

Karolina Wej, Wojciech Babiański

To się liczy!

**Podręcznik do matematyki
dla branżowej szkoły pierwszego stopnia**

**DLA
ABSOLWENTÓW
SZKÓŁ
PODSTAWOWYCH**



KLASA TRZECIA

**nowa
era**

Karolina Wej, Wojciech Babiański

To się liczy!

Podręcznik do matematyki
dla branżowej szkoły pierwszego stopnia

KLASA TRZECIA



Twoje mocne strony

To się liczy!

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców:

mgr Kingi Gałązki, mgr Elżbiety Krzysztofiak, dr. Tomasza Karpowicza.

Etap edukacyjny: III

Typ szkoły: branżowa szkoła I stopnia

Rok dopuszczenia: 2021

Numer ewidencyjny w wykazie MEiN: 967/3/2021

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania do matematyki w branżowej szkole I stopnia* autorstwa Danuty Ponczek.

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2021
ISBN 978-83-267-4061-9

Współpraca autorska Dorota Szymańska: z. 4, s. 37; z. 5, s. 64; z. 5, s. 69; z. 4, s. 134.

Konsultacje merytoryczne: Dorota Szymańska.

Koordinacja prac i współpraca redakcyjna: Iwona Miklikowska.

Redakcja merytoryczna i opracowanie redakcyjne: Katarzyna Labudda.

Redakcja językowa: Monika Ekert.

Nadzór artystyczny: Kaia Pichler. **Opieka graficzna:** Ewa Kaletyn.

Projekt graficzny: Ultra. **Projekt okładki:** Maciej Galiński, Ultra.

Ilustracje: Andrzej Oziębło. **Opracowanie graficzne:** Ultra.

Realizacja projektu graficznego: Tomasz Włodarczyk.

Fotoedycja: Monika Ekert.

Zdjęcia pochodzą ze zbiorów:

FOTOGRAFIE NA OKŁADCE: Shutterstock, Ultra.

FOTOGRAFIE: Archiwum Nowej Ery: s. 11, Getty Images/Stock: 20, 56 (wkręć), 57 (wkręć, wiertło), 65, Panhermedia: s. 61, 92 (czapka, piranica z klocków), Shutterstock: s. 3, 7, 8, 10, 15, 17, 29, 33, 34, 36, 37, 38, 45, 46, 51, 52, 55, 56 (cuma, śrubka), 57 (gwóźdź, śrubka), 64, 67, 69, 70, 72, 73, 75, 76, 79, 81, 83, 85, 87, 88, 90, 91, 92 (pacholek), 95, 97, 101, 102, 103, 104, 105, 107, 109, 111, 115, 116, 119, 120, 123, 124, 125, 126, 135, 140, 143.

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby ocenić posiadaczy praw autorskich co wszystkich utworów zamieszczonych w podręczniku. Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

Nowa Era Sp. z o.o.

Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa

www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl

Centrum Kontaktu: 801 88 10 10, 58 721 48 00

Druk i oprawa: Techgraf, Łaricut

Kilka słów o podręczniku

Dlaczego nadal To się liczy!?

Bo umiejętność sprawnego liczenia jest naprawdę ważna! Już wiecie, że matematyka przydaje się podczas robienia zakupów i płacenia rachunków. Niebawem wykorzystacie umiejętności matematyczne także na egzaminie zawodowym, a następnie w codziennej pracy, np. kiedy będziecie liczyć pola różnych powierzchni albo objętości takich brył, jak walec czy stożek. Liczby są wokół nas!

W podręczniku do klasy trzeciej znajdziecie...

1. Znane Wam już z klasy pierwszej i drugiej:

- ▶ Ćwiczenia wprowadzające **NA POCZĄTEK**
- ▶ **PRZYKŁADY** i **ĆWICZENIA**
- ▶ **ZADANIA**
- ▶ **ZADANIA BRANŻOWE**

Upewnście się, że matematyka wcale nie jest trudna.

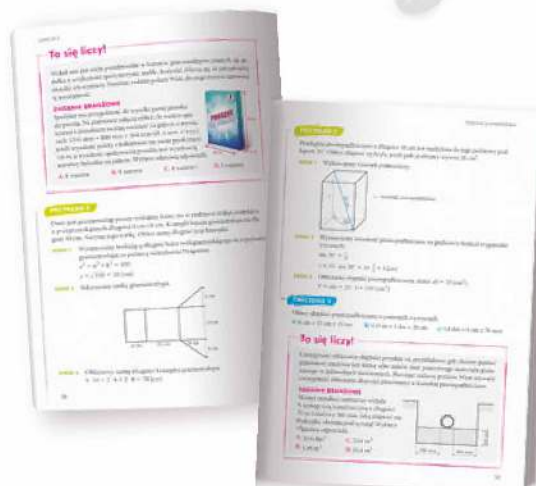
2. **LEKCJE BRANŻOWE**, pokazujące praktyczne zastosowanie matematyki w życiu codziennym i zawodowym.

- ▶ Proporcjonalność na drodze
- ▶ Graniastopy na co dzień
- ▶ Ostrośły we wnętrzach
- ▶ Użyteczne bryły obrotowe
- ▶ Jaki mamy wybór?

Sprawdźcie, że matematyka przydaje się na co dzień.

3. Różnorodne zadania **To się liczy!** pozwalające zastosować umiejętności matematyczne na egzaminie zawodowym.

Uwierzycie, że matematyka się liczy!



Spis treści

Rozdział I. Proporcjonalność

LEKCJA 1. Proporcje	7
LEKCJA 2. Wielkości wprost proporcjonalne	11
LEKCJA 3. Wielkości odwrotnie proporcjonalne	15
LEKCJA 4. Proporcjonalność na drodze	20
LEKCJA 5. Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$	22
Powtórzenie rozdziału	26

Rozdział II. Graniastopy

LEKCJA 1. Proste i płaszczyzny w przestrzeni	29
LEKCJA 2. Graniastóp	34
LEKCJA 3. Pole powierzchni graniastopa	38
LEKCJA 4. Odcinki w graniastopie	41
LEKCJA 5. Kąt między prostą a płaszczyzną	46
LEKCJA 6. Objętość graniastopa	52
LEKCJA 7. Graniastopy na co dzień	56
Powtórzenie rozdziału	58

Rozdział III. Ostrośpy

LEKCJA 1. Ostrośp	61
LEKCJA 2. Pole powierzchni ostrośpa	65
LEKCJA 3. Objętość ostrośpa	70
LEKCJA 4. Ostrośpy we wnętrzach	74
LEKCJA 5. Kąt dwuścienny	76
Powtórzenie rozdziału	80

Rozdział IV. Bryły obrotowe

LEKCJA 1. Walec	83
LEKCJA 2. Przekroje walca	88
LEKCJA 3. Stożek	92
LEKCJA 4. Przekroje stożka	98
LEKCJA 5. Użyteczne bryły obrotowe	102
LEKCJA 6. Kula	104
Powtórzenie rozdziału	108

Rozdział V. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

LEKCJA 1. Doświadczenia losowe i zdarzenia losowe	111
LEKCJA 2. Reguła mnożenia	115
LEKCJA 3. Reguła dodawania	120
LEKCJA 4. Jaki mamy wybór?	124
LEKCJA 5. Prawdopodobieństwo klasyczne	126
Powtórzenie rozdziału	130

Zbiór zadań

Dodatkowe zadania do wszystkich lekcji	132
--	-----

Odpowiedzi	146
------------------	-----

Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów ostrych	151
---	-----

WAŻNE INFORMACJE

Symbolem * oznaczono zadania trudniejsze, przeznaczone dla osób bardziej zainteresowanych przedmiotem.

Szanuj swój podręcznik – zadbaj o to, żeby za rok wyglądał tak jak teraz. Nie pisz w nim i nie rysuj, nie wykonuj zadań pisemnych, nie wpisuj brakujących treści i nie podkreślaj fragmentów tekstów.

Rozdział I

Proporcjonalność

TEMATY LEKCJI

- | | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Proporcje | s. 7–10 |
| 2 | Wielkości wprost proporcjonalne | s. 11–14 |
| 3 | Wielkości odwrotnie proporcjonalne | s. 15–19 |
| 4 | Proporcjonalność na drodze | s. 20–21 |
| 5 | Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ | s. 22–25 |
| | Powtórzenie rozdziału | s. 26–27 |

ZADANIA PODSUMOWUJĄCE
SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

1 Proporcje

NA POCZĄTEK

Na zdjęciu przedstawiono grupę uczniów na zajęciach języka angielskiego. Jak myślisz, czy w tej grupie na 1 chłopca przypada tyle samo dziewcząt, ile w drugiej grupie, która liczy 9 dziewcząt i 6 chłopców?



WAŻNA WIADOMOŚĆ

Proporcją nazywamy równość dwóch ułamków (ilorazów), co zapisujemy:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ lub } a:b = c:d, \text{ gdzie } b \neq 0, d \neq 0$$

W proporcji wyróżniamy wyrazy skrajne i wyrazy środkowe:



Iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów środkowych:

$$a \cdot d = b \cdot c$$

PRZYKŁAD 1

Oblicz wartość x .

a) $\frac{x}{9} = \frac{4}{3}$

b) $\frac{2}{x} = \frac{5}{2}$

a) **KROK 1** Zamieniamy proporcję na iloczyn wyrazów skrajnych równy iloczynowi wyrazów środkowych:

$$x \cdot 3 = 4 \cdot 9$$

KROK 2 Rozwiązujemy otrzymane równanie:

$$3x = 36 \quad | :3$$

$$x = 12$$

PODPOWIEDŹ

Potocznie mówimy, że w proporcji mnożymy wyrazy na krzyż:

b) ROZWIĄZANIE

$$\frac{2}{x} = \frac{5}{2}, \text{ gdzie } x \neq 0$$

$$2 \cdot 2 = 5 \cdot x$$

$$5x = 4 \quad | :5$$

$$x = \frac{4}{5}$$

Rozwiązanie równania spełnia założenie ($\frac{4}{5} \neq 0$).

PODPOWIEDŹ

Jeżeli zmienna występuje w mianowniku ułamka, należy wprowadzić założenie: wartość mianownika $\neq 0$. Rozwiązanie równania powinno spełniać to założenie.

ĆWICZENIE 1

Rozwiąż równanie. Zapisz odpowiednie założenie, jeśli to konieczne.

a) $\frac{x}{10} = \frac{2}{5}$

b) $\frac{3}{x} = \frac{4}{5}$

c) $\frac{4}{9} = \frac{x}{3}$

d) $\frac{12}{7} = \frac{6}{x}$

To się liczy!

W życiu codziennymi często spotykamy się z sytuacjami, w których przydaje się umiejętność stosowania proporcji. Przykładowo: kiedy zmieniamy przepisy kulinarne, musimy zachować odpowiednie proporcje poszczególnych składników, żeby danie wyszło takie samo. Poniższe zadanie pokaże Wam, jak obliczać proporcje.

ZADANIE BRANŻOWE

Przeczytaj listę składników na muffiny [czyt.: mafiny]. Następnie odpowiedz na pytania.

- Ile muffinów otrzymasz, gdy użyjesz 6 szklanek mąki?
- Ile szklanek mąki potrzebujesz, by upiec 84 muffiny?
- Ile musisz użyć każdego ze składników, żeby upiec 30 muffinów?

**PRZYKŁAD 2**

Tomek ma 6 l żółtej farby. Aby uzyskać kolor limonkowy, powinien zmieszać farby niebieską i żółtą w proporcji 1:3. Oblicz, ile litrów niebieskiej farby potrzebuje.

KROK 1 Wprowadzamy oznaczenie:
 x – liczba litrów niebieskiej farby

KROK 2 Zapisujemy odpowiednią proporcję:

$$\frac{1}{3} = \frac{x}{6}$$

KROK 3 Rozwiązujemy otrzymane równanie:

$$\frac{1}{3} = \frac{x}{6}$$

$$3x = 6 \quad | :3$$

$$x = 2$$

Tomek potrzebuje 2 l niebieskiej farby.

ĆWICZENIE 2

Ania ma 6 l błękitnej farby. Aby uzyskać kolor jasnofioletowy, zmieszała farby błękitną i różową w stosunku 2:3. Ustal, ile litrów farby jasnofioletowej otrzyma.

PRZYKŁAD 3

Kasia i Magda wybrały się do restauracji. Kasia zamówiła sałatkę grecką i lemoniadę, a Magda zapiekankę z warzyw i lemoniadę. Po otrzymaniu wspólnego rachunku zdecydowały, że zostawią napiwek w wysokości 5 zł – proporcjonalnie do cen swoich zamówień. Oblicz kwotę napiwku, jaką zostawi każda z dziewcząt.

Produkt	Cena
Sałatka grecka	21 zł
Zapiekanka z warzyw	30 zł
Lemoniada arbuzowa	12 zł

KROK 1 Obliczamy wysokość rachunków każdej z dziewcząt.

- Kasia: $21 + 12 = 33$ [zł]
- Magda: $30 + 12 = 42$ [zł]

KROK 2 Wprowadzamy oznaczenia:

x – kwota napiwku, który da Kasia

$(5 - x)$ – kwota napiwku, który da Magda

KROK 3 Zapisujemy odpowiednią proporcję:

$$\frac{x}{5-x} = \frac{33}{42}, \text{ gdzie } x \neq 5$$

KROK 4 Rozwiązujemy otrzymane równanie:

$$\frac{x}{5-x} = \frac{11}{14}$$

$$14x = 11(5-x)$$

$$14x = 55 - 11x$$

$$25x = 55 \quad | :25$$

$$x = 2,2$$

Rozwiązanie równania spełnia założenie ($2,2 \neq 5$).

KROK 5 Obliczamy wysokość napiwku od Magdy:

$$5 - x = 5 - 2,2 = 2,8$$

Kasia zostawi napiwek w wysokości 2,20 zł, a Magda w wysokości 2,80 zł.

ĆWICZENIE 3

Dyrektor firmy postanowił przyznać dwóm pracownikom premię proporcjonalną do ich zarobków. Na ten cel przeznaczył 3600 zł. Marek zarabia 4000 zł, a Monika 5000 zł. Ustal, jaką kwotę premii otrzyma każde z nich.

ZADANIA

↪ Zbiór zadań, s. 133

1. Rozwiąż równanie. Zapisz odpowiednie założenie, jeśli to konieczne.

a) $\frac{9}{x} = \frac{6}{5}$

c) $\frac{18}{12} = \frac{x}{36}$

e) $\frac{52}{13} = \frac{16}{x}$

g) $\frac{x-2}{3} = \frac{x+1}{2}$

b) $\frac{8}{x} = \frac{12}{9}$

d) $\frac{28}{x} = \frac{21}{2}$

f) $\frac{17}{51} = \frac{11}{x}$

h) $\frac{x}{2} = \frac{8}{x}$

2. Ciało człowieka ważącego 90 kg zawiera ok. 60 kg wody. Oblicz, ile wody znajduje się w ciele człowieka o podanej wadze.

a) 75 kg

b) 54 kg

c) 110 kg

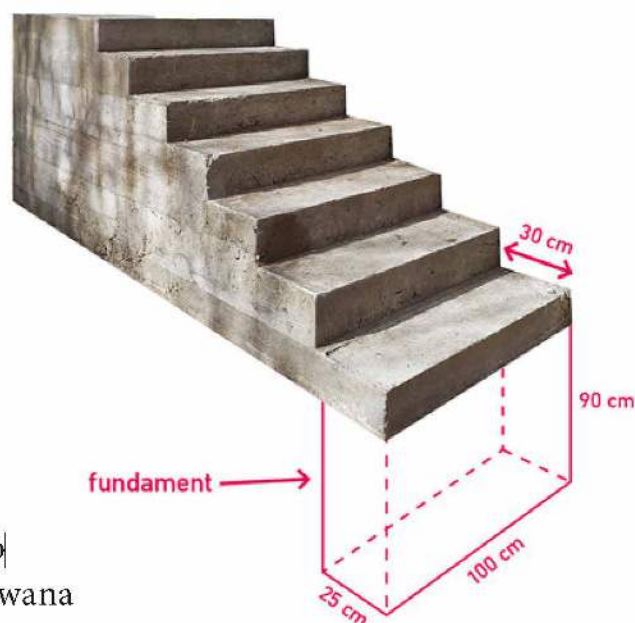
ZADANIA BRANŻOWE

3. Architekt przygotował plan schodów zewnętrznych budynku w taki sposób, że 2 m w rzeczywistości odpowiadają 5 cm na planie. Odpowiedz na pytania.

a) Jaka jest rzeczywista wysokość stopnia, jeśli jego wysokość na planie wynosi 4,5 mm?

b) Ile wynosi szerokość stopnia na planie?

c) Jakie są wymiary fundamentu podtrzymującego schody na tym planie?



4. Inwestor otrzymał od grafika komputerowego wizualizację budynku, która została przygotowana w skali 1:100. Wykonaj polecenia.

a) Oblicz rzeczywistą szerokość tego budynku.

b) Wyznacz długość budynku na tym rysunku, jeśli jego rzeczywista długość wynosi 12,5 m.

c) Ustal, jaką wysokość ma budynek na rysunku, jeżeli w rzeczywistości jego wysokość wynosi 6,1 m.



Wielkości wprost proporcjonalne

NA POCZĄTEK

Czy na podstawie informacji z ogłoszenia możesz ustalić, ile kosztowałoby wynajęcie tej kawalerki na 5 miesięcy, na 7 miesięcy i na x miesięcy?

Wynajmę kawalerkę
w centrum Gdańska.
Tanio!!!
7200 zł za pół roku

PRZYKŁAD 1

W tabeli przedstawiono ceny za litr paliwa na pewnej stacji benzynowej w maju 2020 r. Podaj wzór na zależność między kosztem zakupu paliwa a jego ilością.

Paliwo	Cena [zł/l]
Olej napędowy	4,10
Benzyna 98	4,12

KROK 1 Wprowadzamy oznaczenia:

x – liczba litrów paliwa

y – koszt paliwa w złotych

KROK 2 Zapisujemy odpowiednie zależności za pomocą wzorów.

- olej napędowy: $y = 4,1x$
- benzyna: $y = 4,12x$

ĆWICZENIE 1

- 1.1. Za wyłożenie 1 m^2 ściany płytkami ceramicznymi trzeba zapłacić 80 zł. Zapisz wzór opisujący zależność między polem powierzchni ściany a kwotą, jaką zapłacimy za jej wyłożenie płytkami.
- 1.2. Zapisz wzór na kwotę, jaką zapłacimy za ułożenie paneli podłogowych, jeżeli za 1 m^2 trzeba zapłacić 34,20 zł, a podłoga pokoju ma pole powierzchni równe $x \text{ m}^2$.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Proporcjonalność prosta to zależność między dwiema dodatnimi wielkościami x i y , określona wzorem $y = ax$, gdzie $a > 0$.

Mówimy, że **wielkości są wprost proporcjonalne**, jeśli każda z nich rośnie (maleje) tyle samo razy, ile druga wielkość.

Stałą a nazywamy **współczynnikiem proporcjonalności**: $a = \frac{y}{x}$.

PRZYKŁAD 2

Zapisz zależność między długością boku kwadratu a jego obwodem. Sprawdź, czy wielkości te są wprost proporcjonalne. Jeśli tak, podaj współczynnik proporcjonalności.

KROK 1 Wprowadzamy oznaczenia:

x – długość boku kwadratu

y – obwód kwadratu

KROK 2 Zapisujemy zależność między obwodem kwadratu a długością jego boku:

$y = 4x$, czyli otrzymujemy wzór proporcjonalności prostej.

KROK 3 Odczytujemy ze wzoru współczynnik proporcjonalności:

$$a = 4$$

Obwód kwadratu jest wprost proporcjonalny do długości jego boku.

ĆWICZENIE 2

Podaj wartość współczynnika proporcjonalności a dla podanych wielkości.

a) x – długość boku trójkąta równobocznego, y – obwód tego trójkąta

b) x – długość promienia koła, y – obwód tego koła

To się liczy!

Wielkościami wprost proporcjonalnymi są rzeczywiste rozmiary danego obiektu oraz jego wymiary na mapie, planie czy rysunku wykonanym w danej skali. Poniższe zadanie przypomni Wam, jak stosować skalę liczbową.

ZADANIE BRANŻOWE

Hydraulik otrzymał plan zagospodarowania działki sporządzony w skali 1:500. Jaka jest rzeczywista długość zewnętrznej instalacji wodociągowej, jeżeli na tym planie wynosi ona 35 mm? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. 7,00 m

B. 13,50 m

C. 17,50 m

D. 35,00 m.

PRZYKŁAD 3

Ustal, jaka liczba powinna być w miejscu ?, żeby podane w tabeli wielkości x i y były wprost proporcjonalne.

KROK 1 Obliczamy współczynnik proporcjonalności:

$$a = \frac{y}{x} = \frac{8}{2} = 4$$

x	2	?
y	8	14

KROK 2 Zapisujemy wzór proporcjonalności:

$$y = 4x$$

KROK 3 Obliczamy brakującą wartość x . Podstawiamy $y = 14$ do wzoru proporcjonalności:

$$14 = 4x \quad | : 4$$

$$x = 3,5$$

W miejscu ? powinna być liczba 3,5.

ĆWICZENIE 3

Podane w tabeli wielkości x i y są wprost proporcjonalne. Oblicz współczynnik proporcjonalności i zapisz wzór tej proporcjonalności. Wyznacz brakujące wartości x i y .

a)

x	4	7	?
y	6	?	15

b)

x	?	4	6
y	1	?	2

PRZYKŁAD 4

Na targu prawdziwki kosztują 25 zł/kg. Ich koszt zakupu jest wprost proporcjonalny do liczby kupionych kilogramów grzybów. Zapisz wzór tej proporcjonalności i naskicuj jej wykres.

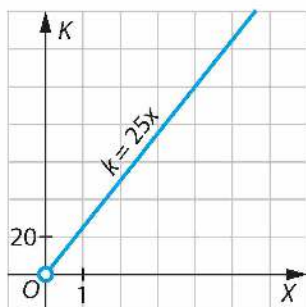
KROK 1 Wprowadzamy oznaczenia:

x – waga grzybów w kilogramach

k – koszt zakupu grzybów w złotych

KROK 2 Zapisujemy wzór proporcjonalności: $k = 25x$.

KROK 3 Szkicujemy wykres funkcji $k = 25x$ dla $x > 0$.



PODPOWIEDŹ

Wykresem proporcjonalności prostej jest fragment wykresu funkcji liniowej o dodatnim współczynniku kierunkowym a , określonej dla $x > 0$.

