwiczenie 1

- a) Długość którego odcinka (rysunek obok) należy wstawić w miejsce $?$, aby otrzymać proporcję prawdziwą?

$$\frac{?}{|AE|} = \frac{|AB|}{|AD|}, \quad \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{?}{|DE|}$$



- b) Oblicz długość odcinka AD dla $|AB| = 3,6$, $|AC| = 5,4$, $|DE| = 1,2$.

Ćwiczenie 2

Proste BD , CE i ST (rysunek obok) są równoległe.

- D** a) Uzasadnij, że:

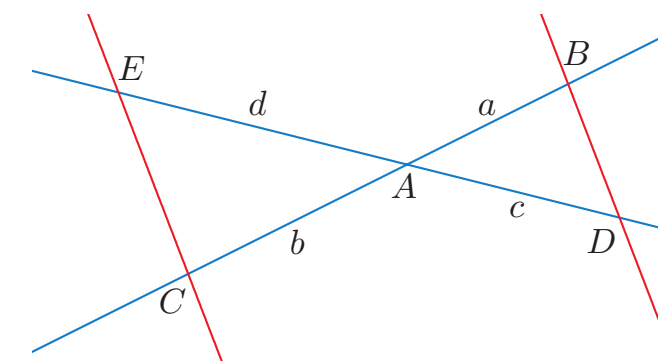
$$\frac{|BC|}{|DE|} = \frac{|CS|}{|ET|}$$

- b) Wiadomo, że $|AS| = 10$. Oblicz długości odcinków AD i DE .

Zauważmy, że równość $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ zachodzi również w sytuacji przedstawionej na rysunku poniżej ($BD \parallel CE$).

Ćwiczenie 3

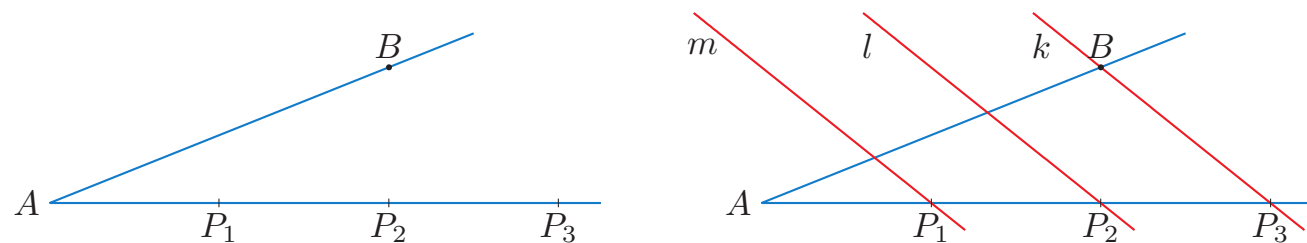
Proste BD i CE są równoległe (rysunek obok) oraz $a = 3,6$, $b = 4,8$, $c = 4,5$. Oblicz długość odcinka ED .





Przykład 1

Za pomocą cyrkla i linijki podziel dany odcinek AB na trzy równe części.



Odcinek AB umieszczamy na jednym ramieniu kąta. Na drugim ramieniu odmierzymy trzy odcinki tej samej (dowolnej) długości. Są to odcinki AP_1 , P_1P_2 i P_2P_3 .

Przez punkt P_3 i B prowadzimy prostą (prosta k), następnie konstruujemy dwie proste równoległe do prostej k przechodzące przez punkty P_2 i P_1 (proste l i m). Patrz str. 272.

Zgodnie z twierdzeniem Talesa odcinki wyznaczone na ramionach kąta przez proste równoległe są proporcjonalne, więc opisana konstrukcja prowadzi do podziału odcinka AB na trzy równe części.

Ćwiczenie 4

Jak za pomocą cyrkla i linijki podzielić dany odcinek:

- a) na 5 równych części, b) na 7 równych części, c) w stosunku 4:5?

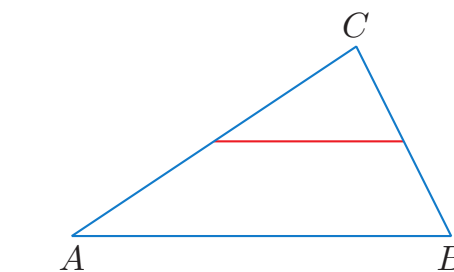
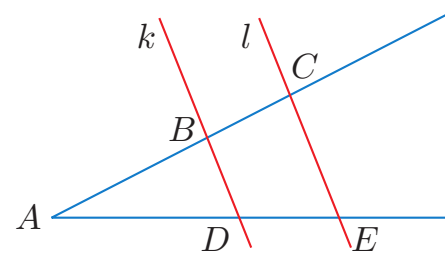
Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa – mówi ono, że z proporcji odpowiednich odcinków wynika równoległość prostych.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa

Jeżeli odcinki wyznaczone przez dwie proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta, to te proste są równoległe.

Ćwiczenie 5

- a) Podaj przykłady proporcji, z których wynika równoległość prostych k i l (rysunek obok).



- D** b) Uzasadnij, że jeśli $|AB| = 2,4$, $|AC| = 3,6$, $|AD| = 2,8$ i $|DE| = 1,4$, to proste BD i CE są równoległe.

D Ćwiczenie 6

Wykaż, że w dowolnym trójkącie odcinek łączący środki dwóch boków jest równoległy do trzeciego boku (rysunek obok).

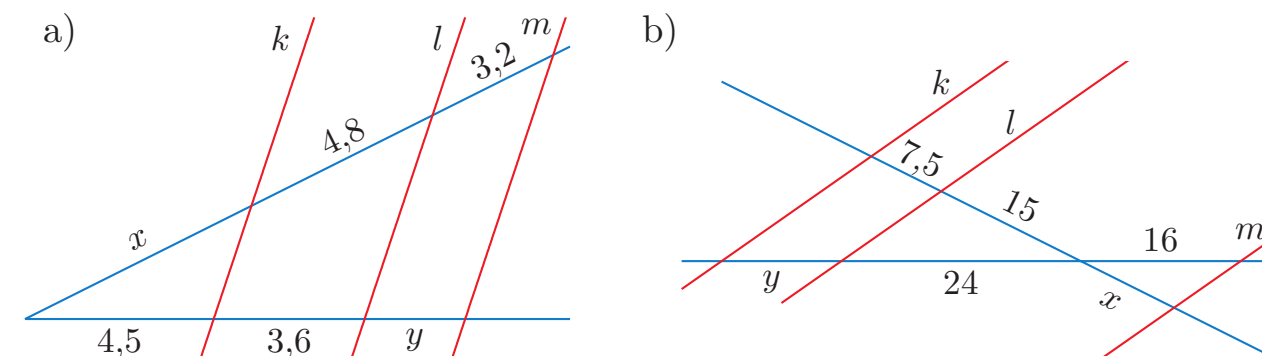
D Ćwiczenie 7

Wykaż, że w trapezie niebędącym równoległobokiem odcinek łączący środki:

- a) ramion trapezu jest równoległy do jego podstaw (rozpatrz kąt otrzymany przez przedłużenie ramion trapezu),
b)* przekątnych trapezu jest równoległy do jego podstaw.

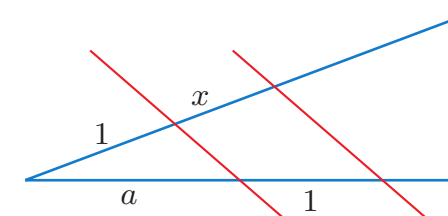
Zadania

1. Proste k , l i m są równoległe. Wykorzystując informacje podane na rysunku, oblicz długości x i y .

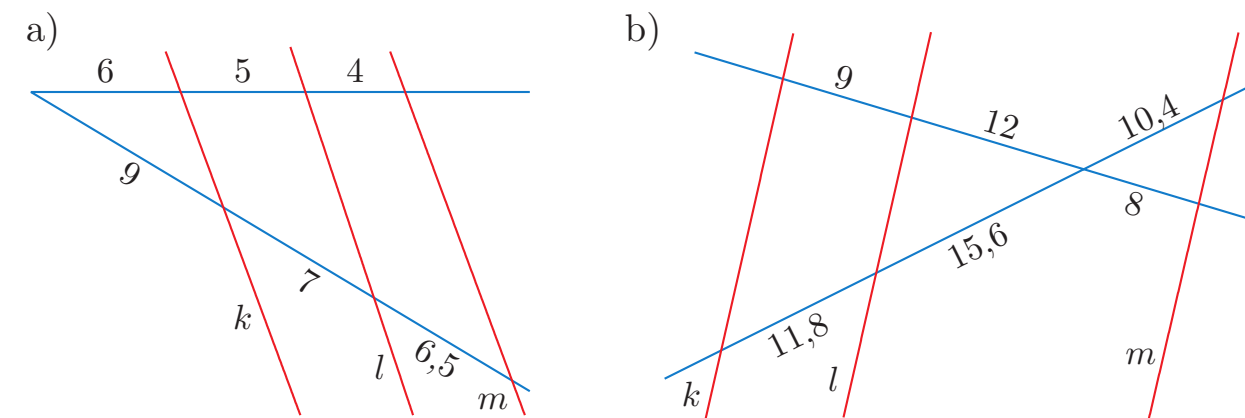


2. Dany jest trapez $ABCD$ o ramionach $|AD| = 9$ cm, $|BC| = 12$ cm. Na ramieniu AD wybrano punkty P i Q takie, że $|AQ| = 7$ cm i $|DP| = 5$ cm. Oblicz długości odcinków, na jakie proste równoległe do podstaw trapezu i przechodzące przez punkty P i Q podzieliły ramię BC .

3. Na rysunku pokazano, jak – mając dane odcinki o długościach 1 i a – skonstruować odcinek o długości $x = \frac{1}{a}$. Opisz, jak – mając dane odcinki o długościach 1 i a – skonstruować odcinki o długościach a^2 i a^3 .



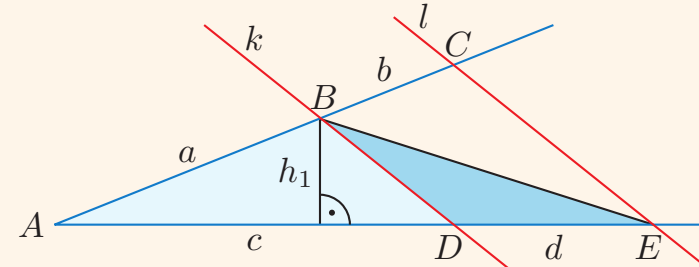
4. Opisz, jak podzielić konstrukcyjnie dany odcinek w stosunku $1 : \sqrt{2}$.
5. Sprawdź, które z prostych k , l i m są równoległe.



Czy wiesz, że...

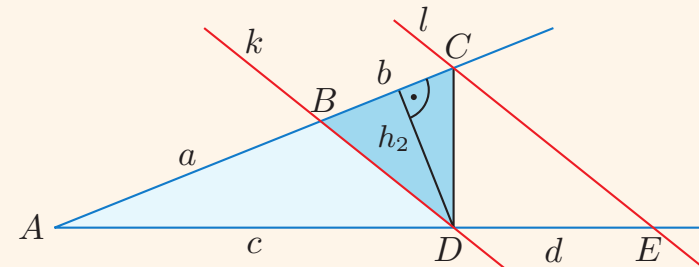
Najstarszy zachowany dowód twierdzenia Talesa to dowód autorstwa Euklidesa przedstawiony poniżej.

Zakładamy, że proste k i l są równoległe (rysunek poniżej).



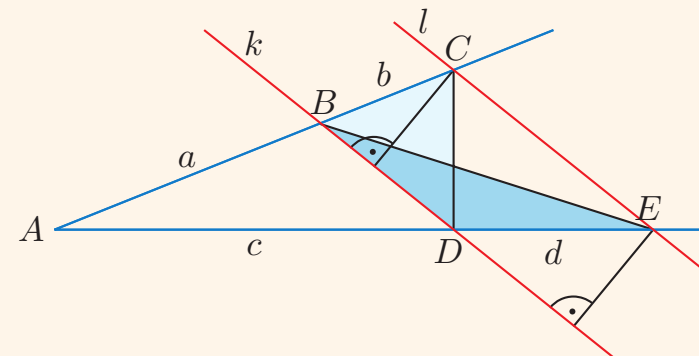
Trójkąty ADB i DEB mają wspólną wysokość h_1 , zatem:

$$\frac{P_{ADB}}{P_{DEB}} = \frac{\frac{1}{2}ch_1}{\frac{1}{2}dh_1} = \frac{c}{d}$$



Trójkąty ADB i CBD mają wspólną wysokość h_2 , zatem:

$$\frac{P_{ADB}}{P_{CBD}} = \frac{\frac{1}{2}ah_2}{\frac{1}{2}bh_2} = \frac{a}{b}$$



Trójkąty DEB i CBD mają wspólną podstawę BD oraz tę samą wysokość (gdyż proste k i l są równoległe). Zatem:

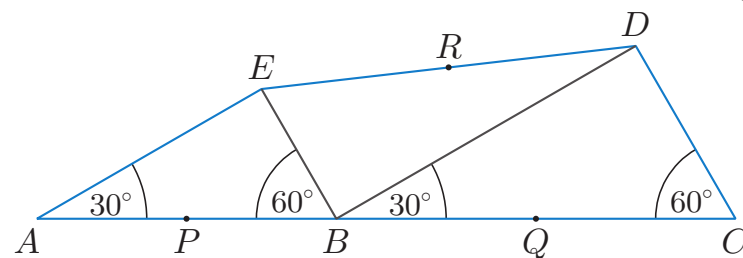
$$P_{DEB} = P_{CBD}$$

Zatem otrzymujemy $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ lub równoważnie $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Sprawdź się

6. Dany jest trapez $ABCD$, którego ramię AD ma długość 30. Punkt P leży na ramieniu AD , punkt Q na ramieniu BC oraz $PQ \parallel AB$. Ponadto $|AP| = x$, $|PD| = y$, $|BQ| = x + 2$, $|QC| = y + 3$. Oblicz x i y .

7. Punkty P , Q i R są środkami odcinków AB , BC i DE (rysunek poniżej).

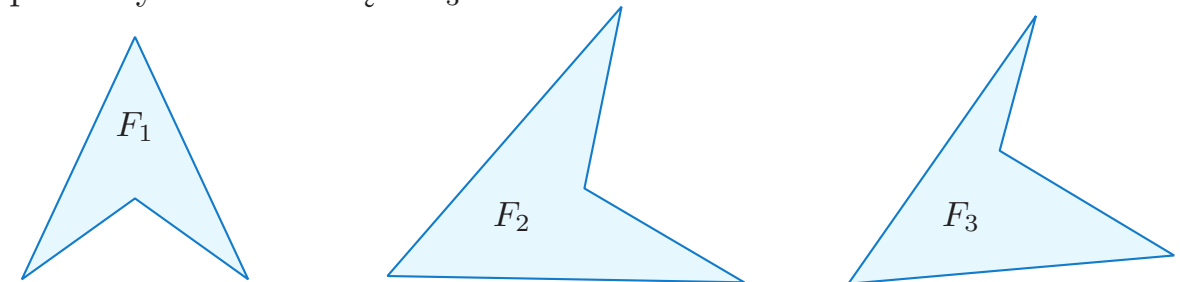


- a) Wykaż, że czworokąty $BCDE$ i $ABDE$ są trapezami.
b) Wykaż, że $RQ \parallel DC$ i $PR \parallel BD$ oraz że trójkąt PQR jest prostokątny.

6.4. Wielokąty podobne

Dwie figury geometryczne są **podobne**, jeśli są tego samego kształtu, lecz niekoniecznie tej samej wielkości. Na przykład podobne są dwa dowolne koła, dwa dowolne kwadraty czy trójkąty równoboczne.

Na rysunku poniżej podobne są czworokąty F_1 i F_2 . Żaden z nich nie jest podobny do czworokąta F_3 .



Definicja

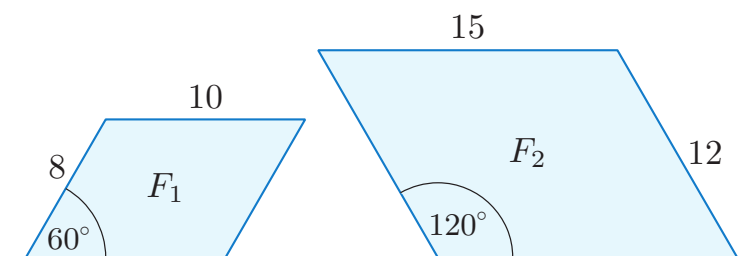
Dwa wielokąty są **podobne**, jeśli ich odpowiednie kąty są równe, a odpowiednie boki proporcjonalne.

Jeśli figury F_1 i F_2 są podobne, to piszemy $F_1 \sim F_2$.

Przykład 1

Uzasadnij, że równoległoboki F_1 i F_2 na rysunku poniżej są podobne.

Długości boków równoległoboków F_1 i F_2 są proporcjonalne, ponieważ $\frac{15}{10} = \frac{12}{8}$, a ich odpowiednie kąty są równe. Zatem $F_1 \sim F_2$.



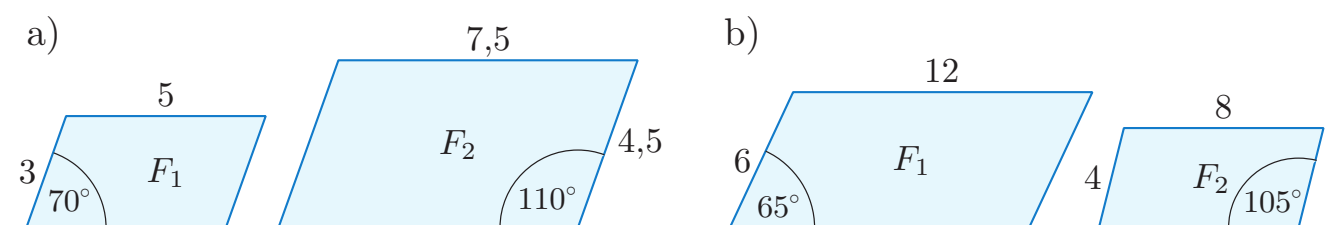
Ćwiczenie 1

Dany jest prostokąt P_1 o bokach $a = 2,4$ i $b = 1,8$. Sprawdź, czy prostokąt ten jest podobny do prostokąta P_2 o bokach c i d .

- a) $c = 3,6$, $d = 2,7$ b) $c = 4$, $d = 6$ c) $c = 54$, $d = 72$

Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy równoległoboki F_1 i F_2 są podobne.

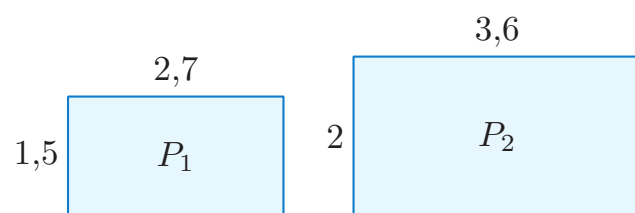


Definicja

Dla wielokątów podobnych stosunek długości odcinków jednego wielokąta do długości odpowiadających im odcinków drugiego wielokąta nazywamy **skala podobieństwa** (zwykle oznaczamy ją literą k).

Przykład 2

Prostokąty P_1 i P_2 (rysunek obok) są podobne. Podaj skalę podobieństwa prostokąta P_2 do prostokąta P_1 oraz prostokąta P_1 do prostokąta P_2 .



Skala podobieństwa prostokąta P_2 do prostokąta P_1 jest równa:

$$k_1 = \frac{2}{1,5} = \frac{4}{3}$$

Zauważ, że również $\frac{3,6}{2,7} = \frac{4}{3}$.

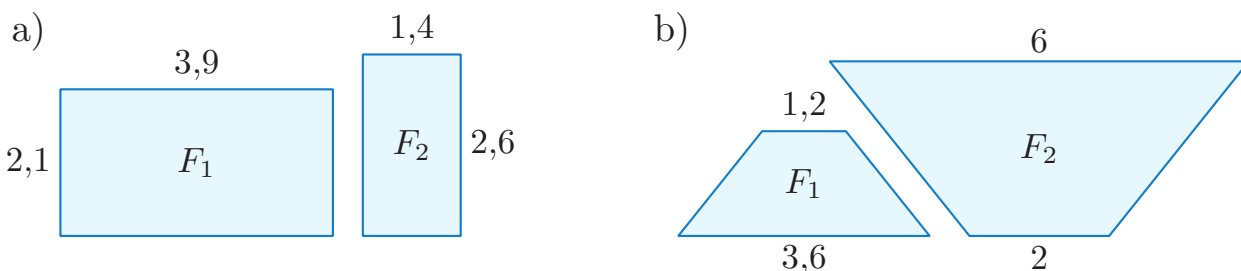
Skala podobieństwa prostokąta P_1 do prostokąta P_2 jest równa:

$$k_2 = \frac{1,5}{2} = \frac{3}{4} \quad \text{Zauważ, że skale podobieństwa } k_1 \text{ i } k_2 \text{ są liczbami odwrotnymi.}$$

Zwróć uwagę, że jeśli figury F_1 i F_2 są przystające, to są podobne, a ich skala podobieństwa jest równa 1.

Ćwiczenie 3

Figury F_1 i F_2 są podobne. Podaj skalę podobieństwa figury F_2 do figury F_1 oraz skalę podobieństwa figury F_1 do figury F_2 .



Przykład 3

Dane są prostokąty P_1 o bokach $a_1 = 5$ i $b_1 = 8$ oraz podobny do niego P_2 o krótszym boku $a_2 = 15$. Oblicz długość drugiego boku prostokąta P_2 .

Oznaczmy przez b_2 długość szukanego boku. Prostokąty są podobne, zatem:

$$\frac{b_2}{8} = \frac{15}{5} \quad \frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2}{a_1}$$

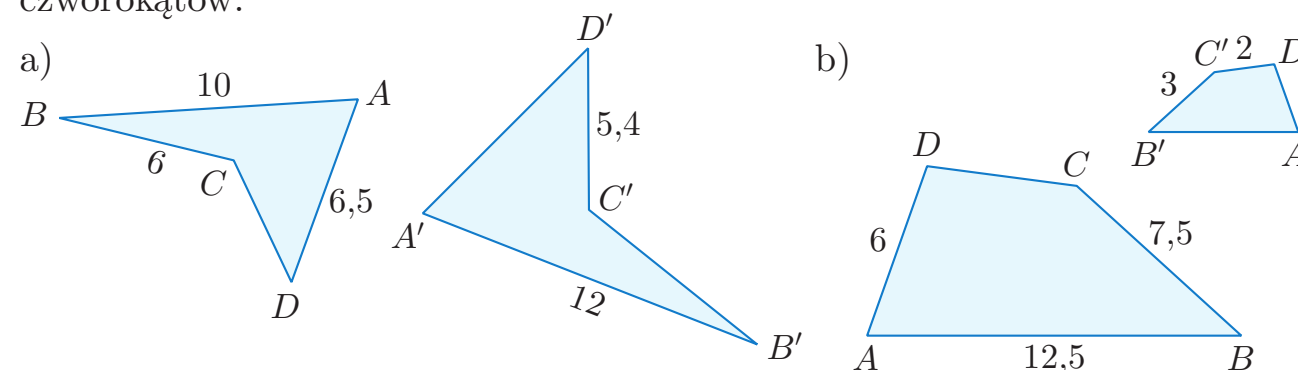
Stąd $\frac{b_2}{8} = 3$, czyli $b_2 = 24$.

Długość boku b_2 można też wyznaczyć, obliczając najpierw skalę podobieństwa. Skala podobieństwa k prostokąta P_2 do prostokąta P_1 jest równa 3, co oznacza, że:

$$b_2 = k \cdot 8 = 3 \cdot 8 = 24$$

Ćwiczenie 4

Czworokąty $ABCD$ i $A'B'C'D'$ są podobne. Oblicz skalę podobieństwa czworokąta $ABCD$ do czworokąta $A'B'C'D'$ oraz brakujące długości boków tych czworokątów.



Ćwiczenie 5

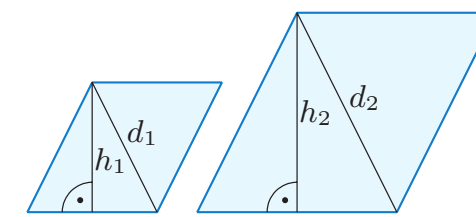
Przeczytaj informację w ramce, a następnie wyznacz szukane wielkości.

Dany jest równoległobok $ABCD$ o bokach długości 6 cm i 12 cm. Jego krótsza przekątna tworzy z jego krótszym bokiem kąt prosty. Równoległobok $A'B'C'D'$ jest podobny do równoległoboku $ABCD$, a jego krótsza przekątna ma długość $9\sqrt{3}$ cm.

- Oblicz obwód równoległoboku $A'B'C'D'$.
- Oblicz wysokości obu równoległoboków.

Jeśli dwa wielokąty są podobne w skali k , to proporcjonalne są nie tylko ich boki, lecz także inne odpowiadające sobie odcinki, na przykład wysokości czy przekątne.

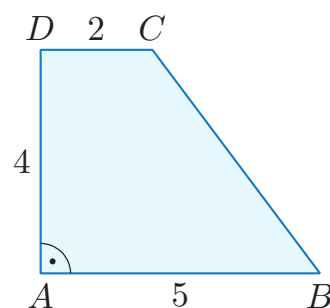
$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{d_1}{d_2} = k$$



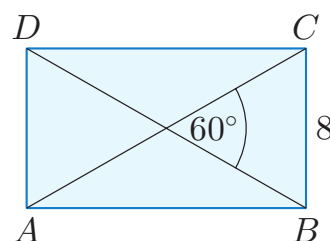
Zadania

- Oblicz skalę podobieństwa kwadratu K_1 o boku 5 cm do kwadratu K_2 :
 - o przekątnej $8\sqrt{2}$ cm,
 - o obwodzie 40 cm.
- Trapez o podstawach długości 4 cm i 9 cm podzielono prostą równoległą do podstaw na dwa trapezy podobne. Oblicz skalę podobieństwa otrzymanych trapezów.
- Dany jest prostokąt P o bokach długości 12 cm i 8 cm. Oblicz obwód prostokąta P' w przypadku, gdy skala podobieństwa prostokąta:
 - P' do P jest równa 3,
 - P do P' jest równa 2.
- Uzasadnij, że dwa prostokąty są podobne, gdy stosunek długości do szerokości jest w obu prostokątach taki sam.

5. a) Dwa romby są podobne w skali $k = \frac{5}{2}$. Długości przekątnych mniejszego z nich są równe 12 i 16. Oblicz obwód każdego z tych rombów.
b) Przekątne rombu $ABCD$ mają długości 10 i 24. Obwód podobnego do niego rombu $A'B'C'D'$ jest równy 78. Oblicz skalę podobieństwa większego rombu do mniejszego.

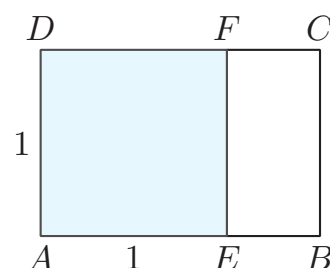


6. Trapez $A'B'C'D'$ o obwodzie równym 24 jest podobny do trapezu prostokątnego $ABCD$ (rysunek obok). Oblicz długości boków trapezu $A'B'C'D'$.
7. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o bokach długości 9 cm, 12 cm i 15 cm. Trójkąt $A'B'C'$ jest podobny do trójkąta ABC w skali $k = \frac{25}{24}$. Oblicz wysokość opuszczoną na przeciwprostokątną w każdym z tych trójkątów oraz sumę ich obwodów.
8. Dwa kwadraty o przekątnych długości d_1 i d_2 są podobne w skali $k = \sqrt{2}$ oraz wiadomo, że $d_1 + d_2 = 2$. Oblicz sumę obwodów tych kwadratów.



- D** 10. Prostokąt o bokach długości x i 4, gdzie $x > 4$, jest podobny do prostokąta o bokach długości 6 i $x+5$. Uzasadnij, że suma obwodów tych prostokątów jest równa 70.

- D** 11. Dany jest prostokąt $ABCD$ o bokach długości $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i 1 (rysunek obok). Uzasadnij, że po odcięciu od tego prostokąta kwadratu o boku 1 otrzymamy prostokąt $BCFE$ podobny do prostokąta $ABCD$.



Uwaga. Liczba $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ nosi nazwę **złotej liczby**.

Sprawdź się

12. Czy prostokąty o podanych wymiarach są podobne? Jeśli tak, to oblicz ich skalę podobieństwa.
a) 12×18 oraz $5 \times 7,5$ b) $1,5 \times 2,5$ oraz $10,5 \times 17,5$
13. Prostokąt P_1 o bokach 6 cm i 9 cm jest podobny do prostokąta P_2 . Oblicz długości boków prostokąta P_2 w przypadku, gdy:
a) obwód jest równy 50 cm, b) przekątna ma długość $2\sqrt{13}$ cm.

6.5. Trójkąty podobne

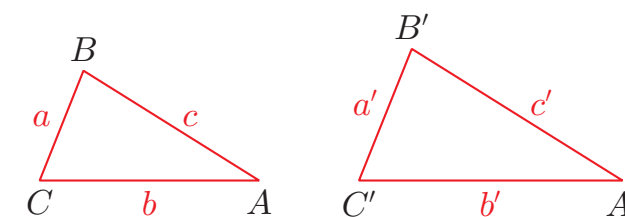
Aby ustalić podobieństwo trójkątów, nie musimy sprawdzać równości wszystkich kątów i proporcjonalności wszystkich boków. Możemy skorzystać z twierdzeń znanych jako **cechy podobieństwa trójkątów**.

Cecha BBB

Jeśli trzy boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich trzech boków drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

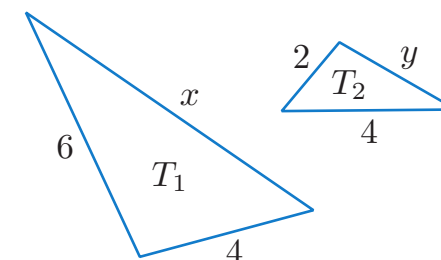
Jeśli $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, to trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne, co zapisujemy:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



Ćwiczenie 1

Przedstawione na rysunku obok trójkąty T_1 i T_2 są podobne. Oblicz długości boków x i y tych trójkątów. Podaj skalę podobieństwa trójkąta T_2 do trójkąta T_1 .



Ćwiczenie 2

Dane są długości boków dwóch trójkątów. Czy te trójkąty są podobne?

a) 6, 8, 12 oraz 9, 12, 18

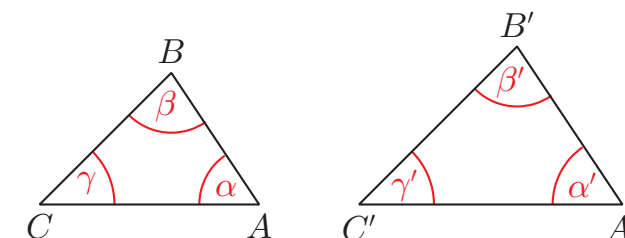
b) $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$ oraz 9, 15, 20

Cecha KKK

Jeśli kąty jednego trójkąta są równe kątom drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

Jeśli $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ oraz $\gamma = \gamma'$, to:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



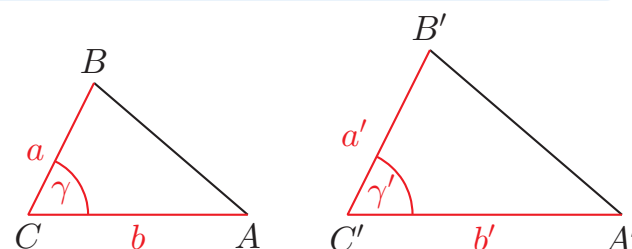
D Ćwiczenie 3

- a) Uzasadnij, że jeśli dwa kąty jednego trójkąta są równe dwóm kątom drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.
b) Uzasadnij, że trójkąt prostokątny, w którym jeden z kątów ma miarę 27° , jest podobny do trójkąta prostokątnego, w którym jeden z kątów ma miarę 63° .

Cecha BKB

Jeśli dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta i kąty zawarte między tymi bokami są równe, to trójkąty te są podobne.

Jeśli $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ oraz $\gamma = \gamma'$, to:
 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

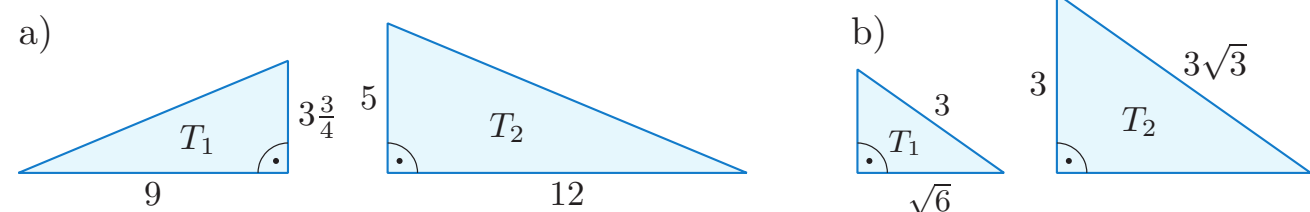


Ćwiczenie 4

Dane są trójkąty prostokątne T_1 i T_2 . Uzasadnij, że jeśli stosunek długości przyprostokątnych trójkąta T_1 równa się stosunkowi długości przyprostokątnych trójkąta T_2 , to trójkąty te są podobne.

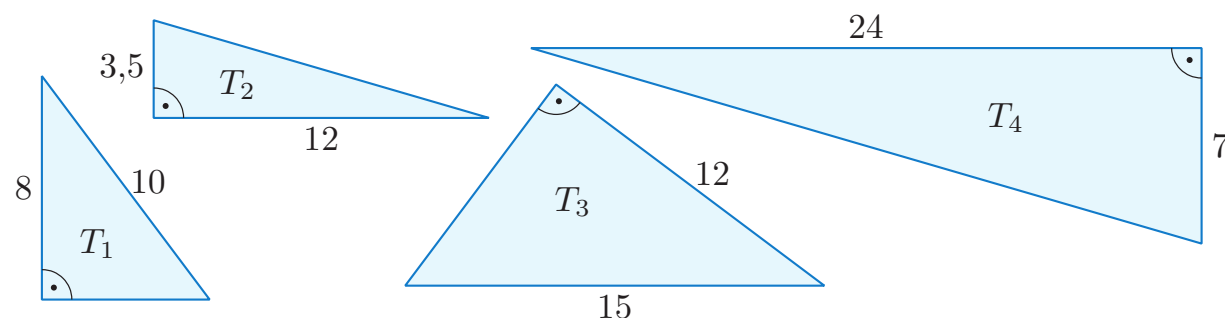
Ćwiczenie 5

Uzasadnij, że trójkąty T_1 i T_2 są podobne. Podaj skalę podobieństwa trójkąta T_1 do trójkąta T_2 .



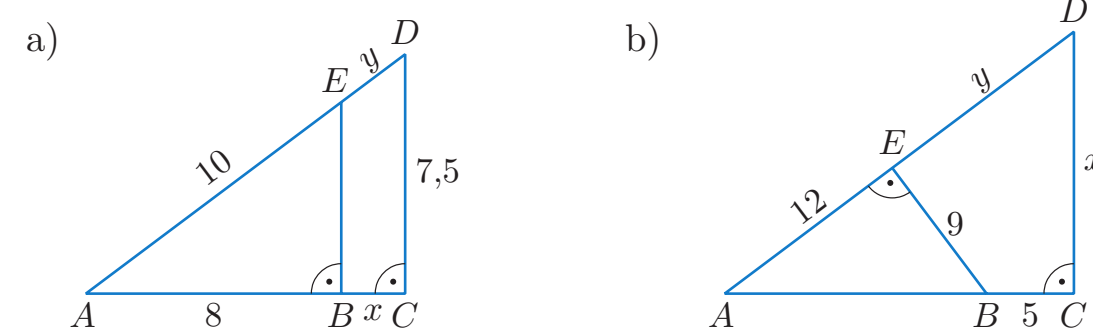
Zadania

1. Wśród trójkątów przedstawionych na rysunku wskaż pary trójkątów podobnych. Dla każdej pary podaj skalę podobieństwa.

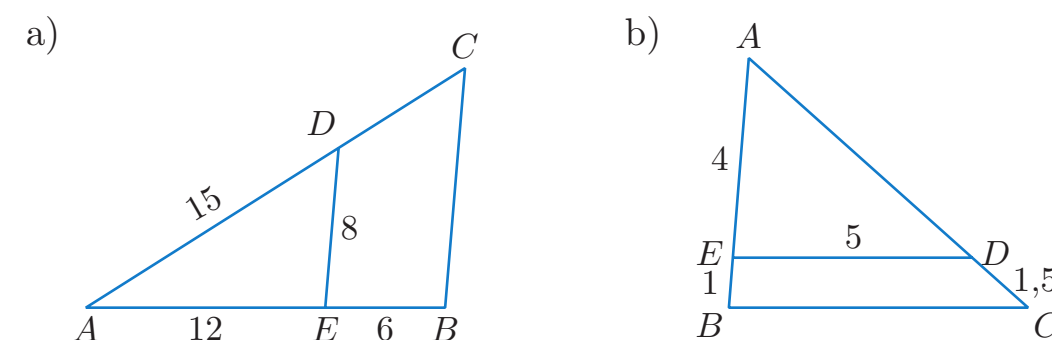


2. a) Dany jest trójkąt ABC o bokach długości 6, 8, 12. Długość najdłuższego boku trójkąta $A'B'C'$ jest równa 16 oraz $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Jaka jest skala podobieństwa trójkąta $A'B'C'$ do trójkąta ABC ? Oblicz obwód trójkąta $A'B'C'$.
 b) Trójkąt ABC , którego obwód jest równy 55, jest podobny do trójkąta o bokach długości 4, 8, 10. Oblicz długości boków trójkąta ABC .