ĆWICZENIE 4

Jedno opakowanie płyt CD zawiera 25 sztuk i kosztuje 30 zł. Koszt zakupu płyt jest wprost proporcjonalny do liczby kupionych płyt. Zapisz wzór tej proporcjonalności i naskicuj jej wykres.

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 133

1. Wielkości x i y są wprost proporcjonalne. Wyznacz współczynnik proporcjonalności, jeśli wiesz, że ta zależność jest spełniona przez podaną parę liczb x i y .

a) $x = 4, y = 12$

b) $x = 18, y = 6$

c) $x = 8, y = 10$

2. Zapisz wzór na zależność między ilością kupionych bananów a kosztem zakupu owoców, jeżeli jako x oznaczymy liczbę zakupionych kilogramów bananów, a jako y – koszt zakupu owoców. Przerysuj tabelę do zeszytu i uzupełnij ją dla podanej ceny bananów. Naszkicuj wykres tej zależności.

a) 3,50 zł/kg

x [kg]	2	3	?	?
y [zł]	?	?	14	17,50

b) 5,50 zł/kg

x [kg]	?	2	3	?
y [zł]	2,75	?	?	22

ZADANIA BRANŻOWE

3. Fryzjerka za 2 godziny pracy otrzymała 45 zł brutto. Przyjmij, że jej wynagrodzenie jest wprost proporcjonalne do liczby przepracowanych godzin, i oblicz, ile zarobi przez:

a) 4 godziny,

b) 6 godzin,

c) 40 godzin,

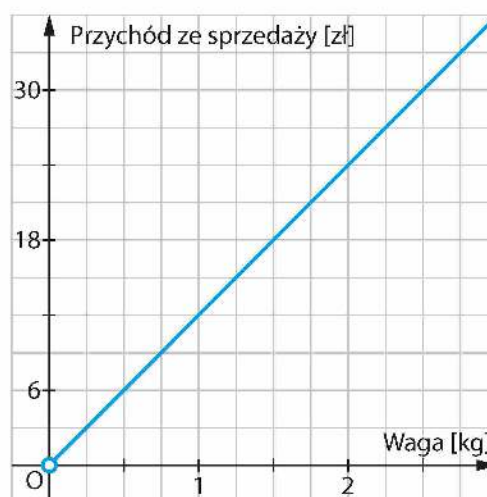
d) x godzin.

4. Właściciel sklepu metalowego sporządził wykres przedstawiający zależność między wagą sprzedanych śrub a przychodem z ich sprzedaży. Wykonaj polecenia.

a) Odczytaj z wykresu współczynnik proporcjonalności, czyli cenę 1 kg śrub.

b) Zapisz wzór tej zależności – przyjmij jako oznaczenia: x – waga sprzedanych śrub, y – przychód z ich sprzedaży.

c) Oblicz, ile zapłacisz w tym sklepie za 4 kg, a ile – za 6,5 kg śrub.



Wielkości odwrotnie proporcjonalne

NA POCZĄTEK

Masz 15 zł. Ile butelek wody mineralnej kupisz, jeżeli 1 butelka kosztuje 2,50 zł, a ile – jeśli cena wynosi 3 zł? Jak myślisz, jaka jest zależność między liczbą kupionych butelek a ich ceną?

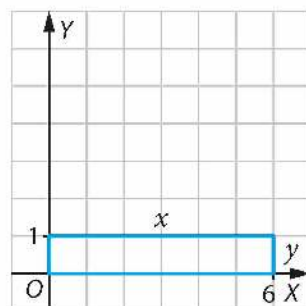
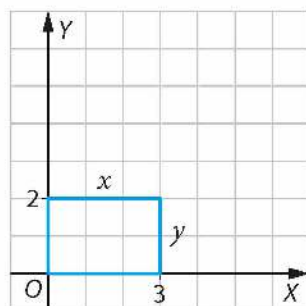
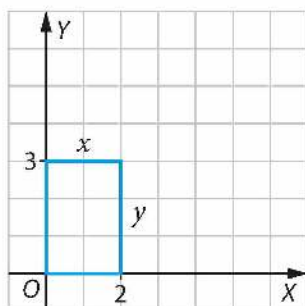
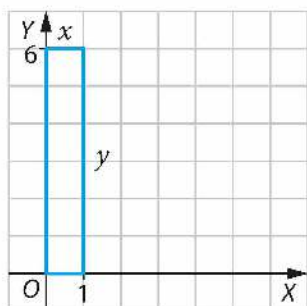


WAŻNA WIADOMOŚĆ

Wielkości odwrotnie proporcjonalne to takie dwie wielkości, z których jedna tyle razy rośnie, ile razy druga maleje.

PRZYKŁAD 1

Na rysunkach przedstawiono prostokąty o bokach długości x i y oraz polu równym 6. Zapisz zależność między wielkościami x i y . Ustal, jak zmienia się długość boku y wraz ze wzrostem długości boku x .



KROK 1 Zapisujemy wzór na pola narysowanych prostokątów:

$$xy = 6$$

KROK 2 Przekształcamy wzór tak, by wyznaczyć z niego wielkość y :

$$y = \frac{6}{x}$$

KROK 3 Stwierdzamy, że im większa długość boku x , tym mniejsza długość boku y przy stałym polu prostokąta.

Długości boków x i y są odwrotnie proporcjonalne.

ĆWICZENIE 1

W tabeli podano długości boku x i wysokości y pewnego równoległoboku o polu równym 15. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij. Zapisz za pomocą wzoru zależność między wielkościami x i y .

x	1	1,5	2	3	5	6	7,5	20
y	?	?	?	?	?	?	2	0,75

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Proporcjonalność odwrotna to zależność między dwiema dodatnimi wielkościami x i y , określona wzorem $y = \frac{a}{x}$, gdzie $a > 0$.

Iloczyn wielkości odwrotnie proporcjonalnych jest stały i wynosi: $xy = a$. Stałą a nazywamy **współczynnikiem proporcjonalności**.

PRZYKŁAD 2

Między wielkościami x i y zachodzi zależność $y = \frac{a}{x}$ dla pewnej liczby a . Oblicz wartość a , jeśli podane liczby spełniają tę zależność.

a) $x = \frac{3}{5}$, $y = 10$

b) $x = 1,5$; $y = 8$

a) **KROK 1** Korzystamy ze wzoru na współczynnik proporcjonalności odwrotnej:

$$a = xy = \frac{3}{5} \cdot 10$$

KROK 2 Wykonujemy obliczenia:

$$a = xy = \frac{3}{5} \cdot \cancel{10}^2 = 6$$

Wartość liczby a wynosi 6.

b) **ROZWIĄZANIE**

$$a = xy = 1,5 \cdot 8 = 12$$

ĆWICZENIE 2

Oblicz współczynnik proporcjonalności a , jeśli podane liczby x i y są odwrotnie proporcjonalne.

a) $x = 8$, $y = 3$

b) $x = 6$, $y = 0,5$

c) $x = 13$, $y = 9$

To się liczy!

Często możemy się przekonać, że im więcej osób pracuje, tym mniej czasu potrzeba, aby wykonać daną pracę. Aby precyzyjnie określić, ile pracy wykona 1 osoba w czasie 1 godziny lub przez 1 dzień, stosuje się pojęcia roboczogodziny (rg.) albo roboczodnia (rd.). Poniższe zadanie pozwoli Wam zastosować te pojęcia do obliczeń.

ZADANIE BRANŻOWE

Według obliczeń budowa 100 m^2 stropu zajmuje 142 rg. Ile dni roboczych potrzebuje 4 robotników na wykonanie 200 m^2 takiego stropu, jeżeli pracują oni po 8 godzin dziennie? Wybierz właściwą odpowiedź.

- A. 10 dni C. 8 dni
B. 9 dni D. 7 dni



PRZYKŁAD 3

Ustal, jaka liczba powinna być w miejscu ?, żeby podane w tabeli wielkości x i y były odwrotnie proporcjonalne.

x	3	2,5
y	5	?

KROK 1 Obliczamy współczynnik proporcjonalności:

$$a = xy = 5 \cdot 3 = 15$$

KROK 2 Zapisujemy wzór proporcjonalności odwrotnej:

$$y = \frac{15}{x}$$

KROK 3 Obliczamy brakującą wartość y , po podstawieniu $x = 2,5$ do wzoru proporcjonalności odwrotnej:

$$y = \frac{15}{2,5} = 6$$

W miejscu ? powinna być liczba 6.

ĆWICZENIE 3

Wielkości x i y podane w tabeli są odwrotnie proporcjonalne. Oblicz współczynnik proporcjonalności i zapisz wzór tej proporcjonalności. Wyznacz brakujące wartości x i y .

a)

x	2	4	?
y	6	?	3

b)

x	?	7	6
y	2	?	7

PRZYKŁAD 4

Dany jest prostokąt o bokach długości x i y oraz polu równym 12. Naszkicuj wykres zależności między wielkościami x i y .

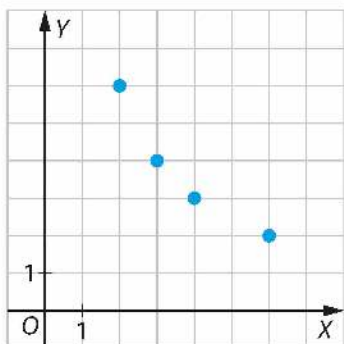
KROK 1 Zapisujemy wzór zależności między podanymi wielkościami:

$$y = \frac{12}{x}, \text{ gdzie } x > 0$$

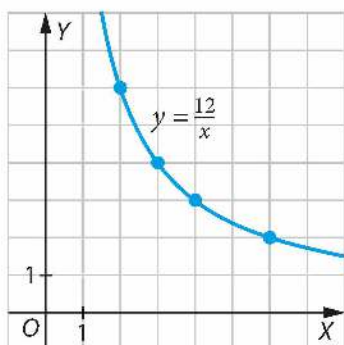
KROK 2 Przygotowujemy tabelę wartości dla wybranych wartości x .

x	2	3	4	6
y	6	4	3	2

KROK 3 Zaznaczamy w układzie współrzędnych otrzymane punkty.



KROK 4 Łączymy zaznaczone punkty.



Otrzymaliśmy wykres proporcjonalności odwrotnej $y = \frac{12}{x}$, gdzie $x > 0$.

ĆWICZENIE 4

- 4.1.** Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości x i y oraz polu równym 12. Naszkicuj wykres zależności między wielkościami x i y .
- 4.2.** Na zakup gruszek przeznaczono 15 zł. Przyjmijmy, że x to cena za kilogram gruszek, natomiast y – liczba kupionych kilogramów owoców. Naszkicuj wykres zależności między wielkościami x i y .

ZADANIA

Zbiór zadań, s. 134

1. Wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne. Podaj wzór tej proporcjonalności. Oblicz brakujące wartości x i y .

a)

x	0,6	1,5
y	5	?

b)

x	1,5	1,8
y	?	2,5

c)

x	4,2	?
y	15	7

2. Podaj wzór proporcjonalności odwrotnej, jeżeli do jej wykresu należy punkt P .

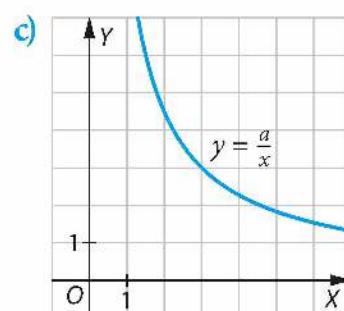
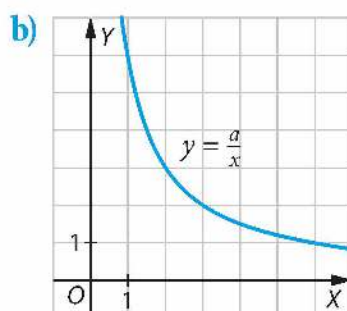
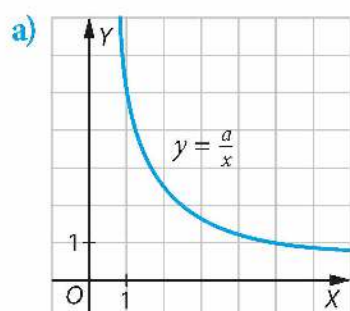
a) $P(4, 7)$

b) $P(9, 6)$

c) $P(10, \frac{1}{2})$

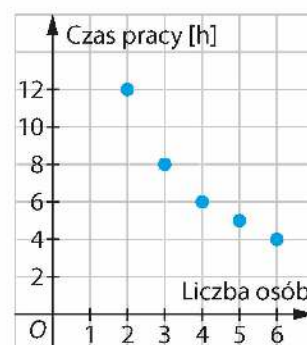
d) $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$

3. Rysunek przedstawia wykres proporcjonalności odwrotnej $y = \frac{a}{x}$. Wyznacz wartość współczynnika a . Podaj wszystkie punkty o obu współrzędnych naturalnych należące do wykresu tej proporcjonalności.



ZADANIA BRANŻOWE

4. Kierownik stołówki szkolnej przeznaczył na zakup truskawek kwotę 150 zł. Oblicz, ile kilogramów owoców kupi, jeśli cena za kilogram będzie wynosiła:
- a) 15 zł, b) 20 zł, c) 25 zł.
5. Czas potrzebny do ukończenia budowy domu w stanie surowym jest odwrotnie proporcjonalny do liczby osób pracujących na budowie. Dziesięciu pracownikom ukończenie pracy zajęłoby 7 dni. Oblicz, ile dni zajęłoby ukończenie pracy 14 robotnikom, jeśli będą oni pracować z taką samą wydajnością.
6. Organizator koncertu zatrudnił x osób do montażu sceny. Jeżeli y oznacza ich czas pracy, to wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne. Wykonaj polecenia.
- a) Zapisz wzór tej zależności na podstawie jej wykresu.
- b) Oblicz, ile czasu zajmie montaż sceny, jeśli zatrudnionych zostanie 8 osób.



4 Proporcjonalność na drodze

Na co dzień w zaplanowaniu podróży często pomagają nam różnego rodzaju urządzenia. Nawigacja samochodowa lub aplikacja w telefonie komórkowym wskażą nam drogę dojazdu, czas trwania podróży czy długość trasy. Ważna jest zarówno umiejętność korzystania z tych urządzeń, jak i umiejętność weryfikowania podawanych przez nie informacji.

Jeżeli np. samochód porusza się ze stałą prędkością, to im większa jest odległość do przejechania, tym więcej czasu to zajmie. Dlatego mówimy, że droga i czas są **wielkościami wprost proporcjonalnymi**, przy założeniu stałej prędkości poruszania się obiektu.

Jeśli auto ma do pokonania ustalony odcinek drogi, to im większa jest prędkość poruszania się samochodu, tym mniej czasu potrzebuje on, aby przejechać daną trasę. Zatem prędkość i czas są **wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi**.

PRZYKŁADOWE ZASTOSOWANIE PROPORCJONALNOŚCI

Samochód dostawczy jadący autostradą ze stałą prędkością przejechał w 1,5 h trasę długości 165 km. Oblicz odległość, jaką pokona w czasie 1 h, 2,5 h i 4 h. Zapisz wzór odpowiedniej proporcjonalności i naszkicuj jej wykres. Przedstaw, jak wyglądałaby zależność między czasem a prędkością, jeśli za stałą przyjmiemy drogę, czyli odcinek autostrady o długości 165 km.



- 1 Skoro samochód porusza się ze stałą prędkością, to zależność między drogą a czasem jest proporcjonalnością prostą. Aby zapisać wzór zależności, musimy znaleźć prędkość, z jaką porusza się auto:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{165}{1,5} = 110 \left[\frac{\text{km}}{\text{h}} \right]$$

Wzór proporcjonalności ma postać:

$s = 110t$, gdzie t – czas w godzinach, s – odległość w km

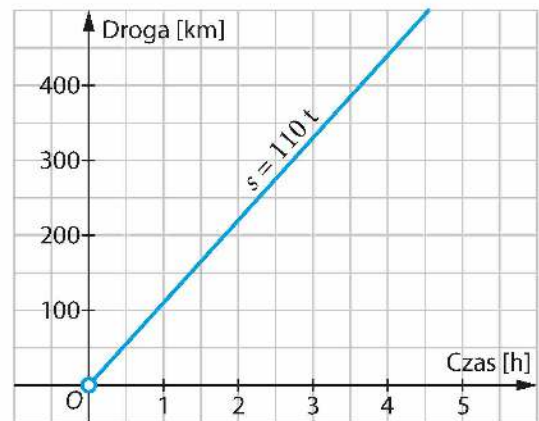
- 2 Do sporządzenia wykresu przygotowujemy tabelę wartości:

t [h]	1	1,5	2,5	4
s [km]	110	165	275	440



- 3 Na podstawie tabeli wartości szkicujemy wykres proporcjonalności.

Wykresem zależności między drogą (s) a czasem (t) jest fragment wykresu funkcji liniowej określonej dla $t > 0$.



- 4 Jeżeli przyjmimy, że stałą wielkością jest droga, którą ma przejechać samochód, to mamy do czynienia z proporcjonalnością odwrotną. Jest ona określona wzorem:

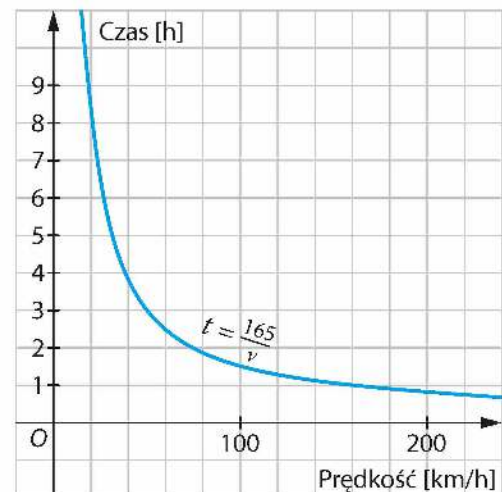
$t = \frac{165}{v}$, gdzie t jest czasem potrzebnym do pokonania drogi o długości 165 km w godzinach, a v to prędkość w km/h.

- 5 Uzupełniamy tabelę wartości dla zależności między czasem (t) a prędkością (v):

v [km/h]	15	55	110	165
t [h]	11	3	1,5	1

- 6 Szkicujemy wykres zależności między czasem (t) a prędkością (v):

Otrzymujemy wykres proporcjonalności odwrotnej określonej dla $v > 0$.



ZADANIA BRANŻOWE

Maszynista ma pokonać trasę z Warszawy Centralnej do Gdańska Głównego o długości ok. 300 km. Wykonaj polecenia.

- Oblicz, w jakim czasie pokona tę trasę pociąg jadący ze średnią prędkością 120 km/h.
- Ustal, o ile wydłuży się czas przejazdu pociągu, jeśli jego prędkość wyniesie 80 km/h.
- Zapisz wzór odpowiedniej proporcjonalności i naszkicuj jej wykres.

Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$

NA POCZĄTEK

Na wykresie przedstawiono zależność między czasem ułożenia kostki brukowej na określonej powierzchni a liczbą pracowników. Co możesz odczytać z tego wykresu? Jak myślisz, dlaczego wykres znajduje się tylko w I ćwiartce układu współrzędnych?



WAŻNA WIADOMOŚĆ

Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy **hiperbolą**. Ta funkcja jest określona dla każdej liczby rzeczywistej x z wyjątkiem 0, co możemy zapisać na kilka sposobów: $x \neq 0$ lub $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ lub $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Hiperbola składa się z 2 gałęzi, które „zblizają się” do prostych $x = 0$ i $y = 0$.

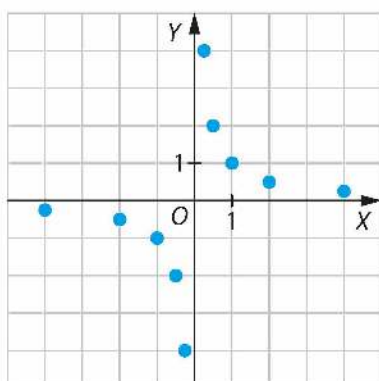
PRZYKŁAD 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$. Odczytaj własności tej funkcji.

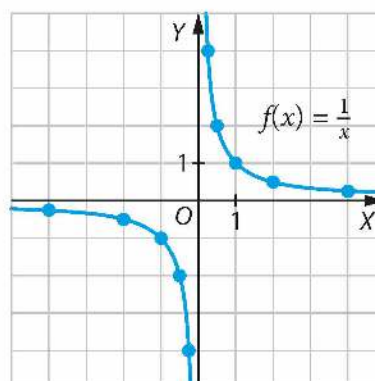
KROK 1 Sporządzamy tabelę wartości funkcji dla wybranych argumentów.

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

KROK 2 Zaznaczamy punkty z tabeli w układzie współrzędnych.



KROK 3 Łączymy zaznaczone punkty i otrzymujemy wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$.



KROK 4 Odczytujemy własności funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ z jej wykresu:

- dziedziną funkcji jest zbiór $R \setminus \{0\}$,
- zbiorem wartości funkcji jest zbiór $R \setminus \{0\}$,
- dla $x < 0$ funkcja f przyjmuje wartości ujemne ($f(x) < 0$), natomiast dla $x > 0$ przyjmuje wartości dodatnie ($f(x) > 0$),
- funkcja f nie ma miejsc zerowych,
- funkcja f jest malejąca dla $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$,
- wykres funkcji f leży w I i III ćwiartce układu współrzędnych.

ĆWICZENIE 1

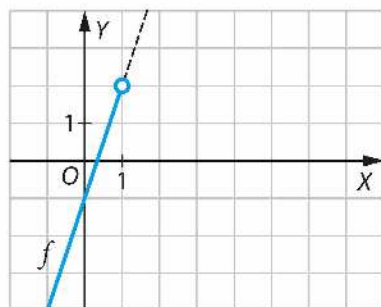
Sporządź odpowiednią tabelę i naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{3}{x}$. Odczytaj z wykresu jej własności.

PRZYKŁAD 2

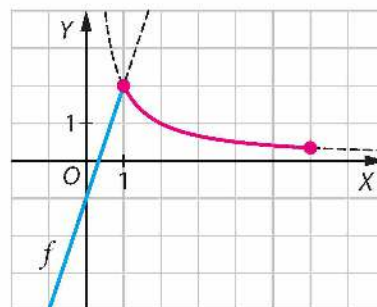
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{dla } x \in \langle 1; 6 \rangle \\ 3x - 1 & \text{dla } x < 1 \end{cases}$

KROK 1 Zauważamy, że wykres funkcji składa się z fragmentów 2 różnych funkcji określonych na różnych przedziałach, a dziedziną funkcji jest zbiór $(-\infty; 6)$.