3. Korzystając z podobieństwa odpowiednich trójkątów, oblicz długości odcinków x i y .



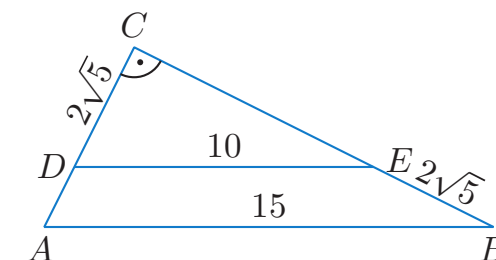
4. Odcinki ED i BC są równoległe. Oblicz obwód trójkąta ABC .



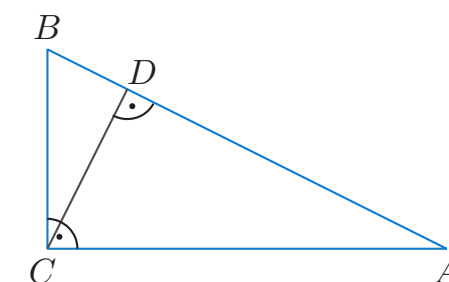
5. a) Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych równych 12 i 16 jest podobny do trójkąta o obwodzie równym 6. Oblicz długości przeciwprostokątnych obu trójkątów.
 b) Trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej równej 100 jest podobny do trójkąta o przyprostokątnych 12 i 3,5. Oblicz obwody obu trójkątów.

6. Uzasadnij, że $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ (rysunek obok). Oblicz:

- a) skalę podobieństwa tych trójkątów,
 b) obwody tych trójkątów.

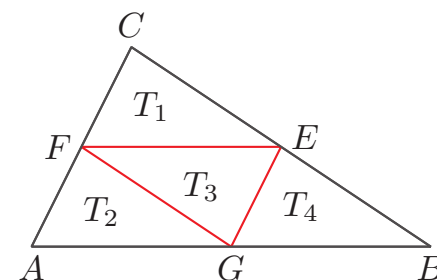


7. a) Wypisz pary trójkątów podobnych (rysunek poniżej). Dla każdej pary podaj odpowiednią cechę podobieństwa.
 b) W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości 3 i 4 poprowadzono wysokość z wierzchołka kąta prostego. Oblicz długości odcinków, na jakie ta wysokość podzieliła przeciwprostokątną.



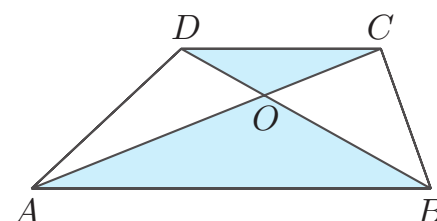
8. Oblicz pole trójkąta prostokątnego, w którym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego podzieliła przeciwprostokątną na dwa odcinki o długościach 2 cm i 8 cm.

- D 9.** W trójkącie ABC połączono odcinkami punkty będące środkami boków (rysunek obok).



- a) Wykaż, że trójkąty ABC i EFG są podobne.
b) Wykaż, że trójkąty T_1 , T_2 , T_3 i T_4 są przystające.

- 10.** W trapezie o podstawach AB i CD przekątne przecinają się w punkcie O (rysunek obok).



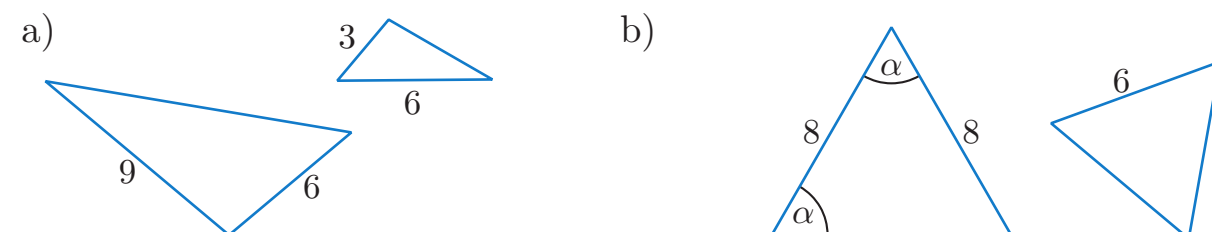
- D** a) Uzasadnij, że trójkąty ABO i CDO są podobne.
b) Przyjmij, że wysokość trapezu wynosi 6 cm, a długości podstaw AB i CD są równe odpowiednio 8 cm i 4 cm. Jaka jest odległość punktu O od krótszej podstawy? Oblicz pola trójkątów ABO i CDO .

- D 11.** a) Dany jest trapez o podstawie AB i przekątnych AC i BD . Wykaż, że jeśli przekątne trapezu przecinają się w punkcie O , to pola trójkątów AOD i BOC są równe.

- b) Dłuższa podstawa trapezu ma długość 10 cm. Punkt przecięcia przekątnych tego trapezu jest odległy o 5 cm od jego dłuższej podstawy i o 3 cm od krótszej. Oblicz pola trójkątów, na które przekątne dzielą ten trapez.

Sprawdź się

- 12.** Trójkąty przedstawione na rysunku są podobne. Oblicz długości pozostałych boków tych trójkątów. Podaj skalę podobieństwa.



- D 13.** Uzasadnij, że trójkąty o podanych długościach boków są podobne.

- a) 2, 7, 8 oraz 3, $10\frac{1}{2}$, 12 b) $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, 4 oraz 2, 4, $4\sqrt{2}$

- 14.** Trójkąt prostokątny CDE ma przeciwprostokątną długości $2\sqrt{5}$ i jest podobny do trójkąta ABO o wierzchołkach $A(-6, 0)$, $B(0, 3)$, $O(0, 0)$. Podaj skalę podobieństwa tych trójkątów. Oblicz obwód i pole trójkąta CDE .

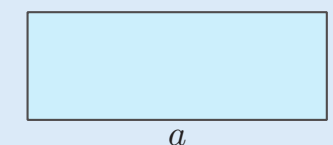
- 15.** Wysokość trapezu $ABCD$ jest równa 7, a długości podstaw $|AB| = 4$ oraz $|CD| = 10$. Przekątne trapezu przecinają się w punkcie S . Oblicz pola trójkątów ABS i CDS .

Przypomnij sobie

Pola czworokątów

Pole prostokąta o bokach długości a , b wyraża się wzorem:

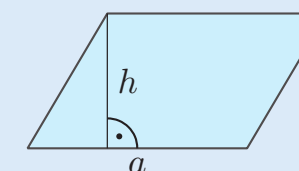
$$P = ab$$



- 1.** a) Oblicz pole prostokąta, którego obwód wynosi 48 cm, a stosunek długości boków jest równy 3:5.
b) Oblicz obwód prostokąta, którego krótszy bok ma długość 6 cm, a pole jest równe 72 cm^2 .

Pole równoległoboku jest równe iloczynowi długości boku i wysokości opuszczonej na ten bok.

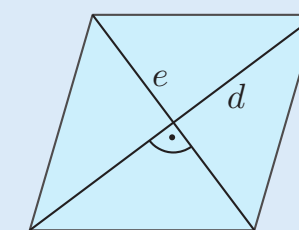
$$P = ah$$



- 2.** a) Oblicz pole równoległoboku o bokach długości 8 cm i 12 cm, którego kąt ostry ma miarę 45° .
b) Stosunek długości boków równoległoboku jest równy 1:2, jego obwód wynosi 54 cm, a pole jest równe 81 cm^2 . Oblicz obie jego wysokości.

Przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym w punkcie, który dzieli je na połowy. Pole rombu o przekątnych długości d , e wyraża się wzorem:

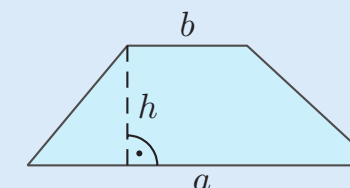
$$P = \frac{1}{2}de$$



- 3.** Oblicz pole i długość boku rombu o przekątnych długości 6 cm i 8 cm.

Pole trapezu o podstawach długości a , b i wysokości h wyraża się wzorem:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



- 4.** Dany jest trapez o podstawach długości 4 cm i 12 cm, którego kąt ostry ma miarę 45° . Oblicz pole tego trapezu w przypadku, gdy jest on:
a) równoramienny, b) prostokątny.

6.6. Pola wielokątów podobnych

Przykład 1

Bok jednego kwadratu jest o 20% dłuższy od boku drugiego kwadratu. Jaka jest skala podobieństwa tych kwadratów? Ile wynosi stosunek ich pól?

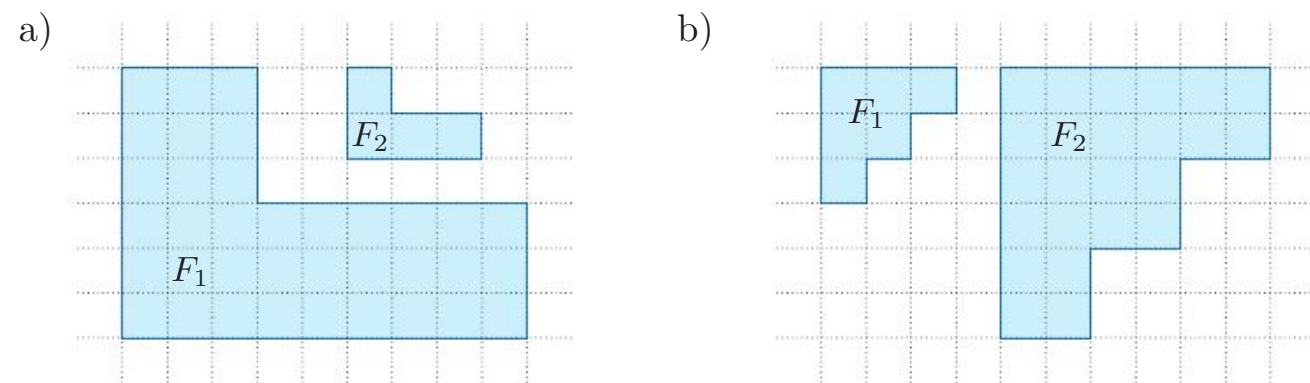
Niech bok pierwszego kwadratu ma długość a , wówczas bok drugiego z nich ma długość $a + 20\% a = 120\% a = \frac{6}{5}a$.

Zatem skala podobieństwa $k = \frac{6}{5}$.

Pola kwadratów są odpowiednio równe a^2 i $\frac{36}{25}a^2$, zatem stosunek ich pól jest równy $\frac{36}{25}$. Zauważmy, że $\frac{36}{25} = k^2$.

Ćwiczenie 1

Na rysunku przedstawiono wielokąty podobne F_1 i F_2 . Podaj skalę podobieństwa i oblicz stosunek pola figury F_2 do pola figury F_1 .



Przykład 2

Trójkąt T_2 jest podobny do trójkąta T_1 w skali k . Uzasadnij, że stosunek pola trójkąta T_2 do pola trójkąta T_1 jest równy k^2 .

Pole trójkąta T_1 : $P_1 = \frac{1}{2}a_1h_1$.

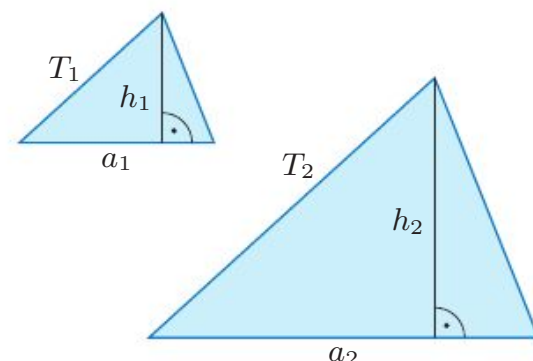
Dla trójkąta T_2 mamy:

$$a_2 = k \cdot a_1, \quad h_2 = k \cdot h_1.$$

Stąd pole trójkąta T_2 :

$$P_2 = \frac{1}{2}a_2h_2 = \frac{1}{2}(k \cdot a_1)(k \cdot h_1) = \frac{1}{2}k^2 \cdot a_1h_1.$$

$$\text{Zatem } \frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{1}{2}k^2 a_1 h_1}{\frac{1}{2}a_1 h_1} = k^2.$$



Ćwiczenie 2

Prostokąt P_2 jest podobny do prostokąta P_1 w skali k . Uzasadnij, że stosunek pola prostokąta P_2 do pola prostokąta P_1 jest równy k^2 .

Twierdzenie

Jeśli skala podobieństwa figur podobnych równa się k , to stosunek ich pól jest równy k^2 .

Ćwiczenie 3

Dane są dwa kwadraty, przy czym pole jednego z nich jest:

a) o 19% mniejsze od pola drugiego, b) o 125% większe od pola drugiego.

Jaka jest skala podobieństwa tych kwadratów?

Ćwiczenie 4

Dany jest trapez prostokątny T_1 o podstawach długości 5 cm i 7 cm oraz wysokości równej 4 cm. Pole trapezu T_2 podobnego do trapezu T_1 jest równe 6 cm^2 . Oblicz skalę podobieństwa trapezu T_2 do trapezu T_1 oraz ich obwody.

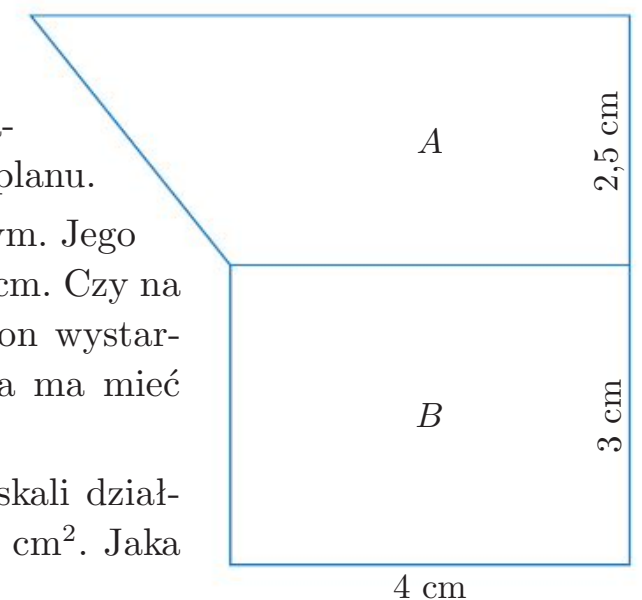
Ćwiczenie 5

Na rysunku obok przedstawiono plan sąsiadujących działek budowlanych.

a) Działka B jest prostokątem o wymiarach $32 \text{ m} \times 24 \text{ m}$. Wyznacz skalę tego planu.

b) Działka A jest trapezem prostokątnym. Jego najdłuższy bok ma na planie długość 6 cm. Czy na ogrodzenie działki A ze wszystkich stron wystarczy 125 m bieżących siatki, jeśli furtka ma mieć szerokość 1,5 m?

c) Na planie wykonanym w tej samej skali działka C jest kwadratem o polu równym 9 cm^2 . Jaka jest powierzchnia tej działki?



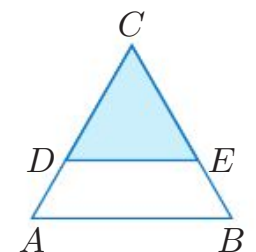
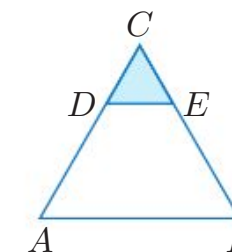
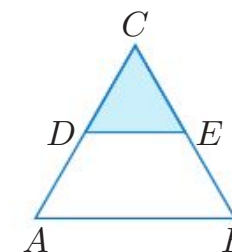
Ćwiczenie 6

Dany jest trójkąt równoboczny ABC , którego bok ma długość 12 cm. Odcinek DE jest równoległy do boku AB , a pole trójkąta DEC jest równe P . Wyznacz stosunek długości odcinków DC do AC i oblicz obwód trapezu $ABED$.

a) $P = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$

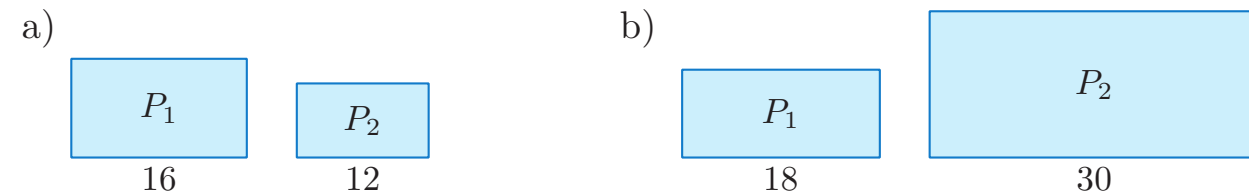
b) $P = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$

c) $P = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$



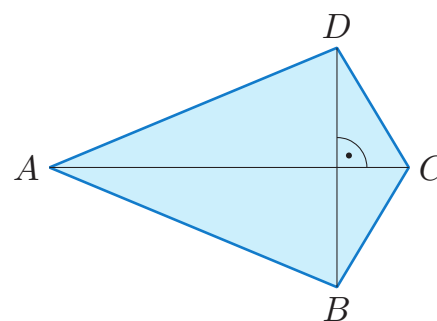
Zadania

1. Prostokąty P_1 i P_2 są podobne, przy czym pole prostokąta P_1 jest równe 144 cm^2 . Oblicz skalę podobieństwa prostokąta P_2 do prostokąta P_1 oraz pole prostokąta P_2 .



2. Prostokąt o bokach długości 6 cm i 12 cm jest podobny do prostokąta o obwodzie 60 cm. Oblicz pole większego prostokąta.
3. a) Trójkąt prostokątny T_2 jest podobny do trójkąta T_1 w skali $k = \frac{2}{3}$. Pole trójkąta T_1 jest równe 45 cm^2 , a jedna z przyprostokątnych trójkąta T_2 ma długość 10 cm. Oblicz obwód trójkąta T_2 .
b) Romb R_2 jest podobny do rombu R_1 w skali $k = 3$. Pole rombu R_2 jest równe 648 cm^2 , a jedna z przekątnych rombu R_1 ma długość 6 cm. Oblicz obwód każdego z tych rombów.
4. Dany jest równoległobok R_1 , którego boki mają długości 4 cm i 6 cm. Jedna z przekątnych tego równoległoboku jest prostopadła do jego krótszych boków. Równoległobok R_2 o polu $200\sqrt{5} \text{ cm}^2$ jest podobny do równoległoboku R_1 . Oblicz obwód równoległoboku R_2 .
5. a) Suma pól dwóch figur podobnych jest równa 340 dm^2 , a ich skala podobieństwa $k = 4$. Oblicz pole każdej z tych figur.
b) Suma pól dwóch trójkątów prostokątnych równoramiennych jest równa 180 cm^2 , a ich skala podobieństwa $k = 3$. Oblicz obwód każdego z tych trójkątów.

6. Przekątne deltoidu $ABCD$ mają długości: $|AC| = 15 \text{ cm}$ i $|BD| = 10 \text{ cm}$. Oblicz pole powierzchni latawca mającego kształt deltoidu podobnego do deltoidu $ABCD$ przy założeniu, że wymiary latawca są czterokrotnie większe.



7. Wielokąt F_1 jest podobny do wielokąta F_2 w skali $\frac{3}{4}$. Stosunek pól wielokątów podobnych F_2 i F_3 jest równy $\frac{4}{9}$. Oblicz skalę podobieństwa wielokąta F_3 do F_1 .

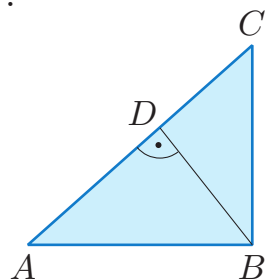
8. Trzy odbitki zdjęć mają kształt podobnych prostokątów P_1 , P_2 i P_3 . Pole prostokąta P_2 jest o 44% większe od pola prostokąta P_1 , a pole prostokąta P_3 jest o 125% większe od pola prostokąta P_1 . Wymiary prostokąta P_2 są równe $24 \text{ cm} \times 36 \text{ cm}$. Oblicz wymiary prostokąta P_3 .



9. W trójkącie prostokątnym ABC , którego przeciwprostokątna AB ma długość 15 cm, poprowadzono wysokość CD . Stosunek pól trójkątów ADC i BCD jest równy 4. Oblicz obwód trójkąta ABC .
10. Przekątne trapezu o podstawach AB i CD oraz wysokości równej 10 przecinają się w punkcie P . Stosunek pola trójkąta ABP do pola trójkąta CDP jest równy $\frac{9}{4}$. Oblicz odległości punktu P od podstaw trapezu.
11. Trapez o wysokości równej 5 cm i podstawach długości 4 cm i 9 cm podzielono prostą równoległą do podstaw na dwa trapezy podobne. Oblicz pole każdego z trapezów otrzymanych w wyniku tego podziału.
12. Działka budowlana o powierzchni 1025 m^2 ma kształt trapezu o podstawach 32 m i 50 m. Działkę tę podzielono prostą równoległą do podstaw trapezu na dwie działki będące trapezami podobnymi. Oblicz pole każdej z nowo powstałych działek.

Sprawdź się

13. a) Prostokąty P_1 i P_2 o przekątnych długości $\sqrt{12} \text{ cm}$ i $\sqrt{18} \text{ cm}$ są podobne. Oblicz stosunek pól tych prostokątów.
b) Trójkąty T_1 i T_2 są podobne. Pole trójkąta T_2 jest o 300% większe od pola trójkąta T_1 . Podaj stosunek obwodów tych trójkątów.
14. W trójkącie prostokątnym ABC (rysunek obok) poprowadzono wysokość BD . Wiadomo, że $|BD| : |CB| = 4 : 5$. Oblicz podany stosunek pól trójkątów.
a) $P_{\triangle ABD} : P_{\triangle ABC}$ b) $P_{\triangle BCD} : P_{\triangle ABD}$
15. Dane są dwa romby, obydwa o kącie ostrym 60° . Stosunek ich pól wynosi $9 : 4$, a pole większego jest równe $18\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Oblicz sumę obwodów tych rombów.



Fraktale

Fraktal to figura geometryczna cechująca się samopodobieństwem – dowolnie małe części tej figury są podobne do całości.

Krzywa Kocha i śnieżynka Kocha

Przykładem fraktala jest **krzywa Kocha** (jej konstrukcję opisał w 1904 r. szwedzki matematyk Helge von Koch). Oto kolejne etapy jej powstawania.

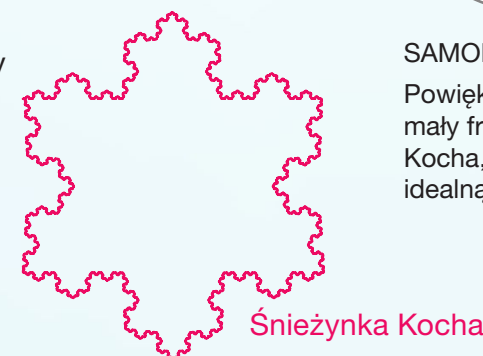
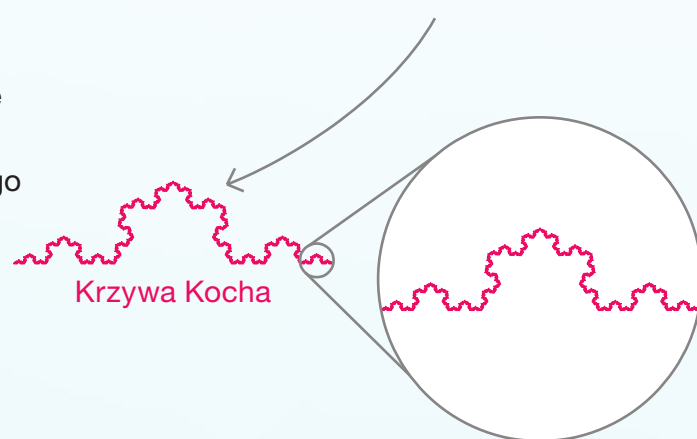


Na każdym kolejnym etapie konstrukcji krzywej Kocha jej długość powiększa się o $\frac{1}{3}$ długości krzywej z poprzedniego etapu. Jeśli zatem długość początkowego odcinka jest równa 1, to kolejne krzywe mają długości:

$$1, \frac{4}{3}, \left(\frac{4}{3}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \dots$$

Jeżeli konstrukcję krzywej przeprowadzimy na bokach trójkąta równobocznego, otrzymamy figurę nazywaną **śnieżynką Kocha**.

Śnieżynka Kocha ma skończone pole, chociaż jest ograniczona przez krzywą o nieskończonej długości.



SAMOPODOBIENSTWO
Powiększając dowolnie mały fragment krzywej Kocha, otrzymamy jej idealną kopię.

Trójkąt Sierpińskiego

Innym przykładem fraktala jest **trójkąt Sierpińskiego**. Konstrukcję, w której z trójkąta równobocznego wycina się kolejne trójkąty równoboczne, przedstawił w 1915 r. polski matematyk Wacław Sierpiński.



1 Czy potrafisz obliczyć pole ostatniej z pokazanych figur, jeśli pole wyjściowego trójkąta jest równe 1?

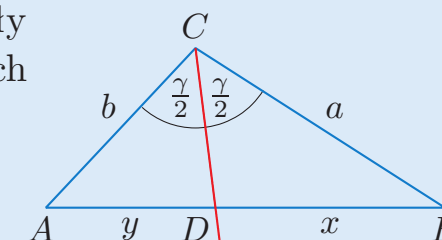
6.7. Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie

Korzystając z twierdzenia Talesa, możemy udowodnić poniższe twierdzenie.

Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie

Dwusieczna kąta w trójkącie dzieli przeciwległy bok na odcinki proporcjonalne do pozostałych boków trójkąta:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$



Dowód

Wyznaczamy półprostą AC oraz prostą l równoległą do dwusiecznej CD przechodzącą przez punkt B . Punkt przecięcia półprostej AC z prostą l oznaczamy przez P .

Proste CD i BP są równoległe, więc:

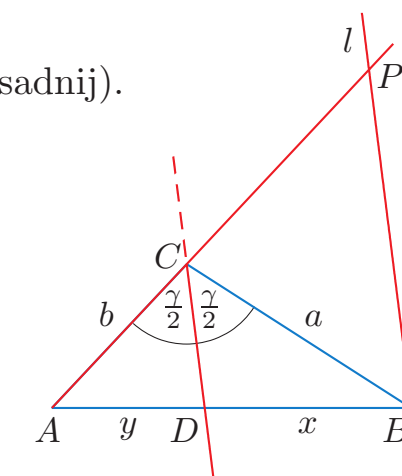
$$|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle APB| \text{ oraz } |\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle CBP| \text{ (uzasadnij).}$$

Oznacza to, że trójkąt BPC jest równoramienny i $|CP| = |CB| = a$.

Z twierdzenia Talesa dla kąta CAD otrzymujemy:

$$\frac{|DB|}{|AD|} = \frac{|CP|}{|AC|}$$

$$\text{zatem } \frac{x}{y} = \frac{a}{b}.$$



Ćwiczenie 1

- Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 5 i 12. Oblicz długości odcinków, na jakie dwusieczna kąta prostego tego trójkąta dzieli jego przeciwprostokątną.
- Przeciwprostokątna trójkąta o kątach 30° , 60° , 90° ma długość 2. Oblicz długości odcinków, na jakie dwusieczne kątów dzielą boki tego trójkąta.
- Dwusieczna kąta prostego dzieli przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego na odcinki długości $\frac{15}{7}$ i $\frac{20}{7}$. Oblicz obwód tego trójkąta.
- Jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego ma miarę $22,5^\circ$, a dłuższa przyprostokątna ma długość równą 1. Oblicz długość krótszej przyprostokątnej tego trójkąta.



Zadania

- Dany jest trójkąt ABC o bokach $|BC| = a$, $|AC| = b$ i $|AB| = c$. Oblicz długości odcinków, na jakie dwusieczna kąta ACB dzieli bok AB , dla:
 - $a = 2$, $b = 6$, $c = 5$,
 - $a = 6$, $b = 10$, $c = 12$.
- Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny ABC , którego przeciwprostokątna AB ma długość $\sqrt{2}$. Dwusieczna kąta ABC przecina bok AC w punkcie P . Oblicz obwody trójkątów BCP i BAP .
- D Dany jest trójkąt ABC o bokach długości $|BC| = a$, $|AC| = b$ i $|AB| = c$. Uzasadnij, że dwusieczna kąta ACB dzieli bok AB na odcinki długości $\frac{ac}{a+b}$ i $\frac{bc}{a+b}$.
- D Przeczytaj podany poniżej dowód twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie. W miejscach oznaczonych ? podaj brakujące uzasadnienia.

Odcinek CD jest zawarty w dwusiecznej kąta ACB , a CG jest wysokością trójkąta opuszczoną z wierzchołka C .

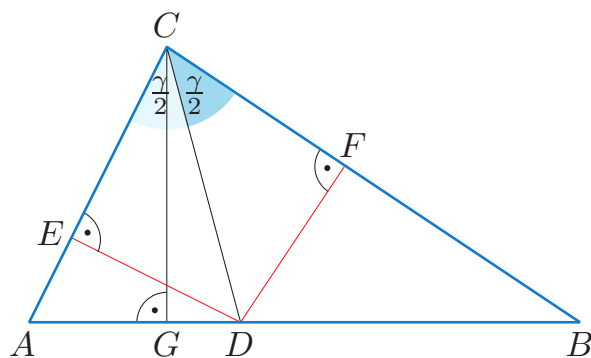
Stąd $\frac{P_{\triangle DBC}}{P_{\triangle ADC}} = \frac{|DB|}{|AD|}$. ?

Odcinki DE i DF mają równe długości. ?

Zatem:

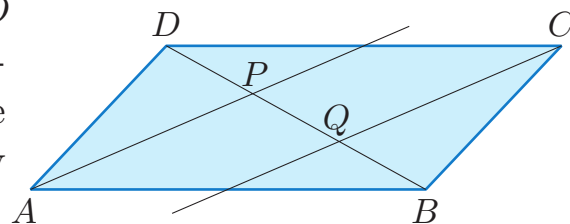
$$\frac{P_{\triangle DBC}}{P_{\triangle ADC}} = \frac{|BC|}{|AC|} \quad \text{?}$$

Czyli prawdziwa jest proporcja $\frac{|DB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|AC|}$.



Sprawdź się

- Dany jest trójkąt DEF o bokach $|EF| = d$, $|DF| = e$ i $|DE| = f$. Oblicz długości odcinków, na jakie dwusieczna kąta DEF dzieli bok DF , dla:
 - $d = 5$, $e = 6$, $f = 7$,
 - $d = 12$, $e = 15$, $f = 18$.
- D Dany jest równoległobok $ABCD$ o bokach $|AD| = 6$ cm, $|AB| = 12$ cm (rysunek obok). Dwusieczne kątów BAD i BCD przecinają przekątną BD odpowiednio w punktach P i Q . Uzasadnij, że punkty te dzielą przekątną BD na trzy odcinki równej długości.

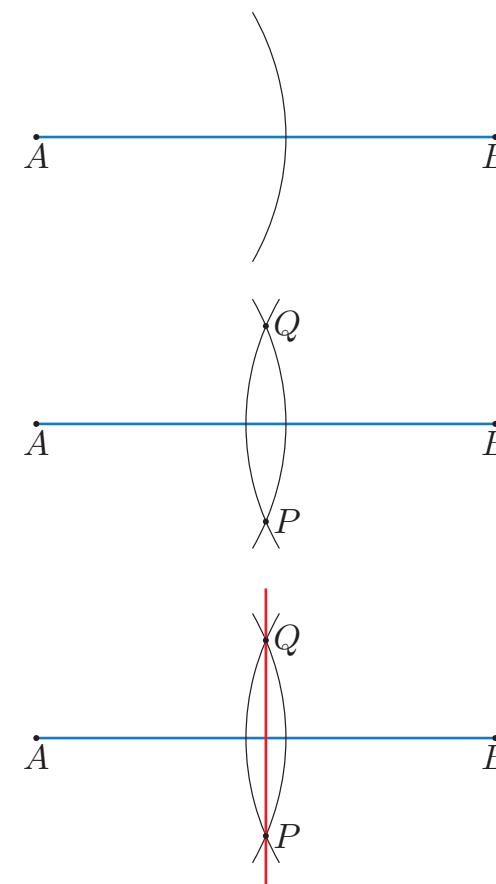


Problemy konstrukcyjne

Klasyczne konstrukcje wykonuje się tylko za pomocą cyrkla i linijki. Oto niektóre z nich.

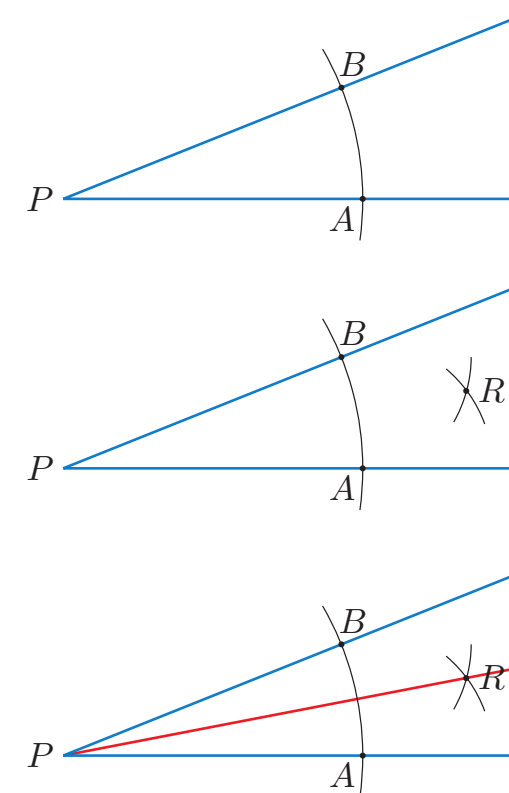
Konstrukcja symetralnej odcinka

- Z jednego końca danego odcinka rysujemy łuk okręgu o promieniu dłuższym od połowy odcinka.
- Z drugiego końca tego odcinka rysujemy łuk okręgu o takim samym promieniu. Punkty przecięcia łuków oznaczamy przez P i Q .
- Rysujemy prostą PQ – jest ona symetralną odcinka AB , ponieważ odcinki PQ i AB są przekątnymi rombu $APBQ$.



Konstrukcja dwusiecznej kąta

- Z wierzchołka danego kąta rysujemy łuk okręgu przecinający ramiona tego kąta. Punkty przecięcia oznaczamy przez A i B .
- Wewnątrz kąta rysujemy łuki okręgów o środkach w punktach A i B oraz takich samych promieniach. Punkt przecięcia tych łuków oznaczamy przez R .
- Rysujemy półprostą PR – jest ona dwusieczną kąta APB , ponieważ trójkąty PAR i PBR są przystające (cecha BBB).