KROK 2 Szkicujemy wykres funkcji liniowej $y = 3x - 1$ określonej dla $x \in (-\infty; 1)$.



KROK 3 Dołączamy do poprzedniego wykresu fragment hiperboli o równaniu $y = \frac{2}{x}$ dla $x \in \langle 1; 6 \rangle$.



Otrzymujemy wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{dla } x \in \langle 1; 6 \rangle \\ 3x - 1 & \text{dla } x < 1 \end{cases}$

ĆWICZENIE 2

Naszkicuj wykres funkcji.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x} & \text{dla } x < 2 \\ 2x - 2 & \text{dla } x \in \langle 2; 8 \rangle \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} & \text{dla } x < -1 \\ x^2 - 4 & \text{dla } x \geq -1 \end{cases}$

PRZYKŁAD 3

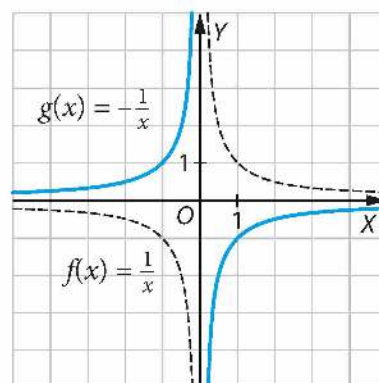
Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = -\frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$. Odczytaj własności tej funkcji.

ROZWIĄZANIE

Wykres funkcji $g(x) = -\frac{1}{x}$ możemy otrzymać, jeśli symetrycznie odbijemy wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ względem osi OX lub osi OY .

Własności funkcji:

- $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $ZW = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- dla $x < 0$ funkcja g przyjmuje wartości dodatnie ($g(x) > 0$), natomiast dla $x > 0$ przyjmuje wartości ujemne ($g(x) < 0$),
- funkcja g nie ma miejsc zerowych,
- funkcja g jest rosnąca dla $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$,
- wykres funkcji leży w II i IV ćwiartce układu współrzędnych.

**ĆWICZENIE 3**

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = -\frac{3}{x}$ dla $x \neq 0$. Odczytaj z wykresu jej własności.

PRZYKŁAD 4

Na rysunku przedstawiono wykresy 3 funkcji:

$$f(x) = \frac{2}{x}, \quad g(x) = \frac{4}{x} \quad \text{oraz} \quad h(x) = \frac{6}{x}.$$

Dobierz wzór funkcji do każdego wykresu.

KROK 1 Obliczamy wartości każdej z funkcji dla dowolnego argumentu (np. $x = 1$):

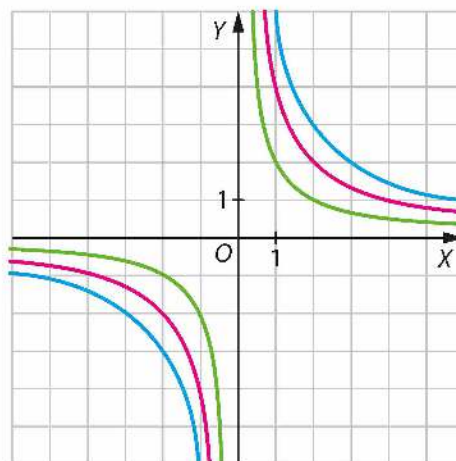
$$f(1) = \frac{2}{1} = 2, \quad g(1) = \frac{4}{1} = 4, \quad h(1) = \frac{6}{1} = 6$$

KROK 2 Sprawdzamy, które punkty należą do której hiperboli.

Punkt o współrzędnych $(1, 2)$ należy do zielonej hiperboli, punkt o współrzędnych $(1, 4)$ należy do różowej hiperboli, a punkt o współrzędnych $(1, 6)$ należy do niebieskiej hiperboli.

KROK 3 Dobieramy wzory funkcji do właściwych wykresów.

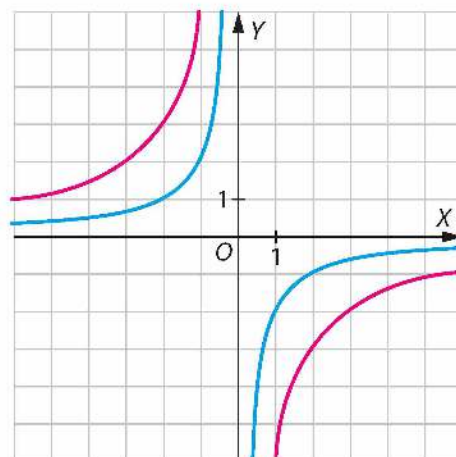
- zielony wykres: $f(x) = \frac{2}{x}$
- różowy wykres: $g(x) = \frac{4}{x}$
- niebieski wykres: $h(x) = \frac{6}{x}$



ĆWICZENIE 4

Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = -\frac{2}{x}$ oraz $g(x) = -\frac{6}{x}$. Wykonaj polecenia.

- Dobierz wzór funkcji do każdego wykresu.
- Ustal, które spośród punktów $A(2, -3)$, $B(-3, 2)$, $C(-2, 1)$ i $D(-\frac{1}{2}, 4)$ należą do wykresu funkcji f , a które – do wykresu funkcji g .
- Podaj wszystkie punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu funkcji f oraz do wykresu funkcji g .

**ZADANIA**

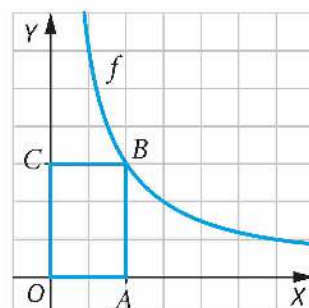
Zbiór zadań, s. 134

- Punkt $P(x, y)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \frac{6}{x}$. Podaj brakującą współrzędną tego punktu.

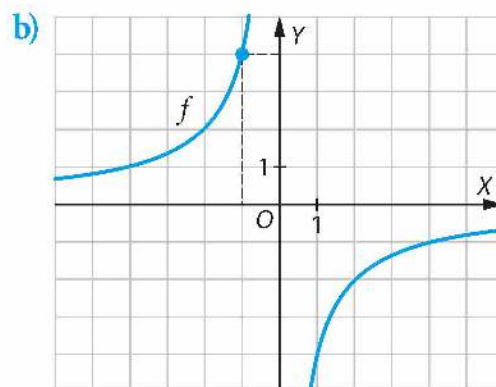
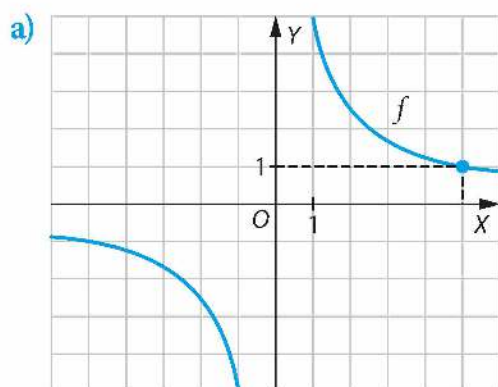
- $P(12, y)$
- $P(\frac{1}{2}, y)$
- $P(4, y)$
- $P(x, 4)$

- Wierzchołek B narysowanego prostokąta $ABCO$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$. Wyznacz wzór tej funkcji dla podanych długości boków tego prostokąta.

- $|AO| = 6, |CO| = 8$
- $|AO| = 9, |CO| = 16$



- Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$. Wyznacz wartość współczynnika a . Podaj współrzędne punktu, w którym hiperbola przecina prostą o równaniu $y = -2$.



Powtórzenie rozdziału

PROPORCJONALNOŚĆ

ZADANIA PODSUMOWUJĄCE

- 1 Rozwiąż równanie.

a) $\frac{1}{x} = \frac{2}{x-2}$, gdzie $x \neq 0$, $x \neq 2$

b) $\frac{x-3}{x} = \frac{x}{x+2}$, gdzie $x \neq 0$, $x \neq -2$

- 2 Wielkości x i y przedstawione w tabeli są wprost proporcjonalne. Oblicz współczynnik proporcjonalności a i naskicuj wykres proporcjonalności.

a)

x	2	5	9	15	30
y	6	15	27	45	90

b)

x	6	9	12	15	30
y	4	6	8	10	20

- 3 Wskaż zdania prawdziwe.

- A. Długość boku trójkąta równobocznego jest odwrotnie proporcjonalna do jego obwodu.
B. Długość okręgu jest wprost proporcjonalna do długości jego promienia.
C. Długość boku równoległoboku o polu równym P jest odwrotnie proporcjonalna do długości wysokości opuszczonej na ten bok.

- 4 Zapisz wzór proporcjonalności odwrotnej, jeśli do jej wykresu należy punkt P .
Podaj współrzędne dwóch innych punktów należących do wykresu tej funkcji.

a) $P(3, 6)$

b) $P(2\frac{1}{2}, 8)$

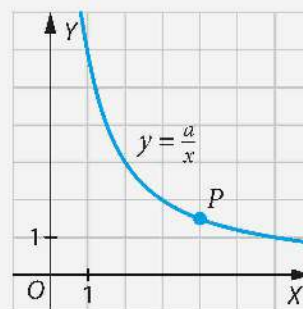
c) $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

d) $P(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

- 5 Na rysunku przedstawiono wykres pewnej proporcjonalności odwrotnej $y = \frac{a}{x}$, do której należy punkt $P(4, \frac{3}{2})$.

Wskaż zdania prawdziwe.

- A. Współczynnik proporcjonalności jest równy 6.
B. Wartość tej funkcji dla $x = \frac{1}{4}$ jest o 12 większa od wartości tej funkcji dla $x = \frac{1}{2}$.
C. Punktem przecięcia prostej o równaniu $y = x$ i wykresu tej funkcji jest punkt o współrzędnych $(3, 3)$.



- 6 Montaż zabudowy kuchennej zajmuje dwóm pracownikom 3 godziny. Oblicz, ile trwałaby usługa, gdyby dołączyła do nich jeszcze jedna osoba, pracująca w tym samym tempie.
7 Dane są trójkąty prostokątne o przyprostokątnych długości x i y oraz polu równym 18. Wykonaj polecenia.

a) Naskicuj wykres zależności między x i y , jeśli $x \in \langle 2; 9 \rangle$.

b) Oblicz obwód tego trójkąta, jeżeli $x = y$.

SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

- 1 Opakowanie makaronu zawiera informacje przedstawione w tabeli. Jaką wartość energetyczną ma i ile gramów białka zawiera 400 g makaronu? Wybierz właściwą odpowiedź.

Wartość odżywcza w 100 g produktu	
Wartość energetyczna	183 kcal
Węglowodany	37 g
Białko	6 g
Tłuszcz	0,9 g

- A. 183 kcal i 6 g C. 732 kcal i 60 g
B. 732 kcal i 24 g D. 183 kcal i 24 g

- 2 Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Jeśli wielkości $x = 12$ i $y = 9$ są wprost proporcjonalne, to współczynnik proporcjonalności a jest równy

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{3}{2}$.

- 3 Jakie wielkości są odwrotnie proporcjonalne? Wybierz właściwą odpowiedź.

- A. Długość boku kwadratu i jego obwód.
B. Długość podstawy trójkąta o ustalonej wysokości i jego pole.
C. Długości przekątnych rombu o ustalonym polu P .

- 4 Wielkości $x = 6$ i $y = 8$ są odwrotnie proporcjonalne. Oblicz wartość y dla podanej wartości x .

- a) $x = 3$ b) $x = 12$ c) $x = 1\frac{1}{3}$ d) $x = 4\frac{4}{5}$

- 5 Jaką postać ma wzór proporcjonalności odwrotnej, której współczynnik wynosi 7? Wybierz właściwą odpowiedź.

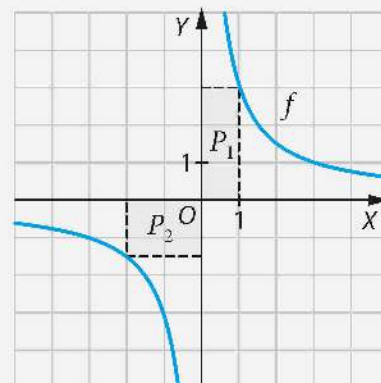
- A. $y = \frac{1}{7}x$ B. $xy = 7$ C. $x = 7y$ D. $y = 7x$

- 6 Malarz przeznaczył na zakup farby a zł. Sporządź odpowiednią tabelę i naszkicuj wykres zależności między liczbą kupionych litrów farby a jej ceną za 1 l dla podanej wartości a .

- a) $a = 15$ b) $a = 20$ c) $a = 30$

- 7 Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$. Wykonaj polecenia.

- a) Podaj wartość współczynnika a .
b) Oblicz sumę pól prostokątów P_1 i P_2 .
c) Ustal, ile punktów o obu współrzędnych całkowitych należy do wykresu tej funkcji.



Rozdział II

Graniastopy

TEMATY LEKCJI

- | | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Proste i płaszczyzny w przestrzeni | s. 29–33 |
| 2 | Graniastop | s. 34–37 |
| 3 | Pole powierzchni graniastopu | s. 38–40 |
| 4 | Odcinki w graniastopie | s. 41–45 |
| 5 | Kąt między prostą a płaszczyzną | s. 46–51 |
| 6 | Objętość graniastopu | s. 52–55 |
| 7 | Graniastopy na co dzień | s. 56–57 |
| | Powtórzenie rozdziału | s. 58–59 |

ZADANIA PODSUMOWUJĄCE
SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

Proste i płaszczyzny w przestrzeni

NA POCZĄTEK

Przyjrzyj się płaszczyznom wyznaczonym przez ściany, sufit i podłogę klasy, w której masz teraz lekcję. Jak są położone względem siebie podłoga i sufit oraz sąsiadujące ze sobą ściany?

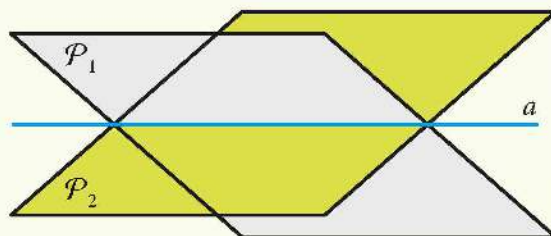
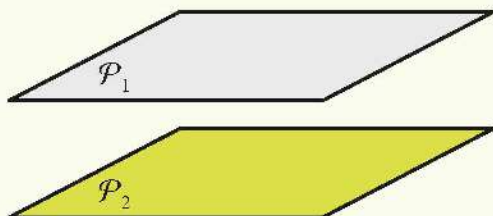


WAŻNA WIADOMOŚĆ

Płaszczyzna to zbiór punktów w przestrzeni. Oznaczamy ją literą $\mathcal{P}$ lub za pomocą 3 punktów, przez które przechodzi, np. płaszczyzna ABC to płaszczyzna przechodząca przez punkty A, B, C . Te punkty nie mogą należeć do jednej prostej.

Dwie różne **płaszczyzny** mogą być:

- **równoległe**, jeśli nie mają ze sobą punktów wspólnych w przestrzeni. Zapisujemy to w następujący sposób: $\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2$;
- **przecinające się**, jeśli nie są równoległe. Ich częścią wspólną jest prosta (prosta a). Szczególnym przypadkiem są płaszczyzny prostopadłe.



PRZYKŁAD 1

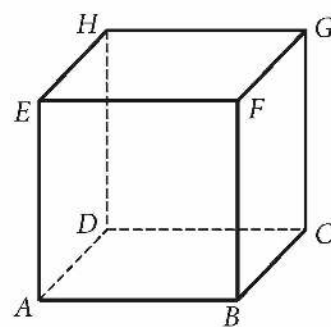
Punkty A, B, C, D, E, F, G, H są wierzchołkami sześcianu przedstawionego na rysunku. Wskaż płaszczyzny, w których zawierają się ściany sześcianu. Określ ich wzajemne położenie.

KROK 1 Stwierdzamy, że ściany sześcianu zawierają się w 6 płaszczyznach:

$ABC, ABF, BCG, CDH, ADH, EFG$

KROK 2 Określamy wzajemne położenie płaszczyzn.

- Mamy 3 pary płaszczyzn równoległych: $ABC \parallel EFG, ABF \parallel CDH, BCG \parallel ADH$.
- Pozostałe pary płaszczyzn przecinają się, np. płaszczyzny ABC i CDH .



ĆWICZENIE 1

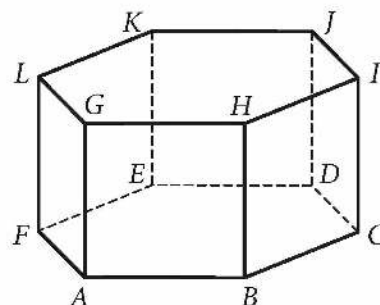
Na rysunku przedstawiono graniastosłup prosty, którego podstawą jest sześciokąt foremny. Ściany boczne tego graniastosłupa zawierają się w 6 płaszczyznach.

Wskaż płaszczyznę równoległą do podanej płaszczyzny.

a) ABH

b) BCI

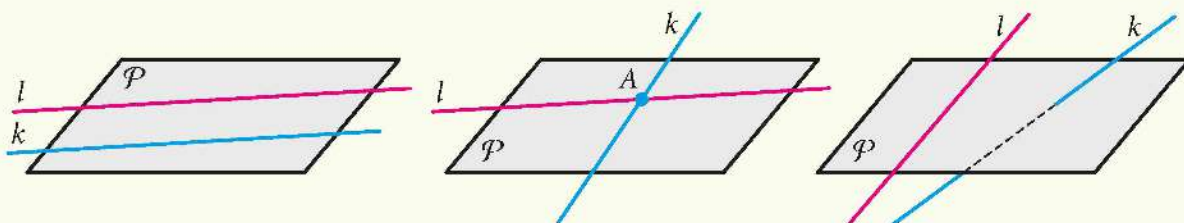
c) CDJ



WAŻNA WIADOMOŚĆ

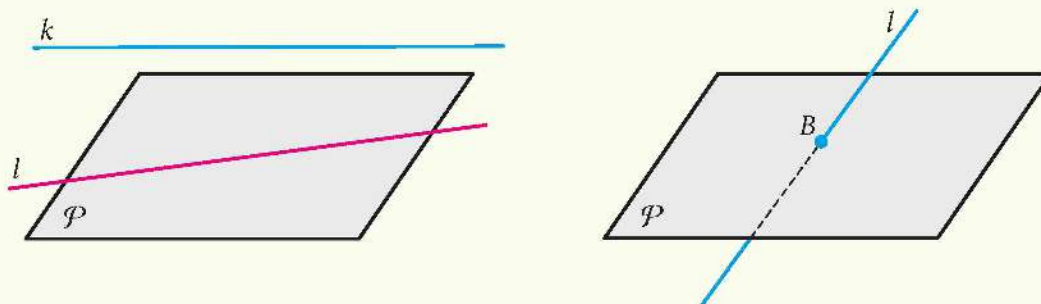
Dwie różne **proste** mogą być:

- **równoległe**, jeżeli leżą w jednej płaszczyźnie i nie mają punktów wspólnych;
- **przecinające się**, jeżeli leżą w jednej płaszczyźnie i mają 1 punkt wspólny (punkt A);
- **skośne**, jeżeli nie leżą w jednej płaszczyźnie ani nie mają punktów wspólnych.



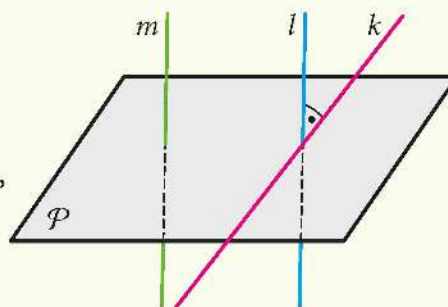
Dowolna **prosta** może być:

- **równoległa** do płaszczyzny $\mathcal{P}$, jeśli nie ma z nią punktów wspólnych (prosta k) lub jest w niej zawarta (prosta l);
- **przecinająca** płaszczyznę $\mathcal{P}$, jeśli ma z nią dokładnie 1 punkt wspólny (punkt B), tzw. punkt przebicia.



Prosta jest prostopadła do płaszczyzny $\mathcal{P}$, jeśli jest ona prostopadła do każdej prostej zawartej w płaszczyźnie $\mathcal{P}$ ($l \perp \mathcal{P}$, ponieważ $l \perp k$).

Prosta m jest skośna i prostopadła do prostej k , jeśli istnieje prosta l równoległa do prostej m i przecinająca prostą k pod kątem prostym.

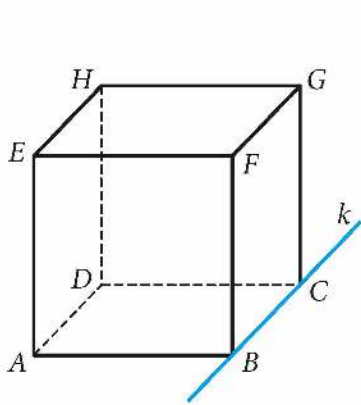


PRZYKŁAD 2

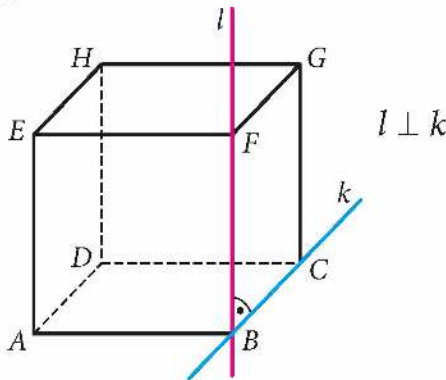
Wskaż prostą zawierającą krawędź narysowanego sześcianu, która jest skośna do prostej k oraz:

a) jest prostopadła do prostej k ,

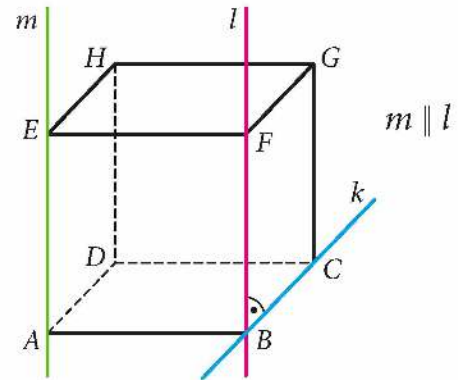
b) nie jest prostopadła do prostej k .



a) **KROK 1** Znajdujemy prostą l przecinającą prostą k pod kątem 90° .

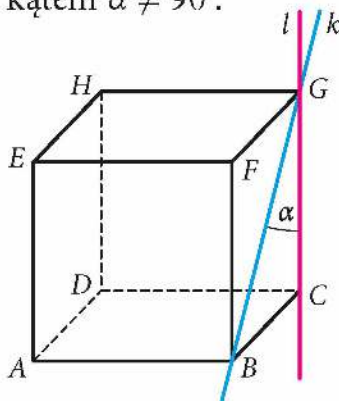


KROK 2 Znajdujemy prostą m równoległą do prostej l .

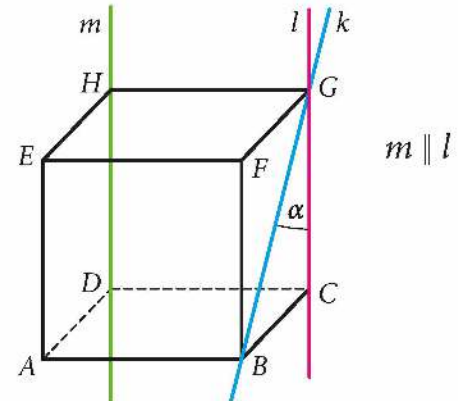


Prosta m przechodząca przez wierzchołki sześcianu A i E jest skośna i prostopadła do prostej k .

b) **KROK 1** Znajdujemy prostą l przecinającą prostą k pod kątem $\alpha \neq 90^\circ$.



KROK 2 Znajdujemy prostą m równoległą do prostej l .

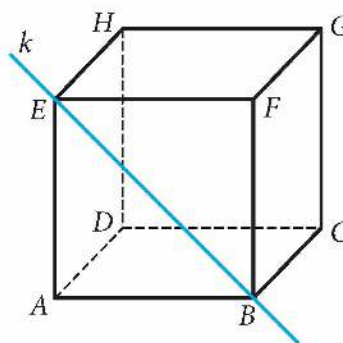


Prosta m przechodząca przez wierzchołki sześcianu D i H jest skośna, ale nie jest prostopadła do prostej k .

ĆWICZENIE 2

Wskaż proste zawierające krawędzie narysowanego sześcianu, które są skośne do prostej k oraz:

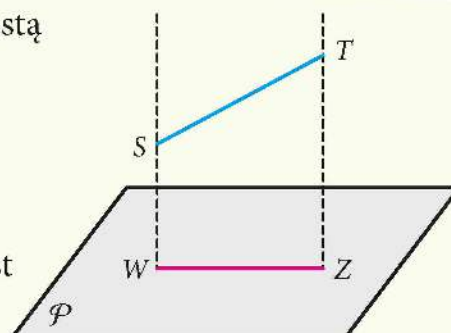
- a) nie są prostopadłe do prostej k ,
- b) są prostopadłe do prostej k .



WAŻNA WIADOMOŚĆ

Jeżeli z dowolnego punktu S poprowadzimy prostą przechodzącą przez ten punkt i prostopadłą do płaszczyzny $\mathcal{P}$, to punkt przecięcia prostej z tą płaszczyzną nazywamy **rzutem prostokątnym** punktu S na płaszczyznę $\mathcal{P}$ (punkt W).

Rzutem prostokątnym figury na płaszczyznę jest figura składająca się z rzutów prostokątnych wszystkich punktów tej figury.

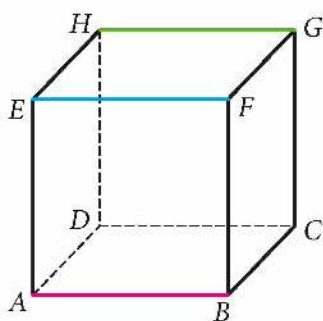


Rzutem prostokątnym odcinka ST na płaszczyznę $\mathcal{P}$ jest odcinek WZ .

PRZYKŁAD 3

Naszkicuj sześcian $ABCDEFGH$. Wskaż odcinek, który jest rzutem prostokątnym odcinka EF na płaszczyznę ABC oraz na płaszczyznę CDH .

ROZWIĄZANIE



Rzutem prostokątnym odcinka EF na płaszczyznę ABC jest odcinek AB , a na płaszczyznę CDH – odcinek GH .

ĆWICZENIE 3

Na podstawie rysunku sześcianu $ABCDEFGH$ z przykładu 3 wskaż odcinek, który jest rzutem prostokątnym na płaszczyznę ABC oraz na płaszczyznę CDH podanego odcinka.

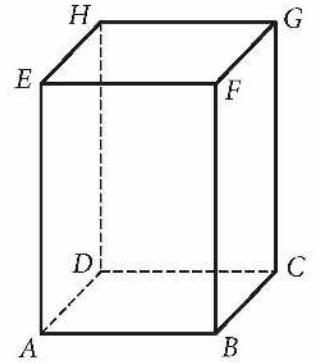
- a) CE b) EG c) FH

ZADANIA

↻ Zbiór zadań, s. 135

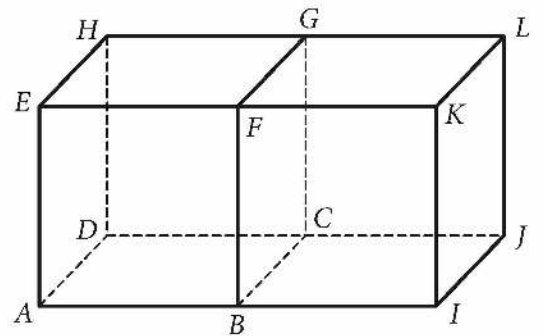
1. Przyjrzyj się rysunkowi prostopadłościanu. Wymień jego krawędzie należące do:

- a) 3 prostych równoległych do prostej zawierającej krawędź AD ,
- b) 4 prostych przecinających prostą zawierającą krawędź AD ,
- c) 4 prostych skośnych do prostej zawierającej krawędź AD .



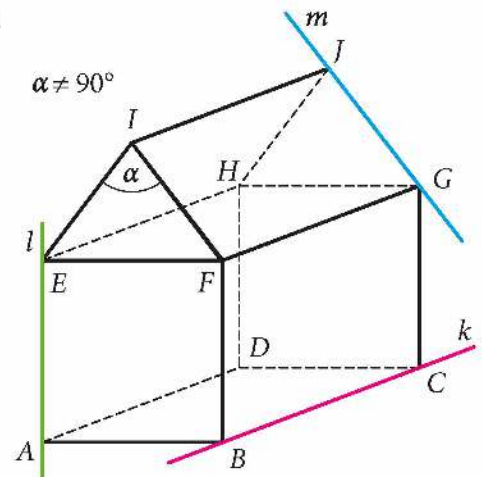
2. Dane są 2 sześciany o wspólnej ścianie $BCGF$, jak ukazano na rysunku. Wskaż rzut prostokątny na płaszczyznę AIJ oraz na płaszczyznę ADH podanego odcinka.

- a) FL c) AL
- b) BL d) AG



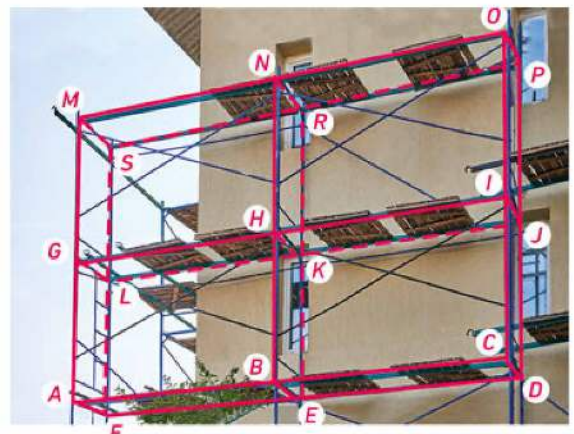
3. Narysowana bryła kształtem przypomina budynek. Spośród krawędzi AB , AD , EF , FG , DH , FI wybierz te, które należą do prostych:

- a) równoległych do prostej k ,
- b) prostopadłych do prostej l ,
- c) skośnych, ale nie prostopadłych do prostej m .

**ZADANIA BRANŻOWE**

4. Na zdjęciu przedstawiono fragment rusztowania. Wskaż rzut prostokątny odcinka JM na podaną płaszczyznę.

- a) ACD
- b) AFS
- c) FDP



2 Graniastosłup

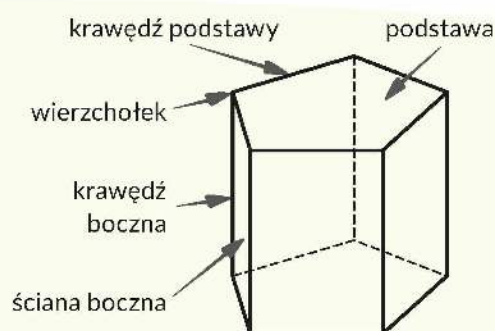
NA POCZĄTEK

Na zdjęciu pokazano przedmioty w różnych kształtach. Co mają ze sobą wspólnego?

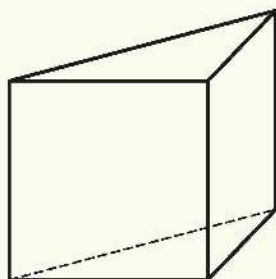


WAŻNA WIADOMOŚĆ

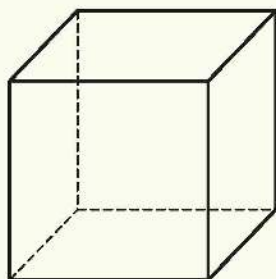
Graniastosłup to bryła, której podstawami są 2 przystające wielokąty zawarte w płaszczyznach równoległych. Odległość między tymi płaszczyznami nazywamy **wysokością graniastosłupa**. Nazwa graniastosłupa zależy od tego, jaki wielokąt znajduje się w jego podstawie.



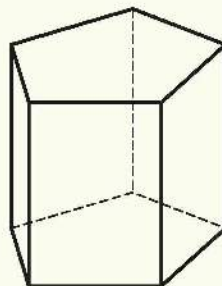
Przykłady graniastosłupów:



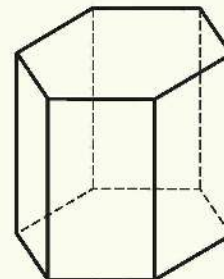
graniastosłup trójkątny



graniastosłup czworokątny



graniastosłup pięciokątny



graniastosłup sześciokątny

Graniastosłup prosty to graniastosłup, który ma krawędzie boczne prostopadłe do podstawy. Jego ściany boczne są prostokątami, a każda krawędź boczna jest jego wysokością.

Graniastosłup prawidłowy to graniastosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt foremny.

PRZYKŁAD 1

Ustal, ile ścian, krawędzi i wierzchołków ma graniastosłup pięciokątny.

ROZWIĄZANIE

Graniastosłup pięciokątny ma:

- 7 ścian (2 podstawy i 5 ścian bocznych),
- 15 krawędzi (10 krawędzi podstawy i 5 krawędzi bocznych),
- 10 wierzchołków.

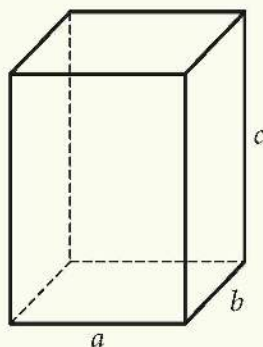
ĆWICZENIE 1

Podaj, ile ścian, krawędzi i wierzchołków ma graniastosłup:

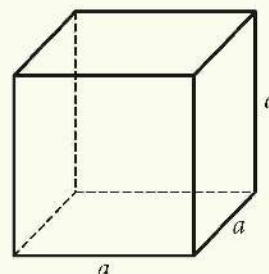
- a) sześciokątny, b) dziesięciokątny, c) n -kątny.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Prostopadłościan to graniastosłup prosty, którego podstawą jest prostokąt.



Sześcian to prostopadłościan o wszystkich krawędziach równej długości.



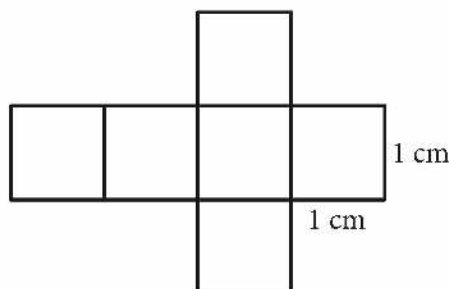
Za podstawę sześcianu i prostopadłościanu możemy przyjąć jego dowolną ścianę.

PRZYKŁAD 2

Narysuj siatkę sześcianu, którego suma długości krawędzi wynosi 1,2 dm.

KROK 1 Ustalamy długość krawędzi sześcianu:
 $1,2 : 12 = 0,1 \text{ [dm]} = 1 \text{ [cm]}$

KROK 2 Rysujemy siatkę sześcianu.

**PODPOWIEDŹ**

Powierzchnię graniastosłupa możemy rozłożyć na płaszczyźnie. Otrzymujemy wówczas siatkę graniastosłupa.

ĆWICZENIE 2

Narysuj siatkę prostopadłościanu o wymiarach $1,5 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} \times 3,5 \text{ cm}$.
 Oblicz sumę długości jego krawędzi.

To się liczy!

Wokół nas jest wiele przedmiotów w kształcie graniastosłupów prostych, np. pudełka z artykułami spożywczymi, meble, budynki. Zdarza się, że potrzebujemy określić ich wymiary. Poniższe zadanie pokaże Wam, do czego możecie zastosować tę umiejętność.

ZADANIE BRANŻOWE

Spedytor ma przygotować do wysyłki partię proszku do prania. Na podstawie zdjęcia oblicz, ile warstw opakowań z proszkiem można umieścić na paletie o wymiarach $1200 \text{ mm} \times 800 \text{ mm} \times 144 \text{ mm}$ (dł. $\times$ szer. $\times$ wys.), jeżeli wysokość palety z ładunkiem nie może przekroczyć 1,6 m, a wysokość opakowania proszku jest wysokością warstwy ładunku na paletie. Wybierz właściwą odpowiedź.



A. 6 warstw

B. 5 warstw

C. 4 warstwy

D. 3 warstwy

PRZYKŁAD 3

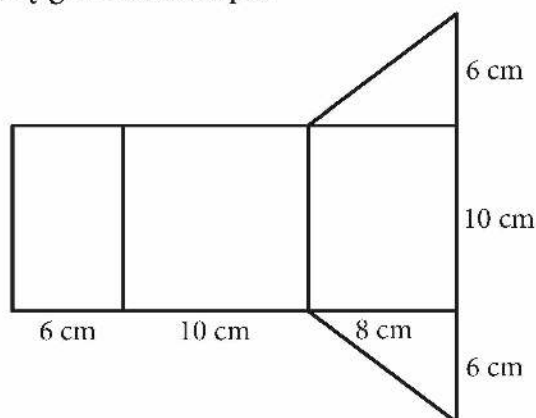
Dany jest graniastosłup prosty trójkątny, który ma w podstawie trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 6 cm i 8 cm. Krawędź boczna graniastosłupa ma długość 10 cm. Narysuj jego siatkę. Oblicz sumę długości jego krawędzi.

KROK 1 Wyznaczamy brakującą długość boku trójkąta znajdującego się w podstawie graniastosłupa za pomocą twierdzenia Pitagorasa:

$$c^2 = 6^2 + 8^2 = 100$$

$$c = \sqrt{100} = 10 \text{ [cm]}$$

KROK 2 Szkicujemy siatkę graniastosłupa.

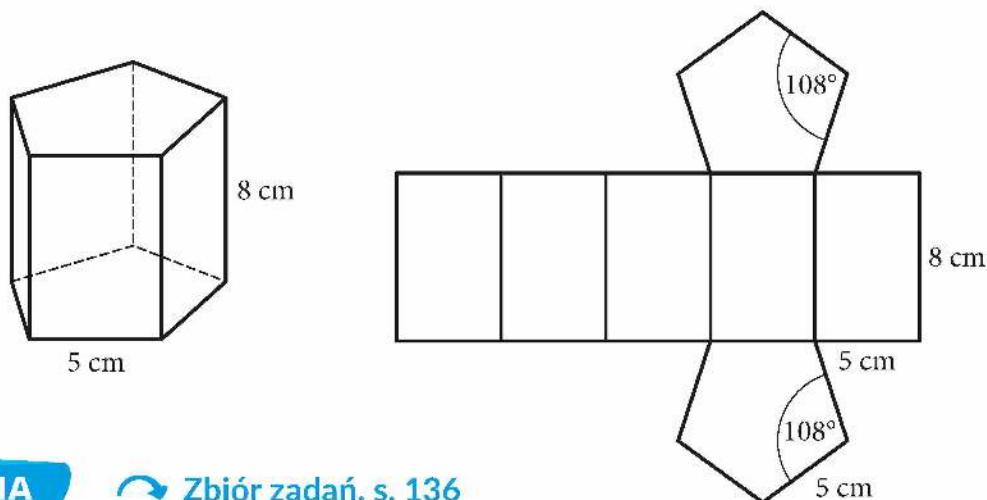


KROK 3 Obliczamy sumę długości krawędzi graniastosłupa:

$$5 \cdot 10 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 8 = 78 \text{ [cm]}$$

ĆWICZENIE 3

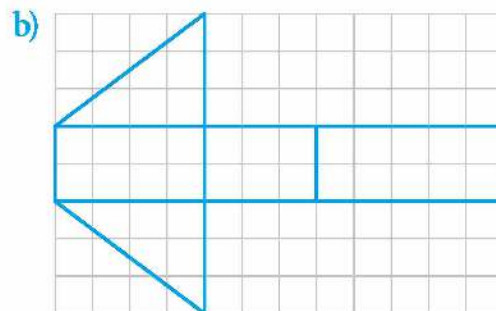
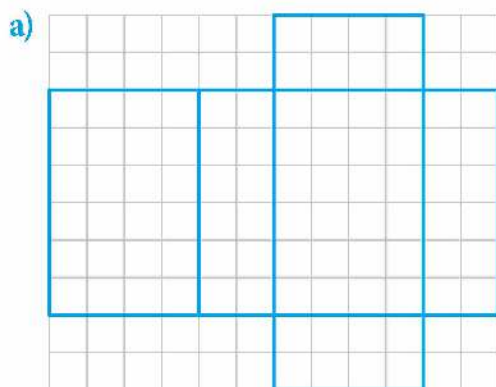
Ustal, czy przedstawiona poniżej siatka graniastoslupa prawidłowego pięciokątnego jest narysowana poprawnie. Oblicz sumę długości krawędzi bryły.



ZADANIA

🔄 Zbiór zadań, s. 136

1. Oblicz sumę długości krawędzi graniastoslupa, którego siatkę ukazano na rysunku. Przyjmij, że bok kratki ma długość 0,5 cm.



2. Naskicuj siatkę graniastoslupa prawidłowego sześciokątnego, w którym krawędź podstawy ma długość 4 cm, a krawędź boczna ma długość 2 cm. Oblicz sumę długości krawędzi tego graniastoslupa.

ZADANIA BRANŻOWE

3. Jubiler chce zrobić ze srebrnego drutu kolczyki w kształcie sześcianów, jak pokazano na zdjęciu. Oblicz, ile metrów drutu potrzebuje, żeby wykonać 100 par takich kolczyków.



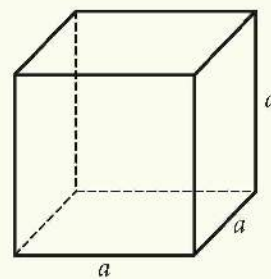
4. Przedszkolanka przygotowuje z kolorowego brystolu pudełko bez pokrywki w kształcie prostopadłościanu o wymiarach $3 \text{ dm} \times 3 \text{ dm} \times 15 \text{ cm}$. Ustal, jakie co najmniej wymiary powinien mieć arkusz brystolu, z którego można wyciąć takie pudełko, jeżeli trzeba jeszcze doliczyć 2 cm na zakładki. Podaj kilka możliwości.

Jak myślisz, w jaki sposób oszacować, czy rolka ozdobnego papieru wystarczy do zapakowania prezentu? Jakich informacji potrzebujesz?



Pole powierzchni całkowitej sześcianu o krawędzi długości a jest równe:

$$P_c = 6a^2$$



Oblicz długość krawędzi sześcianu, którego pole powierzchni całkowitej jest równe $2,16 \text{ dm}^2$. Wynik podaj w centymetrach.

KROK 1 Podstawiamy podane pole do wzoru na pole powierzchni całkowitej sześcianu:

$$P_c = 6a^2 = 2,16$$

KROK 2 Obliczamy długość krawędzi sześcianu z otrzymanego równania:

$$6a^2 = 2,16 \mid :6$$

$$a^2 = 0.36$$

$$a = 0,6 \text{ [dm]} = 6 \text{ [cm]}$$

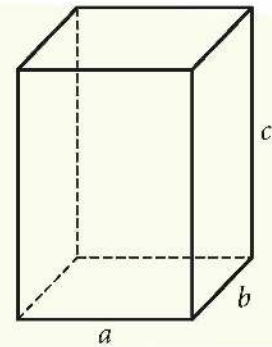
1.1. Oblicz pole powierzchni całkowitej sześcianu o łącznej długości krawędzi 6 m.

1.2. Do wykonania modelu sześcianu zużyto 1485 cm^2 kartonu, z czego 10% stanowiły zakładki. Oblicz długość krawędzi tego sześcianu.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu
o wymiarach $a \times b \times c$ jest równe:

$$P_c = 2ab + 2ac + 2bc$$

**PRZYKŁAD 2**

Oblicz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o wymiarach $4 \text{ cm} \times 12 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$.

KROK 1 Podstawiamy wymiary prostopadłościanu do wzoru na pole jego powierzchni:

$$P_c = 2ab + 2ac + 2bc = 2 \cdot 4 \cdot 12 + 2 \cdot 4 \cdot 30 + 2 \cdot 12 \cdot 30$$

KROK 2 Obliczamy pole powierzchni całkowitej:

$$\begin{aligned} P_c &= 2ab + 2ac + 2bc = 2 \cdot 4 \cdot 12 + 2 \cdot 4 \cdot 30 + 2 \cdot 12 \cdot 30 = \\ &= 96 + 240 + 720 = 1056 \text{ [cm}^2\text{]} \end{aligned}$$

ĆWICZENIE 2

Oblicz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o podanych wymiarach.

a) $8 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$

b) $60 \text{ cm} \times 0,4 \text{ m} \times 2,5 \text{ dm}$

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Pole powierzchni całkowitej graniastostupa jest równe sumie pól wszystkich jego ścian – ścian bocznych i podstaw:

$$P_c = 2P_p + P_b$$

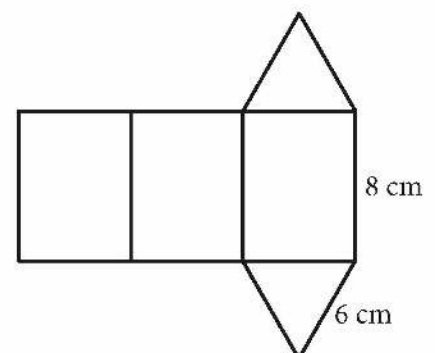
gdzie P_p – pole podstawy, P_b – pole powierzchni bocznej (suma pól ścian bocznych).