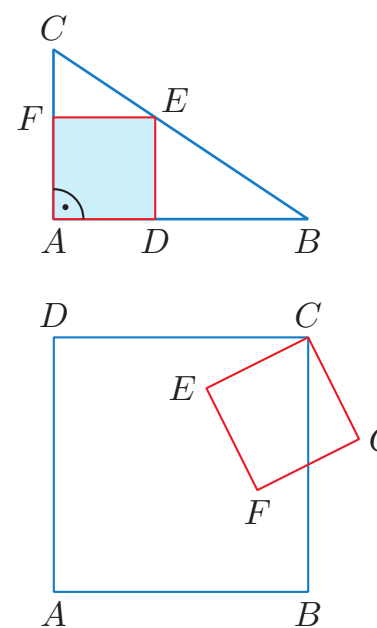




Powtórzenie

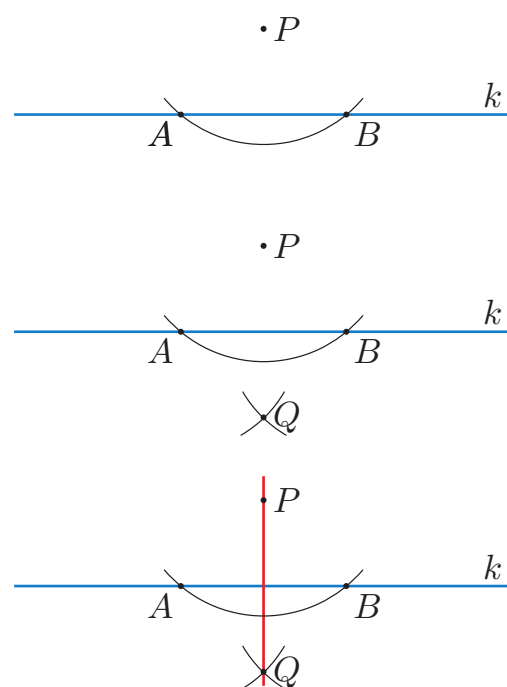
Zestaw I

- Wyznacz miary kątów trójkąta o podanym stosunku tych miar.
 - 1:2:3
 - 1:3:5
 - 2:9:13
- Kąty między bokiem trójkąta ostrokatnego a wysokościami poprowadzonymi z wierzchołków należących do tego boku mają miary 40° i 20° . Wyznacz miary kątów tego trójkąta.
- Dane są długości boków dwóch trójkątów. Czy trójkąty te są podobne?
 - 15, 18, 24 oraz 20, 24, 32
 - 4, 8, 10 oraz 6, 3, 7,5
 - 1,2; 1,4; 1,8 oraz 1,8; 2,1; 2,8
 - 20, 25, 30 oraz 6, 9, 7,5
- Trójkąt T_1 o bokach 5 cm, 5 cm i 4 cm jest podobny do trójkąta T_2 . Oblicz długości boków trójkąta T_2 w przypadku, gdy:
 - jego obwód jest równy 35 cm,
 - jego pole jest równe $4\sqrt{21}$ cm².
- W trójkącie ABC o polu 50 dm² bok AB ma długość 20 dm. Punkt P leży na boku AC i $|CP| = \frac{1}{5}|AC|$. Punkt Q leży na boku BC i $|CQ| = \frac{1}{5}|BC|$. Oblicz długość odcinka PQ i pole trójkąta CPQ .
- Przyprostokątne trójkąta ABC (rysunek obok) mają długości 10 i 15. Oblicz pole kwadratu $ADEF$.
- Dany jest trójkąt o bokach 4 cm, 6 cm i 8 cm. Oblicz długości odcinków, na jakie dwusieczne kątów tego trójkąta dzielą jego przeciwległe boki.
- Punkt C jest wspólnym wierzchołkiem kwadratów $ABCD$ i $CEFG$ (rysunek obok). Wykaż, że pola trójkątów DEC i CBG są równe.
- Działkę budowlaną w kształcie trójkąta o bokach długości 60 m, 60 m i 40 m podzielono na dwie części o równych polach płotem równoległym do boku długości 40 m. Oblicz z dokładnością do 1 m obwód każdej z nowo powstałych działek.



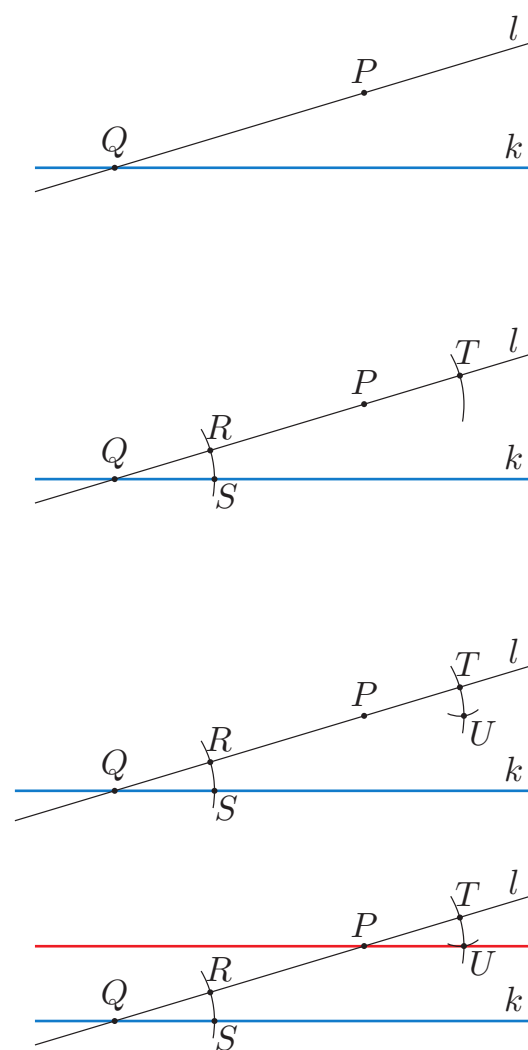
Konstrukcja prostej prostopadłej do danej prostej i przechodzącej przez dany punkt nieleżący na tej prostej

- Z danego punktu P rysujemy łuk okręgu przecinający daną prostą k . Punkty przecięcia oznaczamy przez A i B .
- Z punktów A i B rysujemy przecinające się łuki okręgów o promieniu $|AP|$. Punkt przecięcia tych łuków oznaczamy przez Q .
- Rysujemy prostą PQ – jest ona prostopadła do prostej k , ponieważ odcinki PQ i AB są przekątnymi rombu $APBQ$.



Konstrukcja prostej równoległej do danej prostej i przechodzącej przez dany punkt

- Rysujemy dowolną prostą l nierównoległą do danej prostej k i przechodzącą przez dany punkt P . Punkt przecięcia prostej l z prostą k oznaczamy przez Q .
- Rysujemy łuki okręgów o środkach w punktach P i Q oraz takich samych promieniach. Punkty przecięcia tych łuków z prostą l oznaczamy odpowiednio przez T i R . Punkt przecięcia łuku o środku w punkcie Q z prostą k oznaczamy przez S .
- Rysujemy łuk okręgu o środku w punkcie T i promieniu $|RS|$. Punkt przecięcia tego łuku z łukiem o środku w punkcie P oznaczamy przez U .
- Rysujemy prostą PU – jest ona równoległa do prostej k , ponieważ kąt TPU jest przystający do kąta RQS .



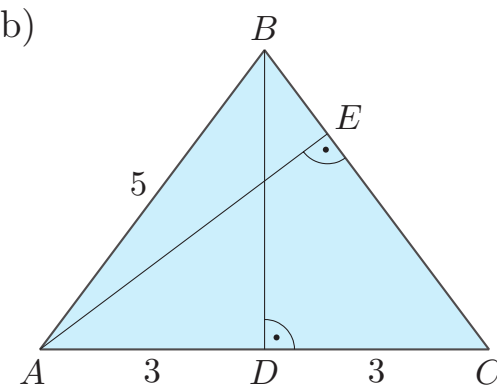
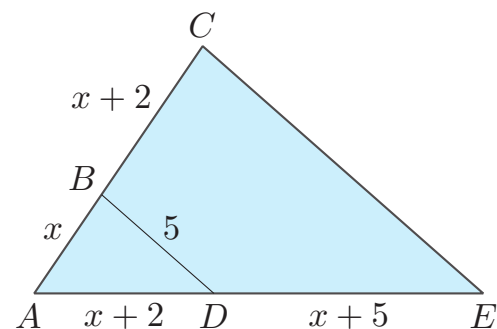


Zestaw II

- D** 1. a) Wykaż, że dowolne dwa prostokąty, w których przekątne przecinają się pod tym samym kątem α , są podobne.
b) Wykaż, że jeśli prostokąt o bokach x i y jest podobny do prostokąta o bokach odpowiednio $x + 1$ i $y + 1$, to prostokąty te są kwadratami.
2. Oblicz obwód trójkąta AEC .

a) $BD \parallel CE$

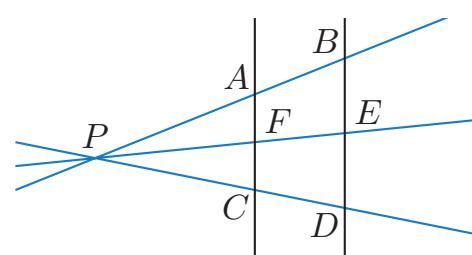
b)



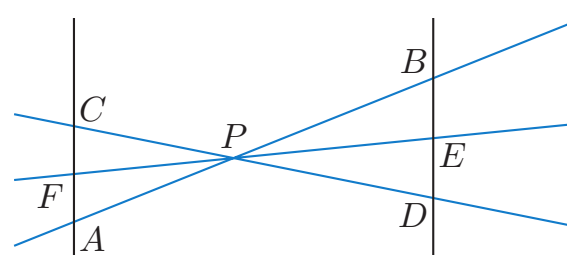
3. a) Suma obwodów dwóch figur podobnych jest równa 260 cm, a ich skala podobieństwa $k = \frac{5}{8}$. Oblicz obwód każdej z tych figur.
b) Figury F_1 i F_2 są podobne w skali 1:2, a figury F_2 i F_3 są podobne w skali 1:3. Suma pól figur F_1 , F_2 i F_3 jest równa 410 dm^2 . Oblicz pole każdej z tych figur.

- D** 4. Uzasadnij, że jeśli proste AC i BD są równoległe, to $\frac{|AF|}{|BE|} = \frac{|FC|}{|ED|}$.

a)

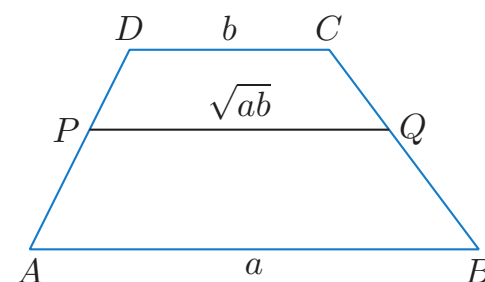


b)



- D** 5. W rombie $ABCD$ połączono środki kolejnych boków i otrzymano czworokąt $A'B'C'D'$. Uzasadnij, że czworokąt ten jest prostokątem o polu dwa razy mniejszym od pola rombu.

- D** 6. W trapezie $ABCD$ o podstawach a i b (rysunek obok) poprowadzono odcinek PQ o długości $\sqrt{ab}$ równoległy do podstaw trapezu. Uzasadnij, że:

a) $\frac{|AP|}{|PD|} = \frac{|AB|}{|PQ|}$,b) trapezy $ABQP$ i $PQCD$ są podobne.

Przedstawiając dowód, należy precyzyjnie uzasadnić każdy krok rozumowania. Można to zrobić tak jak w przykładzie 1. lub w postaci dowodu dwukolumnowego, który jest zapisany w tabeli (przykład 2.).

D Przykład 1

Dane są kwadrat $ABCD$ i równoległobok $EFBA$ (rysunek obok). Udowodnij, że trójkąty ADE i BCF są przystające.

Niech kąt ostry równoległoboku ma miarę α . Wówczas $|\angle CBF| = 90^\circ + \alpha$. Suma miar kątów przy jednym boku równoległoboku jest równa 180° , więc:

$$|\angle BAE| = 180^\circ - \alpha$$

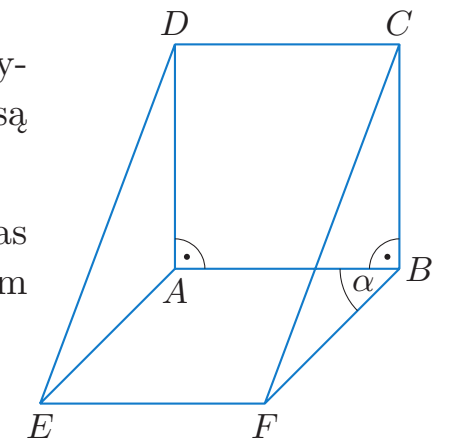
Stąd:

$$|\angle DAE| = 360^\circ - (|\angle BAE| + |\angle BAD|) = 360^\circ - (180^\circ - \alpha + 90^\circ) = 90^\circ + \alpha$$

czyli $|\angle DAE| = |\angle CBF|$. Jednocześnie $|AD| = |BC|$ (boki kwadratu) oraz $|AE| = |BF|$ (przeciwległe boki równoległoboku).

Na podstawie cechy BKB wnioskujemy, że $\triangle ADE \equiv \triangle BCF$.

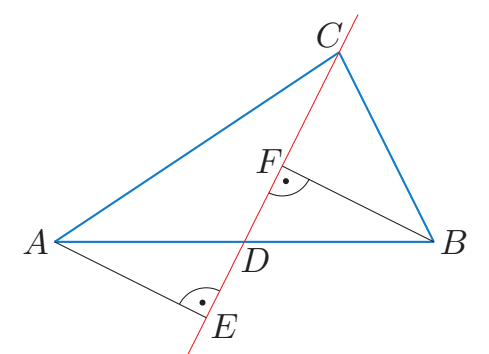
→ Zadanie 13, str. 278

**D** Przykład 2

Prosta zawierająca środkową trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka C przecina bok AB w punkcie D . Punkty E i F leżą na prostej CD , przy czym $AE \perp CD$ oraz $BF \perp CD$ (rysunek obok). Udowodnij, że trójkąty ADE i BDF są przystające.

Dowód przedstawimy w dwukolumnowej tabeli.

W jednej kolumnie zapisujemy kolejne stwierdzenia, a w drugiej – ich uzasadnienia. Pozwala to uporządkować całe rozumowanie.



Stwierdzenie	Uzasadnienie
$ AD = BD $	Punkt D jest środkiem boku AB .
$ \angle ADE = \angle BDF $	Są to kąty wierzchołkowe.
$ \angle AED = \angle BFD $	Są to kąty proste.
$ \angle DAE = \angle DBF $	Trójkąty ADE i BDF mają dwa kąty równe, więc wszystkie ich kąty są równe.
$\triangle ADE \equiv \triangle BDF$	Na podstawie cechy KBK przystawiania trójkątów.

→ Zadanie 13, str. 278



W zadaniach 1–8 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zadanie 1 (0–1)

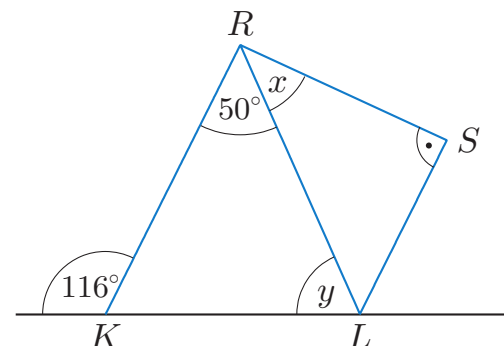
Przekątna ośmiokąta foremnego dzieli go na siedmiokąt i trójkąt równoramienny. Miara kąta ostrego tego trójkąta jest równa

- A. $22,5^\circ$ C. $26,5^\circ$
B. $24,5^\circ$ D. $28,5^\circ$

Zadanie 2 (0–1)

Na rysunku obok $RK \parallel SL$. Suma miar kątów x i y jest równa

- A. 104° C. 106°
B. 105° D. 110°



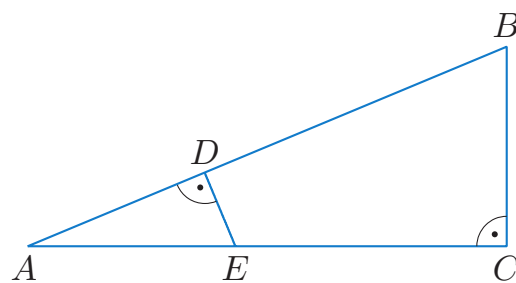
Zadanie 3 (0–1)

Suma obwodów dwóch figur podobnych jest równa 340 cm, a ich skala podobieństwa $k = \frac{7}{10}$. Różnica obwodów tych figur wynosi

- A. 60 cm B. 65 cm C. 75 cm D. 80 cm

Zadanie 4 (0–1)

Przyprostokątne trójkąta ABC (rysunek poniżej) mają długości 5 cm i 12 cm. Ile wynosi obwód trójkąta AED , jeśli jego pole jest równe $4,8 \text{ cm}^2$?



- A. 6 cm B. 8 cm C. 10 cm D. 12 cm

Zadanie 5 (0–1)

Jeżeli prostokąt P_1 o bokach długości 9 cm i 12 cm jest podobny do prostokąta P_2 o przekątnej długości 20 cm, to

- A. obwód prostokąta P_2 jest równy 54 cm.
B. pole prostokąta P_2 jest równe 200 cm^2 .
C. pole prostokąta P_2 jest o 64 cm^2 większe od pola prostokąta P_1 .
D. stosunek pola prostokąta P_1 do pola prostokąta P_2 jest równy 9 : 16.



Zadanie 6 (0–1)

Na boku AB trójkąta ABC wybrano punkt P , a na boku AC – punkt Q tak, że $PQ \parallel BC$. Jeśli $|AB| = 4,5 \text{ cm}$, $|AC| = 5 \text{ cm}$, $|AQ| = 2 \text{ cm}$ i $|BC| = 3 \text{ cm}$, to obwód trójkąta APQ jest równy

- A. 5 cm B. 6 cm C. 6,5 cm D. 7 cm

Zadanie 7 (0–1)

Prostokąt P_1 o bokach długości 7 cm i 24 cm jest podobny do prostokąta P_2 , którego pole jest równe 42 cm^2 . Długość przekątnej prostokąta P_2 wynosi

- A. 6,25 cm B. 12,5 cm C. 14,5 cm D. 25 cm

Zadanie 8 (0–1)

Dany jest trójkąt ABC . Dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie P takim, że $|BP| = |AP| + 1 \text{ cm}$. Ponadto $|AC| = 4 \text{ cm}$ oraz $|BC| = 6 \text{ cm}$. Obwód trójkąta ABC wynosi

- A. 15 cm B. 14,5 cm C. 12,5 cm D. 12 cm

Zadanie 9 (0–2)

Dwa boki trójkąta mają długości 4 cm i 8 cm.

Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Długość trzeciego boku tego trójkąta nie może być równa

- A. $3\sqrt{2} \text{ cm}$ E. $(7 + 2\sqrt{5}) \text{ cm}$
B. $2\sqrt{3} \text{ cm}$ F. $(8 + 2\sqrt{3}) \text{ cm}$
C. $(3 + \sqrt{2}) \text{ cm}$ G. $(9 + 2\sqrt{2}) \text{ cm}$
D. $(2 + \sqrt{5}) \text{ cm}$ H. $(10 + 2\sqrt{2}) \text{ cm}$

Zadanie 10 (0–1)

Trójkąty T_1 i T_2 są podobne. Najkrótszy bok trójkąta T_1 ma długość 4,5 cm, a najkrótszy bok trójkąta T_2 ma długość 7,5 cm.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Jeśli pole trójkąta T_1 jest równe 27 cm^2 , to pole trójkąta T_2 jest równe 75 cm^2 .	P	F
Jeśli pole trójkąta T_2 jest równe 25 cm^2 , to pole trójkąta T_1 jest równe 9 cm^2 .	P	F



Zadanie 11 (0-1)

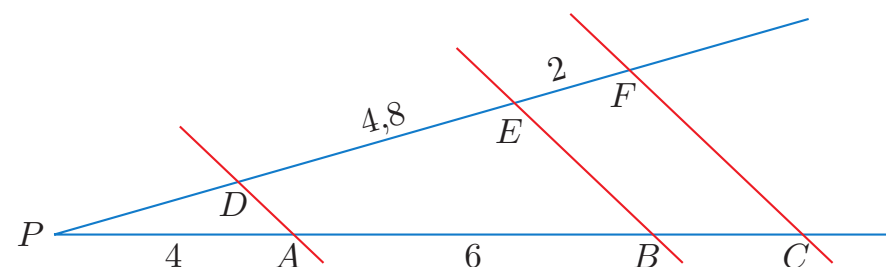
Przekątne poprowadzone z jednego wierzchołka pięciokąta foremnego podzieliły ten pięciokąt na trzy trójkąty.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Jeden z tych trójkątów ma kąty o miarach 30° , 75° , 75° .	P	F
Dwa z tych trójkątów mają kąty o miarach 30° , 30° , 120° .	P	F

Zadanie 12 (0-2)

Proste AD , BE i CF są równoległe (rysunek poniżej).



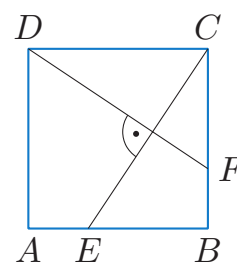
Każdemu rozpoczętemu zdaniu przyporządkuj właściwe dokończenie. Wpisz obok rozpoczętych zdań w tabeli poniżej właściwe odpowiedzi wybrane spośród A–E.

Numer zadania	Zdanie do uzupełnienia	Dokończenie zdania
12.1	Odcinek BC ma długość równą	?
12.2	Odcinek PD ma długość równą	?

A. 2,5 B. 2,8 C. 3,2 D. 3,6 E. 3,8

D Zadanie 13 (0-2) → Przykłady 1 i 2, str. 275

Na bokach AB i BC kwadratu $ABCD$ wybrano odpowiednie punkty E i F takie, że $CE \perp DF$ (rysunek obok). Uzasadnij, że trójkąty BCE i CDF są przystające.



Zadanie 14

Przekątne rombu $ABCD$ mają długości 12 cm i 16 cm.

Zadanie 14.1 (0-2)

Punkt P jest punktem przecięcia przekątnych rombu $ABCD$. Oblicz długości odcinków, na które dwusieczna kąta APB dzieli bok rombu.

Zadanie 14.2 (0-2)

Romb $EFGH$ o polu równym 150 cm^2 jest podobny do rombu $ABCD$. Oblicz obwód rombu $EFGH$.

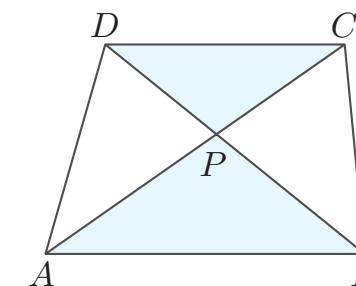


Zadanie 15 (0-1)

Dany jest trapez $ABCD$ (rysunek obok). Podstawy trapezu mają długości $|AB| = 16 \text{ cm}$, $|CD| = 12 \text{ cm}$, a pole trójkąta ABP jest równe 48 cm^2 .

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

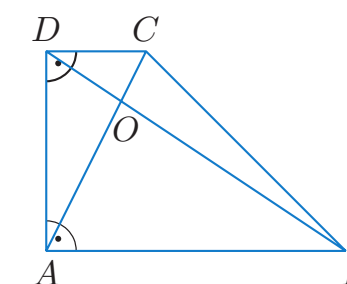
Pole trójkąta CDP jest równe



A.	36 cm^2 ,	ponieważ skala podobieństwa trójkąta CDP do trójkąta ABP jest równa	1.	$\frac{3}{4}$.
B.	27 cm^2 ,		2.	$\frac{9}{16}$.
			3.	$\frac{16}{9}$.

Zadanie 16 (0-4)

W trapezie prostokątnym (rysunek obok) dane są długości podstaw $|AB| = 6$ i $|CD| = 2$ oraz ramienia $|AD| = 4$. Punkt O jest punktem przecięcia przekątnych tego trapezu. Oblicz obwód trójkąta AOB .

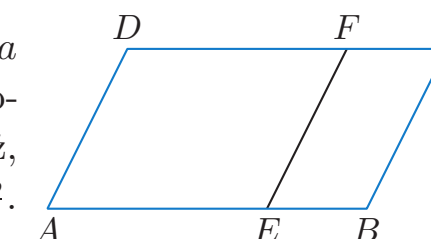


Zadanie 17 (0-4)

Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach $|AB| = 40 \text{ cm}$ i $|CD| = 25 \text{ cm}$ i ramionach długości 12 cm i 9 cm. Przedłużenia ramion tego trapezu przecinają się w punkcie P . Oblicz obwód trójkąta ABP .

D Zadanie 18 (0-4)

Dany jest równoległobok $ABCD$ o bokach $|AB| = a$ i $|BC| = b$. Czworokąt $EBCF$ jest równoległobokiem podobnym do równoległoboku $ABCD$. Wykaż, że obwód czworokąta $AEFD$ jest równy $\frac{2a^2 - 2b^2 + 2ab}{a}$.



Zadanie 19 (0-4)

Dany jest trójkąt równoramienny o ramieniu długości 6 cm i kącie przy podstawie równym 30° . Oblicz odległości punktu przecięcia prostych zawierających wysokości tego trójkąta od jego wierzchołków.

Wskazówka. Proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

D Zadanie 20 (0-4)

Uzasadnij, że suma długości środkowych trójkąta o obwodzie L jest mniejsza od $\frac{3}{2}L$.

Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań

Cechy podzielności liczb

- a) 3, 5 b) 2, 3, 9 c) 2, 5 d) 2, 3
- a), c) nie b), d) tak
- a) 0, 4, 8
b) 2, 6
c) 1, 3, 5, 7, 9
d) 0, 4, 8
- a) 2, 5, 8
b) 1, 4, 7
c) 0, 3, 6, 9
d) nie ma takiej cyfry
- a), d) tak b), c) nie
- a) 6, 12 b) 6, 15
c) przez żadną d) 6
- a) $a = 6$ b) $a = 0$ lub $a = 6$
c) $a = 2$ lub $a = 6$ d) $a = 6$
- a) 15 b) 15, 75
c) przez żadną
d) 15, 45

1.1. Liczby naturalne

- Ć 1. a) 1, 2, 3, 4, 6, 12
b) 1, 2, 4, 7, 14, 28
c) 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36
d) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48
2. a), c) tak b), d) nie
3. a) $3 \cdot 8 + 2$ b) $3 \cdot 25 + 1$ c) $3 \cdot 36$
d) $3 \cdot 42 + 1$ e) $3 \cdot 237 + 2$
4. a) $4 \cdot 0 + 3$ b) $4 \cdot 12 + 1$ c) $4 \cdot 19 + 3$
d) $4 \cdot 31 + 2$ e) $4 \cdot 123$
5. a) 2
b) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19
c) 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47
d) 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97
6. $99 = 3 \cdot 3 \cdot 11$,
 $720 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$,
 $770 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$,
 $1024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$,
 $1323 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$

7. a) $\text{NWD}(18, 30) = 6$,
 $\text{NWW}(18, 30) = 90$
b) $\text{NWD}(15, 50) = 5$,
 $\text{NWW}(15, 50) = 150$
c) $\text{NWD}(24, 72) = 24$,
 $\text{NWW}(24, 72) = 72$
d) $\text{NWD}(144, 192) = 48$,
 $\text{NWW}(144, 192) = 576$
e) $\text{NWD}(84, 105) = 21$,
 $\text{NWW}(84, 105) = 420$
f) $\text{NWD}(196, 420) = 28$,
 $\text{NWW}(196, 420) = 2940$
8. $\text{NWD}(x, y) = 1$,
 $\text{NWW}(x, y) = x \cdot y$
- Z 1. a) 2, 4 b) 2, 3, 6 c) 3, 9
d) 2, 3, 4, 6, 12 e) 2, 3, 4, 6, 9, 12
2. a) 41 b) 26 c) 23 d) 19
3. a) $5 \cdot 7 + 4$ b) $5 \cdot 12 + 2$
c) $5 \cdot 31 + 1$ d) $5 \cdot 55 + 0$
4. a) nie b) tak, dla $r = 2$
c) tak, dla $r = 3$ d) nie
5. a) $6n + 9$ b) $6n + 3$
c) $6n - 9$ d) $12n + 15$
8. a) 6 b) 4 c) 2 d) 9 e) 12
9. a) 9 reszta 3 b) 25 reszta 0
c) 18 reszta 1 d) 184 reszta 2
e) 540 reszta 1
10. a) $\text{NWD}(24, 40) = 8$,
 $\text{NWW}(24, 40) = 120$
b) $\text{NWD}(36, 45) = 9$,
 $\text{NWW}(36, 45) = 180$
c) $\text{NWD}(48, 72) = 24$,
 $\text{NWW}(48, 72) = 144$
d) $\text{NWD}(54, 96) = 6$,
 $\text{NWW}(54, 96) = 864$
e) $\text{NWD}(112, 144) = 16$,
 $\text{NWW}(112, 144) = 1008$
f) $\text{NWD}(105, 150) = 15$,
 $\text{NWW}(105, 150) = 1050$

Działania na liczbach całkowitych i ułamkach zwykłych

- a) 0 b) 42 c) 12 d) 5
e) 191 f) -170
- a) -104 b) 80 c) $3\frac{4}{5}$ d) -33
- a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{10}{3}$ c) $\frac{31}{7}$ d) $\frac{70}{11}$ e) $\frac{86}{15}$
- a) $3\frac{2}{3}$ b) $4\frac{1}{4}$ c) $2\frac{5}{8}$ d) $3\frac{5}{9}$ e) $1\frac{24}{25}$
- a) 1 b) $3\frac{2}{3}$ c) $2\frac{2}{3}$ d) $4\frac{1}{2}$
e) $2\frac{4}{5}$ f) 4 g) $-1\frac{7}{9}$ h) $-1\frac{7}{25}$
- a) 4 b) $1\frac{4}{7}$ c) $2\frac{10}{11}$ d) $-1\frac{1}{15}$
- a) $1\frac{1}{5}$ b) $3\frac{1}{3}$ c) $-6\frac{2}{3}$ d) $-5\frac{2}{5}$
e) 20 f) 40 g) $7\frac{1}{2}$ h) 33
- a) 3 b) 8

1.2. Liczby całkowite. Liczby wymierne

- Ć 1. a) -36 b) 16 c) 720
d) -481 e) -58 f) 26
2. a), b) $x = y$ c) $x \neq y$
3. $\frac{1}{36}$
4. a) $-2\frac{13}{24}$ b) $\frac{11}{12}$ c) $3\frac{13}{18}$ d) $2\frac{55}{72}$
5. a) $2\frac{1}{4}$ b) $-\frac{2}{3}$ c) $-2\frac{7}{9}$ d) 5
- Z 1. a) $A = 10\frac{1}{5}$, $B = 11\frac{4}{5}$, $C = 12\frac{1}{5}$
b) $D = -3\frac{3}{7}$, $E = -1\frac{5}{7}$, $F = \frac{6}{7}$
c) $G = 2\frac{1}{15}$, $H = 6\frac{1}{15}$, $I = 8\frac{11}{15}$
d) $J = -\frac{8}{11}$, $K = \frac{4}{11}$, $L = 2\frac{6}{11}$
2. a) $-\frac{17}{30}$ b) $6\frac{5}{24}$ c) 1 d) $-1\frac{5}{12}$ e) $3\frac{2}{15}$
f) $-\frac{31}{48}$ g) $4\frac{1}{24}$ h) $-2\frac{3}{5}$ i) $\frac{7}{60}$
3. a) $2\frac{1}{4}$ b) 5 c) $-2\frac{7}{9}$
4. a) $1\frac{1}{2}$ b) $1\frac{2}{3}$ c) $8\frac{1}{2}$ d) $1\frac{1}{9}$
e) $1\frac{2}{5}$ f) $1\frac{2}{7}$ g) -2 h) -2
5. a) 14 b) $-2\frac{3}{5}$ c) 8
6. $b < c < a$
8. a) $\frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$ b) $\frac{2}{17} = \frac{1}{9} + \frac{1}{153}$
c) $\frac{2}{31} = \frac{1}{16} + \frac{1}{496}$
9. a) $1\frac{1}{11}$ b) $2\frac{2}{3}$ c) $\frac{24}{41}$
d) $11\frac{1}{4}$ e) $\frac{4}{53}$ f) $-\frac{6}{199}$
10. a) -8 b) $-15\frac{58}{65}$ c) $8\frac{4}{15}$
d) 3 e) $6\frac{1}{4}$ f) $\frac{9}{256}$
11. a) $1\frac{3}{7}$ b) $1\frac{1}{5}$ c) $-2\frac{3}{4}$

Pierwiastek kwadratowy i sześcienny

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 7
f) 8 g) 9 h) 10 i) 11
- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $1\frac{1}{2}$ e) $\frac{7}{8}$ f) $\frac{5}{9}$
- a) $1\frac{1}{2}$ b) $1\frac{2}{3}$ c) $2\frac{1}{2}$ d) $2\frac{1}{3}$
e) $1\frac{1}{5}$ f) $1\frac{1}{6}$
- a) 0,1 b) 0,2 c) 0,6
d) 0,9 e) 1,1 f) 1,2
- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4
f) 5 g) 7 h) 10 i) 30
- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{3}{5}$ e) $2\frac{1}{2}$ f) $1\frac{1}{5}$
- a) 0,2 b) 0,5 c) 0,6
- a) 5 b) 0

1.3. Liczby niewymierne

- Ć 1. a) $\sqrt{7}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{44}$
b) $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[3]{25}$
2. a), c), e) jest
b), d), f) nie jest
3. a) np. $\sqrt{3}$, $2 - \sqrt{3}$
b) np. $\sqrt{3}$, $\sqrt{27}$
- Z 1. a) $\sqrt{164}$ b) $\sqrt{29}$ c) $\sqrt{125}$
d) $\sqrt{286}$ e) $\sqrt[3]{4}$ f) $\sqrt[3]{81}$
2. a) $\sqrt{5}$; nie b) $\sqrt{10}$; nie
3. b), c) tak a), d) nie
4. a) p , q lub p , r b) q , r
c) q , s d) q , s
5. a), c), e) jest
b), d), f) nie jest
6. a) 11 b) 8 c) 4
7. sześciokąta
8. a) tak b) nie
9. a) 0, $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{125}$
b) $-\frac{12}{3}$, -3 , 0, $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{125}$
c) $-\frac{12}{3}$, -3 , 0, 0,1, $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{125}$, $121\frac{1}{5}$
d) $-\sqrt{3}$, $2 - \sqrt{2}$
10. a) $n = 5$
b) $n = 3$
c) $n = 12$
11. a), c) tak b) nie

Działania na ułamkach dziesiętnych i zwykłych

- a) 29,11 b) 161,799 c) 22,69
d) 2,44 e) -51,06 f) 8,16
- a) 52,08 b) 33,6 c) -29,26
d) 0,51 e) -0,00364 f) 0,16
- a) 0,75 b) 1,6 c) 1,625 d) 2,625
e) 0,65 f) 0,64 g) 0,98 h) 0,088
- a) 7 b) 0,5 c) 5,6 d) 66
e) -0,125 f) -1000
- a) $2\frac{1}{6}$ b) $-4\frac{4}{5}$ c) $5\frac{4}{35}$
d) $6\frac{1}{8}$ e) 2 f) $2\frac{5}{12}$
- a) -28 b) $35\frac{1}{2}$ c) 35

1.4. Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej

- C** 1. a) 0,35 b) 0,44 c) 2,08
d) 2,86 e) 0,032 f) 0,068
2. a) na 10. miejscu: 2,
na 20. miejscu: 4
b) na 10. miejscu: 7,
na 20. miejscu: 3
c) na 10. miejscu: 5,
na 20. miejscu: 4
d) na 10. miejscu: 0,
na 20. miejscu: 4
3. 1, 6, 2, 3
4. a) rozwinięcia skończone: $\frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{4}{5}, \frac{3}{8}$,
rozwinięcia nieskończone: $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{4}{7}$
b) $\sqrt{8}, \sqrt{\frac{3}{4}}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[3]{16}$
5. a) 1,4 b) 1,41 c) 1,4142 d) 1,41421
6. a) 21 b) 20 c) 0 d) 1 e) 2
7. a) 7,8952, 9,9963, 5,9039
b) 7,895, 9,996, 5,904
c), d) 7,9, 10, 5,9
8. a) 3,141593; z nadmiarem
b) 3,14159; z niedomiarem
c) 3,1416; z nadmiarem
d) 3,142; z nadmiarem
e) 3,14; z niedomiarem
- Z** 1. a) 1,25 b) -6,75 c) -0,125 d) 0,375
e) 0,625 f) 1,375 g) 0,0375 h) 0,0875