PRZYKŁAD 3

Na rysunku przedstawiono siatkę graniastostupa prawidłowego trójkątnego. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastostupa.

KROK 1 Obliczamy pole podstawy, czyli pole trójkąta równobocznego o boku długości 6 cm :

$$P_p = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$$



KROK 2 Obliczamy pole powierzchni bocznej, czyli pole 3 prostokątów o wymiarach $8 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$:

$$P_b = 3 \cdot 8 \cdot 6 = 144 [\text{cm}^2]$$

KROK 3 Obliczamy pole powierzchni całkowitej graniastosłupa:

$$P_c = 2P_p + P_b = 2 \cdot 9\sqrt{3} + 144 = 18\sqrt{3} + 144 = 144 + 18\sqrt{3} [\text{cm}^2]$$

PODPOWIEDŹ

Pole powierzchni bocznej graniastosłupa możemy też policzyć jako iloczyn obwodu podstawy graniastosłupa i jego wysokości.

ĆWICZENIE 3

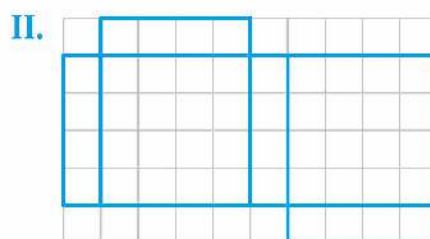
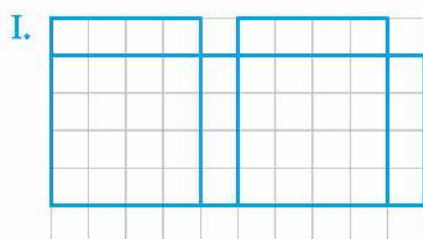
Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego, którego wszystkie krawędzie mają długość 3 cm, a podstawą jest podany wielokąt.

- a) trójkąt b) czworokąt c) sześciokąt

ZADANIA

🔄 Zbiór zadań, s. 136

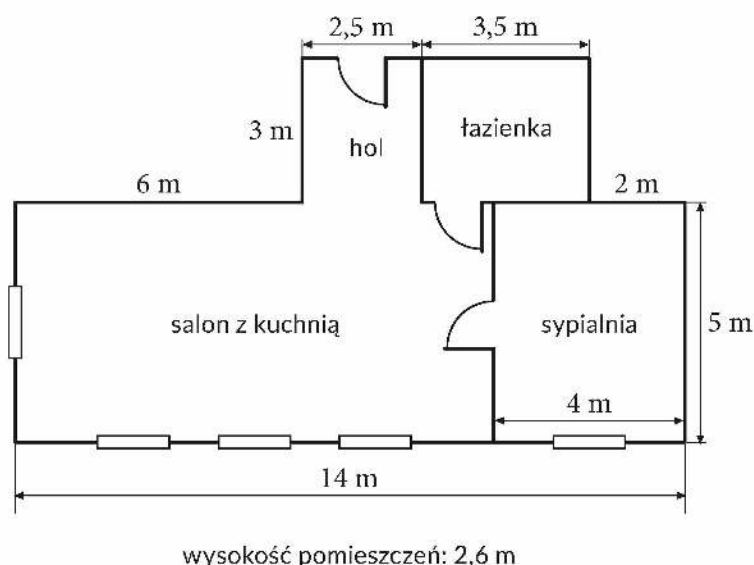
1. Wybierz rysunek, na którym przedstawiono siatkę prostopadłościanu. Oblicz jego pole powierzchni całkowitej. Przyjmij, że bok kratki ma długość 0,5 cm.



2. Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prostego, którego podstawą jest romb o przekątnych długości 15 cm i 20 cm. Wysokość tego graniastosłupa wynosi 17 cm.

ZADANIA BRANŻOWE

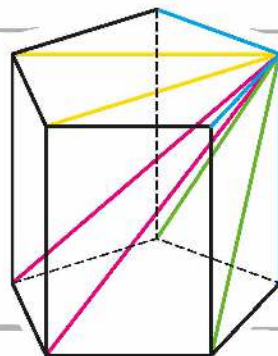
3. Malarz otrzymał od klienta rysunek z planem mieszkania. Ściany i sufit we wszystkich pomieszczeniach, poza łazienką, zostaną pomalowane na biało. Oblicz, ile puszek farby potrzeba, jeśli 1 litr farby wystarcza na pomalowanie 10 m^2 powierzchni, a farba sprzedawana jest w puszkach o pojemności 9,1 l. W obliczeniach pominij pole powierzchni okien i drzwi.



4 Odcinki w graniastosłupie

NA POCZĄTEK

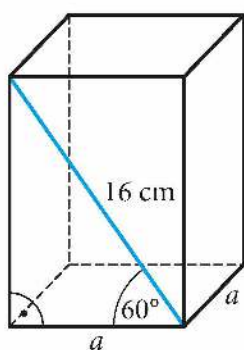
Paulina połączyła kolorowymi nitkami jeden z wierzchołków graniastosłupa z pozostałymi wierzchołkami. Jak nazywają się powstałe w ten sposób odcinki?



PRZYKŁAD 1

Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 16 cm i tworzy z krawędzią podstawy kąt 60° . Oblicz pole podstawy tego graniastosłupa.

KROK 1 Sporządzamy rysunek pomocniczy.



a – długość krawędzi podstawy graniastosłupa

KROK 2 Wyznaczamy długość krawędzi podstawy graniastosłupa za pomocą funkcji trygonometrycznej:

$$\cos 60^\circ = \frac{a}{16}$$

$$a = 16 \cdot \cos 60^\circ = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8 \text{ [cm]}$$

KROK 3 Obliczamy pole podstawy graniastosłupa, czyli pole kwadratu o boku długości 8 cm:

$$P_p = a^2 = 8^2 = 64 \text{ [cm}^2\text{]}$$

ĆWICZENIE 1

Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 10 cm i tworzy z krawędzią boczną kąt 45° . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

W każdym graniastosłupie możemy wyznaczyć:

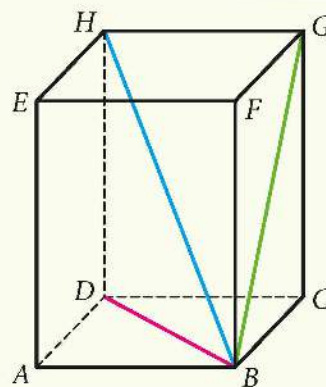
- **przekątne ścian bocznych**, czyli przekątne czworokątów będących ścianami bocznymi.

W graniastosłupie prawidłowym wszystkie przekątne ścian bocznych mają równe długości.

We wszystkich graniastosłupach, z wyjątkiem trójkątnego, możemy wyznaczyć też:

- **przekątne podstaw**, czyli przekątne wielokątów znajdujących się w podstawach;
- **przekątne graniastosłupa**, czyli odcinki łączące 2 jego wierzchołki, ale niezawarte w żadnej ścianie graniastosłupa.

Przekątna graniastosłupa nie jest przekątną ściany bocznej graniastosłupa.



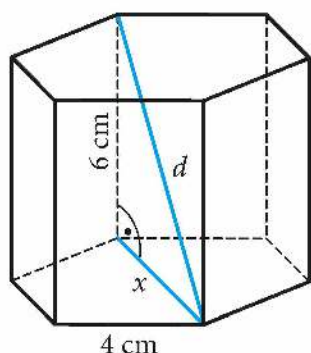
BD – przekątna podstawy graniastosłupa
 BG – przekątna ściany bocznej graniastosłupa
 BH – przekątna graniastosłupa

PRZYKŁAD 2

Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 4 cm. Oblicz długość przekątnej graniastosłupa, jeśli:

- jego wysokość jest równa 6 cm,
- przekątna graniastosłupa tworzy z przekątną ściany bocznej kąt 30° .

a) **KROK 1** Wykonujemy rysunek pomocniczy.



x – długość dłuższej przekątnej podstawy graniastosłupa
 d – długość przekątnej graniastosłupa

KROK 2 Obliczamy długość dłuższej przekątnej podstawy:

$$x = 2a = 2 \cdot 4 = 8 \text{ [cm]}$$

KROK 3 Wyznaczamy długość przekątnej graniastosłupa za pomocą twierdzenia Pitagorasa:

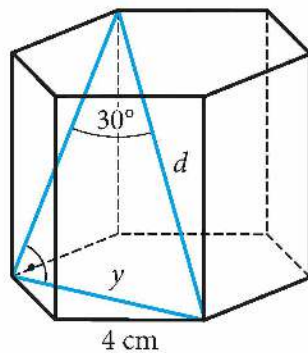
$$d^2 = 6^2 + x^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

$$d = \sqrt{100} = 10 \text{ [cm]}$$

PODPOWIEDŹ

Sześciokąt foremny ma przekątne o 2 różnych długościach. Dłuższa przekątna ma długość $2a$, a krótsza $a\sqrt{3}$, gdzie a to długość boku sześciokąta.

b) KROK 1 Wykonujemy rysunek pomocniczy.



y – długość krótszej przekątnej podstawy graniastosłupa
 d – długość przekątnej graniastosłupa

KROK 2 Wyznaczamy długość krótszej przekątnej podstawy graniastosłupa:
 $y = a\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ [cm]

KROK 3 Wyznaczamy długość przekątnej graniastosłupa za pomocą funkcji trygonometrycznej:

$$\sin 30^\circ = \frac{y}{d}$$

$$d = \frac{y}{\sin 30^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{3} \cdot 2 = 8\sqrt{3}$$
 [cm]

ĆWICZENIE 2

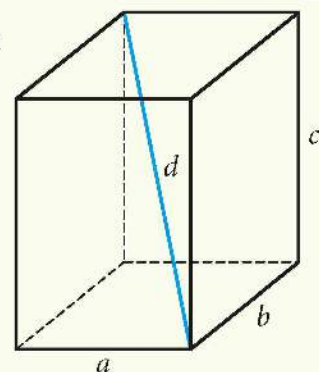
Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy długości 8 m. Oblicz długość przekątnej graniastosłupa, jeśli:

- a) przekątna graniastosłupa tworzy z przekątną podstawy kąt 45° ,
- b) przekątna graniastosłupa tworzy z jedną z krawędzi bocznych kąt 30° .

WAŻNA WIADOMOŚĆ

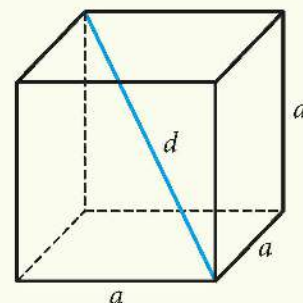
Długość przekątnej prostopadłościanu o krawędziach długości a , b i c jest równa:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$



Długość przekątnej sześcianu o krawędzi długości a jest równa:

$$d = a\sqrt{3}$$



TO JEST DOWÓD

Udowodnij, że długość przekątnej prostopadłościanu o krawędziach długości a , b i c jest równa $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

KROK 1 Obliczamy długość przekątnej prostopadłościanu d na podstawie twierdzenia Pitagorasa:

$$d^2 = x^2 + c^2$$

KROK 2 Wyznaczamy długość przekątnej podstawy prostopadłościanu za pomocą twierdzenia Pitagorasa:

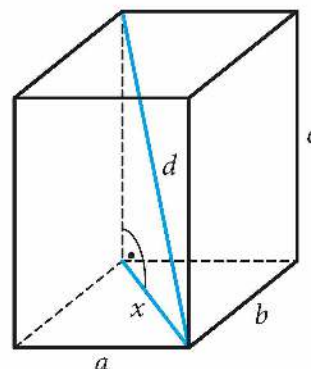
$$x^2 = a^2 + b^2$$

KROK 3 Podstawiamy kwadrat długości przekątnej podstawy x^2 do równości z przekątną prostopadłościanu:

$$d^2 = x^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

KROK 4 Wyznaczamy długość przekątnej prostopadłościanu:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

**I TY MOŻESZ TO UDOWODNIĆ!**

Udowodnij, że długość przekątnej sześcianu o krawędzi długości a jest równa $a\sqrt{3}$.

PRZYKŁAD 3

Oblicz długość przekątnej:

- a) prostopadłościanu o wymiarach $2 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$,
- b) sześcianu o krawędzi długości 15 cm .

a) **KROK 1** Podstawiamy wymiary prostopadłościanu do wzoru na długość jego przekątnej:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}$$

KROK 2 Wykonujemy obliczenia:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29} \text{ [cm]}$$

Przekątna prostopadłościanu ma długość $\sqrt{29} \text{ cm}$.

b) **ROZWIĄZANIE**

$$d = a\sqrt{3} = 15\sqrt{3} \text{ [cm]}$$

Przekątna sześcianu ma długość $15\sqrt{3} \text{ cm}$.

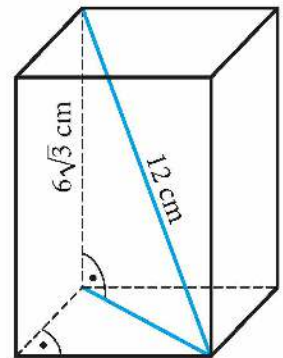
ĆWICZENIE 3

- 3.1.** Oblicz długość przekątnej prostopadłościanu o wymiarach $0,3 \text{ dm} \times 6 \text{ cm} \times 0,12 \text{ m}$.
3.2. Oblicz pole powierzchni całkowitej sześcianu, którego przekątna ma długość 18 cm .

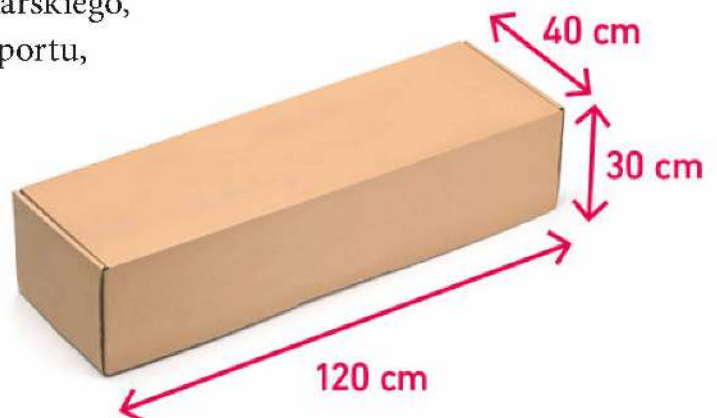
ZADANIA

Zbiór zadań, s. 137

- Naszkicuj w zeszycie graniastosłup prawidłowy czworokątny. Narysuj w nim przekątną podstawy, przekątną ściany bocznej i przekątną graniastosłupa wychodzące z jednego wierzchołka. Zaznacz kąt między:
 - przekątną graniastosłupa a krawędzią boczną,
 - przekątną graniastosłupa a krawędzią podstawy,
 - przekątną graniastosłupa a przekątną ściany bocznej graniastosłupa,
 - przekątną podstawy a przekątną ściany bocznej graniastosłupa.
- Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego przedstawionego na rysunku.
- Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 39 cm i tworzy z krawędzią podstawy kąt α . Oblicz pole podstawy tego graniastosłupa, jeśli $\sin \alpha = \frac{5}{13}$.
- Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego tworzy z krawędzią podstawy kąt 60° . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa, jeśli:
 - krawędź jego podstawy ma długość 10 cm ,
 - krawędź boczna ma długość 12 cm .

**ZADANIA BRANŻOWE**

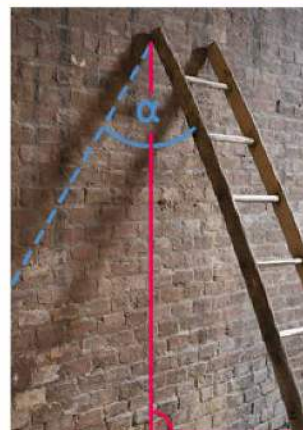
- 5.** Właściciel internetowego sklepu wędkarskiego, aby zabezpieczyć wędki podczas transportu, dodatkowo pakuje je w takie pudełka, jak to ukazane na rysunku. Ustal, jaką maksymalną długość może mieć wędka, którą da się włożyć do tego pudełka.



Kąt między prostą a płaszczyzną

NA POCZĄTEK

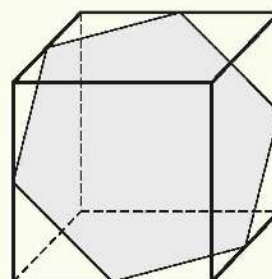
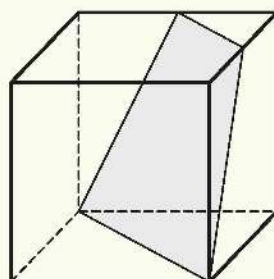
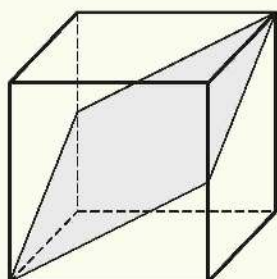
Drabina oparta jest o ścianę budynku pod pewnym kątem. Jak myślisz, czy na zdjęciu prawidłowo zaznaczono kąt między drabiną a ścianą?



WAŻNA WIADOMOŚĆ

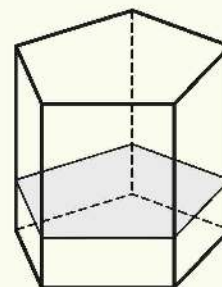
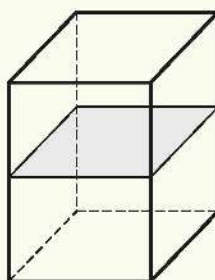
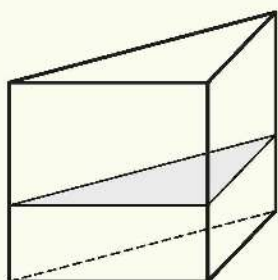
Przekrój bryły to figura płaska, która jest częścią wspólną bryły i płaszczyzny przecinającej tę bryłę. W zależności od rodzaju bryły oraz położenia płaszczyzny względem tej bryły otrzymujemy różne figury geometryczne.

Przykłady przekrojów sześcianu:



Wyróżniamy różne rodzaje przekrojów, m.in. **przekrój poprzeczny bryły**. W przypadku graniastoslupa jest to wielokąt, który otrzymamy, gdy graniastosłup przetniemy płaszczyzną równoległą do jego podstawy. Wielokąt ten przystaje do wielokąta będącego podstawą graniastoslupa.

Przykłady przekrojów poprzecznych graniastoslupa:

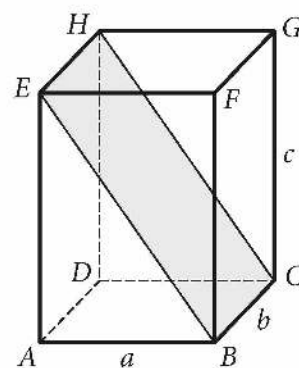


PRZYKŁAD 1

Na rysunku przedstawiono prostopadłościan $ABCDEFGH$, który przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędzie BC i EH . Oblicz pole otrzymanego przekroju dla podanych wymiarów prostopadłościanu.

a) $a = 3 \text{ cm}$, $b = 2 \text{ cm}$, $c = 4 \text{ cm}$

b) $a = 7 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$, $c = 24 \text{ cm}$



a) **KROK 1** Ustalamy, jakim czworokątem jest przekrój prostopadłościanu.

- Dwie pary boków czworokąta mają tę samą długość:
 $|BC| = |EH|$, $|BE| = |CH|$
- Wszystkie kąty wewnętrzne czworokąta są kątami prostymi:
 $|\sphericalangle CBE| = |\sphericalangle BCH| = |\sphericalangle CHE| = |\sphericalangle BEH| = 90^\circ$

Otrzymany przekrój jest więc prostokątem.

KROK 2 Określamy wymiary prostokąta będącego przekrojem prostopadłościanu:

$$|BC| = b = 2 \text{ [cm]}$$

$$|BE| = d, \text{ gdzie } d - \text{długość przekątnej ściany bocznej prostopadłościanu}$$

KROK 3 Wyznaczamy długość przekątnej ściany bocznej prostopadłościanu za pomocą twierdzenia Pitagorasa:

$$d^2 = a^2 + c^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$d = 5 \text{ [cm]}$$

KROK 4 Obliczamy pole przekroju prostopadłościanu, czyli pole prostokąta o wymiarach $2 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$:

$$P = 2 \cdot 5 = 10 \text{ [cm}^2\text{]}$$

b) ROZWIĄZANIE

Przekątna ściany bocznej prostopadłościanu ma długość:

$$d^2 = 7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625$$

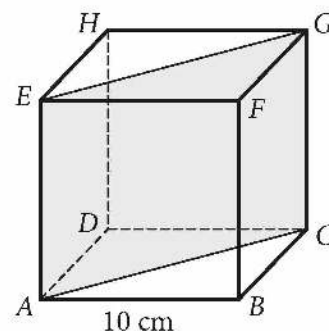
$$d = 25 \text{ [cm]}$$

Przekrój prostopadłościanu jest prostokątem o wymiarach $10 \text{ cm} \times 25 \text{ cm}$.

Jego pole jest równe: $P = 10 \cdot 25 = 250 \text{ [cm}^2\text{]}$.

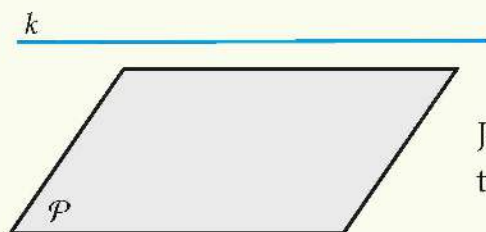
ĆWICZENIE 1

Na rysunku przedstawiono sześcian, który przecięto płaszczyzną wyznaczoną przez równoległe przekątne jego podstaw. Oblicz pole otrzymanego przekroju.