- a) 0,(7) b) 0,01(6) c) 0,00(3)
d) 0,00(5) e) 0,3(6) f) 0,1(8)
- a) na 12. miejscu: 6,
na 25. miejscu: 0; 1,046
b) na 12. miejscu: 2,
na 25. miejscu: 5; 0,325
c) na 12. miejscu: 3,
na 25. miejscu: 7; 7,004
d) na 12. miejscu: 6,
na 25. miejscu: 3; 9,349
e) na 12. miejscu: 3,
na 25. miejscu: 4; 2,863
- a) na 24. miejscu: 4, na 100. miejscu: 7
b) na 24. miejscu: 5, na 100. miejscu: 2
- a) $a = 6, b = 3$
- a), d) skończone b), c) okresowe
- a) $\frac{4}{11}$ b) $\frac{41}{11}$ c) $-\frac{206}{33}$
d) 1 e) $\frac{209}{5}$ f) $\frac{2131}{990}$
- $x = \frac{2}{3}, y = \frac{48}{11}$
a) $5\frac{1}{33}$ b) $-3\frac{91}{99}$ c) $\frac{43}{48}$
- a) 4,75 b) 0,175 c) 0,0375 d) -7,375
e) 3,125 f) 8,(6) g) 2,(3)
h) -6,(4) i) 0,(2) j) 0,0625
- a) 5 b) 3 c) 6 d) 6 e) 5
- a) 2,2360680 b) 2,23607 c) 2,2

1.5. Pierwiastek kwadratowy

- C** 1. a) 12 b) 15 c) 18 d) 25 e) 50
f) 90 g) 1,1 h) 1,9 i) 2,1
2. a) 3 b) 3 c) 9 d) 1,2 e) $\sqrt{3}$
3. a) 7,2 cm b) 128 cm
4. a) 18, 3, 5,7 b) $\frac{11}{12}, \frac{19}{20}, \frac{24}{25}$
c) 4, 3, 10 d) $3, \frac{1}{2}, 2$
- Z** 1. a) 3 b) -11 c) 4,2 d) 0,5
e) $-\frac{17}{20}$ f) $1\frac{19}{30}$
3. a) 2, 3, 4, 5
b) 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11
c) 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17
4. a) $3\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{6}$ c) $4\sqrt{3}$ d) $4\sqrt{6}$
e) $6\sqrt{3}$ f) $6\sqrt{7}$ g) $14\sqrt{2}$ h) $15\sqrt{2}$
5. a) $6\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}$ c) $10\sqrt{2}$
d) $5\sqrt{2}$ e) $20\sqrt{2}$ f) $22\sqrt{2}$

- a) $9\sqrt{5}$ b) $\sqrt{3}$ c) $7\sqrt{3}$ d) $-2\sqrt{5}$
e) $4,6\sqrt{2}$ f) $-25\sqrt{5}$
- a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{\sqrt{10}}{5}$
d) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{10}}{6}$ f) $\frac{\sqrt{15}}{25}$
- a) $4\sqrt{2} + 1 \approx 6,6$
b) $\frac{3}{2}(\sqrt{2} - 1) \approx 0,6$
c) $\frac{5}{4}(1 - \sqrt{2}) \approx -0,5$
d) $\frac{1}{4}(10 + 3\sqrt{2}) \approx 3,55$
- a) 6 b) 16 c) 20 d) 30
e) 42 f) 30 g) 120 h) 120
- a) 30 b) $\frac{35}{4}\sqrt{6}$ c) 2,2 d) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
- a) $6 + 18\sqrt{2}$ b) $\frac{7}{2}\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{3} - \sqrt{6}$
- a) 15 b) $6\sqrt{2} + 8\sqrt{3}$ c) 16
- a) 14 b) 1,5 c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{7}{30}$
- a) $\sqrt{125}$ b) $\sqrt{147}$ c) $\sqrt{162}$
d) $\sqrt{338}$ e) $\sqrt{3}$ f) $\sqrt{13,5}$
- 14,2
- a) 42 cm b) 10,8 cm
c) 1,5 m d) 0,5 m

1.6. Pierwiastek sześcienny. Pierwiastek n-tego stopnia

- C** 1. a) 1 b) 4 c) 6 d) 20
2. a) 8 b) $\frac{1}{9}$ c) 11 d) $\frac{2}{9}$ e) 1,1 f) $\frac{9}{11}$
3. a) 6 b) 5 c) 14 d) 2 e) $-\frac{1}{12}$ f) $2\frac{1}{3}$
4. a) $\frac{\sqrt[3]{9}}{3}$ b) $2\sqrt[3]{2}$ c) $\frac{2\sqrt[3]{25}}{5}$
5. a) -3 b) -4 c) -5 d) $-\frac{1}{3}$ e) $-\frac{3}{10}$
6. a) 3 b) -2 c) 0,2
d) -0,1 e) 3 f) -2
- Z** 1. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{4}{5}$
e) $\frac{3}{10}$ f) $\frac{5}{6}$ g) $\frac{4}{3}$ h) $\frac{7}{3}$
2. a) 7 b) 1 c) 13 d) 2 e) 0,6 f) 0,5
3. a) $2\sqrt[3]{4}$ b) $5\sqrt[3]{2}$ c) $3\sqrt[3]{5}$
d) $5\sqrt[3]{3}$ e) $3\sqrt[3]{4}$ f) $2\sqrt[3]{15}$
4. a) $\sqrt[3]{24}$ b) $\sqrt[3]{54}$ c) $\sqrt[3]{81}$
d) $\sqrt[3]{432}$ e) $\sqrt[3]{640}$ f) $\sqrt[3]{1080}$
5. Wszystkie równości są prawdziwe.
6. a) y b) $x = y$ c) y d) x
7. a) 8 cm b) 20 cm
8. a) $12\sqrt[3]{2}$ cm b) 15 cm

- a) $\sqrt[4]{162}$ b) $\sqrt[4]{2500}$ c) $\sqrt[5]{2048}$
d) $\sqrt[6]{10\,000}$

- a) 14 b) 9 c) -10
d) 0,6 e) 2,1 f) $1\frac{1}{4}$
- a) -20 b) -0,1 c) $-\frac{5}{4}$ d) -1,5
- a) 1 b) 0,3 c) $\frac{14}{15}$
d) -1 e) -2,4 f) 4
- a) -1 b) -0,2 c) 0,3
- a) b - najmniejsza, d - największa
b) c - najmniejsza, b - największa

1.7. Potęga o wykładniku naturalnym

- C** 1. a) 81, 729, 6561 b) $\frac{9}{16}, \frac{27}{64}, \frac{81}{256}$
c) $\frac{4}{25}, -\frac{8}{125}, \frac{16}{625}$
2. $(-3)^9 < (-2)^9 < (-2)^0 < (-2)^4 = 2^4 < 3^4 = (-3)^4$
3. a) 256 b) 256 c) 8 d) 81 e) 1 000 000
f) 8000 g) 32 h) 81 i) 64 j) 729
- Z** 1. a) 6 b) 25 c) 9 d) $\frac{1}{4}$ e) $-\frac{1}{8}$ f) -1
2. a) 1024 b) 81 c) -64 d) 625
e) $\frac{1}{512}$ f) $\frac{1}{729}$ g) $\frac{64}{729}$ h) $11\frac{25}{64}$
3. a) $x > y$ b) $x < y$ c) $x > y$ d) $x > y$
4. $(-2)^5 < (-\frac{1}{2})^3 < (-\frac{1}{2})^5 < (-\frac{1}{2})^4 < (\frac{1}{2})^3 < (-\frac{1}{2})^2 < 2^4$
5. a) 2048 b) 243 c) 1 d) 625
6. a) 60 b) 208 c) 125 d) 152 e) 8 f) 49
g) 10 900 h) 6 i) 1 000 000

1.8. Potęga o wykładniku całkowitym. Notacja wykładnicza

- C** 1. a) $\frac{1}{16}$ b) $\frac{1}{64}$ c) $\frac{1}{9}$ d) $-\frac{1}{27}$ e) 4
f) 32 g) $\frac{9}{4}$ h) $\frac{81}{16}$ i) 25 j) -125
2. a), b) tak c) nie
3. a) 27 b) $\frac{1}{1024}$ c) $\frac{1}{1024}$ d) $\frac{1}{256}$ e) 25
f) 1024 g) 32 h) 1024 i) $\frac{27}{4}$ j) 400
4. a) $5,02 \cdot 10^{27}$ b) $2,7 \cdot 10^{-4}$
c) $2,99 \cdot 10^{-26}$ d) $9,10956 \cdot 10^{-31}$
5. a) $6,32 \cdot 10^6$ b) $1,09 \cdot 10^8$
c) $4,3728 \cdot 10^1$ d) $8,7652 \cdot 10^3$
e) $6,5 \cdot 10^{-4}$ f) $3,02 \cdot 10^{-3}$
g) $1,00324 \cdot 10^{-1}$ h) $1 \cdot 10^{-6}$

6. a) 86 200 b) 0,000789
c) 0,0000834 d) 6,02
7. a) $1,36 \cdot 10^3 = 1360$
b) $1,12 \cdot 10^6 = 1\,120\,000$
c) $3 \cdot 10^2 = 300$
d) $6 \cdot 10^{-1} = 0,6$
1. a) $-32, -\frac{1}{32}, \frac{1}{32}$ b) 9, $-27, 81$
c) $9, \frac{1}{3}, \frac{1}{27}$ d) $8, 8\sqrt{2}, \frac{1}{16}$
2. a) 2^{15} b) 2^{-4} c) 2^{27} d) 2^{20}
3. a) $2^4, 2^{-6}, 2^9, 2^2, 2^{20}$
b) $3^{-4}, 3^3, 3^{-4}, 3^3, 3^{-20}$
c) $10^{-3}, 10^{10}, 10^8, 10^{-6}$
d) $5^{-6}, 5^2, 5^{-12}, 5^{-20}$
4. a) $-\frac{\sqrt{3}}{72}$ b) $\frac{4}{81}$ c) $-40\sqrt{5}$ d) 18
5. a) 0,001 b) 1 c) $\frac{1}{16}$ d) $\frac{1}{27}$
e) 32 f) $\frac{1}{169}$ g) 1 h) -1
6. a) $\frac{35}{36}$ b) 0,001 c) $\frac{1}{8}$
7. a) x b) y
8. a) $1\frac{1}{3}$ b) $\frac{16}{81}$ c) 6 d) $3\frac{3}{8}$ e) 0 f) $\frac{8}{125}$
9. $a \neq 0$ a) $a^2, \frac{1}{4}$ b) $a^3, -\frac{1}{8}$ c) $a^2, \frac{1}{4}$
d) $a^{13}, -\frac{1}{8192}$ e) $a^{-16}, 65\,536$
f) $a^{14}, \frac{1}{16384}$
10. a) $2,73 \cdot 10^8 = 273\,000\,000$ b) $2 \cdot 10^1 = 20$
c) $2,42 \cdot 10^{-4} = 0,000242$
d) $5,203 \cdot 10^2 = 520,3$
11. a) $2 \cdot 10^4 = 20\,000$
b) $9 \cdot 10^{10} = 90\,000\,000\,000$
c) $3 \cdot 10^{12} = 3\,000\,000\,000\,000$
d) $1,6 \cdot 10^{11} = 160\,000\,000\,000$
12. a) $9,6 \cdot 10^9$ b) $6 \cdot 10^{-13}$
c) $1,02 \cdot 10^0$ d) $1,2 \cdot 10^0$
13. włos: 0,0000000046 m/s,
ślimak: $1,94 \cdot 10^{-3}$ m/s,
Ziemia: 29 600 m/s,
światło: $2,99792458 \cdot 10^8$ m/s
14. a) $\frac{1}{64}, 64, -\frac{1}{64}, -\frac{1}{64}$
b) $64, -\frac{1}{64}, -\frac{1}{64}, 64$
c) $81, \frac{1}{81}, -81$ d) $\frac{1}{8}, 8, -\frac{1}{8}$
15. a) 36 b) $\frac{1}{16}$ c) 32 d) $\frac{27}{8}$ e) $\frac{1}{125}$ f) 49
g) $\frac{16}{9}$ h) $\frac{8}{3}$ i) $\frac{1}{9}$ j) $\frac{1}{36}$ k) 64 l) 64

16. $x \neq 0$ a) $2x^6, 128$ b) $x^{12}, 1$
c) $x^4, 625$ d) $2x^3, \frac{27}{4}$

Nazwy wielkich liczb

2. nazewnictwo europejskie:

Słońce – 1,989 kwintylionów kg,
Merkury – 330,2 tryliardów kg,
Jowisz – 1,899 kwadryliardów kg,
Ziemia – 5,974 kwadrylionów kg;

nazewnictwo amerykańskie:

Słońce – 1,989 nonylionów kg,
Merkury – 330,2 sekstylionów kg,
Jowisz – 1,899 oktylionów kg,
Ziemia – 5,974 septylionów kg

1.9. Potęga o wykładniku wymiernym

1. a) 2 b) 4 c) 9 d) 2 e) 3 f) 3
2. a) 8 b) 9 c) 16 d) 8 e) 729
f) 32 g) $\frac{1}{25}$ h) 27 i) 32 j) $\frac{9}{4}$
4. a) 1000 b) 1024 c) 25 d) 8 e) 5
f) 3 g) 3 h) 2 i) 7 j) 4
5. a) 4 b) 125 c) 16 d) 32 e) $\sqrt[3]{3}$
6. a) 216 b) 32 c) 12 d) $\frac{9}{4}$ e) 15
7. a) 81 b) 4 c) $5\sqrt{5}$ d) $\frac{8}{27}$ e) $\frac{1}{16}$
8. a) 199,5262 b) 2818,3829
c) 42,1697 d) 0,0200
1. a) $2^{\frac{1}{2}}$ b) $2^{\frac{1}{3}}$ c) $2^{-\frac{1}{2}}$ d) $2^{\frac{2}{3}}$
e) $2^{\frac{9}{2}}$ f) $2^{\frac{10}{3}}$ g) $2^{\frac{3}{2}}$ h) $2^{\frac{4}{3}}$
2. a) $7^{\frac{3}{2}}$ b) $7^{\frac{2}{3}}$ c) $7^{-\frac{1}{2}}$ d) $7^{-\frac{1}{3}}$
e) $7^{-\frac{3}{2}}$ f) $7^{-\frac{3}{5}}$ g) $7^{\frac{5}{2}}$ h) $7^{\frac{6}{5}}$
3. a) 27 b) 25 c) $\frac{1}{16}$ d) $\frac{1}{9}$
e) $\frac{1}{12}$ f) 8 g) 10 h) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
4. a) 0,008 b) 2,5 c) 0,09 d) 125
e) 32 f) 0,008 g) $(\frac{10}{3})^5$ h) 0,008
5. a) 16 b) 8 c) $\frac{1}{3}$ d) 243
e) 1 f) 0,05 g) 64 h) 0,03
6. a) $3^{\frac{1}{2}}$ b) $3^{\frac{1}{4}}$ c) $3^{\frac{2}{3}}$ d) $3^{-\frac{1}{2}}$
e) $3^{\frac{4}{5}}$ f) $3^{\frac{5}{3}}$ g) $3^{\frac{3}{2}}$ h) $3^{\frac{7}{3}}$
7. a) 7 b) 4 c) 5 d) 0
e) 1 f) 0 g) $\frac{8}{3}$ h) 3
8. a) 32 b) 16 c) $\frac{1}{32}$ d) $\frac{1}{125}$ e) $\frac{1}{27}$
9. a) 8 b) $\sqrt{7}$ c) 7 d) 27

1.10. Logarytm i jego własności

1. a) 1 b) 2 c) 5 d) -2 e) $\frac{1}{3}$
2. a) 4 b) 10 c) -1 d) -3 e) $\frac{1}{2}$
3. a) 1 b) 4 c) $\frac{1}{2}$ d) 3 e) -2 f) $\frac{1}{4}$
5. a) 14 b) 7 c) $1\frac{1}{2}$ d) $3\frac{1}{3}$ e) $2\frac{1}{4}$
6. a) -7 b) 13 c) $-2\frac{1}{2}$ d) $3\frac{1}{2}$ e) $4\frac{3}{4}$
7. a) 20 b) 20 c) 12 d) -16
1. a) 9 b) 1 c) -5 d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{3}{2}$
2. a) 0 b) 5 c) -1 d) $\frac{3}{2}$ e) $-\frac{3}{2}$
3. a) -1 b) 2 c) 4
4. a) 2 b) 16 c) $\frac{1}{16}$
5. a) $2 + 4 = 6$ b) $3 - 2 = 1$ c) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$
6. a) $3 - 1 = 2$ b) $4 - 2 = 2$ c) $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
7. a) 1 b) 3 c) 2 d) 1 e) 3 f) -1
8. a) 2 b) 3 c) -2 d) 4 e) -1 f) 1
9. a) 32 b) 2 c) 9 d) 1 e) 8 f) $\frac{1}{8}$
g) 1 000 000 h) $\frac{1}{8}$

1.11. Procenty

1. a) 6, 30, 150, 450 b) 5, 20, 100, 300
2. a) 100 b) 320 c) 60
d) 12 e) 72 f) 42
3. czapka – 27 zł, rękawice – 39 zł,
razem 66 zł
4. cena nart po obniżce: marcowej – 462 zł,
o 50% – 412,50 zł
5. a) 10 b) 20 c) 30
6. 150%
7. a) 0,6 b) 11,2 c) 5 d) 5 e) 0,36 f) 0,99
8. firma Y: o 35%, firma Z: o 12,5%
9. a) $y = 50\%x, x = 200\%y$
b) $y = 80\%x, x = 125\%y$
c) $y = 160\%x, x = 62,5\%y$
10. cena średniego zestawu: 250 zł,
cena małego zestawu: 125 zł
1. a) 16 b) 24 c) 4,4
d) 160,4 e) 4,5 f) 0,004
2. a) 10% liczby 25 b) 6% liczby 250
c) 55% liczby 200 d) 5% liczby 6000
3. a) 25% b) 310% c) 45% d) 75%

4. a) 25% b) 7,5% c) 5,5%
d) 8% e) 150% f) 380%
5. a) 200 b) 400 c) 2000 d) 120
6. 1380 zł; wzrosła o 38%
7. a) 100% b) $33\frac{1}{3}\%$ c) 56,25%
8. a) 36% b) $55\frac{5}{9}\%$
9. a) 2376 zł b) 2250 zł c) 2160 zł
10. a) 62,5% b) 75%
11. a) 110 b) 6 c) 5
12. a) 162 b) 0,8 c) 1
13. a) 10, 20, 40 b) 1, 2, 6
c) 4,5, 9, 45, 405 d) 32, 60, 180, 500
14. a) 2,4 b) 1,2 c) 8,8
15. a) 150 b) 75
16. dobrą: 25%, pozytywną: 87,5%
17. x większe od y o: a) 60% b) 25%
c) $33\frac{1}{3}\%$ d) 300% e) 400% f) 220%
 y mniejsze od x o: a) 37,5% b) 20%
c) 25% d) 75% e) 80% f) 68,75%

Zestaw I

1. a) 1, 2, 3, 6, 9, 18 b) 1, 2, 19, 38
c) 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40
d) 1, 2, 29, 58 e) 1, 2, 4, 17, 34, 68
2. a) 995 b) 996 c) 994 d) 990 e) 990
3. a) $4\frac{1}{3}$ b) 8 c) $-\frac{1}{15}$ d) 40,9
e) $-13\frac{1}{3}$ f) $3\frac{1}{2}$
4. a) $-x = 3\frac{9}{32}, \frac{1}{y} = -\frac{4}{7}$
b) $-x = -\frac{19}{21}, \frac{1}{y} = 1\frac{8}{37}$
c) $-x = -8,4, \frac{1}{y} = -\frac{30}{169}$
d) $-x = \frac{37}{60}, \frac{1}{y} = \frac{15}{16}$
5. a) $4 - \frac{\sqrt{12}}{3}, 2$ b) $\sqrt{1\frac{4}{25}}, 1$
c) $\sqrt{81} + \sqrt[3]{81}, 13$ d) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{125}, 8$
6. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{1}{10}$ d) $\frac{1}{15}$
e) 2 f) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ g) $\frac{3}{4}$ h) $\frac{8}{9}$
7. a) $-3 + \sqrt{5}$ b) -375 c) $\frac{135}{4}$
9. a) Zmniejszyło się o 36%.
b) Zmniejszyło się o 1%.
10. 150
11. a) $1\frac{1}{2}$ b) $\frac{4}{9}$ c) $\frac{24}{25}$ d) $\frac{11}{16}$

Zestaw II

1. a) 16, 17, 18 b) 26, 28, 30, 32
2. a) $3\frac{3}{4}$ b) $9\frac{9}{16}$ c) $4\frac{7}{9}$ d) $-\frac{65}{144}$
3. a) $x + y = \frac{43}{12}$, $xy = \frac{35}{12}$
b) $x + y = \frac{23}{12}$, $xy = \frac{5}{6}$
c) $x + y = 1,7$, $xy = 0,3$
d) $x + y = -2,75$, $xy = 1,5$
4. a) $a = 3\sqrt{3}$ b) $a = \frac{5\sqrt{5}}{8}$ c) $a = \frac{16}{9}$
d) $a = \frac{1}{4}$ e) $a = 144$ f) $a = 324$
5. a) 2,1 b) $-\frac{7}{12}$ c) 0
d) $624\frac{624}{625}$ e) 9,9 f) $\frac{5}{6}$
6. a) -1 b) 9 c) -3 d) 3
7. $a \neq 0$, $b \neq 0$ a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{9}{4}$ c) $\frac{4}{9}$
8. a) $x = 4$ b) $x = -2$, $x = 2$ c) $x = 3$
d) $x = 2$ e) $x = \frac{7}{2}$ f) $x = 2$
9. a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $2^{-\frac{1}{3}}$ d) $\frac{20}{3}$
10. a) d, b, c, a b) d, a, b, c
11. a) $8 \cdot 10^5$ b) $2 \cdot 10^{-9}$
c) $3,75 \cdot 10^3$ d) $1,4 \cdot 10^{11}$
12. a) 2,5 b) 7,5 c) 7,5
13. a) 2,4 b) 0,032 c) 0,164
14. a) 100,2 b) 500,8

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. D 2. A 3. B 4. D 5. C 6. C 7. C 8. B
9. B 10. D 11. C 12. D
13. FF
14. CE
15. DH
- 16.1. FP 16.2. -15
17. A3
- 18.1. A3 18.2. B
19. ujemny
20. 15
21. 75
22. 360
- 23.1. $24\sqrt{3}$ 23.2. $6\sqrt{2}$
24. 25 zł
25. 150
26. 12,5%
27. 15 h

2.1. Zbiory

1. a), c), f) jest b), d), e) nie jest
2. $D = \{0, 1, 2\} = \{n \in \mathbb{N}: n^2 < 5\}$,
 $E = \{-2, -1, 0, 1, 2\} = \{x \in \mathbb{Z}: x^2 < 5\}$,
 $F = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\} = \{x \in \mathbb{R}: x^2 = 5\}$
3. a) $A = C$ b) $B = C$
4. a) $B \subset A$ b) $A \subset B$ c) nie
1. a) $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$,
 $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, $A \subset B$
b) $A = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$,
 $B = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$; nie
2. a) $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$
b) $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$
c) $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$,
 $\{3, 4\}$
3. $\{a, b, c, d\}$, $\{a, b, c, e\}$, $\{a, b, d, e\}$,
 $\{a, c, d, e\}$, $\{b, c, d, e\}$
4. a) $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$
b) $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23\}$
5. a) tak b) nie c) nie
6. $\{0, 1, 2\}$, $\{0, 1, 3\}$, $\{0, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$
7. a) $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$
b) $\{0, 1, 2\}$, $\{0, 1, 3\}$, $\{0, 1, 4\}$, $\{0, 2, 3\}$,
 $\{0, 2, 4\}$, $\{0, 3, 4\}$

2.2. Działania na zbiorach

1. a) $A = \{1, 3, 6, 7, 8\}$,
 $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{1, 3\}$
b) $A = \{a, b, c, d, e\}$,
 $B = \{c, d, e, f, g, h, i\}$, $A \cap B = \{c, d, e\}$
2. a) $\{3, 5\}$ b) $\{0, 6, 12, 18\}$ c) $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\}$
3. a) tak b) nie
4. a) 1, 2, 6, 7, 8, 9, 10 b) s, t, u, v, w
5. a) $\{5, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 25\}$
b) $\{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, -6, 6, -8, 8\}$
c) $\mathbb{Z}$
6. a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,
 $A \cup C = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
 $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
 $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
b) $A \cap B = \{2, 3\}$, $A \cap C = \{3, 7\}$,
 $B \cap C = \{3, 5, 6\}$, $A \cap B \cap C = \{3\}$

7. $A \setminus B = \{4, 6, 8\}$, $B \setminus A = \{1, 3\}$
8. a) $A \setminus B = \{1\}$, $B \setminus A = \{4, 5\}$
b) $A \setminus B = \{7\}$, $B \setminus A = \{0, 2, 4\}$

1. $A \cup B = \{k, l, m, n, o, p, q, r, s\}$,
 $A \cap B = \{n, o\}$, $A \setminus B = \{k, l, m\}$,
 $B \setminus A = \{p, q, r, s\}$
2. a) $A \cup B = \{a, c, d, e, f, g\}$,
 $A \cap B = \{e, g\}$, $A \setminus B = \{a, c\}$,
 $B \setminus A = \{d, f\}$
b) $A \cup B = \{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
 $A \cap B = \{5, 7\}$, $A \setminus B = \{1, 9\}$,
 $B \setminus A = \{4, 6, 8\}$
3. 9 uczniów
4. a) II b) III c) I
5. a) $A \cap B$, $B \setminus A$ b) $A \setminus B$, $B \setminus A$
6. a) $A \cap B = \{m, r, t\}$ b) $A \setminus B = \{k\}$
c) $B \setminus A = \{g\}$ d) $B \cap C = \{g, r\}$
e) $B \setminus C = \{m, t\}$ f) $C \setminus B = \{b, l\}$
g) $A \cap B \cap C = \{r\}$
h) $A \cup B \cup C = \{b, g, k, l, m, r, t\}$

Oś liczbowa

1. a) $A(-\frac{2}{3})$, $B(\frac{1}{3})$, $C(1\frac{2}{3})$
b) $A(-1\frac{1}{4})$, $B(\frac{3}{4})$, $C(1\frac{1}{2})$
2. a) $A(-5)$, $B(15)$, $C(25)$
b) $A(-200)$, $B(400)$, $C(500)$
c) $A(-0,05)$, $B(0,15)$, $C(0,2)$
d) $A(-0,03)$, $B(0,03)$, $C(0,05)$

4. a) IV b) III c) II d) I

2.3. Przedziały

1. a) $-3 < x < 2$ b) $0 < x < 4$
c) $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ d) $100 < x < 150$
2. a) $-1 \leq x \leq 4$, 6 liczb całkowitych
b) $\frac{3}{2} \leq x < 5$, 3 liczby całkowite
c) $-2 < x \leq -\frac{1}{2}$, 1 liczba całkowita
d) $-60 \leq x \leq 40$, 101 liczb całkowitych
1. a) $[-7; 0]$ b) $(\frac{1}{2}; 9)$ c) $[\frac{1}{4}; \sqrt{2})$
d) $(-\frac{13}{3}; 5]$ e) $[2\frac{1}{4}; \infty)$ f) $(-3; \infty)$
g) $(-\infty; -\frac{1}{3}]$ h) $(-\infty; 27]$
2. a) $(-7; 2]$, $-7 < x \leq 2$
b) $[-50; 20]$, $-50 \leq x \leq 20$
c) $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$, $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$

- d) $[3, 14; \pi)$, $3, 14 \leq x < \pi$
e) $(-\infty; 10)$, $x < 10$
f) $(\sqrt{2}; \infty)$, $x > \sqrt{2}$
g) $[-\frac{1}{4}; \infty)$, $x \geq -\frac{1}{4}$
h) $(-\infty; 2\pi)$, $x < 2\pi$

3. a) $(0; 4)$ b) $[-4; 0]$
c) $(2\frac{1}{2}; \infty)$ d) $(-\infty; -\sqrt{2}]$
4. a) $(-1; 3)$ b) $(-4; 2)$
c) $[1; 5]$ d) $[-\frac{7}{4}; \frac{5}{4}]$
5. a) -1, 0, 1, 2, 3 b) 1, 2, 3, 4, 5
c) 0, 1, 2 d) -6, -5, -4, -3, -2
6. a) 4 b) 6 c) 6 d) 8
7. a) $A \subset B$
b) Nie zachodzi żadna z tych zależności.
c) $B \subset A$ d) $A \subset B$
8. a) $[-2; 5]$ b) $[-3; 5]$ c) $[-3; 2]$ d) $[-1; 1]$
9. a) -1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ d) 2
10. $p = -1$ lub $p = 1$
11. a) $x \in [1; 2]$ i $y \in [1; 5]$
b) $x \in [-5; -1]$ i $y \in [0; 4]$
12. a) 6 b) 6 c) 5 d) 8
13. a) $-3 \leq x \leq 5$; 3
b) $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$; 1
c) $-\frac{7}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}$; 1
d) $-\pi < x < 2\pi$; 4
14. a) $3\frac{2}{5}$, π b) $-\frac{8}{3}$, π c) żadna d) π

2.4. Działania na przedziałach

1. a) $A \cup B = (1; 6)$, $A \cap B = (2; 4)$,
 $A \setminus B = (1; 2]$, $B \setminus A = [4; 6)$
b) $A \cup B = [-4; 3]$, $A \cap B = \{1\}$,
 $A \setminus B = [-4; 1)$, $B \setminus A = (1; 3]$
c) $A \cup B = [-5; 3]$, $A \cap B = [1; 3]$,
 $A \setminus B = \emptyset$, $B \setminus A = [-5; 1)$
d) $A \cup B = (-3; 2]$, $A \cap B = (-1; 2]$,
 $A \setminus B = (-3; -1]$, $B \setminus A = \emptyset$
2. a)
b)
3. a) $[-5; -3] \cup [-1; 4]$
b) $[-3; 2) \cup [\frac{5}{2}; 5)$
c) $[-3; -1) \cup [2; \infty)$
d) $(-\infty; -3) \cup (1; \infty)$

- [Z] 1.** a) $A \cup B = (-3; 4)$, $A \cap B = [-1; 0)$,
 $A \setminus B = (-3; -1)$, $B \setminus A = [0; 4)$
b) $A \cup B = (-4; 3)$, $A \cap B = [-\frac{1}{2}; 2]$,
 $A \setminus B = (-4; -\frac{1}{2})$, $B \setminus A = (2; 3)$
c) $A \cup B = [-5; 4]$, $A \cap B = (-2; 0]$,
 $A \setminus B = [-5; -2] \cup (0; 4]$, $B \setminus A = \emptyset$
d) $A \cup B = (-\infty; 2]$, $A \cap B = [0; 2)$,
 $A \setminus B = (-\infty; 0) \cup \{2\}$, $B \setminus A = \emptyset$
e) $A \cup B = [-1; \infty)$, $A \cap B = \{2\}$,
 $A \setminus B = [-1; 2)$, $B \setminus A = (2; \infty)$
f) $A \cup B = \mathbb{R}$, $A \cap B = [-3; 6)$,
 $A \setminus B = (-\infty; -3)$, $B \setminus A = [6; \infty)$

- 3.** a) $(-\infty; -2] \cup [3; \infty)$
b) $(-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$
c) $(-\infty; 0] \cup (10; \infty)$
d) $(-\infty; -\sqrt{2}) \cup [\sqrt{2}; \infty)$
4. a) $A \cup B = (-3; 6)$, $A \cap B = (0; 1) \cup (3; 4)$,
 $A \setminus B = (-3; 0] \cup [4; 6)$, $B \setminus A = [1; 3]$
b) $A \cup B = [0; 7] \cup [8; 9]$, $A \cap B = (1; 3)$,
 $A \setminus B = [0; 1] \cup [3; 7]$, $B \setminus A = [8; 9]$

- 6.** a) 10 b) 7 c) 0 d) 3
7. a) $B \setminus A$ b) $A \cap B$

Rozwiązywanie równań

- 1.** a) spełnia b) nie spełnia
2. a) $x = \frac{5}{2}$ b) $x = -\frac{1}{3}$
c) $x = -6$ d) $x = -1$
3. a) $x = 4$ b) $x = -\frac{2}{3}$
c) $x = -1$ d) $x = \frac{9}{4}$
4. a) $2\frac{2}{3}$ b) $-3\frac{3}{4}$ c) $2\frac{2}{3}$ d) $1\frac{1}{2}$
5. a) $x = 2$ b) $x = -2$ c) $x = \frac{17}{28}$
d) $x = -4$ e) $x = \frac{7}{2}$ f) $x = 2$
6. a), d) tożsamościowe
b), c) sprzeczne
7. $x = 3$

2.5. Rozwiązywanie nierówności

- [C] 1.** a), b) spełnia c), d) nie spełnia
2. a) $x < -36$; nie istnieje taka liczba
b) $x \geq 2\frac{5}{6}$, liczba 3
c) $x \leq -5\frac{1}{4}$; nie istnieje taka liczba
d) $x > 20$, liczba 21
3. a) nie b) tak

- 4.** a) $x \leq 9$ b) $x > \frac{16}{9}$
c) $x < -15$ d) $x \geq 6$

- 5.** a) $x > -3$ b) $x \geq -6$ c) $x \geq 4$
d) $x > \frac{7}{3}$ e) $x < 13$ f) $x \geq -\frac{1}{7}$
6. a), e), f) tożsamościowa
b), c), d) sprzeczna

- [Z] 1.** a) $[4; 5)$ b) $(-5; -2]$ c) $[-\frac{1}{2}; 1]$
2. a) $(-6; -4)$, -5 b) $(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4})$, 0
c) $[-4; 2)$, -4 , 1
d) $(-\frac{16}{3}; -3)$, -5 , -4
3. a) żadna b) c c) c d) b, c
e) a, b, c f) żadna
4. a) $x > \frac{15}{8}$ b) $x \geq 2$ c) $x \leq \frac{25}{4}$
d) $x > \frac{28}{33}$ e) $x \geq \frac{11}{8}$ f) $x < \frac{19}{3}$
5. a) $x < \frac{5\sqrt{3}}{3}$ b) $x > 6\sqrt{2}$ c) $x > \frac{4\sqrt{5}}{5}$
6. a) $n \in \{6, 7, 8\}$ b) $k \in \{-2, -1\}$
c) $m \leq 13$ i $m \in \mathbb{N}$
7. a) $k \in \{4, 5\}$ b) $k \in \{2, 3, 4\}$
8. a) $x > -1$ b) $x \leq -\frac{1}{2}$ c) $x < 4$
d) $x \geq -3$ e) $x \geq -18$ f) $x < \frac{5}{7}$
9. a) 3, 4 b) 3, 4 c) wszystkie
d) $-4, -3, -2, -1$
10. a) $[6; \infty)$ b) $(-\infty; 2\frac{2}{5})$ c) $[-3; \infty)$

Sumy algebraiczne.

Redukcja wyrazów podobnych

- 1.** a) $18x^3y^2$ b) $2x^3y^6$
c) $-4x^3yz^3$ d) $-64x^4y^4z^4$
2. a) $-48a^4b$ b) $-3a^3b^5$
c) $24a^3b^2c$ d) $9a^2b^3c^3$
3. $P_c = 54p^2q^4$, $V = 27p^3q^6$
4. a) $6x^2$ i $-4x^2$
b) x^3y i $-\frac{1}{2}x^3y$
c) $2x^2y$ i $9x^2y$ oraz $-3xy^2$ i xy^2
5. a) $-x^3 - 2xy$
b) $3x^4y + \frac{1}{4}x^3$
c) $7x^2yz - 3xz^3$
d) $3\frac{1}{2}xy^3 + 2xz^3$
6. a) $-2x^3 - 4x^2$
b) $-3x^2y - 7xy^2$
c) $5x^3 - 3x^2y$
d) $-5xy^4 + 3x^2$

2.6. Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian

- [C] 1.** a) 133 b) 204 c) 357 d) 418
2. a) $24x^5 - 2x^3$ b) $2x^5 + \frac{1}{2}x^4$
c) $x^3y^3 - 3x^4y^2$ d) $x^3y^4 - \frac{1}{2}x^4y^5$
e) $x^3yz - 6x^2yz^2 + xyz^4$
f) $2x^5y^3z - 4x^3y^2z^3 + \frac{1}{2}x^2y^2z^2$
3. a) $-8x^3 + 11x^2 - x$
b) $-2x^5 - 20x^4$
c) $-3x^2 - xy + 9y^2$
d) $8x^3y - 22x^2y^2 - 24xy^2$
[Z] 1. a) $6x^5 - 8x^4 + 3x^3$
b) $-4x^6 + 8x^5 - 2x^4$
c) $3x^4 + 2x^3 - 4x^2$
d) $-\frac{1}{2}x^5 + x^4 + 4x^3$
2. a) $3x^3y - 2x^2y^2 + xy^2$
b) $-6x^3y^3 - 6x^2y^2 + 3xy^4$
c) $-2x^4y + x^3y^2$
d) $4x^5y + \sqrt{2}x^4y^2$
e) $x^4y^2 - x^3y^2 + x^3y^3$
f) $6x^3y^5 - \sqrt{3}x^4y^4$
3. a) $a^4 - 4a^3$ b) $8a^6 - 24a^5$
c) $6a^4b^4 - 24a^3b^6$ d) $a^5b^4 - \frac{3}{2}a^3b^4$
4. A - III, B - IV, C - II, D - I
5. a) $3x$ b) $-2x^2$ c) $4xy$ d) $-6xy^2$
6. a) $-4x^4 + 11x^3$ b) $-4x^4 - 3x^3 + x^2$
c) $10x^5 - 20x^3$ d) $-6x^3 - 6x^2 + 10x$
e) $-\frac{1}{2}x^4 + 5x^2$ f) $3\sqrt{2}x^4 - 4\sqrt{6}x^2$
7. a) $-\frac{23}{8}x^2y^3 + xy^3$
b) $-x^4y^2 + x^4y^3 + 2x^3y^3$
c) $\frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{3}{4}x^2y - \frac{1}{2}xy$
10. a) 117 b) 156 c) 255 d) 425
11. a) $6x^5 - 4x^2$ b) $x^5 - 2x^4$
c) $3x^5 - 3x^4 + 12x^3$
d) $18x^5 + 9x^4 - 54x^3$
e) $2x^6 - 4x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2$
f) $2x^5 - 4x^3$
12. a) $2x^3y^2$ b) $13x^4y^2 - 3x^2y^2 - 2x^2y$
c) $4\frac{1}{2}x^2y^2$ d) $3x^3y + 2x^2y - xz + 3yz$
e) $x^4yz - 2x^2yz^2 + xyz^2$
f) $6x^3yz^2 + 2x^3y^2z - 10y^2z^2$

2.7. Wyłączanie jednomianu przed nawias

- [C] 1.** a) 400 b) 450 c) 1500
d) 3600 e) 4800 f) 3800
2. a) $5(x + y)$ b) $4(b - 2a)$
c) $9(x - 3y^2)$ d) $-6(x^2 - 3y^2)$
e) $13(3y^2 - 2z)$ f) $-11(a^3 - 2b^2)$
g) $-12(4p - 3q^2)$ h) $25(3xy^3 - 5)$
3. a) $x(4x + y)$ b) $2x(x^2 - 6y)$
c) $xy(3 - z)$ d) $6pq(1 + 3p)$
e) $a^2b(1 + 3b - a)$
f) $x^2y^2(4 - 5x + 2y)$
4. a) $4x^2(2x - 9)$ b) $7y^2(1 - 2y^2)$
c) $5x^2(x + 2y)$ d) $5a(4x - 3y)$
e) $4b(2a + 3c)$ f) $2xy(2 + 3x)$
g) $2a^2b(a + 2 - 2b)$
h) $3p^2q^2(7p - 9q + 1)$
i) $6xy(8x + 3y - 2xy)$
[Z] 1. a) 400 b) 4000 c) 5000
d) 3700 e) 1000 f) 300
2. a) $ab(a + b^2)$ b) $xy^2(x^2 - y)$
c) $3a^2(3ab^2 - c^2)$ d) $4y^3(x^4y + 2z)$
e) $3a^2b(ab - 2)$ f) $2x^2y^3(3y + 4x)$
3. a) $xyz(x + y + z)$
b) $xyz^2(x + yz - x^2)$
c) $2x^2y(x - 2y + 3z)$
d) $3x^3y^2(4xy + 2y - 3x^2)$
4. a) $4y - 6$
b) $3ab(3a + b + 2) = 9a^2b + 3ab^2 + 6ab$
c) $3t^2(4t^2 - 3t + 1)$
5. a) -45 b) -30 c) 225
6. a) 120 b) 24 c) 4 d) 2
7. I - C, II - A, III - B
11. a) $3x(3x^2 - 2x + 5)$
b) $6x^2(3x^2 + 4x - 2)$
c) $4x^4(2x - 4 + 3x^2)$
12. a) $3x^2(3x + y^2)$ b) $3x^2(x^2y^2 - 2y)$
c) $2xy^2(3x - 1)$
d) $2xy^2(4y^3 + 6xy^2)$
e) $2xy^2(3x^2y - 3x^3y^2 + 6)$
f) $3x^2(2x^2y^2 + 2xy^2 - 6x^2y)$
13. a) $3y^3(3x^4 - 4y^2)$ b) $4a^2b^2(2 + ab^2)$
c) $2p^2q^3(4p + 2p^2q - 3)$

2.8. Mnożenie sum algebraicznych

- Ć 1. a) $x^2 + 7x + 12$ b) $p^2 - pq + 6p - 6q$
 c) $-2p^2 - pq + q^2$ d) $6x^2 + 20x + 6$
 e) $3a^2 + 7ab - 6b^2$ f) $8a^2 - 8ab + \frac{3}{2}b^2$
2. a) $x^3 - 3x + 2$ b) $2x^3 + 5x^2 + 9$
 c) $x^2 - 4x + 4y - y^2$
 d) $2x^2 + 6x + 5xy + 18y - 3y^2$
 e) $x^2 - x + 5y - y^2 - 6$ f) $x^4 + x^2 + 1$
3. a) $V = x^4 - 2x^2 - 8$
 b) $V = x^5 - 2x^4 - x + 2$
4. a) $2\sqrt{2} - 1$ b) $11 - 5\sqrt{5}$
 c) $7 - 3\sqrt{6}$ d) $16 + 7\sqrt{10}$
 e) $5 + 2\sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2}$
 f) $-5 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$
6. a) $x = -\frac{10}{3}$ b) $x = \frac{3}{5}$ c) $x = -\frac{2}{5}$
 d) $x > -3$ e) $x > -1$ f) $x \geq \frac{1}{3}$
- Z 1. a) $2a^2 - 2a + ab - b$
 b) $6ab + 9a - 4b^2 - 6b$
 c) $-12a^2 + 4a + 6ab - 2b$
 d) $-4a - 8ab - 6b - 3$
 e) $2a^2 - 4ab + ab^2 - 2b^3$
 f) $-3a^3 + 2a^2b + 9ab - 6b^2$
2. a) $x^2 + x + 2xy - 4y - 6$
 b) $4x^2 - 4x - 2xy + 3y - 3$
 c) $x^3 + x^2y + 2x^2 + xy + y^2 + 2y$
 d) $x^3 - x^2y - 2x^2 + 2xy + x - y$
 e) $2x^2y + 6x^2 - 12xy - 4xy^2$
 f) $-16x^3 + 4xy^2$
3. a) $2a^2 - 24$ b) $12ab + b^2$
 c) $4y^2 - 4x^2 - 3xy$ d) $2x^2 + 15x$
4. a) $x^2 - 4x - 12, -9, 75$
 b) $x^3 - x^2 - 6, -6, 375$
5. a) $P = a^2 + 2a$ b) 1
6. a) $3x + 7$ b) $a + 3$
 c) $5x + 12$ lub $4x + 13$
7. a) -20 b) -6 c) -4 d) 10
9. a) $x = -10$ b) $x = 4$
 c) $x = -\frac{1}{2}$ d) $x = \frac{1}{2}$
10. a) $x \geq \frac{3}{2}$ b) $x < -\frac{6}{5}$ c) $x \geq \frac{5}{8}$
 d) $x < \frac{1}{2}$
11. a) 3 b) 10 c) 0
12. a) 160 cm i 100 cm b) 57 cm^2

13. 14 cm

14. a) $12k^2$ b) 6 c) $6k^2$ d) $l^2 - 4kl$

15. a) $x = \frac{6}{7}$ b) $x = 1$ c) $x < \frac{1}{3}$
 d) $x \leq 4$

2.9. Wzory skróconego mnożenia

- Ć 2. a) $x^2 + 2x + 1$ b) $x^2 + 4x + 4$
 c) $x^2 - 6x + 9$ d) $x^2 - 10x + 25$
 e) $4x^2 + 4x + 1$ f) $\frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$
 g) $16x^2 - 8x + 1$ h) $4x^2 - 2x + \frac{1}{4}$
3. a) $x^2 + 4xy + 4y^2$
 b) $4x^2 - 4xy + y^2$
 c) $9x^2 + 12xy + 4y^2$
 d) $9x^2 - 24xy + 16y^2$
 e) $x^2 - xy + \frac{1}{4}y^2$
 f) $9x^2 + 3xy + \frac{1}{4}y^2$
 g) $4x^2 - xy + \frac{1}{16}y^2$
 h) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{1}{9}y^2$
4. a) $8 + 2\sqrt{7}$ b) $14 - 6\sqrt{5}$
 c) $39 - 12\sqrt{3}$ d) $21 + 8\sqrt{5}$
 e) $5 + 2\sqrt{6}$ f) $12 - 2\sqrt{35}$
 g) $21 + 6\sqrt{10}$ h) $6\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}$
7. a) $x^2 - 9$ b) $x^2 - 49$
 c) $4x^2 - 16$ d) $25x^2 - 36$
 e) $9x^2 - 16y^2$ f) $9y^2 - \frac{1}{4}x^2$
8. a) 18 b) 33 c) -4 d) $-1\frac{7}{18}$
 e) $11\frac{3}{4}$ f) -1 g) -1 h) 4 i) 4,5
9. a) $-8\sqrt{5} - 20$ b) $9 - 3\sqrt{2}$
 c) $4\sqrt{6} - 10$ d) $48\sqrt{3} + 10$
- Z 1. a) -5 b) -2 c) $8x^2 + 24y^2$
 d) $13x^2 - 5y^2$
2. a) 7 b) 16 c) $-7 - 8\sqrt{2}$
3. a) 6 b) $-3 + 2\sqrt{3}$
 c) 10 d) $12 - 2\sqrt{30}$
4. a) 1 b) 1 c) 2 d) 2
5. a) $66 + 36\sqrt{2}$
 b) $78 - 24\sqrt{3}$
 c) $48 + 24\sqrt{3}$
6. a) 14 b) $12 - \sqrt{2} + 3\sqrt{10}$
7. a) $-18\sqrt{10} - 42$ b) $16\sqrt{3}$
 c) $96 - 12\sqrt{5}$ d) 0

9. a) $49 - 14x + x^2$ b) $x^2 + x + \frac{1}{4}$
 c) $4x^2 + 16x + 16$
 d) $9x^2 + 48x + 64$
 e) $\frac{1}{16}x^2 + 4x + 64$
 f) $\frac{4}{9}x^2 - 8x + 36$
 g) $0,25x^2 + 0,4x + 0,16$
 h) $0,01x^2 - 0,5x + 6,25$
10. a) $11 + 6\sqrt{2}$ b) $6 - 2\sqrt{5}$
 c) $34 - 24\sqrt{2}$ d) $37 + 12\sqrt{7}$
 e) $23 + 4\sqrt{15}$ f) $18 - 12\sqrt{2}$
 g) 4,5 h) $3,5 + \sqrt{6}$

11. a) 6 b) 6 c) -4

Liczby wielokątne

1. 400
3. 51
4. 1, 6, 15, 28, 45

2.10. Zastosowanie przekształceń algebraicznych

- Ć 1. a) $\frac{6-\sqrt{2}}{34}$ b) $\frac{8\sqrt{2}-2\sqrt{10}}{11}$
 c) $-4 - 3\sqrt{2}$ d) $\frac{7-3\sqrt{3}}{4}$ e) $\frac{\sqrt{15}-3}{2}$
2. a) $x = 3$ b) $x = 1$ c) $x = 5$
3. a) $x > -1$ b) $x \leq -\frac{1}{2}$
 c) $x > \frac{1}{9}$ d) $x \leq 2$
4. a) $x = -4$ b) $x = 3$ c) $x = -5$
 d) $x = \frac{1}{2}$ e) $x = -\frac{1}{5}$ f) $x = -\frac{1}{4}$
 g) $x = -\frac{3}{2}$ h) $x = -\frac{2}{3}$ i) $x = \frac{1}{6}$
5. a), d) sprzeczne
 b), c) tożsamościowe
6. a), d) tożsamościowa
 b), c) sprzeczna
- Z 1. a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, tak b) $\frac{3+\sqrt{2}}{7}$, tak
 c) $3\sqrt{5} - 6$, tak d) $-\frac{4\sqrt{2}+2}{7}$; nie
 e) $4\sqrt{3} - 6$, tak f) $12\sqrt{2} + 16$; nie
 g) $\sqrt{6} + \sqrt{5}$; nie h) $2\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$, tak
 i) $2\sqrt{7} + 2\sqrt{2}$; nie j) $\sqrt{6} - 2$, tak
 k) $-\frac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{5}$; nie l) $\frac{1+2\sqrt{2}}{7}$, tak
2. a) $x = \frac{1}{4}$ b) $x = 1,3$ c) $x \in \mathbb{R}$
 d) sprzeczne e) $x = 18$ f) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
3. a) $x \leq \frac{9}{4}$ b) $x \in \mathbb{R}$
 c) $x \leq \frac{4}{3}$ d) $x \geq -\frac{17}{4}$

4. a) $(0; \frac{3}{2})$ b) $(-5; 2]$
 c) $(\frac{1}{8}; \frac{8}{3})$ d) $(\frac{3}{2}; 5]$
5. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $2 + \sqrt{3}$ c) $4 + 2\sqrt{2}$
 d) $2\sqrt{2} - \sqrt{6}$ e) $7 + 4\sqrt{3}$
6. a) $x = -\frac{3}{2}$ b) $x = 5$
 c) sprzeczne d) $x = 10$
7. a) $x \leq -\frac{5}{2}$ b) $x < 5$
 c) $x \leq \frac{2}{3}$ d) $x < \frac{17}{3}$

2.11. Wartość bezwzględna

- Ć 1. a) 5 b) 5 c) $\sqrt{3} - 1$
 d) $3 - \sqrt{3}$ e) $3\sqrt{2} - 4$
 f) $5 - 2\sqrt{5}$
2. a) $x = -2$ lub $x = 2$
 b) $x = -10$ lub $x = 10$
 c) $x = 0$ d) brak rozwiązań
3. a) x b) y c) x
4. a) $2 - \sqrt{3}$ b) $4 - 2\sqrt{3}$ c) $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$
5. a) $x \in (-8; 8)$ b) $x \in [-4; 4]$
 c) $x \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$
 d) $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}; \infty)$
6. a) $x \in \mathbb{R}$ b) $x = 0$
 c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ d) sprzeczna
- Z 1. a) 5 b) 0 c) 0 d) $\frac{19}{8}$
 e) $\sqrt{2}$ f) $2\sqrt{3} - 2$
2. a) $x + |x| = 10, x - 2|x| = -5$
 b) $x + |x| = 0, x - 2|x| = -9$
 c) $x + |x| = 0, x - 2|x| = 6 - 3\sqrt{6}$
 d) $x + |x| = 6\sqrt{2} - 8, x - 2|x| = 4 - 3\sqrt{2}$
3. a) $x = -4, x = 4$
 b) $x = -14, x = 14$
 c) $x = -6, x = 6$
 d) $x = -\frac{1}{4}, x = \frac{1}{4}$
 e) $x = -\frac{1}{3}, x = \frac{1}{3}$
 f) $x = -8, x = 8$
 g) $x = -1, x = 1$
 h) $x = -4, x = 4$
4. a) $|x| > -7$ dla $x \in \mathbb{R}$,
 $|x| < -7$ dla $x \in \emptyset$
 b) $|x| \geq -3$ dla $x \in \mathbb{R}$,
 $|x| \leq -3$ dla $x \in \emptyset$

5. a) $1 - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2}$ b) $1 - \sqrt{2}$
c) -3 , $1 + \sqrt{2}$, 3 d) -3 , 3
6. a) $[-3; -1] \cup [1; 3]$ b) $(-5; -2) \cup (2; 5)$
c) $[-4; -3\frac{1}{2}] \cup (3\frac{1}{2}; 4]$
7. a) $3 - \sqrt{7}$ b) $3 - 2\sqrt{2}$ c) $3\sqrt{2} - 4$
8. a) $x = -\frac{2}{3}$, $x = \frac{2}{3}$ b) $x = -4$, $x = 4$
c) $x = -13$, $x = 13$ d) $x = 0$
9. a) $(-4; -1) \cup (1; 4)$ b) $[-6\frac{1}{2}; -5] \cup [5; 6\frac{1}{2}]$
c) $(-3; -\frac{1}{2}) \cup [\frac{1}{2}; 3)$ d) $[-\frac{9}{2}; -\frac{5}{2}] \cup [\frac{5}{2}; \frac{9}{2}]$

Zestaw I

1. a) $(-2; -1)$ b) $(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}]$
c) $(-\infty; 4)$ d) $[-\frac{9}{2}; -2]$
2. a) $x \leq 3\frac{1}{3}$ b) $x > -1$ c) $x > -5$
d) $x < \frac{1}{3}$ e) $x \leq 5$ f) $x < 6$
3. a) $2x^2 + 6x + 5$ b) $2x^2 + 2x + 13$
c) $-16x$ d) $-4x + 8$
e) $8x^2 - 16x + 10$ f) $-5x^2 + 10x$
4. a) $2x^2 - 29$ b) 15 c) $5x^2 + 9$ d) -6
5. a) $-2\sqrt{3}$ b) $12\sqrt{3}$
6. a) 22 b) $8\sqrt{3}$ c) $6 - 8\sqrt{3}$ d) 26
7. a) $2 + 2\sqrt{3}$ b) $4 + 2\sqrt{3}$
c) $-2 - \sqrt{3}$ d) $3 - \sqrt{3}$
8. a) -1 b) $-9 + 4\sqrt{5}$ c) 18
9. a) $(x + 5)^2$, $x = -5$ b) $(x - 8)^2$, $x = 8$
c) $(3x - 1)^2$, $x = \frac{1}{3}$ d) $(4x + 1)^2$, $x = -\frac{1}{4}$
e) $(3x + 2)^2$, $x = -\frac{2}{3}$
f) $(\frac{1}{2}x + 1)^2$, $x = -2$

Zestaw II

1. a) $A \cap B = (2; 4]$, $A \cup B = [-1; 5)$,
 $A \setminus B = [-1; 2]$, $B \setminus A = (4; 5)$
b) $A \cap B = (3; 5]$, $A \cup B = [2; 7)$,
 $A \setminus B = [2; 3] \cup (5; 7)$, $B \setminus A = \emptyset$
c) $A \cap B = \{2\}$, $A \cup B = [-4; 9)$,
 $A \setminus B = [-4; 2)$, $B \setminus A = (2; 9)$
d) $A \cap B = \{0\}$, $A \cup B = (-\infty; 4]$,
 $A \setminus B = (-\infty; 0)$, $B \setminus A = (0; 4]$
e) $A \cap B = (-2; -1)$, $A \cup B = (-\infty; 4)$,
 $A \setminus B = (-\infty; -2]$, $B \setminus A = [-1; 4]$
f) $A \cap B = (2; 5)$, $A \cup B = [0; \infty)$,
 $A \setminus B = [5; \infty)$, $B \setminus A = [0; 2]$

2. a) 4 b) 1 c) 3
3. a) $x = \frac{2}{3}$ b) $x = 7$
c) $x = -\frac{17}{3}$ d) $x = \frac{3}{4}$
4. a) $n = 6$ b) $n = 9$
c) $n = 2$ lub $n = 3$ d) $n = 1$
5. a) $x \geq -\frac{1}{2}$ b) $x > \frac{4}{3}$
c) $x \leq -1$ d) $x < \frac{1}{3}$
6. a) -7 b) 2 c) 4 d) -2
7. a) nie jest b) jest
9. a) $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$
b) $-2, -1, 1, 2$ c) $-4, -3, -2, 2, 3, 4$
10. a) 0 b) 2 c) 1

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. C 2. A 3. C 4. B 5. A 6. D 7. A
8. B 9. B

10.1. FP 10.2. 7

11. FF

12. C2

13. $-\sqrt{3}$

14. CE

15. FF

16. A2

17. AE

18. $[1; \infty)$

19. $0, 1, 2$

21. 5

22. 10

26. $\frac{1}{7}$

28. $x \in (-3; 2]$

29. 4

Wykorzystanie równań do rozwiązywania zadań

1. 6

2. 4

3. 7,5 h

3.1. Co to jest układ równań

- Ć 1. 6 monet 10-groszowych i 3 monety 50-groszowe
2. C

- Z 1. a), c), f) tak b), d), e) nie
2. C
3. a) $(1, 7)$, $(3, 4)$, $(5, 1)$ b) $(3, 2)$
c) Nie ma takich liczb.
4. a) np. $x + y = 3$ b) np. $y - x = 2$
c) np. $4x + 3y = 3$ d) np. $2x + y = -9$
5. a) $\begin{cases} y + 8 = x \\ 5y = x \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$
6. a) $\begin{cases} a = 0,4b \\ 0,2a + 0,6b = 4 \end{cases}$
b) $\begin{cases} 0,9a = 1,1b \\ 1,15a - 0,85b = 1 \end{cases}$
7. pary spełniające równanie $x + 3y = 9$:
 $(0, 3)$, $(3, 2)$, $(6, 1)$, $(9, 0)$;
pary spełniające równanie $5x + 2y = 19$:
 $(1, 7)$, $(3, 2)$; tak

8. a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$
b) $\begin{cases} a + b = 14 \\ 1,2a + 0,7b = a + b \end{cases}$

3.2. Rozwiązywanie układów równań metodą podstawiania

- Ć 1. a) $x = 10$, $y = 1$ b) $x = 19$, $y = 37$
c) $x = \frac{3}{5}$, $y = \frac{4}{5}$ d) $x = 8$, $y = 4$
e) $x = 3$, $y = -1$ f) $x = -3$, $y = -4$
2. a) $x = 5$, $y = 1$ b) $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{7}{3}$
c) $x = 1$, $y = 8$
3. a) $x = 11$, $y = -1$ b) $x = 2$, $y = -2$
c) $x = 3$, $y = -7$
4. a) nieoznaczony b) oznaczony
c) sprzeczny
- Z 1. a) $x = 2,2$, $y = 1,6$ b) $x = \frac{1}{7}$, $y = -\frac{2}{7}$
c) $x = 1$, $y = 0$ d) $x = 1,7$, $y = 0,9$
e) $x = -\frac{1}{6}$, $y = -\frac{2}{3}$ f) $x = 10$, $y = 20$
2. a) $x = 2$, $y = -3$
b) $x = -2,8$, $y = -1,8$
c) $x = 5$, $y = -1$
d) $x = -\frac{2}{3}$, $y = 5$
e) $x = 0,5$, $y = -1,5$
f) $x = 4$, $y = 3$

3. a) tak b), c), d) nie
4. a) 0 b) 1 c) 1 d) 0

5. a) $x = 1$, $y = 2$
b) $x = -\frac{4}{3}$, $y = -\frac{13}{3}$

6. a), c) nieoznaczony
b) sprzeczny

7. a) np. $6x - 1 = 8y$
b) np. $6x - 4 = 8y$
c) np. $3x - 8y = 2$

8. a) $x = -\frac{6}{7}$, $y = \frac{19}{7}$
b) $x = \frac{20}{19}$, $y = -\frac{13}{38}$
c) $x = 18$, $y = -29$

9. a) sprzeczny b) nieoznaczony
c) oznaczony

3.3. Rozwiązywanie układów równań metodą przeciwnych współczynników

- Ć 1. a) $x = \frac{1}{2}$, $y = 3$ b) $x = 1$, $y = 1$
c) $x = -\frac{14}{5}$, $y = -5$
2. a) $x = 1$, $y = -1$ b) $x = -5$, $y = 2$
c) $x = 1$, $y = \frac{1}{7}$
d) $x = 2$, $y = -3$
e) $x = -3$, $y = 1$
f) $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{3}{2}$
3. a) $x = 2$, $y = -2$ b) $x = 7$, $y = -3$
c) $x = 1,9$, $y = 0,8$
4. a) np. 5 i 3 b) np. 2 i 3 c) np. $\frac{15}{2}$ i -1
5. a), c) sprzeczny b) nieoznaczony
- Z 1. a) $x = 5$, $y = 3$ b) $x = 1$, $y = -3$
c) $x = 24,5$, $y = 18$ d) $x = 2$, $y = 0,5$
e) nieoznaczony: $x \in \mathbb{R}$, $y = -\frac{2}{3}x + 5$
f) sprzeczny
2. a) $x = -8$, $y = 4$
b) $x = -25$, $y = -5$
c) $x = 0$, $y = 5$
d) $x = 3$, $y = 5$
3. a) $x = -\frac{10}{9}$, $y = -\frac{55}{18}$
b) $x = 3$, $y = 4$
c) $x = 5$, $y = 2$
d) $x = 1$, $y = -2$
e) $x = -1$, $y = 1$
f) nieoznaczony: $x \in \mathbb{R}$, $y = -\frac{1}{5}x + \frac{6}{5}$

4. a) $x = -1, y = 1$
 b) nieoznaczony: $x \in \mathbb{R}, y = 2x - \frac{4}{3}$
 c) $x = -2, y = 5$
 d) $x = \frac{50}{9}, y = \frac{8}{3}$

3.4. Układy równań – zadania tekstowe (1)

1. 10 i 40
 2. a) 1,5 kg śliwek i 2,5 kg wiśni
 b) 1 kg marchwi i 5 kg buraków
 3. Tomek 15 lat, siostra 11 lat
 4. a) Daria 10 lat, Maria 15 lat
 b) Olek 27 lat, Alek 17 lat

1. syn 16 lat, ojciec 51 lat
 2. Ania i siostra po 15 lat, brat 21 lat
 3. 20 monet 2-złotowych i 10 monet 5-złotowych
 4. 7 monet 1-złotowych i 5 monet 5-złotowych
 5. 6 monet 1-złotowych, 12 monet 2-złotowych i 14 monet 5-złotowych
 6. 7 monet 5-centowych i 4 monety 10-centowe
 7. 5 monet 5-centowych, 15 monet 10-centowych i 9 monet 25-centowych
 8. 65 cm^2
 9. 7 cm i 21 cm lub 3 cm i 25 cm
 10. 10 cm, 4 cm, 10 cm, 16 cm
 11. 10 zł normalny, 7 zł ulgowy
 12. 37 i 73
 13. $A = 354, B = 34$
 14. 70 biletów ulgowych i 140 normalnych
 15. 7 cm
 16. 25 cm, 90 cm

3.5. Układy równań – zadania tekstowe (2)

1. a) 15 b) 1 g
 2. prędkość własna łodzi – 8 km/h, prędkość prądu – 4 km/h
 3. prędkość własna łodzi – 12 km/h, prędkość prądu – 2 km/h

1. 300 dziewcząt, 200 chłopców
 2. Bartek 1200 zł, Paweł 1600 zł
 3. 6000 zł do banku A i 4000 zł do banku B
 4. 6000 zł w banku X i 14 000 zł w banku Y
 5. 1,5 kg stopu 40% i 0,5 kg stopu 80%
 6. 60% i 40%
 7. 3 h, 60 km
 8. 120 km
 9. 20 km
 10. 80 g
 11. 40
 12. 0,5 kg
 13. 5000 zł
 14. $x = 6000, y = 4000$

Zestaw I

1. a) $x = 6, y = 4$
 b) nieoznaczony, $x \in \mathbb{R}, y = 0,4x - 1,9$
 c) $x = 1, y = 1$
 d) $x = -3, y = -2$
 2. a), c), d) nie b) tak
 3. a), d) nieskończenie wiele b) 1 c) 0
 4. a) 49 b) $A = 83, B = 38$ c) $\frac{7}{17}$
 5. 6 chłopców, 17 dziewczynek
 6. 3 jabłka i 2 banany
 7. 36 i 24
 8. tak
 9. 8,80 zł

Zestaw II

1. a) $x = 3, y = -4$
 b) $x = 4, y = 1$
 2. a) $m = 1$: jedno rozwiązanie, $m = -2$: nie ma rozwiązań
 b) $m = 1$: nieskończenie wiele rozwiązań, $m = -2$: jedno rozwiązanie
 c) $m = 1$: jedno rozwiązanie, $m = -2$: nieskończenie wiele rozwiązań
 3. a) $m = \frac{11}{17}, k = \frac{26}{17}$
 b) $m = -1, k = \frac{1}{2}$

4. a) $x = \frac{3}{2}, y = 6$ b) $x = 0, y = -1$
 c) $x = \frac{3}{22}, y = \frac{2}{11}$ d) $x = 1, y = -4$
 e) $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$ f) $x = 0, y = 0$
 5. a) 400 g roztworu 5% i 1000 g roztworu 40%
 b) 7,5 g roztworu 10% i 2,5 g roztworu 6%
 c) 5% i 10%
 6. 56 g próby 750 i 44 g próby 375
 7. $v_1 = 60 \text{ km/h}, v_2 = 90 \text{ km/h}$
 8. o 18.00, 180 km
 9. 480 km

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. C 2. D 3. D 4. D 5. B 6. D 7. C
 8. D 9. B
 10. PP
 11. PP
 12.1. C 12.2. E
 13. B2
 14. BH
 15. I i III
 16. 10 banknotów 10-złotowych, 17 banknotów 20-złotowych, 10 banknotów 50-złotowych
 17. $\alpha = 55^\circ, \beta = 25^\circ, \gamma = 100^\circ$
 18. 28
 19. po 5 monet 10- i 50-groszowych, 12 monet 1-złotowych, 6 monet 2-złotowych
 20. $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$

4.1. Pojęcie funkcji

1. a) $f(2) = -1, f(4) = 2$
 b) $f(x) = 2$ dla $x \in \{3, 4\}$, nie istnieje argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość 1.
 3. Wartościami funkcji nie są 1 i $\frac{3}{2}$. Wartości przyjmowane dla dwóch argumentów: $\frac{1}{2}$ i 2.
 4. a) 3 b) 0, 1, 5 c) 2 d) dla żadnych
 5. a) nie b) tak, 2
 6. miejsca zerowe funkcji f :
 a) 2 b) brak c) $-1, 1$ d) 2

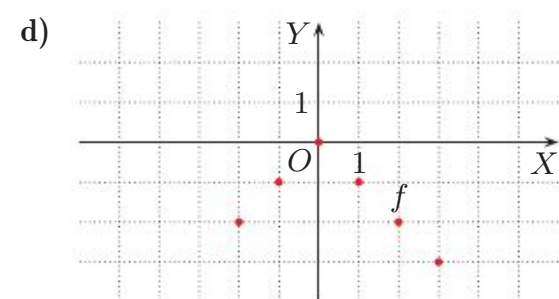
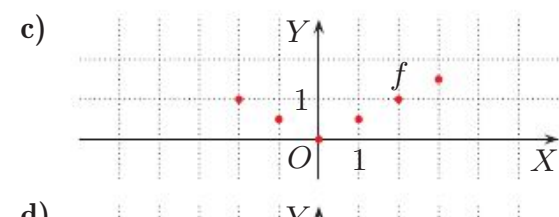
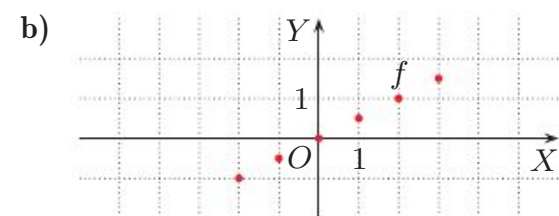
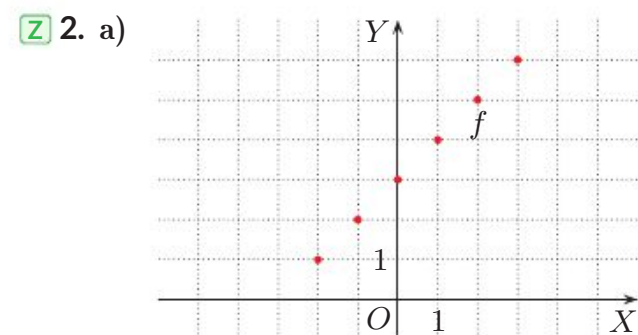
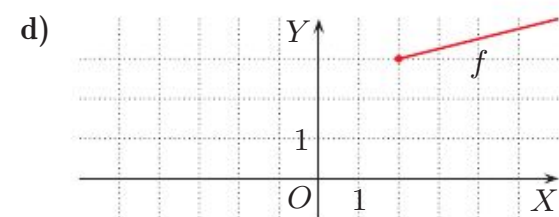
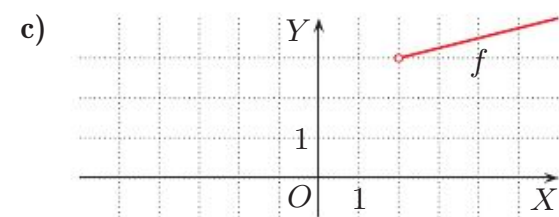
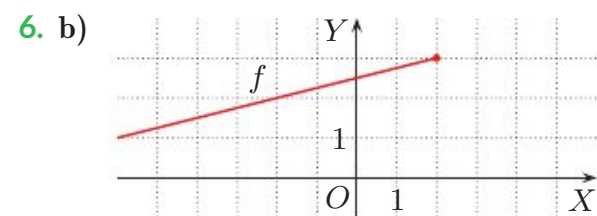
1. miejsca zerowe funkcji f : a) 0 b) -1
 2. a), b) dla trzech argumentów
 3. a) 0, 2 b) brak miejsc zerowych
 4. b) Wartościami funkcji f nie są: 2, 3, 5; 1 i 4 są przyjmowane dla dwóch argumentów.
 5. wartości dodatnie dla:
 a) 1 argumentu
 b) 3 argumentów
 6. wartości ujemne dla: $-1, 0, 1$, dwa miejsca zerowe: $-2, 2$
 8. a) 45 b) 22 c) 18 d) 9
 9. a) dla dwóch, miejsce zerowe: 3
 b) dla dwóch; nie ma miejsc zerowych
 10. dla trzech
 11. $\{n \in \mathbb{N}: 1 \leq n \leq 18\}$,
 $f(x) = 3$ dla $x \in \{12, 21, 30\}$,
 $f(x) = 7$ dla $x \in \{16, 25, 34, 43, 52, 61, 70\}$

Układ współrzędnych

1. $P(4, 0), Q(2, 3), R(5, 1), S(0, 4), T(-2, 3), U(3, -2), W(-1, -2)$
 2. a) II b) IV c) I d) III
 4. a) 6 b) 40
 5. do T_1 , o 1

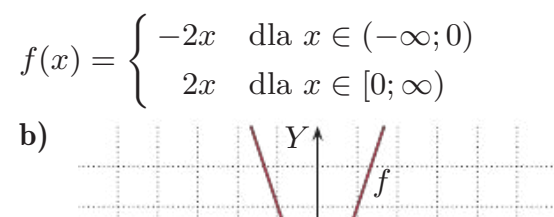
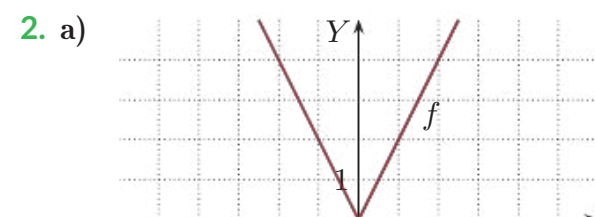
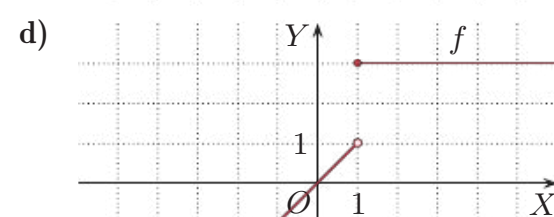
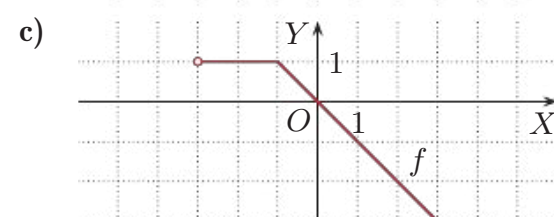
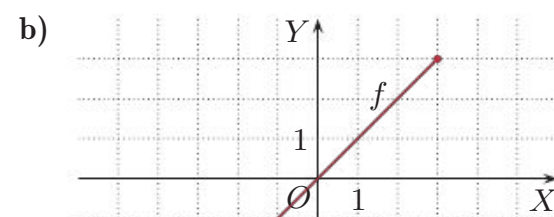
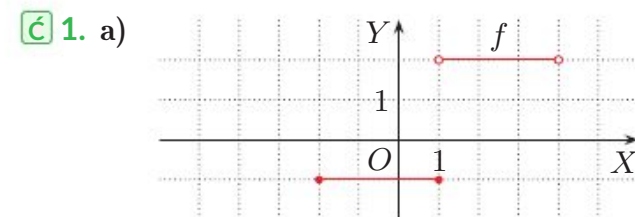
4.2. Szkicowanie wykresu funkcji (1)