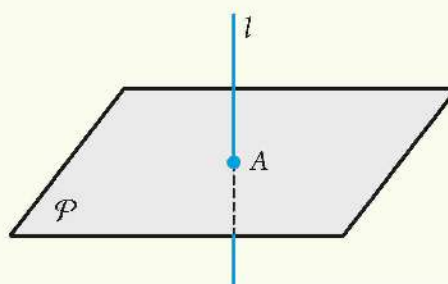
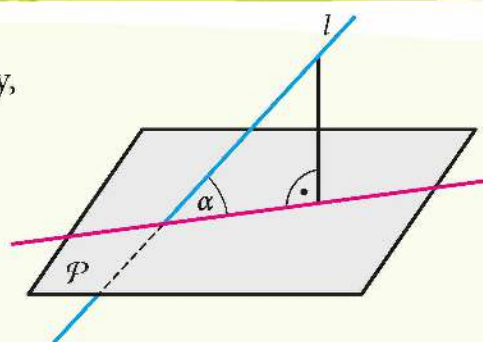
WAŻNA WIADOMOŚĆ

Kąt między prostą a płaszczyzną to kąt ostry, który ta prosta tworzy ze swoim rzutem prostokątnym na płaszczyznę.



Jeśli prosta jest równoległa do płaszczyzny, to tworzy z nią kąt o mierze 0° .

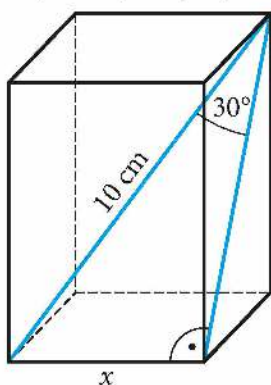
Jeśli rzutem prostokątnym prostej na płaszczyznę jest punkt (punkt A), to przyjmujemy, że płaszczyzna i prosta tworzą kąt prosty.



PRZYKŁAD 2

Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 10 cm i tworzy z jego ścianą boczną kąt 30° . Oblicz pole podstawy tego graniastosłupa.

KROK 1 Wykonujemy rysunek pomocniczy.



x – długość krawędzi podstawy graniastosłupa

Rzutem prostokątnym przekątnej graniastosłupa na jego ścianę boczną jest przekątna ściany bocznej.

KROK 2 Wyznaczamy długość krawędzi podstawy graniastosłupa – korzystamy z własności trójkąta o kątach 30° , 60° , 90° :

$$a = 10 \text{ [cm]}$$

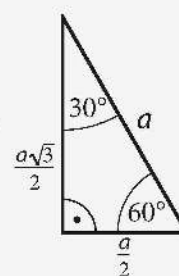
$$x = \frac{a}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ [cm]}$$

KROK 3 Obliczamy pole podstawy graniastosłupa, czyli pole kwadratu o boku długości 5 cm:

$$P_p = x^2 = 5^2 = 25 \text{ [cm}^2\text{]}$$

PODPOWIEDŹ

Boki trójkąta o kątach 30° , 60° , 90° mają długość:



ĆWICZENIE 2

Dłuższa przekątna graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego o długości 12 cm jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Oblicz długość krótszej przekątnej graniastosłupa oraz jego pole powierzchni całkowitej.

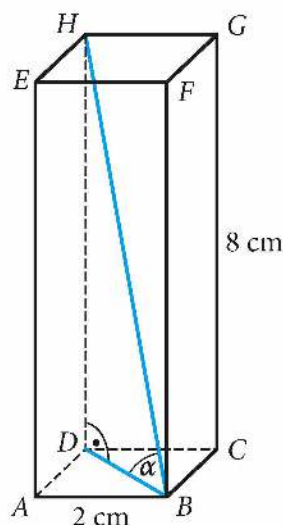
PRZYKŁAD 3

Na rysunku przedstawiono graniastosłup prawidłowy czworokątny. Wyznacz miarę kąta, który przekątna graniastosłupa tworzy z jego podstawą.

KROK 1 Sprawdzamy na rysunku, który odcinek jest rzutem prostokątnym przekątnej graniastosłupa na jego podstawę.

Rzutem prostokątnym odcinka BH na płaszczyznę ABC jest odcinek BD .

KROK 2 Stwierdzamy, że szukany kąt znajduje się między przekątną podstawy BD a przekątną graniastosłupa BH .



α – kąt między przekątną graniastosłupa a jego podstawą

KROK 3 Obliczamy długość przekątnej podstawy graniastosłupa ze wzoru na długość przekątnej kwadratu:

$$|BD| = a\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ [cm]}$$

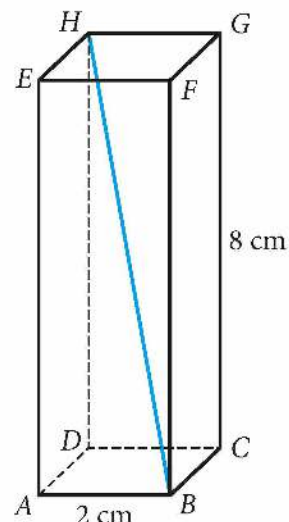
KROK 4 Wyznaczamy miarę kąta α za pomocą funkcji trygonometrycznej:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|DH|}{|BD|} = \frac{8}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \approx 2,82$$

KROK 5 Odczytujemy przybliżoną miarę kąta α z tablic wartości funkcji trygonometrycznych:

$$\alpha \approx 71^\circ$$

Przekątna graniastosłupa tworzy z podstawą kąt o mierze około 71° .



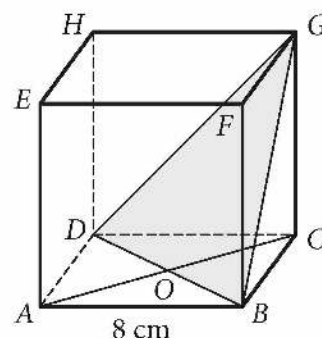
ĆWICZENIE 3

Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 6 cm. Wyznacz miarę kąta, jaki przekątna graniastosłupa tworzy z jego podstawą, jeśli wysokość graniastosłupa jest równa:

- a) 3 cm, b) $3\sqrt{3}$ cm, c) 5 cm.

PRZYKŁAD 4

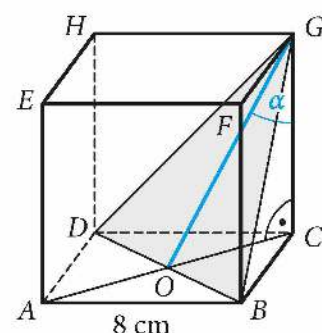
Przekrój przedstawiony na rysunku otrzymano w wyniku przecięcia sześcianu $ABCDEFGH$ płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy BD i wierzchołek G . Oblicz miarę kąta, który ten przekrój tworzy z krawędzią CG .



KROK 1 Wyznaczamy rzut prostokątny podanej krawędzi sześcianu na płaszczyznę przekroju.
Rzutem prostokątnym odcinka CG na płaszczyznę BDG jest odcinek GO .

KROK 2 Stwierdzamy, że szukany kąt znajduje się między krawędzią sześcianu CG a odcinkiem GO .

α – kąt między krawędzią CG a przekrojem sześcianu



KROK 3 Obliczamy długość odcinka CO :

$$|CO| = \frac{1}{2} \cdot |AC| = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ [cm]}$$

KROK 4 Wyznaczamy miarę kąta α , za pomocą funkcji trygonometrycznej:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|CO|}{|CG|} = \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071$$

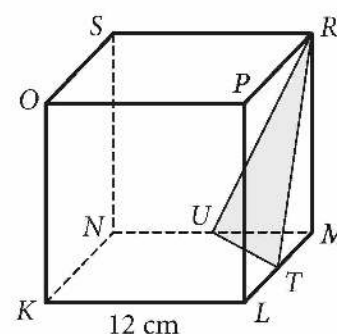
KROK 5 Odczytujemy przybliżoną miarę kąta α z tablic wartości funkcji trygonometrycznych:

$$\alpha \approx 35^\circ$$

Przekrój sześcianu tworzy z jego krawędzią CG kąt o mierze około 35° .

ĆWICZENIE 4

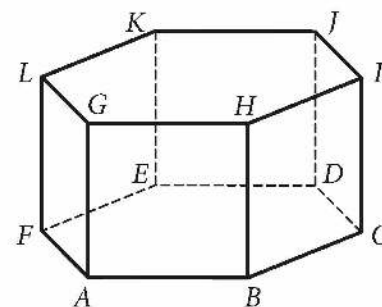
Narysowany sześcian przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki dwóch sąsiednich krawędzi (punkty T i U) oraz wierzchołek R . Wyznacz miarę kąta, który przekrój sześcianu tworzy z krawędzią MR .



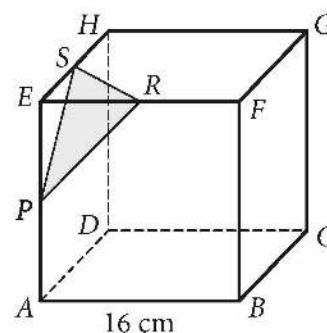
ZADANIA

Zbiór zadań, s. 137

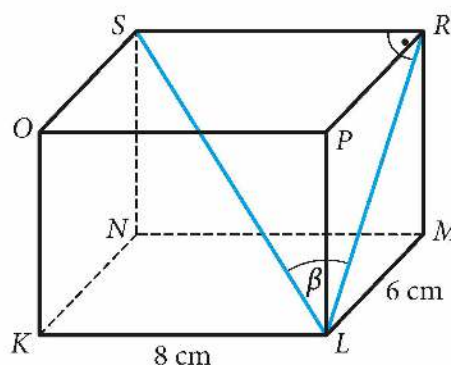
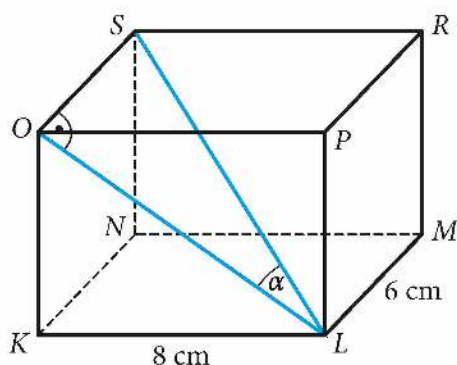
- W narysowanym graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym wskaż kąt między:
 - jego dłuższą przekątną a płaszczyzną podstawy,
 - jego krótszą przekątną a płaszczyzną podstawy,
 - jego dłuższą a krótszą przekątną, wychodzącymi z tego samego wierzchołka,
 - jego dwiema krótszymi przekątnymi, wychodzącymi z tego samego wierzchołka.



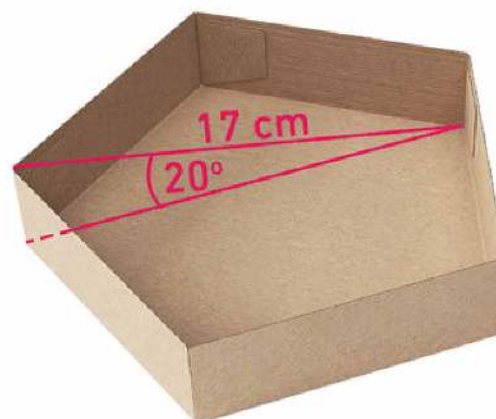
- Na rysunku został ukazany sześcian, który przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki trzech krawędzi wychodzących ze wspólnego wierzchołka E . Wykonaj polecenia.
 - Oblicz obwód otrzymanego przekroju.
 - Wyznacz miarę kąta, który przekrój sześcianu tworzy z krawędzią AE .



- Na rysunku przedstawiono prostopadłościan, którego przekątna ma długość 12 cm. Wyznacz miary kątów α i β , które ta przekątna tworzy ze ścianami bocznymi prostopadłościanu.

**ZADANIA BRANŻOWE**

- Sprzedawczyni w sklepie z galanterią skórzaną pakuje paski do spodni w pudełka w kształcie graniastosłupa prawidłowego, takie jak przedstawione na zdjęciu. Oblicz wysokość tego pudełka. Wynik zaokrąglaj do 1 cm.



6 Objętość graniastosłupa

NA POCZĄTEK

Dzięki budowie zapory w Solinie powstało Jezioro Solińskie o pojemności 472 mln m^3 . Ile butelek o pojemności $1,5 \text{ l}$ można by wypełnić wodą z tego jeziora?

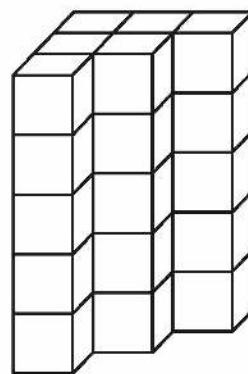


PRZYKŁAD 1

Na rysunku przedstawiono graniastosłup ułożony z sześciennych kostek o objętości 1 cm^3 każda. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

KROK 1 Na podstawie rysunku ustalamy, że 1 warstwa składa się z 6 kostek, a cała bryła – z 5 warstw.

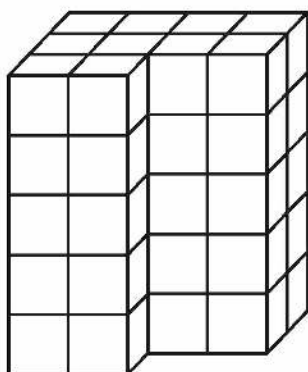
KROK 2 Obliczamy objętość graniastosłupa:
 $V = 6 \cdot 5 = 30 [\text{cm}^3]$



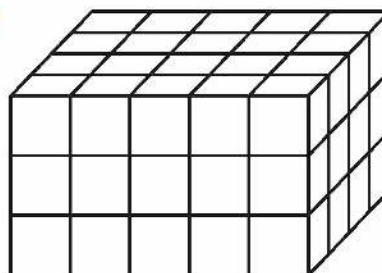
ĆWICZENIE 1

Oblicz objętość graniastosłupa ułożonego z sześciennych kostek o objętości 1 dm^3 każda.

a)



b)



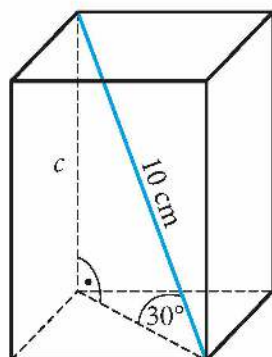
WAŻNA WIADOMOŚĆ

Objętość prostopadłościanu o wymiarach $a \times b \times c$ obliczamy ze wzoru: $V = abc$, natomiast objętość sześcianu o krawędzi długości a ze wzoru: $V = a^3$.

PRZYKŁAD 2

Przekątna prostopadłościanu o długości 10 cm jest nachylona do jego podstawy pod kątem 30° . Oblicz objętość tej bryły, jeżeli pole podstawy wynosi 20 cm^2 .

KROK 1 Wykonujemy rysunek pomocniczy.



c – wysokość prostopadłościanu

KROK 2 Wyznaczamy wysokość prostopadłościanu na podstawie funkcji trygonometrycznych:

$$\sin 30^\circ = \frac{c}{10}$$

$$c = 10 \cdot \sin 30^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \text{ [cm]}$$

KROK 3 Obliczamy objętość prostopadłościanu, skoro $ab = 20 \text{ [cm}^2\text{]}$:

$$V = abc = 20 \cdot 5 = 100 \text{ [cm}^3\text{]}$$

ĆWICZENIE 2

Oblicz objętość prostopadłościanu o podanych wymiarach.

a) $6 \text{ cm} \times 12 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$

b) $0,15 \text{ m} \times 1 \text{ dm} \times 20 \text{ cm}$

c) $0,4 \text{ dm} \times 6 \text{ cm} \times 70 \text{ mm}$

To się liczy!

Umiejętność obliczania objętości przydaje się przykładowo, gdy chcemy poznać pojemność naczynia lub formy albo ustalić ilość potrzebnego materiału podawanego w jednostkach sześciennych. Poniższe zadanie pomoże Wam utrwalić umiejętność obliczania objętości przedmiotu w kształcie prostopadłościanu.

ZADANIE BRANŻOWE

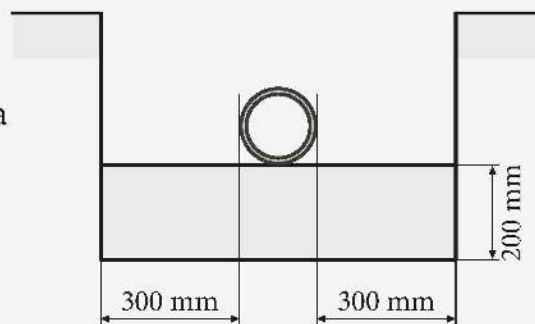
Monter instalacji sanitarnej wkłada w wykop rurę kanalizacyjną o długości 20 m i średnicy 160 mm. Jaką objętość ma podsypka ułożona pod tą rurą? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. $3,04 \text{ dm}^3$

C. $3,04 \text{ m}^3$

B. $2,40 \text{ m}^3$

D. $30,4 \text{ m}^3$



PRZYKŁAD 3

Oblicz objętość sześcianu, którego pole powierzchni całkowitej jest równe 5400 cm^2 . Wynik podaj w litrach.

KROK 1 Wyznaczamy długość krawędzi sześcianu ze wzoru na jego pole powierzchni całkowitej:

$$P_c = 6a^2 = 5400$$

$$a^2 = 900$$

$$a = \sqrt{900} = 30 \text{ [cm]}$$

KROK 2 Obliczamy objętość sześcianu:

$$V = a^3 = 30^3 = 27\,000 \text{ [cm}^3\text{]}$$

KROK 3 Zamieniamy jednostki objętości:

$$27\,000 \text{ cm}^3 = 27 \text{ dm}^3 = 27 \text{ l}$$

Objętość sześcianu wynosi 27 l.

PODPOWIEDŹ

$$1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$$

$$1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ l} = 1000 \text{ ml}$$

$$1 \text{ hl} = 100 \text{ l}$$

ĆWICZENIE 3

Oblicz pole powierzchni całkowitej sześcianu o podanej objętości.

a) 125 cm^3

b) $0,064 \text{ m}^3$

c) 216 l

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Objętość graniastosłupa wyraża się wzorem:

$$V = P_p \cdot H$$

gdzie P_p jest polem podstawy graniastosłupa, a H – jego wysokością.

PRZYKŁAD 4

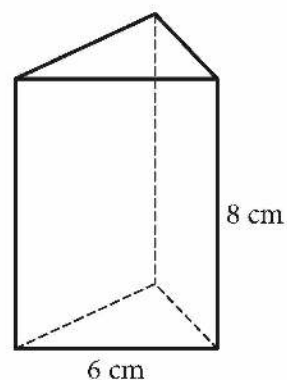
Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ukazanego na rysunku.

KROK 1 Obliczamy pole podstawy graniastosłupa ze wzoru na pole trójkąta równobocznego:

$$P_p = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$$

KROK 2 Obliczamy objętość graniastosłupa:

$$V = P_p \cdot H = 9\sqrt{3} \cdot 8 = 72\sqrt{3} \text{ [cm}^3\text{]}$$



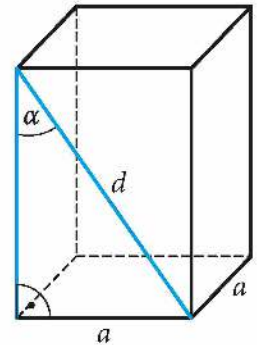
ĆWICZENIE 4

- 4.1.** Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 4 cm, a jego wysokość wynosi 10 cm.
- 4.2.** Podstawą graniastosłupa prostego o wysokości 12 cm jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 3 cm i 4 cm. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

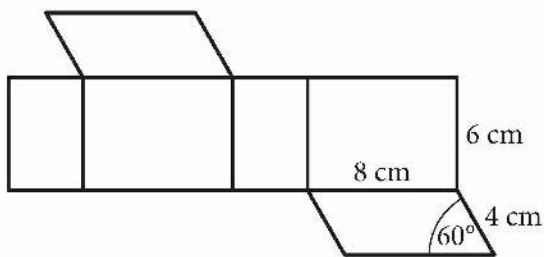
ZADANIA

Zbiór zadań, s. 138

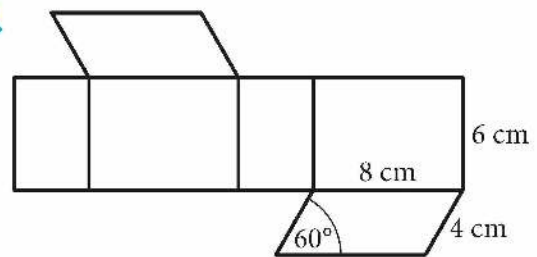
- 1.** Pole podstawy narysowanego graniastosłupa prawidłowego czworokątnego równa się 16 cm^2 , a jego objętość wynosi $64\sqrt{3} \text{ cm}^3$. Oblicz długość przekątnej ściany bocznej tego graniastosłupa. Wyznacz miarę kąta α , który tworzy ona z jego krawędzią boczną.
- 2.** Ustal, na którym z rysunków przedstawiono siatkę graniastosłupa. Oblicz jego objętość.



I.

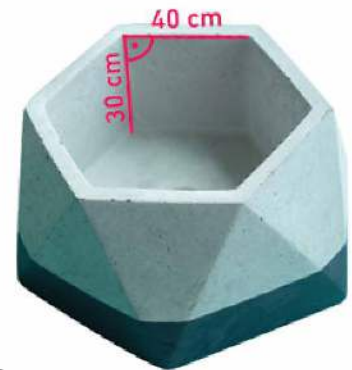


II.