1. a)
- b)
3. a) $f(x) = x - 3$ b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$
 6. a)

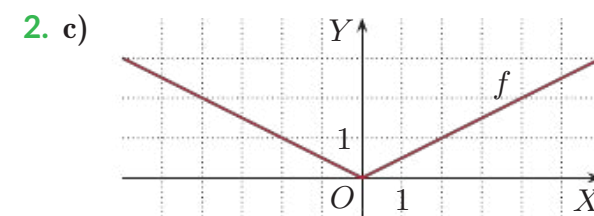


3. a) $f(x) = x - 4$
 b) $f(x) = 2x$
 c) $f(x) = -x + 4$
 d) $f(x) = 2x - 1$

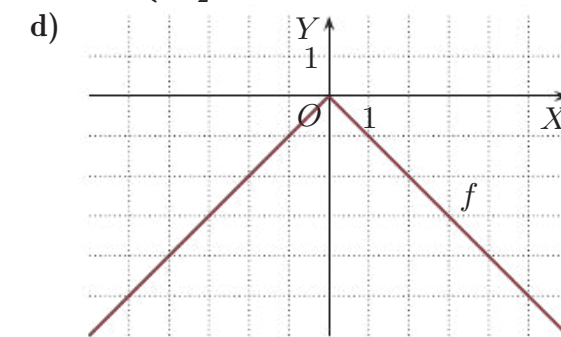
4.3. Szkicowanie wykresu funkcji (2)



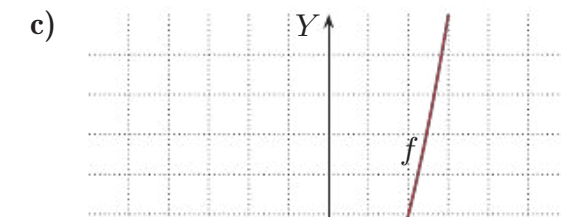
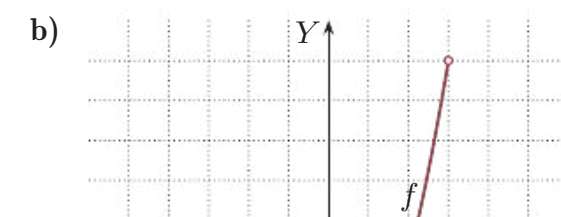
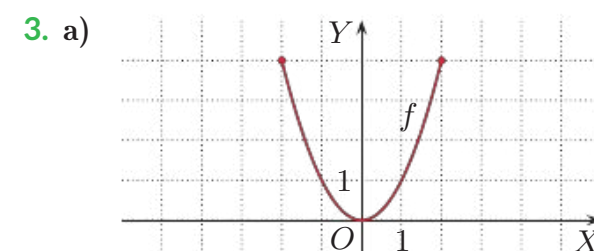
$$f(x) = \begin{cases} -3x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ 3x & \text{dla } x \in [0; \infty) \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ \frac{1}{2}x & \text{dla } x \in [0; \infty) \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ -x & \text{dla } x \in [0; \infty) \end{cases}$$



4. a)

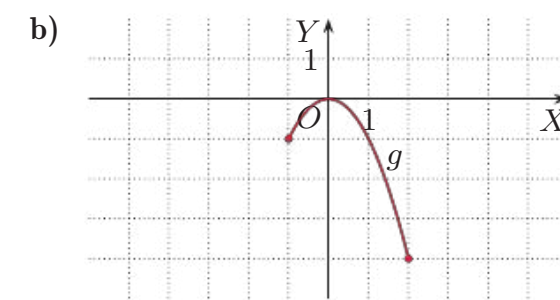
x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	16	4	1	0	1	4	16

b)

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
$f(x)$	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4

5. a)

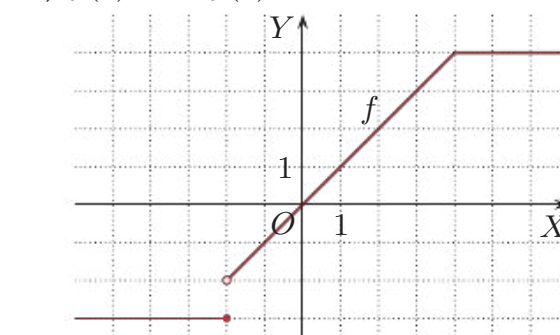
x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	-9	-4	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-1	-4	-9



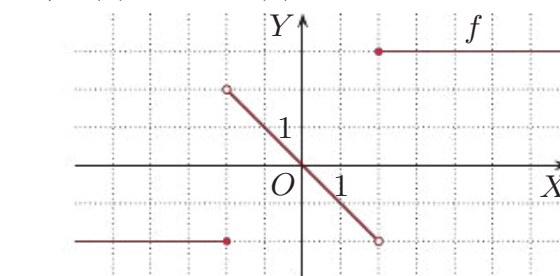
6. a) $f(1) = 1, f(7) = 4$

b) $f(1) = 3, f(7) = -6$

7. a) $f(1) = 1, f(3) = 3$

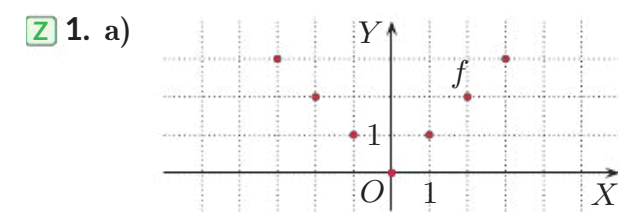


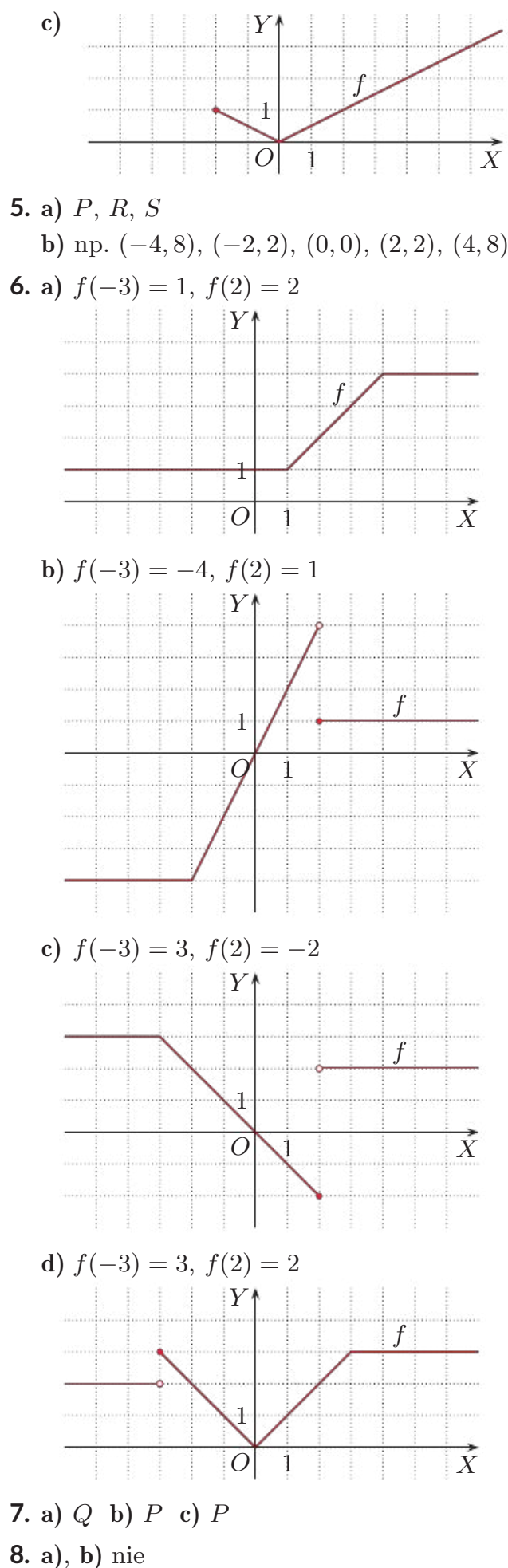
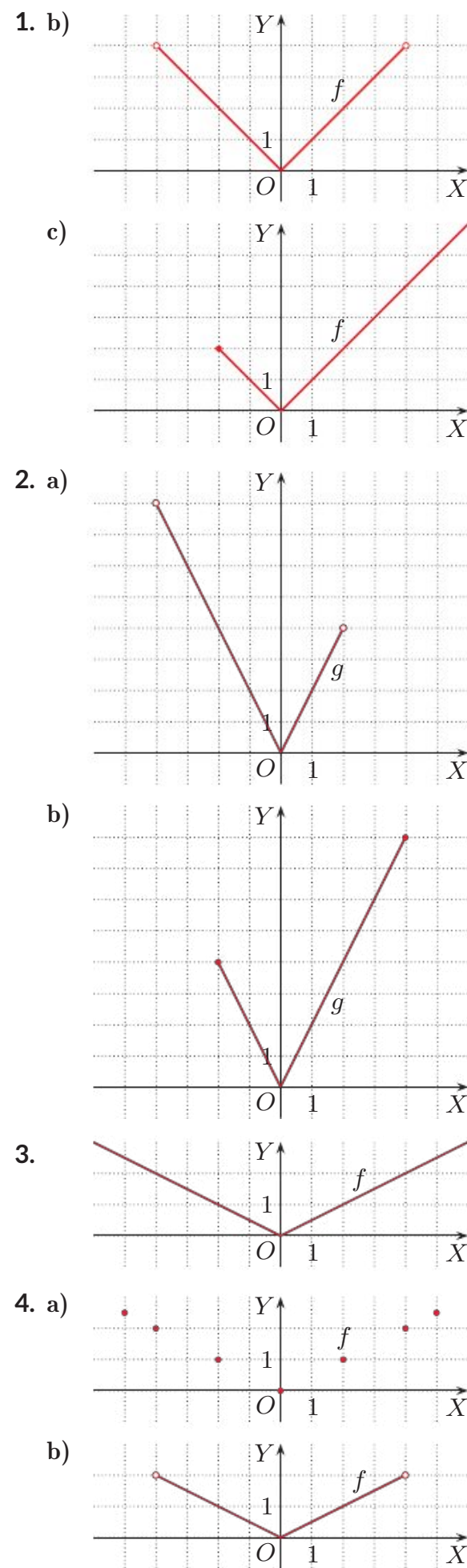
b) $f(1) = -1, f(3) = 3$



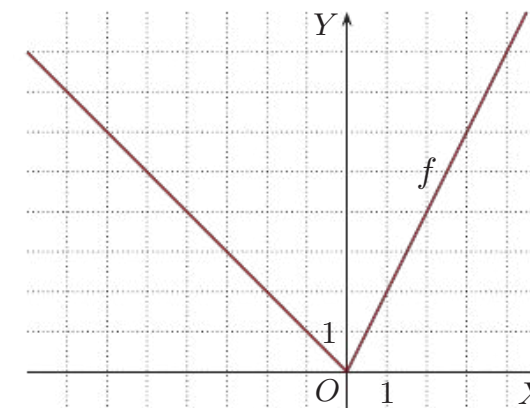
8. a) nie należy b) należy

9. a), c) nie b) tak

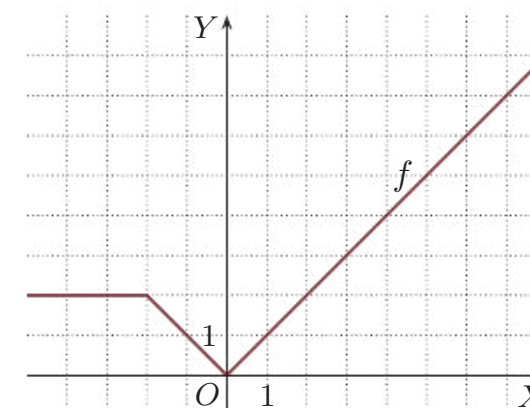




9. a) $f(-4) = 4, f(4) = 8$



b) $f(-4) = 2, f(4) = 4$

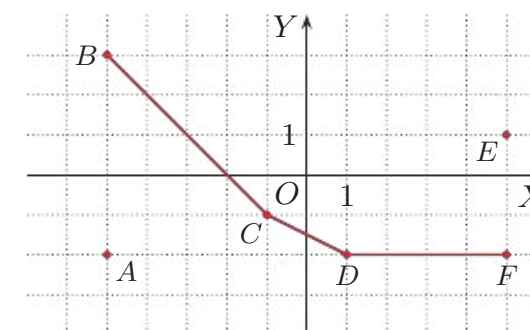


12. np. $(-9, 27), (-3, 3), (0, 0), (3, 3), (9, 27), (27, 243)$

4.4. Monotoniczność funkcji

Ć 2. a) tak b) tak c) nie

3. a)



b) nie

Z 1. a) maleje w $(-3; 2]$, stała w $[4; 6)$,
rośnie w $[2; 4]$
b) maleje w $[-2; 0]$ i w $[2; 3]$,
rośnie w $(-3; -2]$, $[0; 2]$ i w $[3; 6)$

2. Wszystkie zdania są prawdziwe.

3. a) rośnie w $[-4; -2]$ i w $[2; 5]$,
maleje w $[-2; 2]$
b) rośnie w $[-4; -1]$ i w $(-1; 5]$

4. a) tak; nierosnąca

b) tak, rosnąca

5. a) rośnie w $[2; 6)$,
maleje w $[-4; -2]$,
jest niemalejąca w $(-5; -4]$ i w $[-2; 6)$
b) rośnie w $(-5; -4]$ i w $[2; 4]$,
maleje w $[-4; -2]$ i w $[0; 2]$,
jest niemalejąca w $(-5; -4]$, w $[-2; 0]$
i w $[2; 6)$

Wykorzystanie wykresu do prezentacji informacji

1. a) A: -5°C , 12 stycznia,
B: -7°C , 10 stycznia
b) A: 4°C , 7 stycznia,
B: 1°C , 2, 3, 14 stycznia
c) A: 2-4, 9, 10, 12, 13 stycznia,
B: 2-12 stycznia

4.5. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (1)

Ć 1. a) $D = (-5; 1] \cup (2; 6]$

b) $D = (-5; -3) \cup (-3; 5]$

2. a) $f(D) = (1; 4]$

b) $f(D) = [0; 4]$

c) $f(D) = [0; \infty)$

3. Funkcja f przyjmuje największą wartość równą 2 dla $x = 4$.
Funkcja g nie przyjmuje wartości największej.
Funkcja h przyjmuje największą wartość równą 3 dla $x = 3$.

Z 1. a) $D = [-2; 4]$, $f(D) = [-4; 4]$,
 $f_{\min} = -4$ dla $x = 2$,
 $f_{\max} = 4$ dla $x = -2$
b) $D = [-4; 3]$, $f(D) = (-5; 4]$,
nie przyjmuje wartości najmniejszej,
 $f_{\max} = 4$ dla $x = 0$
c) $D = (-5; 5)$, $f(D) = [-4; 2]$,
 $f_{\min} = -4$ dla $x \in (-5; -3]$,
 $f_{\max} = 2$ dla $x \in [0; 5)$
d) $D = (-5; 5)$, $f(D) = [-4; 4]$,
 $f_{\min} = -4$ dla $x = -2$,
 $f_{\max} = 4$ dla $x = 2$

1. e) $D = [-3; -1] \cup [1; 5]$,
 $f(D) = [-4; -2] \cup [3; 4]$,
 $f_{\min} = -4$ dla $x = 5$,
 $f_{\max} = 4$ dla $x = -3$
 f) $D = (-4; -1] \cup (1; 4]$,
 $f(D) = [-4; -1) \cup [1; 4)$,
 $f_{\min} = -4$ dla $x = -1$,
 nie przyjmuje wartości największej

2. a) $f(D) = [-1; 3]$
 b) $f(D) = [-1; 0] \cup [1; 3]$
 c) $f(D) = [-1; 1) \cup (2; 3]$

3. a) $f(D) = [1; 6]$
 b) $f(D) = [1; 3] \cup [4; 5]$
 c) $f(D) = [1; 2] \cup [5; 6]$

4. a) $D = (\frac{1}{2}; 4]$ b) $D = (1; 3) \cup (3; \infty)$
 c) $D = (2; 3) \cup \{\frac{7}{2}\}$
 d) $D = \{2, 3, \frac{7}{2}\}$

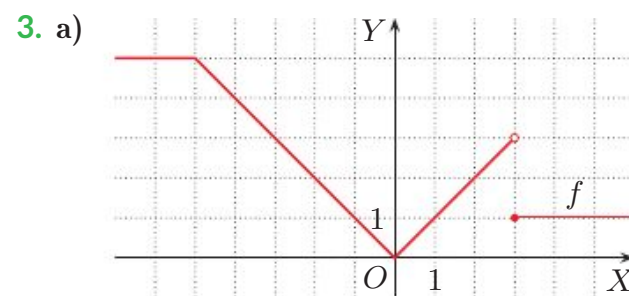
5. a) $f_{\min} = -1$ dla $x = -1$,
 $f_{\max} = 2$ dla $x = -4$
 b) $f_{\min} = -2$ dla $x = 0$,
 nie przyjmuje wartości największej
 c) $f_{\min} = -2$ dla $x = 0$,
 nie przyjmuje wartości największej

7. a) $f(D) = [-4; -2]$
 b) $f(D) = (-3; -\frac{3}{2})$
 c) $f(D) = [-\frac{7}{2}; -\frac{5}{2}] \cup [-2; -\frac{3}{2}]$

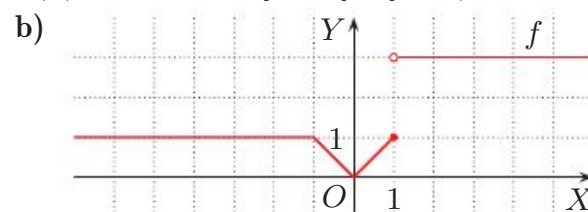
8. a) $g(D) = [0; 3]$ b) $g(D) = (-1; 0)$
 c) $g(D) = [-1; 3]$ d) $g(D) = [-1; \infty)$

4.6. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (2)

1. a) $f(x) = 0$ dla $x = 1$,
 $f(x) = 2$ dla $x \in \{-1, 3\}$
 b) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-4, 0, 2\}$,
 $f(x) = 2$ dla $x \in \{-3, -1, 3\}$
 c) brak miejsc zerowych,
 $f(x) = 2$ dla $x \in \{-2, 0\} \cup [2; 4]$
 2. a) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-3, 2\}$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in [-4; -3)$,
 $f(x) \leq 0$ dla $x \in [-3; 6]$
 b) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-3, -1, 3, 5\}$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in [-4; -3) \cup (-3; -1) \cup (3; 5)$,
 $f(x) \leq 0$ dla $x \in [-1; 3] \cup \{-3, 5\}$



- $f(x) = 3$ dla $x = -3$,
 $f(x) > 3$ dla $x \in (-\infty; -3)$,
 $f(x) = 1$ dla $x \in \{-1, 1\} \cup [3; \infty)$,
 $f(x) \leq 1$ dla $x \in [-1; 1] \cup [3; \infty)$



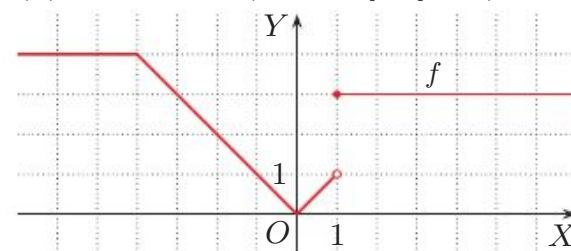
- $f(x) = 3$ dla $x \in (1; \infty)$,
 nie przyjmuje wartości większych od 3,
 $f(x) = 1$ dla $x \in (-\infty; -1] \cup \{1\}$,
 $f(x) \leq 1$ dla $x \in (-\infty; 1]$

4. $x \in (-\infty; -4] \cup \{0\} \cup [4; \infty)$

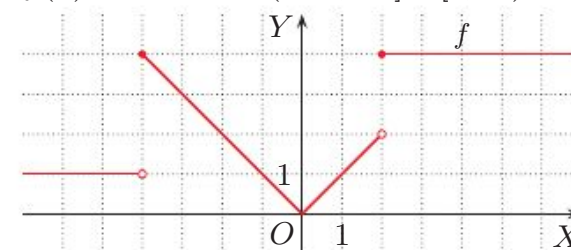
1. a) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-2, 0, 3\}$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in [-4; -2) \cup (-2; 0) \cup (3; 4]$,
 $f(x) \geq 0$ dla $x \in [-4; 0] \cup [3; 4]$
 b) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-4, -2, 2, 3\}$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in (-4; -2) \cup (2; 3)$,
 $f(x) \geq 0$ dla $x \in [-4; -2] \cup [2; 3]$
 c) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in (-4; -2) \cup (-2; 0)$,
 $f(x) \geq 0$ dla $x \in [-4; 0] \cup \{2, 4\}$

2. a) $f(x) = -1$ dla $x = -1$,
 $f(x) \leq 3$ dla $x \in (-\infty; 1]$
 b) $f(x) = -1$ dla $x = -1$,
 $f(x) \leq 3$ dla $x \in [-5; \infty)$
 c) $f(x) = -1$ dla $x = -4$,
 $f(x) \leq 3$ dla $x \in (-\infty; 4]$

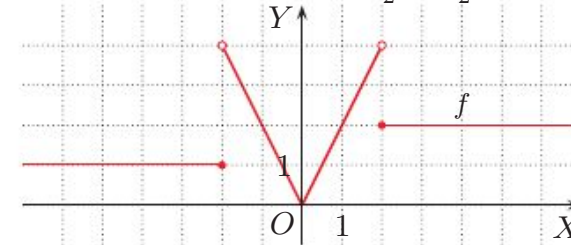
3. a) $f(x) = 1$ dla $x = -1$,
 $f(x) \geq 1$ dla $x \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty)$



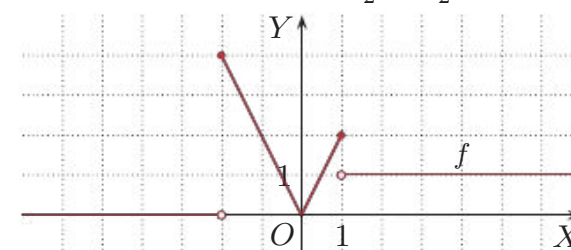
3. b) $f(x) = 1$ dla $x \in (-\infty; -4) \cup \{-1, 1\}$,
 $f(x) \geq 1$ dla $x \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty)$



- c) $f(x) = 1$ dla $x \in (-\infty; -2] \cup \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$,
 $f(x) \geq 1$ dla $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}; \infty)$

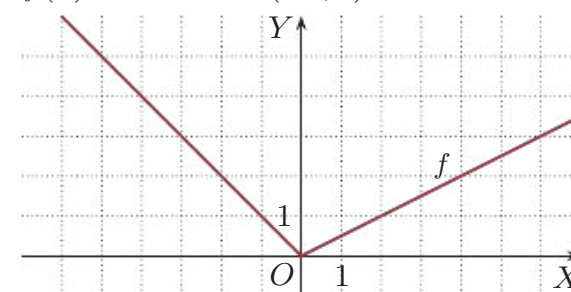


- d) $f(x) = 1$ dla $x \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\} \cup (1; \infty)$,
 $f(x) \geq 1$ dla $x \in [-2; -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}; \infty)$



4. a) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-3, 2\}$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-3; 2)$,
 $f(x) \leq 0$ dla $x \in [-3; 2]$
 b) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-3, 3\}$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in [-4; -3)$,
 $f(x) \leq 0$ dla $x \in [-4; -3] \cup \{3\}$
 c) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-3, -1, 2\}$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in [-4; -3)$,
 $f(x) \leq 0$ dla $x \in [-4; -3] \cup \{-1, 2\}$

5. a) $f(x) = 2$ dla $x \in \{-2, 4\}$,
 $f(x) < 1$ dla $x \in (-1; 2)$



- b) $f(x) = 2$ dla $x \in \{-2\} \cup [2; \infty)$,
 $f(x) < 1$ dla $x \in (-1; 1)$

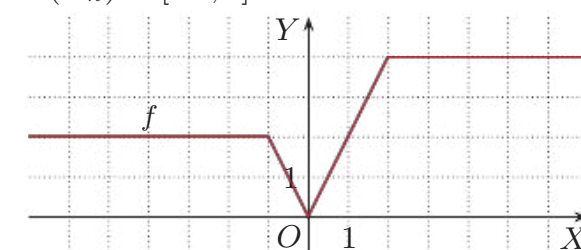
Wykresy jako nośnik informacji finansowych

1. a) X : 40 zł, Y : 50 zł
 b) X : 50 zł, Y : 10 zł

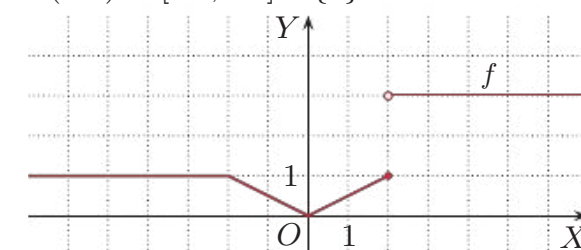
4.7. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OY

1. a) $[2; \infty)$
 b) $[-2; \infty)$
 c) $[-3; \infty)$
 d) $[\frac{1}{2}; \infty)$

2. a) $g(D) = (-\infty; 4]$
 b) $g(D) = (-\infty; 0]$
 c) $g(D) = (-\infty; -1]$
 2. a) $f(D_f) = [0; 4]$, $g(D_g) = [1; 5]$,
 $h(D_h) = [-2; 2]$



- b) $f(D_g) = [0; 1] \cup \{3\}$,
 $g(D_g) = [1; 2] \cup \{4\}$,
 $h(D_h) = [-2; -1] \cup \{1\}$



3. a) $a = 1$
 b) $a = -4$
 4. $g(x) = x^2 + 1$, $h(x) = x^2 - 4$
 5. a) 0 dla $m \in \{-3, -1\}$,
 1 dla $m = 2$
 b) 0 dla $m = -3$,
 1 dla $m = -1$,
 2 dla $m = 2$
 c) 1 dla $m = -3$,
 2 dla $m \in \{-1, 2\}$
 d) 2 dla $m \in \{-3, -1, 2\}$
 7. a) $f(D) = [3; \infty)$
 b) $f(D) = [-1; \infty)$
 c) $f(D) = [-3; \infty)$

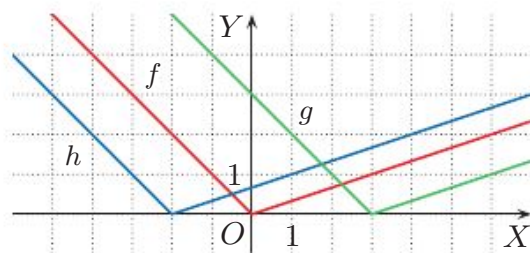
4.8. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OX

Ć 1. a) 1 b) -2 c) -3 d) 4

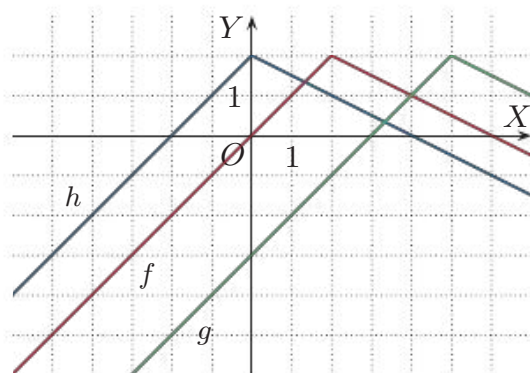
2. a) $D = [-2; 6]$ b) $D = [-7; 1]$

c) $D = [-8; 0]$

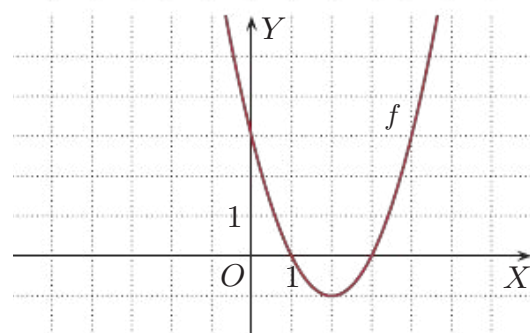
3. a)



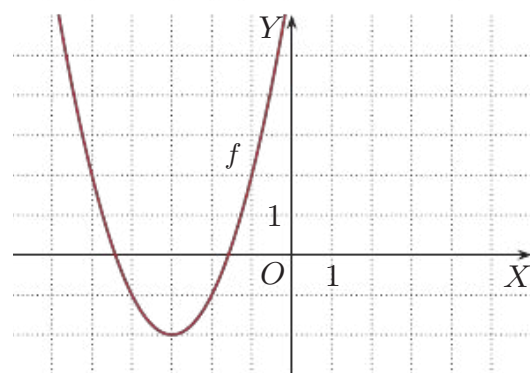
b)



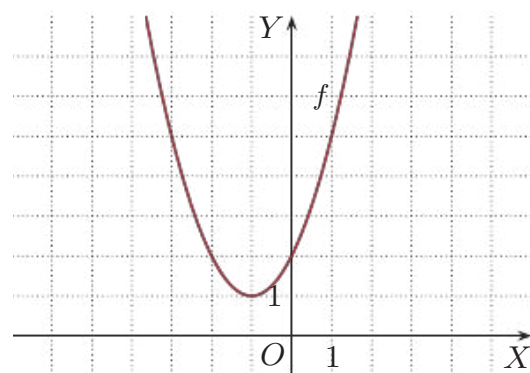
4. a)



b)



c)



Z 1. a) $g(1) = 0$ b) $g(-1) = 0$

c) $g(-2) = 0$

4. a) $[-2; 5]$ b) $[-1; 6]$

c) $[-5; 2]$ d) $[-6; 1]$

5. a) brak miejsc zerowych,

$f(D) = [3; \infty)$

b) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-1, 5\}$,

$f(D) = [-3; \infty)$

c) $f(x) = 0$ dla $x \in \{-3, 1\}$,

$f(D) = [-2; \infty)$

6. a) $g(x) = |x - 3| + 2$

b) $g(x) = |x + 4| - 3$

c) $g(x) = |x + 1| + 2$

7. a) $f(x) = (x - 2)^2 - 2$

b) $f(x) = (x - 1)^2 + 2$

c) $f(x) = (x + 2)^2 - 1$

8. a) $D_g = [-4; 4]$, $g(D_g) = [-1; 5]$

b) $D_g = [-6; 2]$, $g(D_g) = [-4; 2]$

c) $D_g = [-1; 7]$, $g(D_g) = [0; 6]$

d) $D_g = [0; 8]$, $g(D_g) = [-6; 0]$

9. a) 4 b) 16

10. a) 6 b) 11

11. a) $D_g = [0; 8]$,

$g(x) = 0$ dla $x \in \{1, 3, 7\}$

b) $D_g = [-5; 3]$,

$g(x) = 0$ dla $x \in \{-4, -2, 2\}$

12. a) $g(D_g) = [0; \infty)$,

$g(x) = 0$ dla $x = -1$,

$h(D_h) = [-1; \infty)$,

$h(x) = 0$ dla $x = -\frac{3}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$

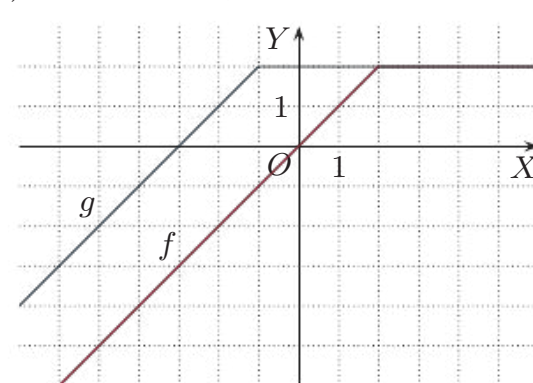
b) $g(D_g) = [0; \infty)$,

$g(x) = 0$ dla $x = 4$,

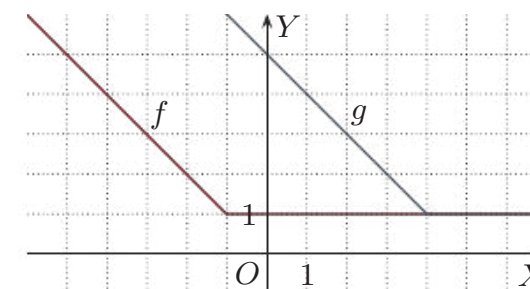
$h(D_h) = [-2; \infty)$,

$h(x) = 0$ dla $x = 3$, $x = 5$

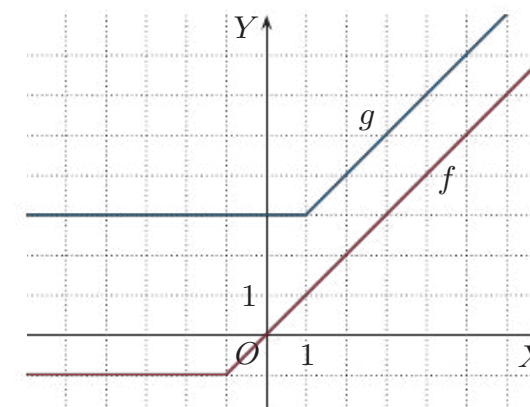
13. a)



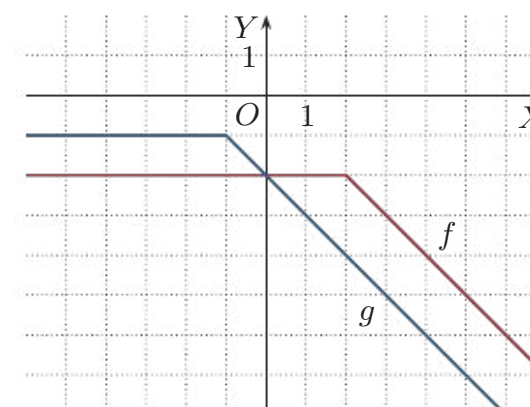
13. b)



c)



d)



4.9. Przekształcanie wykresu przez symetrię względem osi OX

Ć 1. a) $D_f = D_g = [-4; 5]$,

$f(D_f) = [-1; 3]$, $g(D_g) = [-3; 1]$

b) f rośnie w $[2; 5]$, g rośnie w $[-2; 2]$

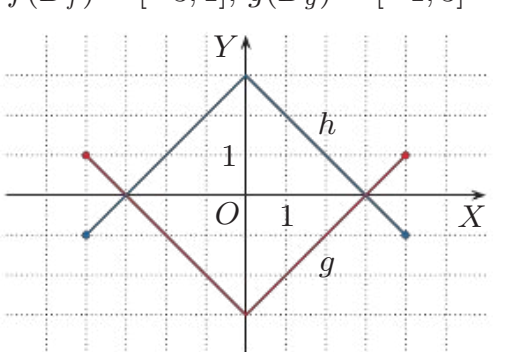
2. a) $f(D_f) = [0; \infty)$, $g(D_g) = (-\infty; 0]$

b) $f(D_f) = [0; \infty)$, $g(D_g) = (-\infty; 0]$

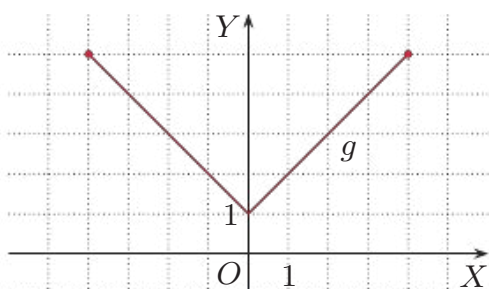
3. a) $f(D_f) = [-1; 4]$, $g(D_g) = [-4; 1]$

b) $f(D_f) = [-3; 1]$, $g(D_g) = [-1; 3]$

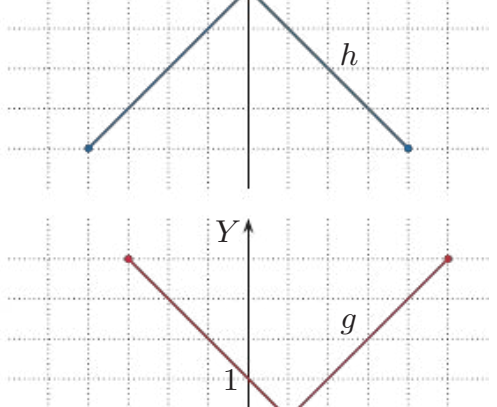
4. a)



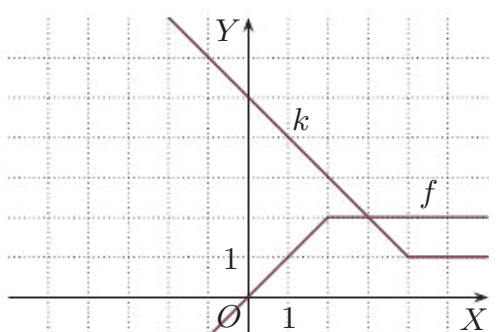
b)



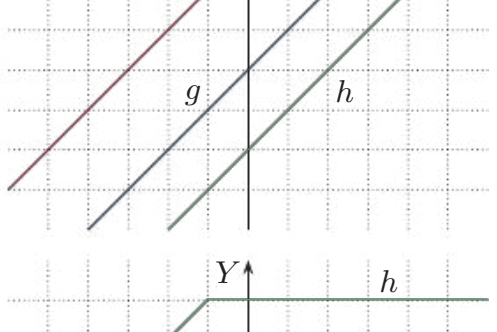
c)

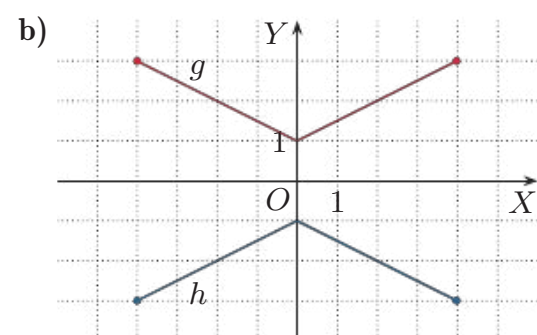
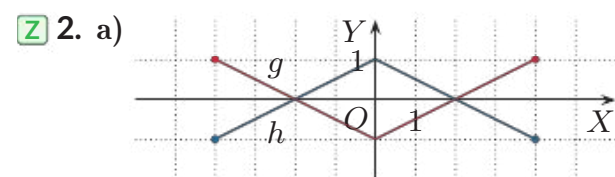
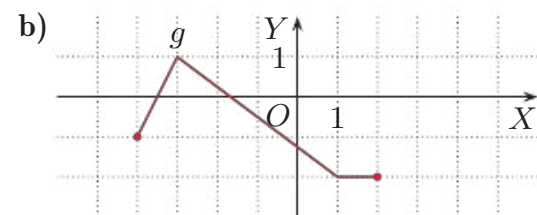
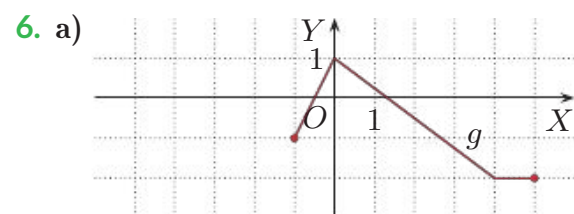


5. a)

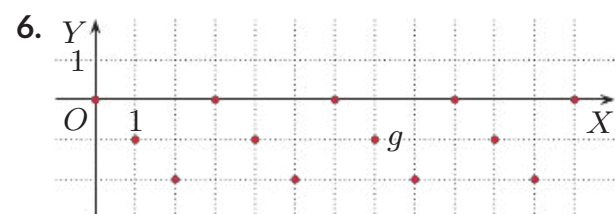


b)





3. a) $f(D_f) = [-1; 3]$, $g(D_g) = [-3; 1]$
 b) $f(D_f) = [-2; 4]$, $g(D_g) = [-4; 2]$
 c) $f(D_f) = [-2; 1] \cup (2; 4]$,
 $g(D_g) = [-4; -2] \cup [-1; 2]$
4. a) f rośnie w $(-\infty; 0]$, stała w $[0; \infty)$,
 g maleje w $(-\infty; 0]$, stała w $[0; \infty)$
 b) f maleje w $[-2; 3]$,
 stała w $(-\infty; -2]$ i w $[3; \infty)$,
 g rośnie w $[-2; 3]$,
 stała w $(-\infty; -2]$ i w $[3; \infty)$
 c) f maleje w $(-\infty; 0]$, rośnie w $[0; \infty)$,
 g rośnie w $(-\infty; 0]$, maleje w $[0; \infty)$
 d) f maleje w $[-2; 1]$,
 stała w $(-\infty; -2]$,
 rośnie w $[1; \infty)$,
 g rośnie w $[-2; 1]$, stała w $(-\infty; -2]$,
 maleje w $[1; \infty)$
5. a) $D_g = [-2; 6]$, $D_h = [-5; 3]$,
 $g(D_g) = h(D_h) = [-3; 1]$
 b) $D_g = [-2; 8]$, $D_h = [-5; 5]$,
 $g(D_g) = h(D_h) = [-3; 0]$



7. a) $(-1, 0)$, $(1, 0)$
 b), f) brak punktów wspólnych
 c) $(2, 0)$ d) $(-2, 0)$ e) $(-4, 0)$, $(4, 0)$
8. a) $g(D) = [-2; 0]$,
 g stała w $[-3; -1] \cup [2; 4]$,
 maleje w $[-1; 0]$ i w $[1; 2]$,
 rośnie w $[0; 1]$
 b) $g(D) = [-2; 1]$, g stała w $[2; 3]$,
 maleje w $[1; 2]$, rośnie w $[-2; 1]$
 c) $g(D) = [-2; 2]$, g maleje w $[-2; -1]$,
 rośnie w $[-3; -2]$ i w $[-1; 3]$

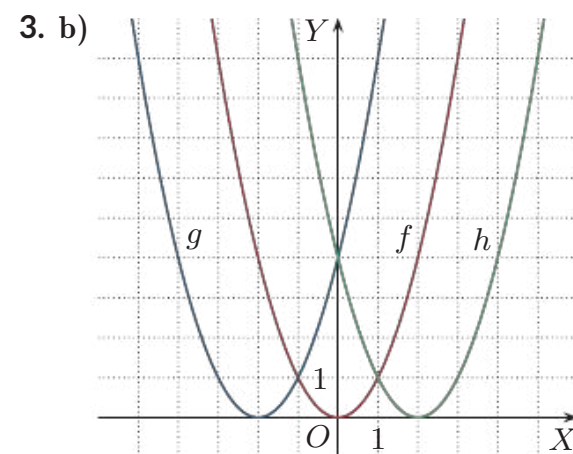
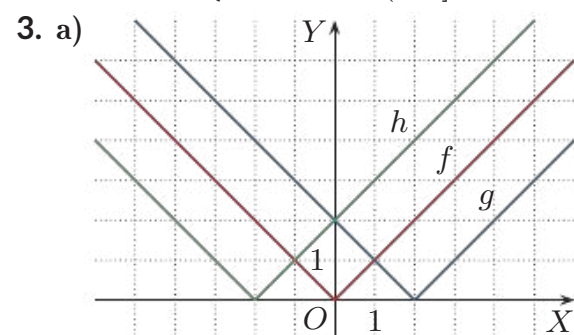
4.10. Przekształcanie wykresu przez symetrię względem osi OY

1. $D_g = [-4; 2]$, $f(x) = 0$ dla $x = 2$,
 $g(x) = 0$ dla $x = -2$
2. $D = [-6; 2]$, miejsca zerowe: $-5, -3, 0, 1$
3. $D = [-5; 4]$, $g(x) = 0$ dla $x \in \{-3, 1\}$,
 f stała w $[-4; -2]$, maleje w $[-2; 1]$,
 rośnie w $[1; 5]$,
 g stała w $[2; 4]$, rośnie w $[-1; 2]$,
 maleje w $[-5; -1]$
4. $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ -x + 2 & \text{dla } x \in [1; \infty) \end{cases}$

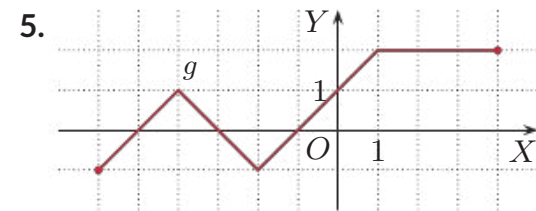
1. a) $D_f = [-4; 3]$, $D_g = [-3; 4]$
 b) $D_f = [-4; 3]$, $D_g = [-3; 4]$
 c) $D_f = [-3; 4]$, $D_g = [-4; 3]$

2. a) $g(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in [-3; 3] \\ -3 & \text{dla } x \in (3; 5] \end{cases}$

- b) $g(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in [-6; 2] \\ 2 & \text{dla } x \in (2; 4] \end{cases}$



4. a) f stała w $(-\infty; 2]$ i w $[3; \infty)$,
 rośnie w $[2; 3]$,
 g stała w $(-\infty; -3]$ i w $[-2; \infty)$,
 maleje w $[-3; -2]$,
 h stała w $(-\infty; 2]$ i w $[3; \infty)$,
 maleje w $[2; 3]$
 b) f stała w $(-\infty; -1]$ i w $[4; \infty)$,
 maleje w $[-1; 4]$,
 g stała w $(-\infty; -4]$ i w $[1; \infty)$,
 rośnie w $[-4; 1]$,
 h stała w $(-\infty; -1]$ i w $[4; \infty)$,
 rośnie w $[-1; 4]$

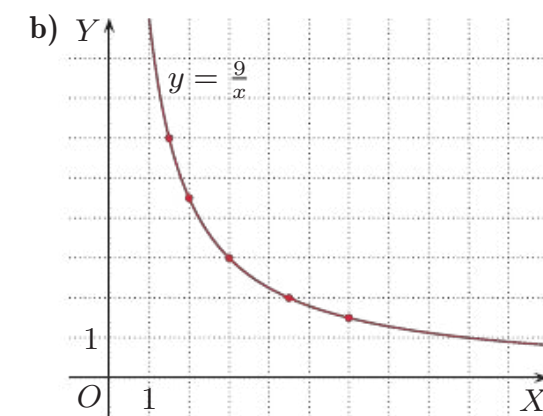


- $D_g = [-6; 4]$,
 $f(x) = 0$ dla $x \in \{1, 3, 5\}$,
 $g(x) = 0$ dla $x \in \{-5, -3, -1\}$

6. a) f rośnie w $(-\infty; 4]$, stała w $[4; \infty)$,
 g stała w $(-\infty; -4]$, maleje w $[-4; \infty)$,
 h maleje w $(-\infty; 4]$, stała w $[4; \infty)$
 b) f maleje w $(-\infty; 1]$, stała w $[1; \infty)$,
 g stała w $(-\infty; -1]$, rośnie w $[-1; \infty)$,
 h rośnie w $(-\infty; 1]$, stała w $[1; \infty)$

4.11. Proporcjonalność odwrotna

1. f : $(1, 1)$,
 g : $(1, 4)$, $(2, 2)$, $(4, 1)$,
 h : $(1, 6)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(6, 1)$
2. 6; nie zależy
3. a) kolejno uzupełniamy: 6, 4, 5, 3, 2



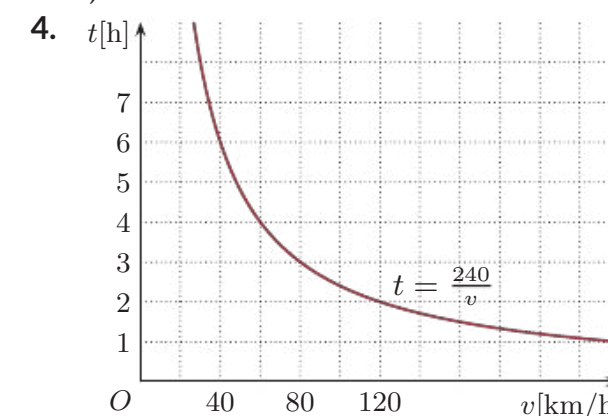
1. kolejno uzupełniamy:

- a) 8, 4, 2, 1, 6 b) 10, 5, 4, 2
 wzór: a) $y = \frac{8}{x}$, $x > 0$ b) $y = \frac{10}{x}$, $x > 0$

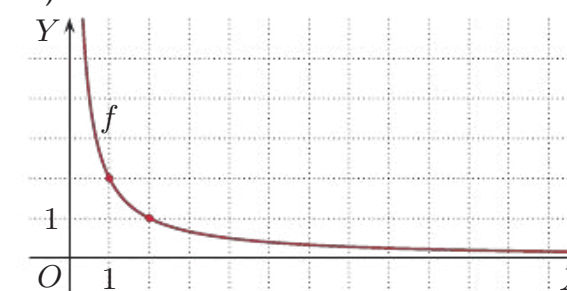
2. $k = 15$

x	1	2	3	4	5	6
y	15	7,5	5	3,75	3	2,5

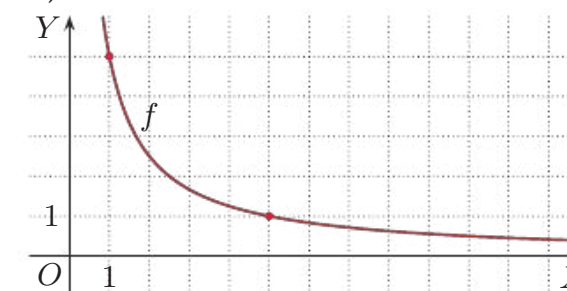
3. a) 4 h b) 3 h 20 min c) 2,5 h
 d) 2 h 24 min



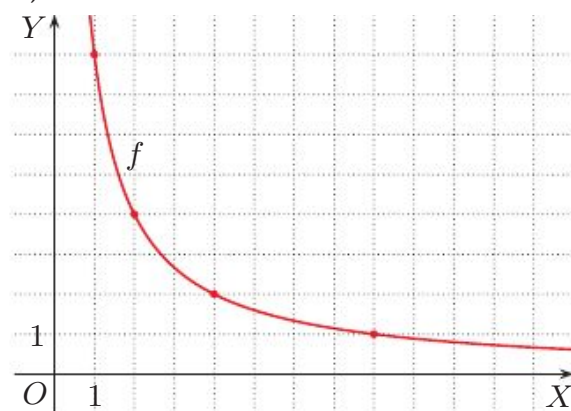
5. a) 2



- b) 2

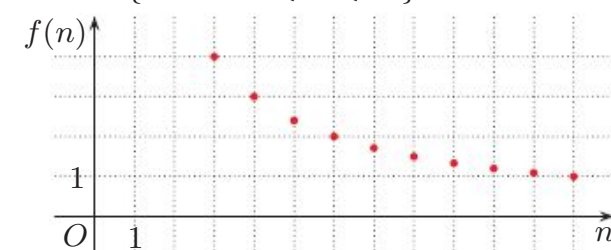


5. c) 4



d) 6

6. $D = \{n \in \mathbb{N} : 3 \leq n \leq 12\}$



Zestaw I

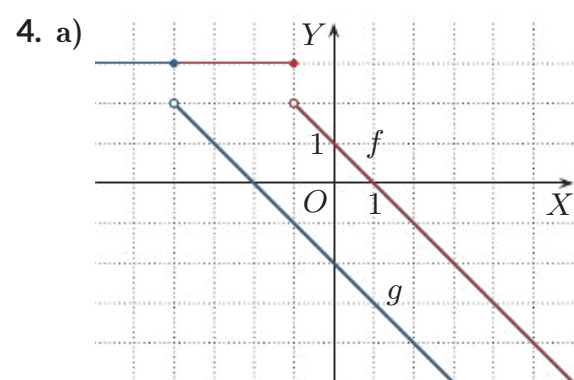
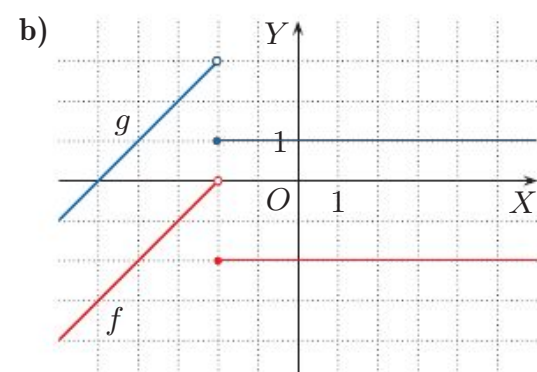
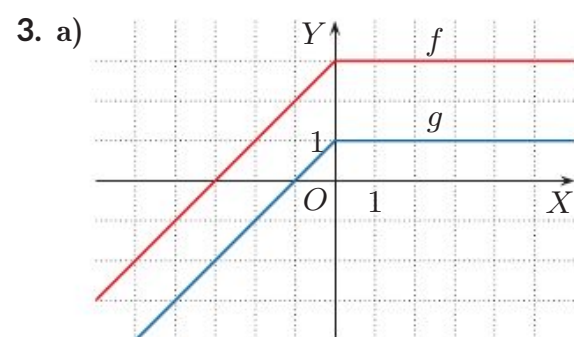
1. a) $D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$,
 $f(D) = \{-1, 0, 1\}$,
miejsca zerowe: $-1, 0$,
 $f_{\min} = -1$, $f_{\max} = 1$
b) $D = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $f(D) = \{-3, 0, 3\}$,
miejsca zerowe: $4, 6$,
 $f_{\min} = -3$, $f_{\max} = 3$
2. a) $f(X) = \{0, 1, 3, 4\}$ b) $f(X) = [0; 4]$
c) $f(X) = [0; \infty)$
3. a) rośnie w $(-4; 2]$, stała w $[2; 4]$,
 $f(x) = 0$ dla $x = -2$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in (-2; 4)$
b) rośnie w $[1; 4)$, maleje w $(-4; -2]$,
stała w $[-2; 1]$,
 $f(x) = 0$ dla $x \in \{-3, 3\}$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in (-4; -3) \cup (3; 4)$
c) rośnie w $(-4; -2]$ i w $[0; 4)$,
maleje w $[-2; 0]$,
 $f(x) = 0$ dla $x \in \{-3, -1, 2\}$,
 $f(x) > 0$ dla $x \in (-3; -1) \cup (2; 4)$
5. a) $g(D_g) = [2; 6]$, $h(D_h) = [-3; 1]$
b) $g(D_g) = [-1; 7)$, $h(D_h) = [-6; 2)$
6. $D_g = [-2; 2]$, $D_h = [3; 7]$

7. a) $g(x) = -x + 2$, $f(D_f) = [-4; -1]$,
 $g(D_g) = [1; 4]$
b) $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$, $f(D_f) = [-1; 2]$,
 $g(D_g) = [-2; 1]$

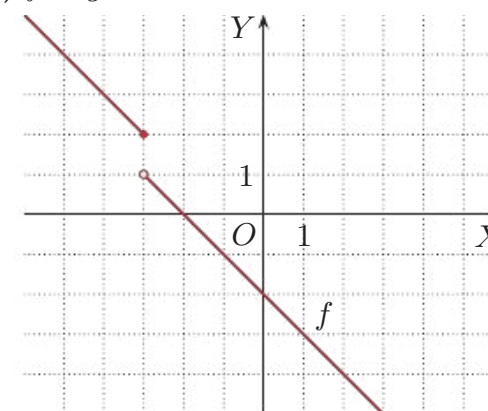
8. a) $D_g = [-3; -1]$, $g(x) = -x - 1$,
 $g_{\min} = 0$, $g_{\max} = 2$
b) $D_g = [-2; 4]$, $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$,
 $g_{\min} = 0$, $g_{\max} = 3$

Zestaw II

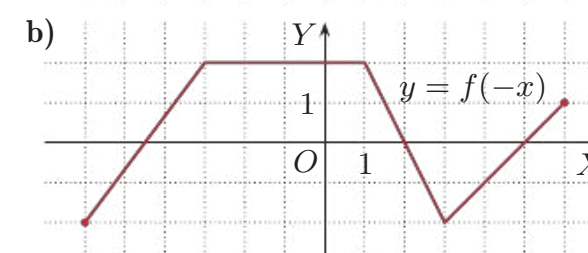
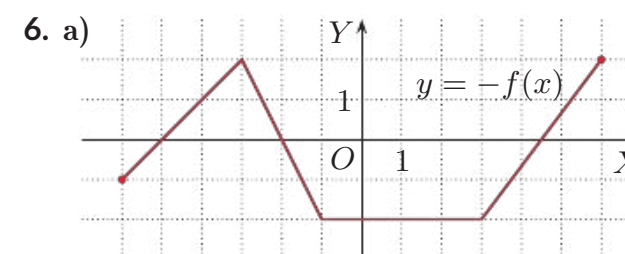
1. a) $f(3\sqrt{2}) = 1$, $f(\sqrt{2} - 6) = -3$
b) $f(3\sqrt{2}) = 4$, $f(\sqrt{2} - 6) = 1$
2. a) $f(x) = -2$ dla $x \in \{-2, 1\}$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-3; -1) \cup (-1; 3)$
b) $f(x) = -2$ dla $x = 1$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in [-1; 2)$
c) $f(x) = -2$ dla $x \in \{0, 2\}$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-1; 1) \cup (1; 3)$



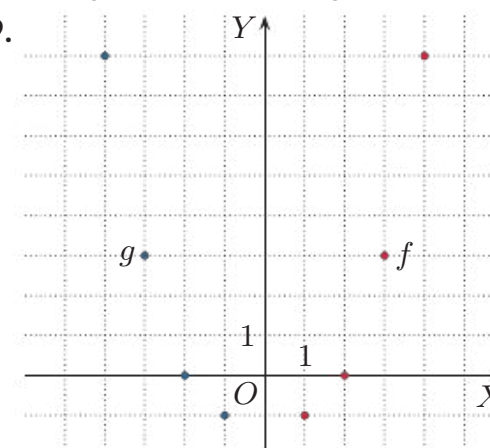
4. b) $f = g$



5. a) $f(x) = \frac{1}{8}x^2 + 2$, $g(x) = \frac{1}{8}x^2 + 1$,
 $h(x) = \frac{1}{8}x^2 - 2$, $k(x) = \frac{1}{8}x^2 - 3$
b) P należy do wykresu funkcji h,
Q – do wykresu funkcji g,
R – do wykresu funkcji f

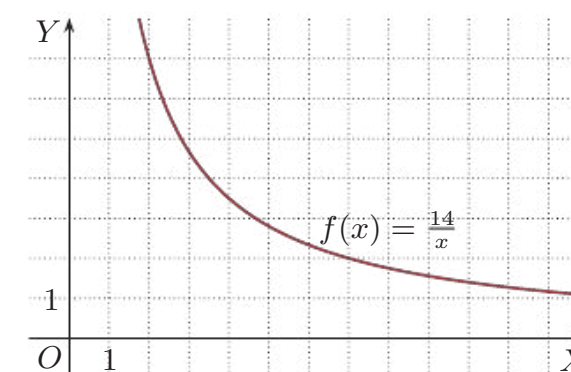


7. a) $f(D_f) = [-2; \infty)$, $g(D_g) = (-\infty; 2]$,
 $h(D_h) = [-2; \infty)$
b) $f(D_f) = (-\infty; 3]$, $g(D_g) = [-3; \infty)$,
 $h(D_h) = (-\infty; 3]$
8. a) $D_g = (-2; 5]$ b) $D_g = (-7; 0]$
c) $D_g = (-3; 4]$ d) $D_g = (-6; 1]$
- 9.



10. a) $f(D_f) = \{1, 2, 3\}$,
 $g(D_g) = \{-3, -2, -1\}$
b) $f(D_f) = \{-4, -3, -2, -1\}$,
 $g(D_g) = \{1, 2, 3, 4\}$
c) $f(D_f) = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$,
 $g(D_g) = \{-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0\}$

11. 4 punkty



Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. D 2. C 3. B 4. A 5. D 6. C 7. B
8. C 9. C 10. D

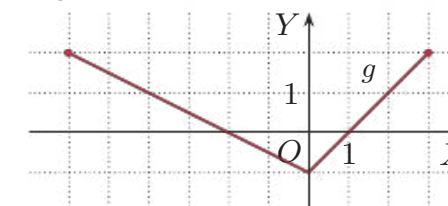
11. FF 12. FF 13. CI 14. A3

15.1. $[-3; -1] \cup [1; 4]$ 15.2. $[-2; 0]$

16. $\frac{5}{3}$

17. 2

18. $D_g = [-6; 3]$



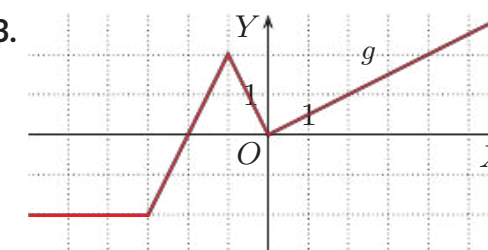
19. $-2, 1$

20. 15

21. 8

22. 1, 5, 9

23.



stała w $(-\infty; -3]$, rośnie w $[-3; -1]$
i w $[0; \infty)$, maleje w $[-1; 0]$,
 $g(x) \leq 0$ dla $x \in (-\infty; -2] \cup \{0\}$

Punkty kratowe należące do prostej

- a) punkty należące do odcinka AB :
 $(-3, -3), (-1, -2), (1, -1), (3, 0)$,
punkty należące do prostej l , ale
nienależące do odcinka AB :
 $(-5, -4), (5, 1), (7, 2)$
b) punkty należące do odcinka AB :
 $(0, 2), (3, 1), (6, 0)$,
punkty należące do prostej l , ale
nienależące do odcinka AB :
 $(9, -1), (12, -2), (15, -3)$
- a) $D(7, 3)$ lub $D(-1, -1)$
b) $D(7, -1)$ lub $D(1, 5)$

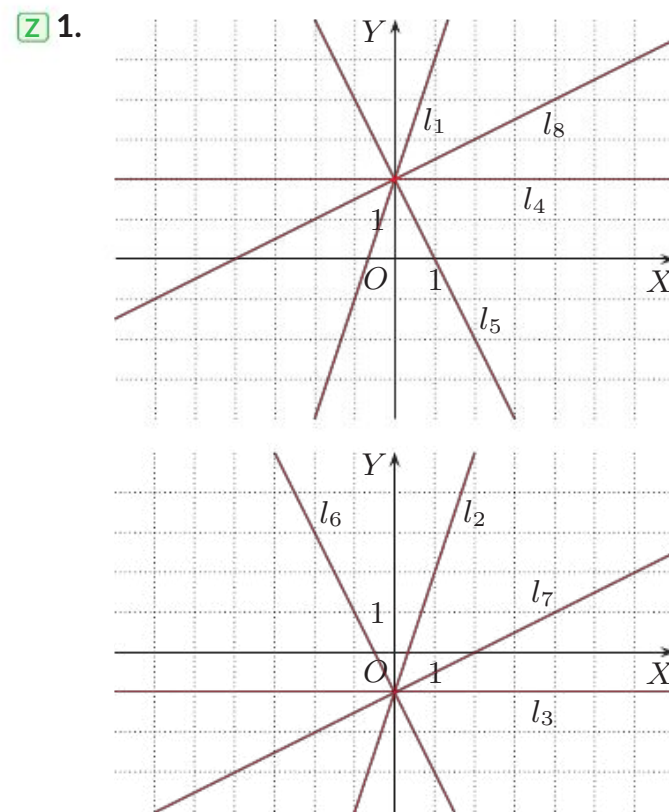
5.1. Wykres funkcji liniowej (1)

- Ć 2. a) np. $(0, -2), (2, 1)$
b) np. $(0, 0), (5, -3)$
c) np. $(0, 2), (-4, -1)$
d) np. $(0, -1), (-7, 3)$
4. $l_2 \parallel l_4 \parallel l_6, l_3 \parallel l_5 \parallel l_8$
5. a) $y = 2x + 1$ b) $y = -3x + 1$
c) $y = -\frac{2}{3}x - 2$ d) $y = -\frac{3}{5}x + 1$
- Z 1. a) Q b) P, R c) P d) Q
e) P, Q f) R g) h żaden
2. a) np. $(-2, -3), (0, -2), (2, -1)$
b) np. $(-3, 3), (0, 4), (3, 5)$
c) np. $(-2, 4), (0, 3), (2, 2)$
d) np. $(-4, -1), (0, -2), (4, -3)$
e) np. $(-3, -3), (0, -1), (3, 1)$
f) np. $(-2, -3), (0, 2), (2, 7)$
g) np. $(-4, 7), (0, 4), (4, 1)$
h) np. $(-3, 3), (0, -2), (3, -7)$
3. $l_1 \parallel l_4 \parallel l_6 \parallel l_8, l_2 \parallel l_5 \parallel l_7$
4. a) trapez b) równoległobok
5. a) $y = 4x + 5$ b) $y = -3x + 11$
c) $y = -\frac{4}{3}x - 3$ d) $y = \frac{5}{12}x + 1$
6. $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, y = 3x - 11$
7. $y = -\frac{2}{3}x - 3$
8. a) $l_1: y = \sqrt{3}x, l_2: y = \sqrt{3}x - 1$
b) $l_1: y = (\sqrt{2} - 1)x + \sqrt{2} - 1,$
 $l_2: y = (\sqrt{2} - 1)x + 3$
9. a) 1 b) 2 c) -2 d) -5
e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{1}{3}$ g) $-\frac{5}{2}$ h) $\frac{4}{3}$

10. $l_1: y = \frac{3}{4}x + 4, l_2: y = \frac{3}{4}x + 1,$
 $l_3: y = \frac{3}{4}x - 2$
11. a) $y = 2 - \frac{1}{3}x$ i $y = \frac{6-x}{3}$
b) $y = 4(1 - \frac{x}{2})$ i $y = -2(x + 1)$
c) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ i $y = \frac{x-1}{\sqrt{3}}$
12. a) $f(x) = -6x + 2$
b) $f(x) = -6x + 6$
c) $f(x) = -6x + 1$
d) $f(x) = -6x + 8$

5.2. Wykres funkcji liniowej (2)

- Ć 2. a) $y = 3x + 6$ b) $y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$
3. a) $f_1(1) = 4, f_2(1) = 3,$
 $f_3(1) = 2\frac{1}{2}, f_4(1) = 6$
b) f_1 - niebieski, f_2 - brązowy,
 f_3 - czerwony, f_4 - zielony
4. a) $y = -\frac{3}{4}x + 5$; tak
b) $y = \frac{5}{3}x - 4$; nie
5. a) $A(0, -\frac{5}{2}), D(0, \frac{7}{2}), P = 17,5$ b) 9



- Z 1. 2. a), b) nie należy c) należy
3. a) $y = x + 4$ b) $y = \frac{1}{2}x + 4$
c) $y = -3x + 4$ d) $y = -8x + 4$
4. a) 15 b) 24

5. a) $|PQ| = 3$ b) $|PQ| = 4,5$
6. a) $k_1: (0, 0), k_2: (0, -4), k_3: (0, 3),$
 $k_4: (0, 5)$
b) $k_1: (0, 0), k_2: (0, -1), k_3: (0, 8),$
 $k_4: (0, \frac{1}{2})$

5.3. Własności funkcji liniowej

- Ć 2. a) $\frac{3}{2}$ b) $-\frac{4}{3}$ c) -6 d) $\frac{2}{3}$
3. a) $a = 0$ i $b \neq 0$ b) $a = b = 0$
4. a) 4 b) 6 c) 16 d) 7,5
6. a), c) rosnąca b) malejąca d) stała
7. a) $a < 0$ i $b > 0$ b) $a > 0$ i $b < 0$
c) $a < 0$ i $b < 0$
8. a) wprost proporcjonalne, $a = \frac{1}{3}Ob$
b) odwrotnie proporcjonalne, $a = \frac{2P}{b}$
c) wprost proporcjonalne, $Ob = 2\pi r$
d) odwrotnie proporcjonalne, $d_1 = \frac{2P}{d_2}$
9. a) $y = 3x$ b) $y = \frac{2}{3}x$ c) $y = \frac{5}{7}x$
10. a) 275 km b) 300 km
- Z 1. a) I, II, IV b) I, II, III c) II, III, IV
d) I, III, IV e) I, II, IV f) III, IV
2. a) malejąca b), c) rosnąca
3. a) rosnąca dla $m < 5$,
stała dla $m = 5$,
malejąca dla $m > 5$
b) rosnąca dla $m > -\frac{1}{5}$,
stała dla $m = -\frac{1}{5}$,
malejąca dla $m < -\frac{1}{5}$
c) rosnąca dla $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$,
stała dla $m \in \{-1, 1\}$,
malejąca dla $m \in (-1; 1)$
4. a), d) rosnąca b), e), f) malejąca
c) stała
5. a) $y = \frac{2}{3}x + 4$ b) $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$
c) $y = -\frac{1}{2}x - 2$
6. a) $y = \frac{2}{5}x - 2, y = -\frac{3}{5}x + 3,$
 $y = \frac{3}{2}x + 3, y = -x - 2$
b) $y = -\frac{3}{2}x - 72, y = 2x - 72,$
 $y = -4x + 144, y = 3x + 144$
7. a) $y = -x + 3$
b) $y = -x - 4$ lub $y = x - 4$
9. a) 102 m b) tak

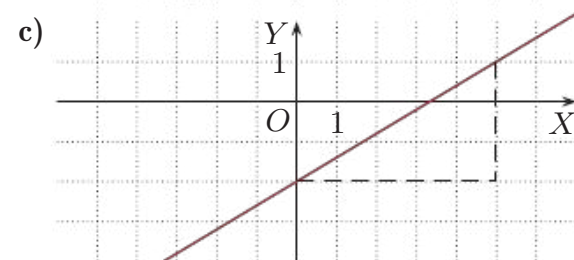
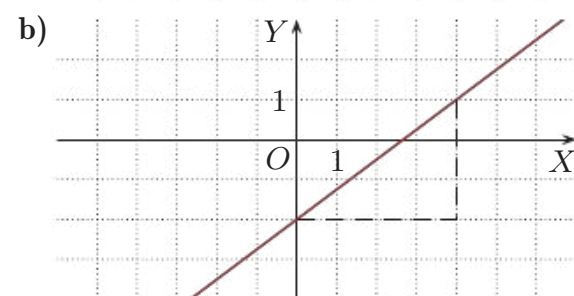
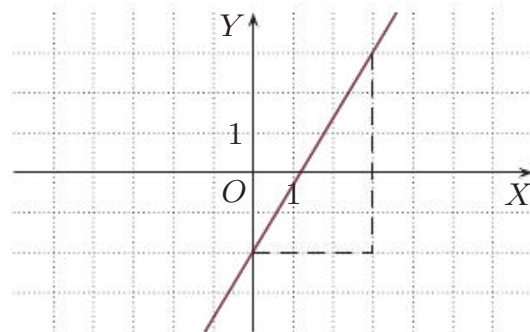
10. 1 : 500
11. a) $(-2, 0), (0, 6)$; rosnąca
b) $(-\frac{3}{2}, 0), (0, -3)$; malejąca
c) $(-6, 0), (0, 3)$; rosnąca
d) $(-3, 0), (0, -2)$; malejąca
12. a) 4 b) 6 c) 2 d) $\frac{3}{4}$
13. a) $y = 6x$ b) $y = \frac{2}{3}x$ c) $y = \frac{4}{5}x$