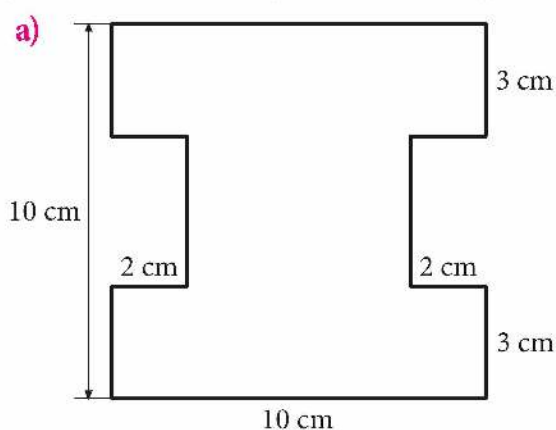


ZADANIA BRANŻOWE

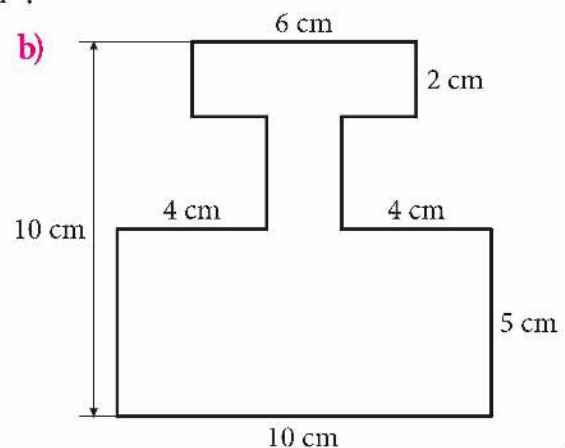
- 3.** Florysta chce ozdobić recepcję hotelu roślinami posadzonymi w donicach, które wewnątrz mają kształt graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego o wymiarach podanych na zdjęciu. Oblicz, ile worków z ziemią o pojemności 50 l każdy trzeba kupić, aby wypełnić 10 takich donic.
- 4.** Odlewnik otrzymał rysunek z przekrojem poprzecznym stalowej szyny. Oblicz objętość i masę fragmentu szyny o długości 2 m, jeśli wiadomo, że gęstość stali wynosi 8 t/m^3 .



a)



b)



7 Graniastopy na co dzień

Kiedy podejmiecie pracę w branży budowlanej albo po prostu zaplanujecie samodzielny remont domu, szybko się przekonacie, że większość budynków ma kształt graniastopów. Dlatego dobrze jest umieć obliczyć, np. pole powierzchni dachu, aby określić ilość materiału potrzebnego do jego pokrycia, czy pole powierzchni ścian do ocieplenia. Warto też umieć określić kubaturę budynku, by właściwie dobrać moc instalacji grzewczych.

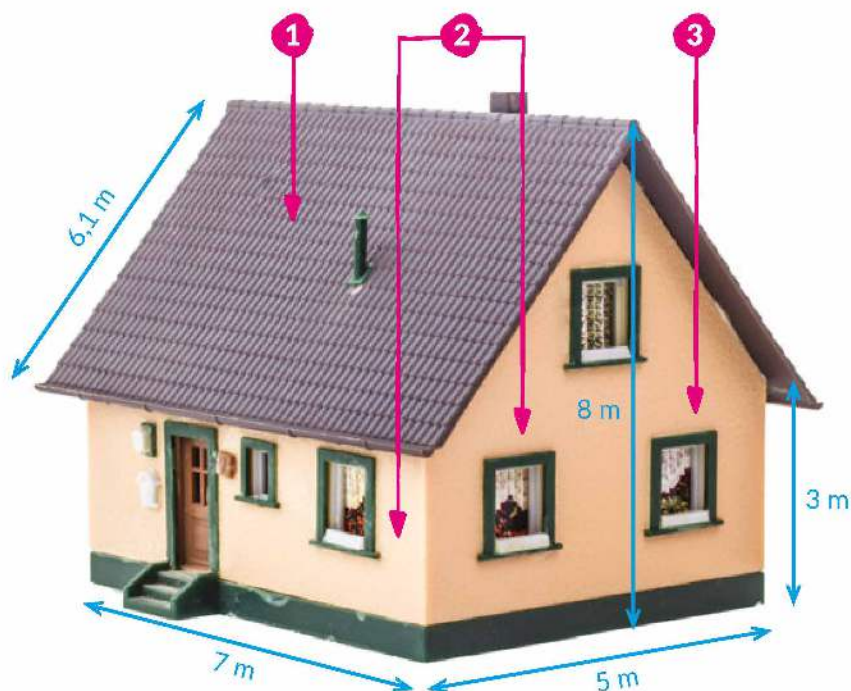
Kubatura to objętość całego budynku lub pojedynczego pomieszczenia.

W przypadku budynku wyróżniamy:

- **kubaturę brutto**, czyli objętość całego budynku, którą ustalamy na podstawie jego zewnętrznych wymiarów;
- **kubaturę netto**, czyli sumę objętości wszystkich pomieszczeń w budynku, którą obliczamy na podstawie wymiarów tych pomieszczeń.

PRZYKŁADOWY MODEL DOMU JEDNORODZINNEGO

Aby zamówić odpowiednią ilość materiałów potrzebnych do wykończenia domu, firma budowlana potrzebuje informacji dotyczących pola powierzchni elementów zewnętrznych budynku oraz jego kubatury. Można je obliczyć dzięki wiedzy na temat graniastopów.



- 1 Pole powierzchni dachu to suma pól figur, z których składają się poszczególne połacie dachu. Najczęściej są to różnego rodzaju wielokąty.

W naszym przypadku dach składa się z 2 jednakowych połaci w kształcie prostokąta o szerokości 6,1 m:

$$a = 6,1 \text{ [m]}$$

Dach wystaje poza mury budynku o 0,5 m z każdej strony, więc jego długość jest równa:

$$b = 7 + 2 \cdot 0,5 = 8 \text{ [m]}$$

Pole powierzchni dachu wynosi:

$$P = 2ab = 2 \cdot 6,1 \cdot 8 = 97,6 \text{ [m}^2\text{]}$$

- 2 Aby zamówić materiały do wykonania elewacji i ocieplenia budynku, musimy obliczyć pole powierzchni wszystkich jego ścian zewnętrznych.

Ściana z wejściem do domu ma kształt prostokąta o wymiarach $7\text{ m} \times 3\text{ m}$ ($a \times b$), zatem jej pole powierzchni wynosi:

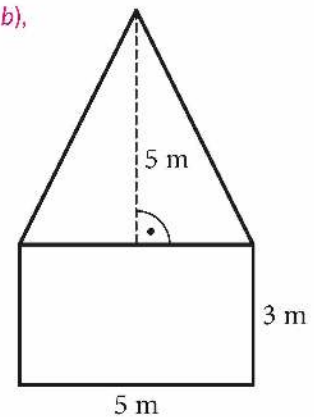
$$P = ab = 7 \cdot 3 = 21 [\text{m}^2]$$

Ściana, którą widać z boku, ma kształt pięciokąta złożonego z prostokąta o wymiarach $5\text{ m} \times 3\text{ m}$ ($a \times b$) oraz trójkąta o podstawie długości 5 m (a) i wysokości 5 m (h). Pole powierzchni tej ściany wynosi:

$$P = ab + \frac{ah}{2} = 5 \cdot 3 + \frac{5 \cdot 5}{2} = 15 + 12,5 = 27,5 [\text{m}^2]$$

Jeżeli ściany, których nie widać na zdjęciu, są przystające do przeciwnych ścian, pole powierzchni wszystkich ścian to:

$$2 \cdot 21 + 2 \cdot 27,5 = 42 + 55 = 97 [\text{m}^2]$$



- 3 Moc urządzeń do ogrzewania budynku określa się na podstawie jego powierzchni lub kubatury. Najpierw ustalamy, jakiego rodzaju bryłą jest budynek, a następnie obliczamy jej objętość. W bardziej skomplikowanych przypadkach dzielimy konstrukcję budynku na kilka brył.

Dom ukazany na zdjęciu ma kształt graniastosłupa prostego, którego podstawą jest pięciokąt (ściana, którą widać z boku). Wysokość graniastosłupa odpowiada długości domu – jest równa 7 m . Obliczamy kubaturę brutto domu za pomocą wzoru na objętość graniastosłupa:

$$V = P_p \cdot H = 27,5 \cdot 7 = 192,5 [\text{m}^3]$$

Projektant dobiera precyzyjnie moc urządzenia grzewczego na podstawie tzw. bilansu cieplnego budynku. Możemy ją też oszacować za pomocą wzoru:

$$\text{moc kotła} = V \cdot \text{zapotrzebowanie ciepła}$$

W przypadku starszego, docieplonego budynku zapotrzebowanie ciepła wynosi ok. 25 W/m^3 .

Do ogrzania domu, o którym mówimy w zadaniu, potrzebna jest:

$$\text{moc kotła} = 192,5 \cdot 25 = 4812,5 [\text{W}] \approx 4,8 [\text{kW}]$$



ZADANIA BRANŻOWE

Planujesz rozpocząć działalność gospodarczą w swojej branży. Na siedzibę swojej firmy wybierasz wolnostojący, murowany budynek gospodarczy, w którym musisz przeprowadzić remont. Budynek jest w kształcie prostopadłościanu o wymiarach zewnętrznych $6\text{ m} \times 4,5\text{ m} \times 3\text{ m}$. Ściany mają grubość 25 cm , a wysokość pomieszczenia wewnątrz wynosi $2,6\text{ m}$. W budynku nie ma ścian działowych. Odpowiedz na pytania.

- Ile metrów kwadratowych styropianu potrzebujesz do ocieplenia ścian tego budynku?
- Ile puszek z farbą musisz kupić, aby wymalować ściany i sufit pomieszczenia w budynku, jeżeli 1 puszka zawiera $2,5\text{ l}$ farby o wydajności $13\text{ m}^2/\text{l}$?
- Ile wynosi kubatura brutto i netto budynku?
- Jaką moc powinna mieć nagrzewnica powietrza, jeżeli stosuje się przelicznik $0,04\text{ kW}$ na 1 m^3 kubatury pomieszczenia?

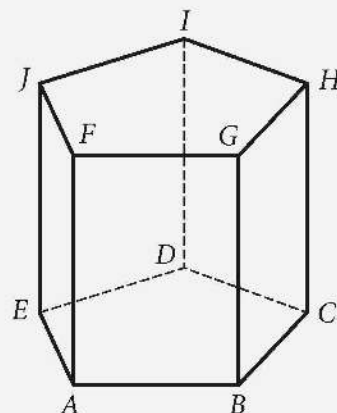
Powtórzenie rozdziału

GRANIASTOSŁUPY

ZADANIA PODSUMOWUJĄCE

- 1 Dany jest graniastosłup prawidłowy pięciokątny ukazany na rysunku. Wskaż zdania prawdziwe.

- A. Prosta zawierająca krawędź AF i prosta zawierająca krawędź DI są równoległe.
- B. Rzutem prostokątnym odcinka FH na płaszczyznę dolnej podstawy jest odcinek AC .
- C. Rzutem prostokątnym odcinka AH na płaszczyznę dolnej podstawy jest odcinek AC .

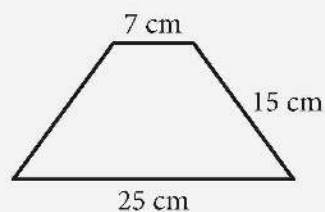
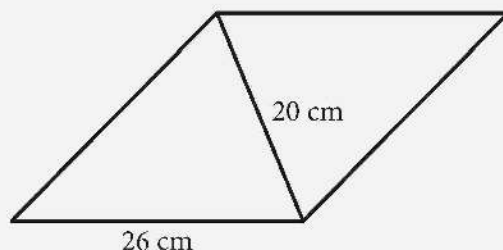
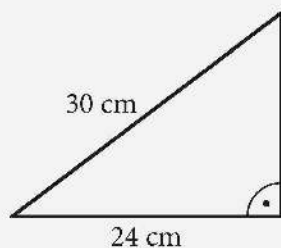


- 2 Wysokość graniastosłupa prostego jest równa 14 cm, a jego podstawą jest trójkąt równoramienny, którego jeden kąt ma miarę 120° , a ramiona długość 16 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.
- 3 Basen w kształcie prostopadłościanu o wymiarach $20\text{ m} \times 10\text{ m} \times 1,6\text{ m}$ jest w $\frac{3}{4}$ pojemności wypełniony wodą. Wskaż zdania prawdziwe.
- A. Całkowita pojemność basenu wynosi 320 000 l.
 - B. W basenie znajduje się 240 hl wody.
 - C. Aby całkowicie napełnić basen, należy wlać do niego jeszcze 800 hl wody.
- 4 Firma budowlana zrobiła wykop pod biurowiec z parkingiem podziemnym. Wykop ma długość 250 m, szerokość 300 m i głębokość 6 m. Oblicz objętość ziemi, którą usunięto.
- 5 Na rysunku przedstawiono podstawę graniastosłupa prostego o wysokości 10 cm. Oblicz objętość tego graniastosłupa. Odpowiedź podaj w litrach.

a) trójkąt prostokątny

b) romb

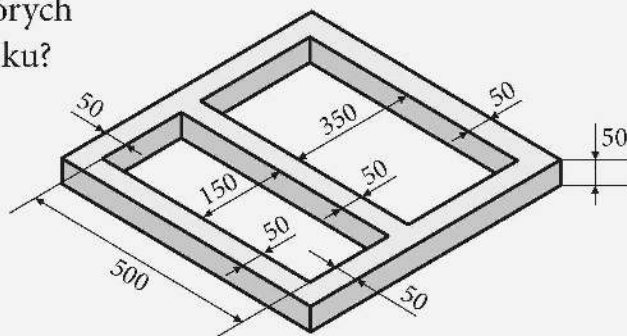
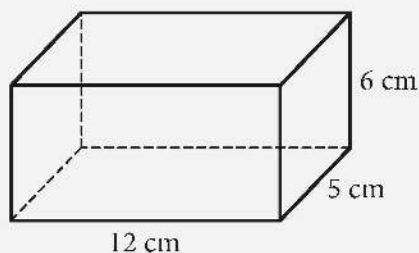
c) trapez równoramienny



- 6 Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy długości 6 cm, jeśli przekątna ściany bocznej tego graniastosłupa tworzy z jego krawędzią boczną taki kąt α , że $\text{tg } \alpha = \frac{1}{3}$.

SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

- 1 Wybierz właściwe dokończenie zdania.
Pole powierzchni całkowitej narysowanego prostopadłościanu jest równe
A. 252 cm^2 . C. 294 cm^2 .
B. 256 cm^2 . D. 324 cm^2 .
- 2 Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny o wysokości 6 cm. Suma długości wszystkich krawędzi tego graniastosłupa jest równa 48 cm. Oblicz długość przekątnej ściany bocznej i pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.
- 3 Do pojemnika wiano kolejno 0,5 hl, 1,2 l i 1800 ml wody. Ile wody znajduje się w tym pojemniku? Wybierz właściwą odpowiedź.
A. 8000 cm^3 B. $35\,000 \text{ cm}^3$ C. $53\,000 \text{ cm}^3$ D. $63\,800 \text{ cm}^3$
- 4 Dany jest sześcian o krawędzi długości 8 cm. Wskaż zdania prawdziwe.
A. Przekątna ściany bocznej tworzy z krawędzią podstawy kąt 45° .
B. Cosinus kąta między przekątną podstawy a przekątną sześcianu jest równy 0,5.
C. Objętość sześcianu jest równa 512 cm^3 .
- 5 Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny o krawędzi podstawy długości 6 cm oraz objętości równej $81\sqrt{3} \text{ cm}^3$. Ile wynosi wysokość tego graniastosłupa? Wybierz właściwą odpowiedź.
A. 1,5 cm B. 3 cm C. 6 cm D. 9 cm
- 6 Dany jest graniastosłup prosty o wysokości 10 cm. Jego podstawą jest trójkąt prostokątny, w którym tangens jednego z kątów ostrych jest równy 0,8, a krótsza przyprostokątna ma długość 4 cm. Oblicz objętość tego graniastosłupa.
- 7 Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o kącie ostrym 60° i boku długości 5 cm. Krótsza przekątna tego graniastosłupa tworzy z jego krawędzią boczną kąt 45° . Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tej bryły.
- 8 Jaką objętość mają ławy fundamentowe, których wymiary w centymetrach podano na rysunku? Wybierz właściwą odpowiedź.
A. 5 m^3
B. $5,5 \text{ m}^3$
C. 7 m^3
D. $7,5 \text{ m}^3$



Rozdział III

Ostrosłupy

TEMATY LEKCJI

- | | | |
|----------|------------------------------------|----------|
| 1 | Ostrosłup | s. 61–64 |
| 2 | Pole powierzchni ostrosłupa | s. 65–69 |
| 3 | Objętość ostrosłupa | s. 70–73 |
| 4 | Ostrosłupy we wnętrzach | s. 74–75 |
| 5 | Kąt dwuścienny | s. 76–79 |
| | Powtórzenie rozdziału | s. 80–81 |

ZADANIA PODSUMOWUJĄCE
SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

1 Ostrosłup

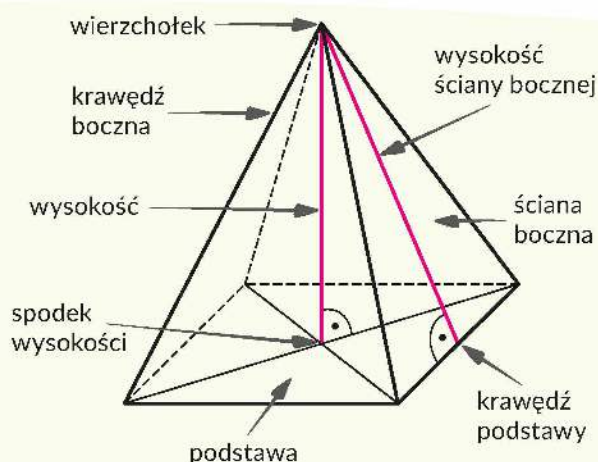
NA POCZĄTEK

Kształt ostrosłupa mają wszystkie piramidy, m.in. ukazana na zdjęciu piramida w Paryżu. Podaj kilka przykładów przedmiotów, które mają również kształt ostrosłupa.



WAŻNA WIADOMOŚĆ

Ostrosłup to bryła, której jedna ściana – zwana podstawą – jest dowolnym wielokątem, a pozostałe ściany – nazywane ścianami bocznymi – są trójkątami o wspólnym wierzchołku. W zależności od tego, jakim wielokątem jest jego podstawa, wyróżniamy ostrosłup trójkątny, czworokątny, pięciokątny itd.



Wysokość ostrosłupa to odcinek, którego jednym końcem jest wierzchołek ostrosłupa, a drugim – rzut prostokątny wierzchołka na płaszczyznę podstawy, tzw. spodek wysokości.

Ostrosłup prawidłowy to ostrosłup, który ma w podstawie wielokąt foremny, a jego ściany boczne są przystającymi trójkątami równoramiennymi.

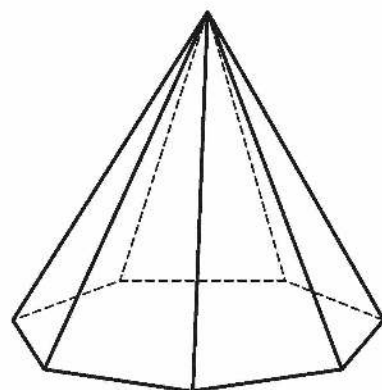
PRZYKŁAD 1

Ustal, ile ścian, krawędzi i wierzchołków ma narysowany ostrosłup siedmiokątny.

ROZWIĄZANIE

Ostrosłup siedmiokątny ma:

- 8 ścian (1 podstawa i 7 ścian bocznych),
- 14 krawędzi (7 krawędzi podstawy i 7 krawędzi bocznych),
- 8 wierzchołków.



ĆWICZENIE 1

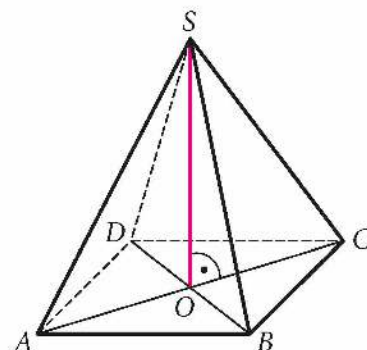
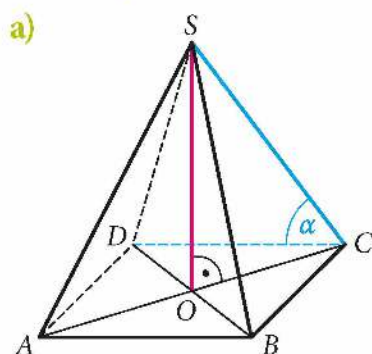
Podaj, ile ścian, krawędzi i wierzchołków ma ostrosłup:

- a) sześciokątny,
- b) dziesięciokątny,
- c) n -kątny.

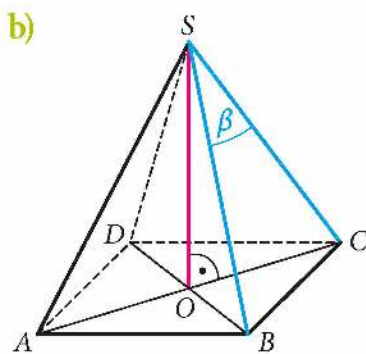
PRZYKŁAD 2

W narysowanym ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wskaż kąt między:

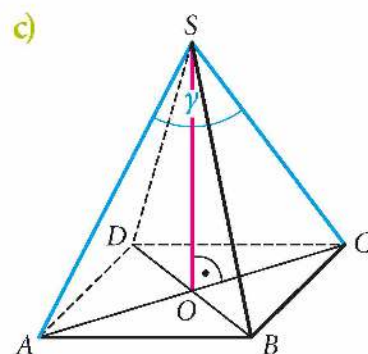
- a) krawędzią boczną a krawędzią podstawy tego ostrosłupa wychodzącymi z tego samego wierzchołka,
- b) dwiema krawędziami bocznymi należącymi do tej samej ściany ostrosłupa,
- c) dwiema krawędziami bocznymi nienależącymi do tej samej ściany ostrosłupa.

**ROZWIĄZANIE**

α – kąt między krawędzią boczną ostrosłupa CS a jego krawędzią podstawy CD wychodzącymi z tego samego wierzchołka C



β – kąt między dwiema krawędziami bocznymi należącymi do tej samej ściany ostrosłupa BCS



γ – kąt między dwiema krawędziami bocznymi AS i CS nienależącymi do tej samej ściany ostrosłupa

ĆWICZENIE 2

Naszkicuj w zeszycie ostrosłup prawidłowy pięciokątny i zaznacz w nim kąt między:

- a) krawędzią boczną a krawędzią podstawy tego ostrosłupa wychodzącymi z tego samego wierzchołka,
- b) dwiema krawędziami bocznymi należącymi do tej samej ściany ostrosłupa,
- c) dwiema krawędziami bocznymi nienależącymi do tej samej ściany ostrosłupa.

PRZYKŁAD 3

Naszkicuj siatkę opisaną poniżej bryły.