5.4. Równanie prostej na płaszczyźnie

- Ć 1. a) $y = 2x - 3$
b) $y = -\frac{1}{2}x + 3$
c) $y = \frac{2}{3}x - 1$
2. a), b) są c), d) nie są
3. a) $x = 4$; nie jest
b) $y = x + 6$; jest
c) $x = \frac{1}{5}$; nie jest
4. a) $y = -3$ b) $y = \frac{1}{2}$ c) $y = \frac{1}{3}x + 5$
6. l, n, p, r
7. a) $x + 4y - 2 = 0$ b) $4x - 10y - 5 = 0$
c) $35x + 21y - 6 = 0$
- Z 1. a), b), e) należy
c), d), f) nie należy
2. a) $y = \frac{1}{3}x - 1, x - 3y - 3 = 0$; nie należą
b) $y = -1\frac{1}{3}x - 2\frac{2}{3}, 4x + 3y + 8 = 0$;
nie należą
c) $y = \frac{3}{4}x + 2\frac{1}{2}, 3x - 4y + 10 = 0$;
A należy, B nie należy
3. a) $(0, 2), (-1, 0)$ b) $(0, 1), (\frac{1}{2}, 0)$
c) $(0, 4), (-\frac{4}{3}, 0)$ d) $(0, -3), (\frac{9}{2}, 0)$
e) $(0, -4), (16, 0)$ f) $(0, 3), (\frac{1}{2}, 0)$
4. a) $AB: y + 1 = 0, DC: y - 2 = 0,$
 $AD: 3x - y + 5 = 0, BC: 3x - y - 10 = 0$
b) $AB: x + 2y + 2 = 0, DC: x + 2y - 4 = 0,$
 $AD: x + 2 = 0, BC: x - 2 = 0$
c) $AB: x - 3y - 2 = 0, DC: x - 3y + 6 = 0,$
 $AD: x + y + 2 = 0, BC: x + y - 6 = 0$
5. l, n, r oraz m, p
6. a) $2x - y - 5 = 0$ b) $3x + 4y - 24 = 0$
c) $y - 3 = 0$
7. $AD: x = 2, BC: x = 7, AB: y = 1,$
 $DC: y = 4, AC: y = \frac{3}{5}x - \frac{1}{5},$
 $BD: y = -\frac{3}{5}x + 5\frac{1}{5}$

5.5. Współczynnik kierunkowy prostej

- Ć 1. a) $\frac{5}{6}$ b) 1 c) $-\frac{5}{3}$
 2. a), c) jest b) nie jest
 6. a)



9. a) $y = -\frac{1}{2}x + 7$ b) $y = -3x - 1$
 c) $y = \frac{1}{3}x + 2$

- Z 1. $AB: -\frac{1}{3}, BC: 3, AC: \frac{1}{2}$
 2. $AB: \frac{1}{2}, BC: -1, CD: -\frac{1}{5}, AD: -6$
 3. a) $y = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$
 b) $y = -2x + 3$
 c) $y = -12x + 5$
 d) $y = 2x - 3\frac{2}{3}$
 e) $y = -6$
 f) $y = \sqrt{3}x + 1$
 4. a) $AB: y = \frac{2}{7}x - \frac{6}{7}, AD: y = 2x + 6,$
 $BC: y = 2x - 6, CD: y = \frac{2}{7}x + \frac{18}{7}$
 b) $AB: y = -\frac{2}{7}x - 1\frac{2}{7},$
 $AD: y = -\frac{5}{3}x - 2\frac{2}{3},$
 $BC: y = -\frac{5}{3}x + 7, CD: y = -\frac{2}{7}x + 2\frac{6}{7}$
 5. a) PQ i $RS: \frac{2}{3}, QR: -\frac{10}{3}, PS: -\frac{4}{3}$
 b) $PQ: -\frac{7}{2}, RS: \frac{5}{3}, QR$ i $PS: -\frac{2}{5}$
 7. a) największy: 2, najmniejszy: -2
 b) największy: 1, najmniejszy: $\frac{1}{3}$

5.6. Warunek prostokątności prostych

- Ć 2. a), b) są c) nie są
 3. a) -5 b) $-\frac{1}{9}$ c) $\frac{3}{7}$ d) $-3\sqrt{2}$
 5. a) $y = \frac{1}{3}x - 1$ b) $y = 10x - 1$
 c) $y = -\frac{7}{3}x + 9$
 6. a) $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ b) $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$
 c) $y = -\frac{3}{2}x - 3$
 7. a) $x = 6$ b) $y = -5$ c) $y = -5$
 Z 1. a) $y = \frac{1}{3}x - 3$ b) $y = -\frac{3}{2}x + 7$
 c) $y = \frac{3}{4}x + 1$ d) $y = -\frac{2}{7}x$
 2. a) $AB: y = -x + 6, BC: y = x - 2,$
 $AC: y = 5$; jest
 b) $AB: y = -x - 3, BC: y = 2x - 3,$
 $AC: y = x + 1$; jest
 c) $AB: y = -2, BC: y = -\frac{1}{2}x + 2,$
 $AC: y = x + 5$; nie jest
 d) $AB: y = x + \frac{3}{2}, BC: y = -\frac{1}{2},$
 $AC: x = 4\frac{1}{2}$; jest
 3. a) $AC: y = x - 4, BD: y = -x + 2$
 b) $AC: y = 3x + 1, BD: y = -\frac{1}{3}x + 1$
 4. a) nie jest b) jest
 6. $Ob = 4\sqrt{34}, P = 34$
 7. a) $(-6, -8)$ b) $(-1, 7)$
 8. a) $l_1: y = \frac{1}{2}x + 3, l_2: y = -2x + 8$
 b) o 300%
 9. a) $y = \frac{1}{2}x - 5$ b) $y = -\frac{1}{3}x$
 c) $y = \frac{3}{2}x - 11$ d) $y = -\frac{2}{3}x + 2$
 e) $y = \frac{1}{3}x - 4$ f) $y = 2x - 14$
 10. a) $AB: y = -x - 1, BC: y = x - 3,$
 $CD: y = -x + 9, AD: y = x + 3$
 b) $AB: y = -\frac{1}{2}x - \frac{9}{2}, BC: y = 2x + 3,$
 $CD: y = -\frac{1}{2}x + 3, AD: y = 2x + 33$

Układy równań

1. a) tak b), c), d) nie
 2. a) $(3, 4)$ b) $(2, -4)$ c) $(-3, 2)$
 d) $(-4, 3)$ e) $(3, 5)$ f) $(-3, -6)$
 4. a) np. $(0, -4), (1, -1), (2, 2)$
 b) np. $(-6, 0), (-5, 2), (0, 12)$
 c) np. $(-3, 0), (3, 1), (9, 2)$
 6. jest

5.7. Interpretacja geometryczna układu równań liniowych

- Ć 1. a) $x = -1, y = 2$
 b) $x = 2, y = 5$
 c) $x = 1, y = -2$
 2. a), c) sprzeczny
 b) nieoznaczony: $x \in \mathbb{R}, y = 2x - 6$
 3. a) sprzeczny b) nieoznaczony
 c) oznaczony
 Z 1. a) $x = 3, y = 4$
 b) $x = 4, y = -6$
 c) $x = 2, y = 1$
 d) $x = 1, y = 6$
 e) nieoznaczony, $x \in \mathbb{R}, y = \frac{2}{3}x - 2$
 f) sprzeczny
 2. a) $x = 3, y = 0$
 b) $x = 3, y = 4$
 c) $x = 2, y = 0$
 d) $x = 1, y = 4$
 e) sprzeczny
 f) nieoznaczony, $x \in \mathbb{R}, y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
 3. a) np. $\begin{cases} x + y = 2 \\ -2x + y = 2 \end{cases}$
 b) np. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$
 c) np. $\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ 6x - 4y = -4 \end{cases}$
 4. a) $a_1 = a_2$ i $b_1 = b_2$
 b) $a_1 = a_2$ i $b_1 \neq b_2$
 c) $a_1 \neq a_2$ i b_1, b_2 dowolne
 5. a) $A(-1, -3), B(3, -3), C(8, 2), D(4, 2)$
 b) $A(-2, -3), B(4, 0), C(2, 4), D(-4, 1)$
 c) $A(-2, -4), B(\frac{2}{5}, -2\frac{4}{5}), C(4\frac{2}{5}, 9\frac{1}{5}), D(2, 8)$
 6. $A(-3, -3), B(6, 0), C(5, 3), D(-1, 1)$
 7. a) 12 b) 27
 9. a) $x = -1, y = -3$ b) $x = 1, y = 0$
 c) $x = -1, y = 2$
 10. a), d) nie b), c) tak
 11. a) l_1 i l_3 b) l_1 i l_2
 12. np. $y = x$

5.8. Funkcja liniowa – zastosowania

- Ć 1. $D_g = \mathbb{N}$
-
2. a) 400 b) 600 c) 1100
 Z 1. b) 50 000 km
 2. b) korzystniej z wypożyczalni Waga-
 bunda dla liczby godzin większej od 4
 c) dla liczby godzin większej od 4
 3. b) po 4 godzinach c) o 2,5 km/h
 4. a) o 11.00 b) 20 km c) o 12.00
 5. t – czas [h]
 a) $d_1(t) = 16t, t \in [0; 2,5];$
 $d_2(t) = 40 - 16t, t \in [0; 2,5]$
 b) $d(t) = |32t - 40|, D_d = [0; \frac{5}{2}];$
 po 1 h i po 1,5 h
 6. 60

Zestaw I

1. a) wszystkie b) P, R
 2. a) ujemne dla $x < -6,$
 większe od 2 dla $x > -3$
 b) ujemne dla $x > \frac{5}{3},$
 większe od 2 dla $x < 1$
 c) ujemne dla $x > -\frac{6}{5},$
 większe od 2 dla $x < -2$
 3. a) $(9, 0), (0, 3), P = 13,5$
 b) $(14, 0), (0, -8), P = 56$
 c) $(-\frac{5}{2}, 0), (0, -\frac{15}{2}), P = 9,375$
 4. a) rosnąca dla $m \in (-\frac{1}{2}; \infty),$
 malejąca dla $m \in (-\infty; -\frac{1}{2}),$
 stała dla $m = -\frac{1}{2}$
 b) rosnąca dla $m \in (-\infty; 9),$
 malejąca dla $m \in (9; \infty),$
 stała dla $m = 9$
 5. a) nie należą b), c), d) należą

6. a) 15 b) 12 c) 16
 7. a) $y = \frac{3}{4}x + 9$; rosnąca
 b) $y = -\frac{1}{3}x + 7$; malejąca
 c) $y = -6x + 2\frac{5}{6}$; malejąca
 d) $y = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{2}$; rosnąca
 8. a) $y = -2x - 7$
 b) $y = \frac{2}{9}x - \frac{1}{3}$
 c) $x = -3$ d) $y = -1$
 e) $y = -\frac{5}{3}x - 6$ f) $x = -3$
 9. a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$
 b) $f(x) = \frac{2}{3}x + 4$
 c) $f(x) = -\frac{2}{5}x + 2\frac{4}{5}$
 d) $f(x) = \sqrt{2}x$

Zestaw II

1. a) $(-\infty; -3]$ b) $[-4; \infty)$
 c) $[2\sqrt{2}; \infty)$
 2. a) $y = \frac{3}{4}x$, $y = -\frac{4}{3}x$, $y = -\frac{1}{7}x + 7\frac{1}{7}$; jest
 b) $y = \frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$, $y = \frac{4}{3}x + 8$,
 $y = -\frac{3}{4}x + 1\frac{3}{4}$; jest
 3. AB : $y = \frac{1}{2}x - 2$, BC : $y = -2x + 8$,
 CD : $y = \frac{1}{2}x + 3$, AD : $y = -2x - 7$
 4. a) $x = -3$, $y = 2$ b) $x = 3$, $y = 6$
 c) sprzeczny d) $x = -5$, $y = -1$
 e) $x = 8$, $y = 5$ f) $x = -8$, $y = -7$
 5. a) $(0, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 0)$; $P = 2$
 b) $(-4, -2)$, $(4, 4)$, $(-1, 4)$; $P = 15$
 c) $(-2, -3)$, $(-2, \frac{17}{2})$, $(\frac{36}{5}, \frac{8}{5})$; $P = 52,9$
 6. $(-1, -3)$, $(4, -\frac{1}{2})$, $(5, 5)$, $(0, \frac{5}{2})$;
 $y = \frac{11}{2}x + \frac{5}{2}$, $y = \frac{11}{2}x - \frac{45}{2}$
 7. a) wierzchołki: $(-4, -6)$, $(4, 0)$, $(1, 4)$,
 spodek wysokości: $(0, 2)$
 b) wierzchołki: $(-4, 1)$, $(4, 5)$, $(-1, -5)$,
 spodek wysokości: $(\frac{4}{5}, -\frac{7}{5})$
 8. $(2, 0)$, $(6, 2)$, $(3, 4)$

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. D 2. A 3. A 4. A 5. B 6. C 7. C
 8. D 9. A 10. D
 11. PF
 12.1. FP
 12.2. AC : $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, BC : $y = 3x - 4$

13. CF
 14. A3
 15.2. $(6, 2)$
 16. -4
 18. $y = -2x - 8$
 19. -7
 20. 12
 22.2. AD : $y = -2x - 5$, CD : $y = \frac{1}{4}x + 4$
 23. 39
 24. 38,5
 25. $(2, 0)$
 26. $D(\frac{14}{5}, \frac{12}{5})$

Kąty

1. a) 60° , 120° b) 45° , 135°
 c) 30° , 150° d) 75° , 105°
 2. 60° , 120°
 4. $\triangle CDP$: 25° , 50° , 105° ,
 $\triangle CBP$: 30° , 75° , 75°

6.1. Miary kątów w trójkącie

- Ć 1. b) 18° , 72° , 90°
 2. a) 15° , 60° , 105° b) $17,5^\circ$, 55° , $107,5^\circ$
 3. 16° , 128° , 36° ; 52° , 54° , 74° ;
 54° , 56° , 70° ; 124° , 20° , 36° ;
 20° , 86° , 74° ; 94° , 16° , 70°
 Z 1. a) $\alpha = 22^\circ$, $\beta = 48^\circ$
 b) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$
 2. 44° , 66° , 70°
 3. $|\sphericalangle AEF| = 67^\circ$, $|\sphericalangle AFB| = 65^\circ$,
 $|\sphericalangle BCF| = 19^\circ$, $|\sphericalangle EFD| = 83^\circ$,
 $|\sphericalangle DFC| = 25^\circ$, $|\sphericalangle CDF| = 84^\circ$
 4. a) oba trójkąty: 20° , 70° , 90°
 b) $\triangle ABE$: 35° , 70° , 75° ,
 $\triangle AEC$: 35° , 40° , 105°
 5. 74° , 106°
 9. a) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 80^\circ$, $\gamma = 50^\circ$
 b) $\alpha = 52^\circ$, $\beta = 52^\circ$, $\gamma = 76^\circ$
 10. 72° , 54° , 54°
 11. dwa trójkąty: 30° , 30° , 120° ;
 pozostałe dwa: 30° , 60° , 90°

6.2. Trójkąty przystające

- Ć 1. $|AB| = |DE|$, $|AC| = |DF|$,
 $|BC| = |EF|$, $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$,
 $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEF|$,
 $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DFE|$
 2. a), b) nie
 3. a) KBK b) BKB c) KBK
 7. b), c), f), g), h) tak
 a), d), e) nie
 8. sześć
 Z 9. a) 6 b) 8 c) 12
 12. dwa

6.3. Twierdzenie Talesa

- Ć 1. a) $\frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|AB|}{|AD|}$, $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AE|}{|DE|}$
 b) 2,4
 2. b) $|DE| = 3$, $|AD| = 6$
 3. $|ED| = 10,5$
 5. a) np. $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|}$, $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|DE|}$,
 $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|CE|}$
 Z 1. a) $x = 6$, $y = 2,4$
 b) $x = 10$, $y = 12$
 2. $5\frac{1}{3}$ cm, 4 cm, $2\frac{2}{3}$ cm
 5. a) k i m b) l i m
 6. $x = 12$, $y = 18$

6.4. Wielokąty podobne

- Ć 1. a), c) jest b) nie jest
 2. a) są b) nie są
 3. a) F_1 do F_2 : $\frac{3}{2}$, F_2 do F_1 : $\frac{2}{3}$
 b) F_1 do F_2 : $\frac{3}{5}$, F_2 do F_1 : $\frac{5}{3}$
 4. a) $k = \frac{5}{6}$, $|CD| = 4,5$, $|A'D'| = 7,8$,
 $|B'C'| = 7,2$
 b) $k = 2,5$, $|CD| = 5$, $|A'B'| = 5$,
 $|A'D'| = 2,4$
 5. a) 54 cm
 b) wysokości równoległoboku $ABCD$:
 $3\sqrt{3}$ cm, $6\sqrt{3}$ cm,
 wysokości równoległoboku $A'B'C'D'$:
 $\frac{9}{2}\sqrt{3}$ cm, $9\sqrt{3}$ cm

- Z 1. a) 5:8 b) 1:2

2. 2:3
 3. a) 120 cm b) 20 cm
 5. a) 40, 100 b) 3:2
 6. 3, 6, 7,5, 7,5
 7. $h = 7,2$ cm, $h' = 7,5$ cm,
 suma obwodów: 73,5 cm
 8. $4\sqrt{2}$
 9. 1,25
 12. a) tak; $k = 2,4$ b) tak; $k = \frac{1}{7}$
 13. a) 10 cm, 15 cm b) 4 cm, 6 cm

6.5. Trójkąty podobne

- Ć 1. $x = 8$, $y = 3$; $k = \frac{1}{2}$
 2. a) są b) nie są
 5. a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 Z 1. T_1 i T_3 , $k_1 = \frac{2}{3}$; T_2 i T_4 , $k_2 = \frac{1}{2}$
 2. a) $k = \frac{4}{3}$, $Ob = 34\frac{2}{3}$ b) 10, 20, 25
 3. a) $x = 2$, $y = 2,5$ b) $x = 15$, $y = 13$
 4. a) 52,5 b) 18,75
 5. a) 20, $2\frac{1}{2}$ b) 224, 28
 6. a) $\frac{3}{2}$
 b) $\triangle DEC$: $6\sqrt{5} + 10$,
 $\triangle ABC$: $9\sqrt{5} + 15$
 7. a) $\triangle ABC \sim \triangle CBD$, KKK;
 $\triangle ABC \sim \triangle ACD$, KKK;
 $\triangle CBD \sim \triangle ACD$, KKK
 b) 1,8, 3,2
 8. 20 cm²
 10. b) 2 cm; $P_{\triangle ABO} = 16$ cm²,
 $P_{\triangle CDO} = 4$ cm²
 11. b) 25 cm², 15 cm², 15 cm², 9 cm²
 12. a) 12 i 4,5; $k = 2$ b) 8, 6, 6; $k = \frac{4}{3}$
 14. $k = \frac{2}{3}$; $Ob = 6 + 2\sqrt{5}$, $P = 4$
 15. $P_{ABS} = 4$, $P_{CDS} = 25$

Pola czworokątów

1. a) 135 cm² b) 36 cm
 2. a) $48\sqrt{2}$ cm² b) 4,5 cm, 9 cm
 3. 24 cm², 5 cm
 4. a) 32 cm² b) 64 cm²

6.6. Pola wielokątów podobnych

1. a) $k = \frac{1}{3}, \frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{9}$ b) $k = 2, \frac{P_2}{P_1} = 4$

3. a) 0,9 b) 1,5

4. $k = \frac{1}{2}, Ob_1 = (16 + 2\sqrt{5})$ cm,
 $Ob_2 = (8 + \sqrt{5})$ cm

5. a) 1 : 800 b) tak c) 576 m^2

6. a) $k = \frac{1}{2}, Ob = 30$ cm

b) $k = \frac{1}{3}, Ob = 32$ cm

c) $k = \frac{2}{3}, Ob = 28$ cm

1. a) $k = 0,75, P = 81 \text{ cm}^2$

b) $k = \frac{5}{3}, P = 400 \text{ cm}^2$

2. 200 cm^2

3. a) $(14 + 2\sqrt{29})$ cm

b) $12\sqrt{17}$ cm, $36\sqrt{17}$ cm

4. 100 cm

5. a) $20 \text{ dm}^2, 320 \text{ dm}^2$

b) $(12 + 6\sqrt{2})$ cm, $(36 + 18\sqrt{2})$ cm

6. 1200 cm^2

7. 2

8. $30 \text{ cm} \times 45 \text{ cm}$

9. $(15 + 9\sqrt{5})$ cm

10. 6, 4

11. $22,5 \text{ cm}^2, 10 \text{ cm}^2$

12. $625 \text{ m}^2, 400 \text{ m}^2$

13. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{2}$

14. a) 16 : 25 b) $\frac{9}{16}$

15. 40 cm

Fraktale

1. $\frac{27}{64}$

6.7. Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie

1. a) $3\frac{14}{17}, 9\frac{3}{17}$

b) $\sqrt{3} - 1, 3 - \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 4 - 2\sqrt{3},$

$2\sqrt{3} - 3$ c) 12 d) $\sqrt{2} - 1$

1. a) 1,25, 3,75 b) 4,5, 7,5

2. $\triangle BCP: \sqrt{2} + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}},$

$\triangle BAP: 2 + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$

5. a) $\frac{5}{2}, \frac{7}{2}$ b) 6, 9

Zestaw I

1. a) $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

b) $20^\circ, 60^\circ, 100^\circ$

c) $15^\circ, 67^\circ 30', 97^\circ 30'$

2. $50^\circ, 60^\circ, 70^\circ$

3. a), b), d) tak c) nie

4. a) 12,5 cm, 12,5 cm, 10 cm

b) $5\sqrt{2}$ cm, $5\sqrt{2}$ cm, $4\sqrt{2}$ cm

5. $|PQ| = 4 \text{ dm}, P = 2 \text{ dm}^2$

6. 36

7. 3,2 cm, 4,8 cm; $1\frac{5}{7}$ cm, $2\frac{2}{7}$ cm;
2 cm, 4 cm

9. $160 - 40\sqrt{2} \approx 103 \text{ [m]},$
 $80\sqrt{2} \approx 113 \text{ [m]}$

Zestaw II

2. a) 37,5 b) 14,4

3. a) 100 cm, 160 cm

b) $10 \text{ dm}^2, 40 \text{ dm}^2, 360 \text{ dm}^2$

Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. A 2. C 3. A 4. D 5. D 6. A 7. B

8. A

9. BH

10. PP

11. FF

12.1. A 12.2. C

14.1. $4\frac{2}{7}$ cm, $5\frac{5}{7}$ cm 14.2. 50 cm

15. B1

16. $6 + \frac{3}{2}(\sqrt{5} + \sqrt{13})$

17. 96 cm

19. 6 cm, $6\sqrt{3}$ cm, $6\sqrt{3}$ cm

Indeks

Archimedes 188

argumenty funkcji 147

Briggs Henry 46

cechy

podobieństwa trójkątów 259, 260

podzielności liczb 10

przystawiania trójkątów 246, 247

ćwiartki układu współrzędnych 151

Descartes René (Kartezjusz) 151

długość

okresu 24

przedziału 71

dopełnienie zbioru 67

dowód twierdzenia

o dwusiecznej kąta w trójkącie 269

o sumie miar kątów wewnętrznych

trójkąta 243

Talesa 254

dwusieczna kąta 244

działania na potęgach 36, 43

dziedzina funkcji 147, 167

dzielnik 11, 16

element zbioru 62

Euklides 12, 254

figury

podobne 255

przystające 246

fraktale 268

funkcja 146, 147

liczbowa 152

liniowa 201

malejąca 162, 209

monotoniczna 164

niemalejąca 163

nierosnąca 163

przedziałami monotoniczna 164

rosnąca 162, 209

stała 163, 209

googol 41

iloczyn zbiorów 65

jednomian 81

kartezjański układ współrzędnych 151

Kartezjusz (René Descartes) 151

Kasner Edward 41

kąt 242

wkłęsły 242

wypukły 242

kąty

naprzemianległe 242

odpowiadające 242

przyległe 242

wierzchołkowe 242

Koch Helge von 268

konstrukcja

dwusiecznej kąta 271

prostej prostopadłej 272

prostej równoległej 272

symetralnej odcinka 271

krzywa Kocha 268

kwadrat

różnicy 93

sumy 93

liczba

logarytmowana 45

π 26

liczby

całkowite 16, 21

kwadratowe 97

naturalne 11, 21

nieparzyste 11

niewymierne 20, 21

parzyste 11

pierwsze 12

pięciokątne 97

rzeczywiste 21

trójkątne 97

wielokątne 97

wymierne 16, 21

względnie pierwsze 16

złożone 12

logarytm 45
 dziesiętny 45
 iloczynu 46
 ilorazu 46
 potęgi 46

metoda
 podstawiania 116, 125
 przeciwnych współczynników 122, 125

miejsce zerowe funkcji 149
 liniowej 208

najmniejsza wspólna wielokrotność 13

największy wspólny dzielnik 13

Napier John 46

nazwy wielkich liczb 41

nierówności
 nieostre 77
 ostre 77
 równoważne 77, 78

nierówność 77
 sprzeczna 79
 tożsamościowa 79
 trójkąta 248

notacja wykładnicza 38

odbicie symetryczne wykresu funkcji 181, 185

okres 24
 długość 24

oś
 liczbowa 69
 odciętych 151
 rzędnych 151

pęk prostych 206

pierwiastek
 iloczynu 29, 32
 ilorazu 29, 32
 kwadratowy (drugiego stopnia) 28, 33
 n-tego stopnia 33
 sześcienny (trzeciego stopnia) 31, 32

podstawa
 logarytmu 45
 potęgi 35

podzbiór zbioru 63

podzielność liczb 11

pole
 prostokąta 263
 rombu 263

pole
 równoległoboku 263
 trapezu 263

postać dziesiętna liczby 24

potęga o wykładniku
 naturalnym 35
 całkowitym ujemnym 37
 wymiernym 42

procent 48

promil 50

proporcjonalność
 odwrotna 188
 prosta 210

proste
 prostopadłe 222
 równoległe 202

prostokątny układ współrzędnych 151

przeciwdziedzina funkcji 147

przedział
 domknięty 71
 lewostronnie domknięty 71
 lewostronnie otwarty 71
 obustronnie domknięty 70
 otwarty 70, 71
 prawostronnie domknięty 71
 prawostronnie otwarty 71

przekątna pięciokąta foremnego 20

przestrzeń 65

przesunięcie wykresu funkcji 175, 177

przybliżenie 25
 z nadmiarem 26
 z niedomiarem 26

punkty kratowe 151, 200

ramiona kąta 242

redukcja wyrazów podobnych 81

reguła zaokrąglania 25

rozkład liczby na czynniki pierwsze 13

rozwiązanie układu równań 114

rozwiniecie dziesiętne liczby 24

równanie
 kierunkowe prostej 213
 ogólne prostej 214
 sprzeczne 76
 tożsamościowe 76
 z dwiema niewiadomymi 113

równoważne układy równań 117

różnica
 kwadratów 94
 zbiorów 67

Sierpiński Wacław 268

skala
 mapy 212
 podobieństwa 256

sposoby przedstawiania funkcji 153

stężenie procentowe 132

stosunek pól figur podobnych 265

suma
 algebraiczna 81
 zbiorów 66

symetralna odcinka 247

symetryczne odbicie wykresu funkcji 181, 185

śnieżynka Kocha 268

środek pęku prostych 206

środkowa trójkąta 249

tabela wartości funkcji 157

triangulacja 245

trójkąt 243
 ostrokatny 243
 prostokątny 243
 rozwartokatny 243
 Sierpińskiego 268

twierdzenie
 odwrotne do twierdzenia Talesa 252
 o dwusiecznej kąta w trójkącie 269
 Pitagorasa 20
 Talesa 251

układ
 dwóch równań z dwiema niewiadomymi 114
 równań nieoznaczony 120, 227
 równań oznaczony 120, 227
 równań liniowych 120
 równań sprzeczny 120, 227

ułamek
 dziesiętny 24
 egipski 18
 nieskracalny 16, 27

wartość
 bezwzględna liczby 101
 interpretacja geometryczna 101
 funkcji 147

Weierstrass Karl 101

wielkości
 odwrotnie proporcjonalne 188
 wprost proporcjonalne 210

wielokąty
 podobne 255
 przystające 246

wielokrotność 11

wierzchołek kąta 242

współczynnik
 kierunkowy prostej 202, 217
 interpretacja 218, 219
 proporcjonalności 188, 210

współrzędna punktu 69

współrzędne punktu 151

wykładnik potęgi 35

wykres funkcji 152
 liniowej 201

wyrazy
 podobne 81
 redukcja 81
 sumy algebraicznej 81

wzór funkcji 153

zaokrąglenie 25

zbiory
 rozłączne 66
 równe 63

zbiór
 liczb całkowitych 16, 21
 liczb naturalnych 11, 21
 liczb niewymiernych 21
 liczb rzeczywistych 21
 liczb wymiernych 16, 21
 nieskończony 62
 pusty 62
 skończony 62
 wartości funkcji 167, 168

złota liczba 61, 258

złoty stosunek 61

Działania na ułamkach

Dla $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ oraz $b, d \neq 0$:

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
- $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$
- $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Dla $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ oraz $b, c, d \neq 0$:

- $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

Wartość bezwzględna

Dla $a \in \mathbb{R}$:

- $|a| = \begin{cases} a & \text{jeśli } a \geq 0 \\ -a & \text{jeśli } a < 0 \end{cases}$
- $|-a| = |a|$

Dla $a, b \in \mathbb{R}$:

- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

Dla $a, b \in \mathbb{R}$ i $b \neq 0$:

- $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$

Pierwiastek kwadratowy

Dla $a \geq 0$:

- $\sqrt{a} = b$, gdy $b^2 = a$ i $b \geq 0$

Dla $a \in \mathbb{R}$:

- $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$

Dla $a, b \geq 0$:

- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

Dla $a \geq 0$ i $b > 0$:

- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Pierwiastek sześcienny

Dla $a \in \mathbb{R}$:

- $\sqrt[3]{a} = b$, gdy $b^3 = a$

Dla $a, b \in \mathbb{R}$:

- $\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$

Dla $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $b \neq 0$:

- $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$

Pierwiastek n -tego stopnia

Dla $a \geq 0$ i parzystego n :

- $\sqrt[n]{a} = b$, gdy $b \geq 0$ i $b^n = a$

Dla $a \in \mathbb{R}$ i nieparzystego n :

- $\sqrt[n]{a} = b$, gdy $b^n = a$

Potęgi i pierwiastki

Dla $a > 0$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_+$:

- $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$
- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Dla $a, b > 0$, $x, y \in \mathbb{Q}$:

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

Wzory skróconego mnożenia

Dla $a, b \in \mathbb{R}$:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Logarytmy

Dla $a, b > 0$, $a \neq 1$:

- $\log_a b = x$, gdy $a^x = b$

Dla $a, b, c > 0$, $a \neq 1$, $p \in \mathbb{R}$:

- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a b^p = p \log_a b$

Równanie prostej

- Równanie kierunkowe: $y = ax + b$
- Równanie ogólne: $Ax + By + C = 0$, gdzie $A \neq 0$ lub $B \neq 0$
- Równanie prostej o współczynniku kierunkowym a przechodzącej przez punkt (x_1, y_1) :

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

Proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są:

- równoległe, gdy $a_1 = a_2$,
- prostopadłe, gdy $a_1 \cdot a_2 = -1$.

Współczynnik kierunkowy prostej:

$$y = ax + b$$

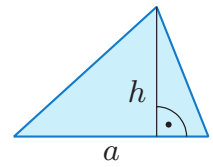
przechodzącej przez punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) , gdzie $x_1 \neq x_2$:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Pola trójkątów i czworokątów

- Trójkąt

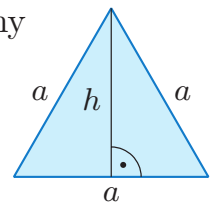
$$P = \frac{1}{2}ah$$



- Trójkąt równoboczny

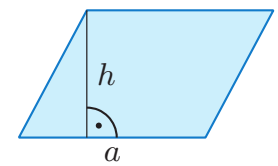
$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$P = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$



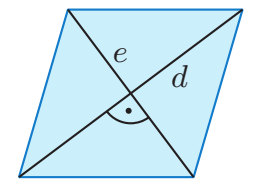
- Równoległobok

$$P = ah$$



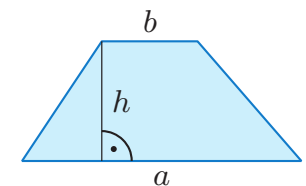
- Romb

$$P = \frac{1}{2}de$$



- Trapez

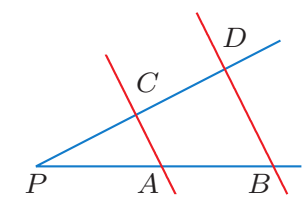
$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



Twierdzenie Talesa

Jeżeli proste AC i BD są równoległe, to:

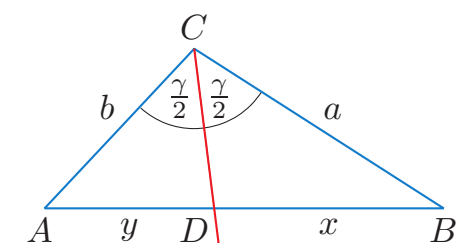
- $\frac{|PC|}{|PA|} = \frac{|CD|}{|AB|}$
- $\frac{|PC|}{|PA|} = \frac{|PD|}{|PB|}$



Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie

Dwusieczna kąta w trójkącie dzieli przeciwległy bok na odcinki proporcjonalne do pozostałych boków trójkąta:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

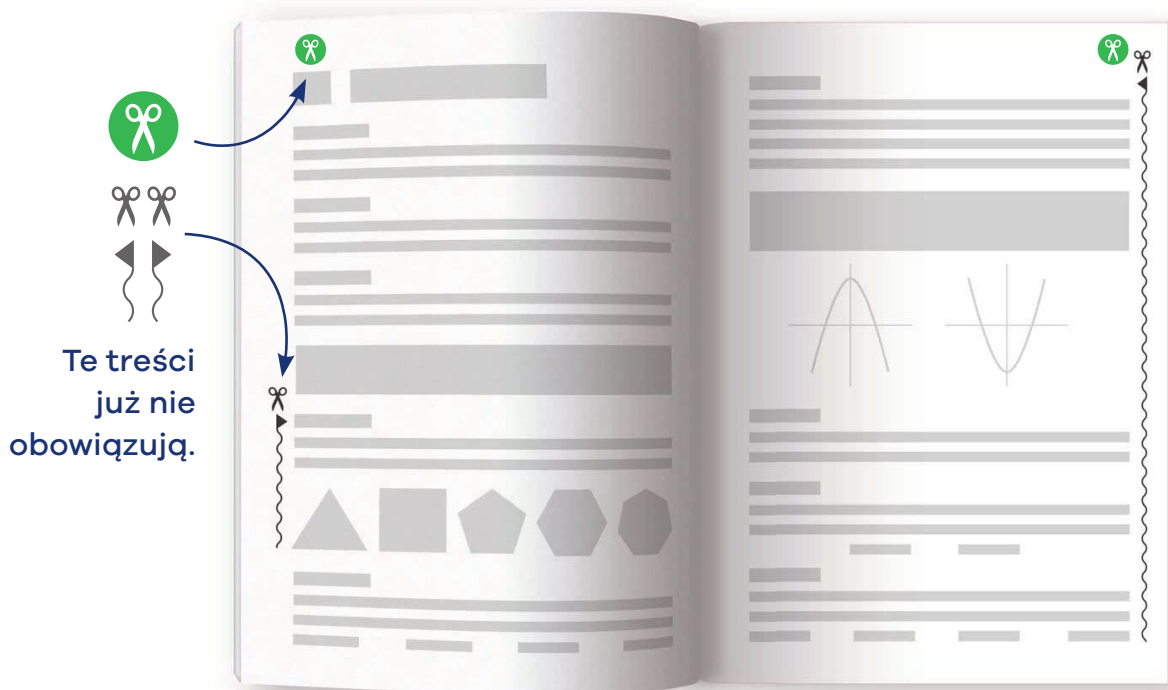


Za co polubisz podręczniki NOWA MATeMATyka?

- ★ wiedza ujęta w formie zwięzłych lekcji
- ★ powtórki *Przypomnij sobie*
- ★ atrakcyjne rozwiązania graficzne
- ★ skuteczny trening umiejętności
- ★ systematyczne przygotowanie do MATURY
- ★ wzory na końcu podręcznika



**W podręczniku znajdziesz oznaczenia treści,
które od września 2024 r. nie są już wymagane.**



Zielona ikona na górze strony wskazuje, że na tej stronie znajdują się treści, które nie są wymagane – oznaczono je szarą ikoną i falką.

Nowa Era Sp. z o.o.



www.nowaera.pl



nowaera@nowaera.pl



Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

ISBN 978-83-267-5019-9



9 788326 750199