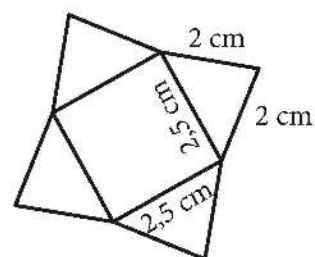
- a) ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego krawędź podstawy ma długość 2,5 cm, a suma długości krawędzi wynosi 18 cm
- b) ostrosłup prawidłowy pięciokątny, którego wszystkie krawędzie są jednakowej długości, a ich suma wynosi 30 cm

a) **KROK 1** Obliczamy długość krawędzi bocznej ostrosłupa:

$$18 - 4 \cdot 2,5 = 8 \text{ [cm]}$$

$$8 : 4 = 2 \text{ [cm]}$$

KROK 2 Szkicujemy siatkę ostrosłupa, którego podstawą jest kwadrat o boku długości 2,5 cm, a ścianami bocznymi są trójkąty równoramienne o ramionach długości 2 cm.

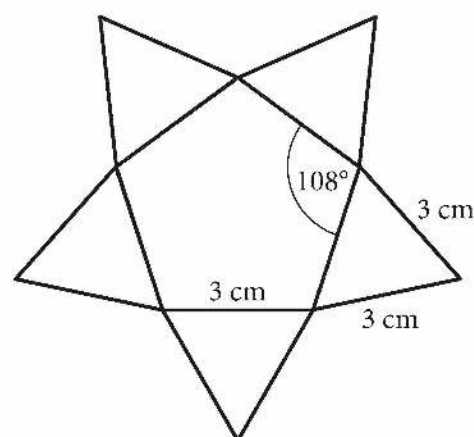


b) **KROK 1** Ustalamy liczbę krawędzi ostrosłupa pięciokątnego: Ostrosłup pięciokątny ma 10 krawędzi.

KROK 2 Wyznaczamy długość krawędzi ostrosłupa:

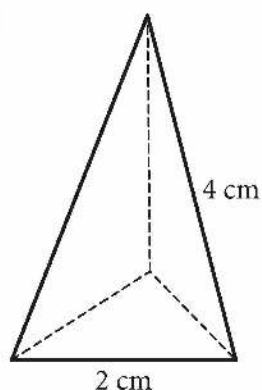
$$30 : 10 = 3 \text{ [cm]}$$

KROK 3 Szkicujemy siatkę ostrosłupa, którego podstawą jest pięciokąt foremny o boku długości 3 cm, a ścianami bocznymi są trójkąty równoboczne o bokach długości 3 cm.

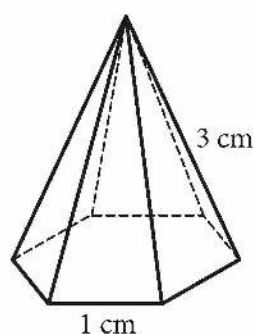
**ĆWICZENIE 3**

Oblicz sumę długości krawędzi ostrosłupa prawidłowego ukazanego na rysunku. Naszkicuj jego siatkę.

a)



b)



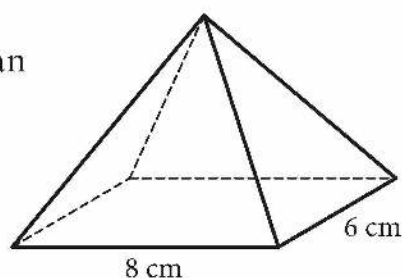
ZADANIA

Zbiór zadań, s. 139

1. Ustal, jaki ostrosłup ma:

- a) 9 ścian, b) 15 wierzchołków, c) 30 krawędzi.

2. Na rysunku przedstawiono ostrosłup czworokątny, którego podstawą jest prostokąt. Dwie spośród jego ścian bocznych są trójkątami równobocznymi. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa. Rozpatrz 2 możliwości.

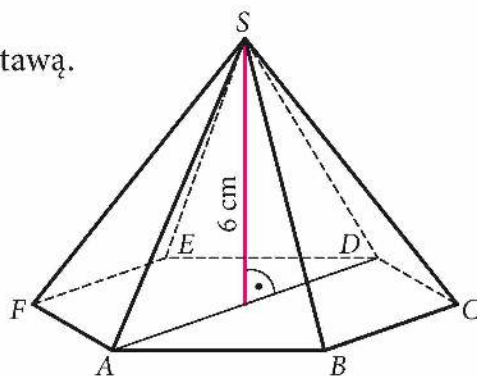


3. Wyznacz wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 8 cm, a długość krawędzi bocznej wynosi:

- a) 8 cm, b) $4\sqrt{3}$ cm, c) 12 cm.

4. Wskaż kąt między krawędzią boczną narysowanego ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego a jego podstawą. Oblicz miarę tego kąta, jeśli krawędź jego podstawy ma podaną długość.

- a) $2\sqrt{3}$ cm
b) 6 cm
c) $6\sqrt{3}$ cm



ZADANIA BRANŻOWE

5. Pracownik sklepu przygotowuje element dekoracji w kształcie piramidy. Ma do dyspozycji 4 pręty o długości 1,5 m oraz 4 pręty o długości 1 m. Uzasadnij, że istnieje tylko 1 możliwość połączenia tych prętów.

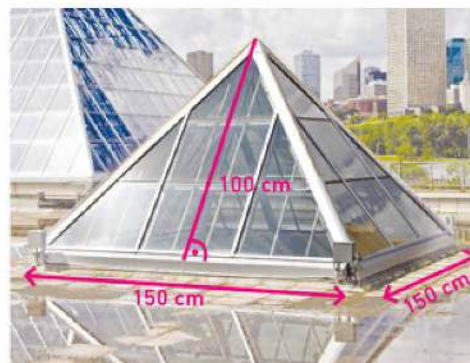
6. Stolarz ma przygotować drewniany stelaż do namiotu tipi – takiego, jak ukazany na zdjęciu. Przyjmij, że ściany namiotu tworzą ostrosłup prawidłowy czworokątny. Oblicz z dokładnością do 1 cm, jaką długość powinny mieć poszczególne elementy stelażu, jeżeli są one o 20 cm dłuższe niż krawędzie boczne tego ostrosłupa.



Pole powierzchni ostrosłupa

NA POCZĄTEK

Na zdjęciu przedstawiono świetlik dachowy, którego każda ściana jest trójkątem równoramiennym. W kształcie jakiej bryły wykonano ten świetlik? Jak myślisz, czy do jego wykonania wystarczy $2,5 \text{ m}^2$ szkła?



WAŻNA WIADOMOŚĆ

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa to suma pól wszystkich jego ścian – ścian bocznych i podstawy. Możemy to wyrazić wzorem:

$$P_c = P_p + P_b$$

gdzie P_p – pole podstawy, P_b – pole powierzchni bocznej (suma pól trójkątów).

PRZYKŁAD 1

Oblicz pole powierzchni całkowitej narysowanego ostrosłupa prawidłowego.

KROK 1 Obliczamy pole podstawy, czyli pole kwadratu o boku długości 8 cm:

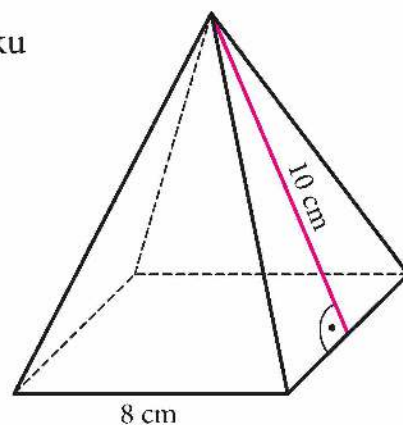
$$P_p = 8^2 = 64 \text{ [cm}^2\text{]}$$

KROK 2 Wyznaczamy pole powierzchni bocznej, czyli pole 4 trójkątów o podstawie długości 8 cm i wysokości 10 cm:

$$P_b = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 = 160 \text{ [cm}^2\text{]}$$

KROK 3 Obliczamy pole powierzchni całkowitej ostrosłupa:

$$P_c = P_p + P_b = 64 + 160 = 224 \text{ [cm}^2\text{]}$$



ĆWICZENIE 1

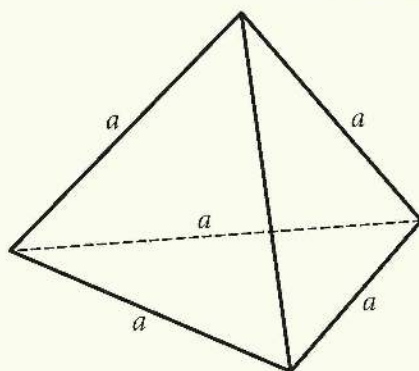
Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego wszystkie krawędzie mają długość 12 cm.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Szczególnym przypadkiem ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest **czworościan foremny**, którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi. Każda ze ścian czworościanu foremnego może być jego podstawą. Jego pole powierzchni całkowitej wyraża się wzorem:

$$P_c = a^2 \sqrt{3}$$

gdzie a – długość krawędzi czworościanu.



TO JEST DOWÓD

Udowodnij, że wysokość czworościanu foremnego o krawędzi długości a wynosi $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

KROK 1 Wyznaczamy wysokość ostrosłupa za pomocą twierdzenia Pitagorasa:

$$H^2 = a^2 - x^2$$

KROK 2 Stwierdzamy, że spodem wysokości ostrosłupa jest punkt przecięcia wysokości jego podstawy:

$$x = \frac{2}{3}h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{1} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

KROK 3 Podstawiamy otrzymaną wielkość x do pierwszej równości:

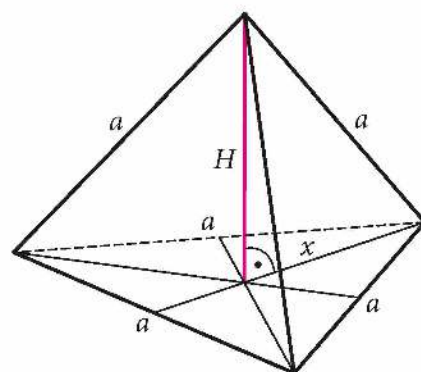
$$H^2 = a^2 - x^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

KROK 4 Sprowadzamy wyrażenie do najprostszej postaci:

$$H^2 = a^2 - x^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9} = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}$$

KROK 5 Wyznaczamy długość wysokości czworościanu foremnego:

$$H = \sqrt{\frac{2a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$



PODPÓWIEDŹ

Wysokości trójkąta równobocznego, które są jednocześnie środkowymi tego trójkąta, przecinają się w stosunku 2:1.

I TY MOŻESZ TO UDOWODNIĆ!

Udowodnij, że pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego o krawędzi długości a wynosi $a^2 \sqrt{3}$.

PRZYKŁAD 2

Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi czworościanu foremnego, którego pole powierzchni całkowitej jest równe $49\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

KROK 1 Wyznaczamy długość krawędzi czworościanu ze wzoru na jego pole powierzchni całkowitej:

$$P_c = a^2 \sqrt{3} = 49\sqrt{3}$$

$$a^2 = 49$$

$$a = 7 \text{ [cm]}$$

KROK 2 Obliczamy sumę długości krawędzi ostrosłupa:

$$6 \cdot 7 = 42 \text{ [cm]}$$

ĆWICZENIE 2

Oblicz pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego, którego suma długości wszystkich krawędzi wynosi 30 cm.

To się liczy!

Kształt ostrosłupa jest często wykorzystywany jako konstrukcja dachów różnych budowli, np. altany ogrodowej. Aby określić ilość materiałów potrzebnych do jej postawienia, wykorzystujemy obliczenia dotyczące łącznej długości krawędzi (materiał na szkielet konstrukcji) oraz pola powierzchni bocznej (materiał potrzebny do pokrycia dachu). Poniższe zadanie pozwoli Ci utrwalić te umiejętności.

ZADANIE BRANŻOWE

Dach altany ukazanej na zdjęciu ma kształt ostrosłupa prawidłowego ośmiokątnego, którego krawędź boczna jest o 40% dłuższa niż krawędź podstawy. Wykonaj polecenia.

- Ustal, jaką łączną długość mają drewniane kantówki użyte do konstrukcji tego dachu. W obliczeniach pominiń skośne łączenia kantówek.
- Oblicz, ile metrów kwadratowych gontu bitumicznego potrzeba na pokrycie dachu tej altany. Wynik podaj z dokładnością do $0,1 \text{ m}^2$.



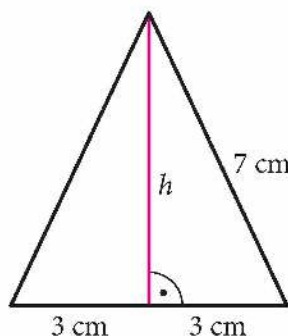
PRZYKŁAD 3

Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego siatkę przedstawiono na rysunku.

KROK 1 Obliczamy pole podstawy, czyli pole sześciokąta foremnego o boku długości 6 cm:

$$P_p = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$$

KROK 2 Wykonujemy rysunek pomocniczy ściany bocznej ostrosłupa.



h – wysokość ściany bocznej ostrosłupa

KROK 3 Obliczamy wysokość ściany bocznej na podstawie twierdzenia Pitagorasa:

$$h^2 = 7^2 - 3^2 = 49 - 9 = 40$$

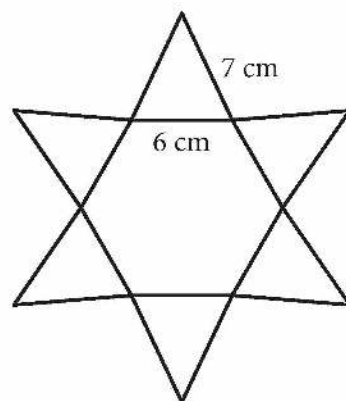
$$h = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ [cm]}$$

KROK 4 Obliczamy pole powierzchni bocznej, czyli pole 6 trójkątów równoramiennych o podstawie długości 6 cm i wysokości $2\sqrt{10}$ cm:

$$P_b = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2\sqrt{10} = 36\sqrt{10} \text{ [cm}^2\text{]}$$

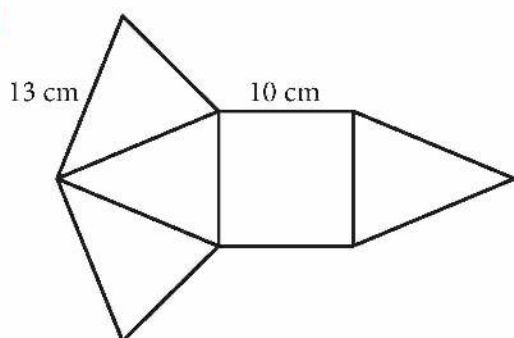
KROK 5 Obliczamy pole powierzchni całkowitej ostrosłupa:

$$P_c = P_p + P_b = 54\sqrt{3} + 36\sqrt{10} \text{ [cm}^2\text{]}$$

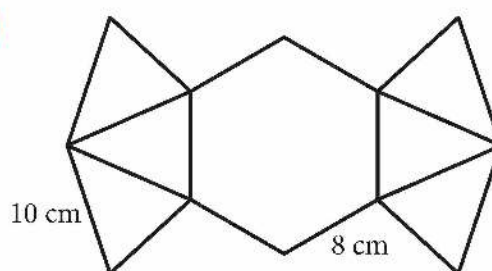
**ĆWICZENIE 3**

Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego, którego siatkę przedstawiono na rysunku.

a)



b)

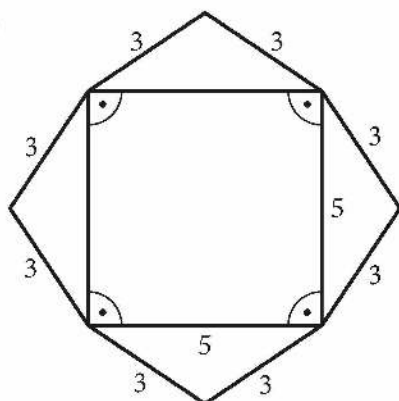


ZADANIA

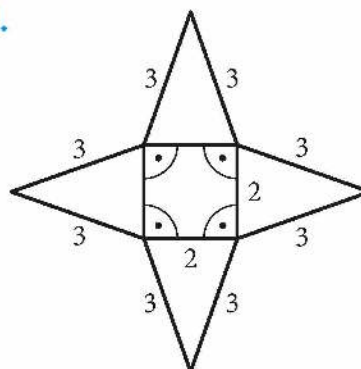
Zbiór zadań, s. 139

1. Wskaż rysunek, na którym przedstawiono siatkę ostrosłupa. Oblicz jego pole powierzchni całkowitej.

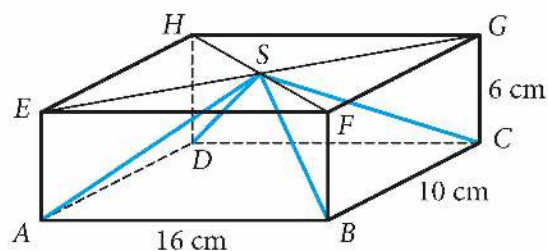
I.



II.



2. Oblicz obwód podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego pole powierzchni bocznej jest równe 96 cm^2 , a wysokość ściany bocznej wynosi 16 cm .
3. Dany jest ostrosłup czworokątny, którego podstawą jest jedna ze ścian narysowanego prostopadłościanu. Wierzchołkiem ostrosłupa jest punkt S leżący na przecięciu przekątnych ściany $EFGH$ prostopadłościanu. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.
4. Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego ściany boczne są trójkątami prostokątnymi, a krawędź podstawy ma długość $5\sqrt{2} \text{ cm}$.



ZADANIA BRANŻOWE

5. Oblicz, ile metrów kwadratowych materiału zużyje krawcowa na uszycie parasola ogrodowego, takiego jak ten pokazany na zdjęciu. Przyjmij, że na zakładki i dodatkową warstwę na górze parasola trzeba doliczyć 15% materiału. Wynik podaj z dokładnością do $0,1 \text{ m}^2$.



3 Objętość ostrosłupa

NA POCZĄTEK

Ile doniczek w kształcie ostrosłupa możesz wypełnić ziemią z doniczki w kształcie graniastosłupa, jeżeli obie mają jednakową wysokość i takie same wymiary podstaw?



WAŻNA WIADOMOŚĆ

Objętość ostrosłupa wyraża się wzorem:

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$$

gdzie P_p – pole podstawy, a H – wysokość ostrosłupa.

PRZYKŁAD 1

Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wysokość wynosi 5 cm, a krawędź podstawy ma długość 4 cm.

KROK 1 Obliczamy pole podstawy, czyli pole trójkąta równobocznego o boku długości 4 cm:

$$P_p = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{16\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$$

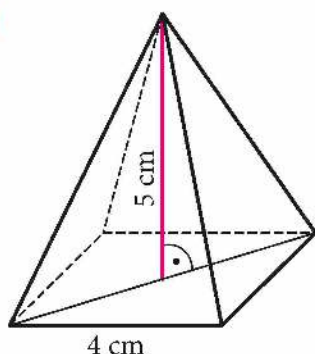
KROK 2 Obliczamy objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 5 = \frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ [cm}^3\text{]}$$

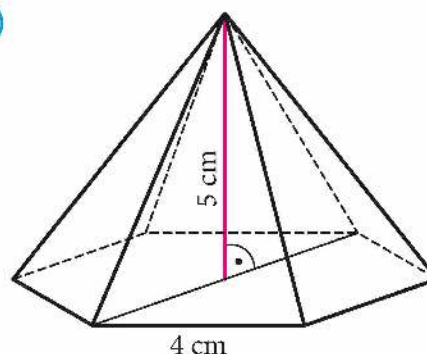
ĆWICZENIE 1

Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego przedstawionego na rysunku.

a)



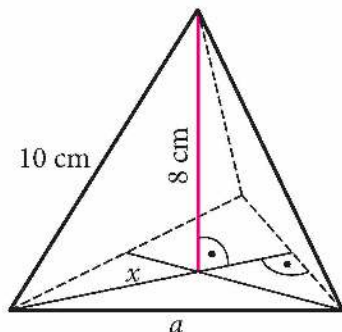
b)



PRZYKŁAD 2

Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wysokość jest równa 8 cm, a krawędź boczna ma 10 cm długości.

KROK 1 Sporządzamy rysunek pomocniczy.



x – długość odcinka łączącego spodek wysokości ostrosłupa z wierzchołkiem podstawy
 a – długość krawędzi podstawy

KROK 2 Obliczamy długość odcinka x za pomocą twierdzenia Pitagorasa:

$$x^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$$

$$x = 6 \text{ [cm]}$$

KROK 3 Stwierdzamy, że spodek wysokości ostrosłupa jest punktem przecięcia wszystkich wysokości trójkąta równobocznego, będącego podstawą ostrosłupa:

$$x = \frac{2}{3}h$$

$$h = \frac{3}{2}x = \frac{3}{2} \cdot 6 = 9 \text{ [cm]}$$

KROK 4 Wyznaczamy długość krawędzi podstawy za pomocą wzoru na wysokość trójkąta równobocznego:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 9$$

$$a = 9 : \frac{\sqrt{3}}{2} = 9 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3} \text{ [cm]}$$

KROK 5 Obliczamy pole podstawy, czyli pole trójkąta równobocznego o boku długości $6\sqrt{3}$ cm:

$$P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(6\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{36 \cdot 3\sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$$

KROK 6 Obliczamy objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 27\sqrt{3} \cdot 8 = 72\sqrt{3} \text{ [cm}^3\text{]}$$

ĆWICZENIE 2

2.1. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wysokość jest równa 12 cm, a wysokość ściany bocznej wynosi 15 cm.

2.2. Oblicz objętość czworościanu foremnego o krawędzi długości 8 cm.

To się liczy!

Bryły, o których uczycie się na lekcjach matematyki, często są inspiracją dla architektów. Na całym świecie możecie spotkać budowle np. w kształcie piramid. Poniższe zadanie pozwoli Wam utrwalić umiejętność obliczania objętości ostrosłupów.

ZADANIE BRANŻOWE

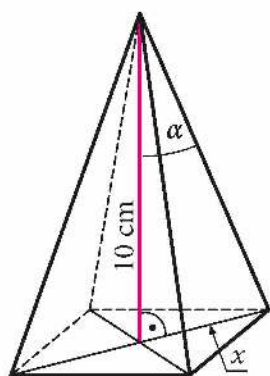
Oblicz kubaturę Wielkiej Piramidy Ameryki w Memphis [czyt.: memfis], która ma kształt ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o wymiarach podanych na zdjęciu z dokładnością do 1 m.



PRZYKŁAD 3

Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o wysokości 10 cm, jeśli tangens kąta między wysokością tego ostrosłupa a jego krawędzią boczną wynosi 0,3.

KROK 1 Sporządzamy rysunek pomocniczy.



α – kąt między wysokością ostrosłupa a krawędzią boczną
 x – długość odcinka łączącego spodek wysokości ostrosłupa z wierzchołkiem podstawy

KROK 2 Obliczamy długość odcinka x na podstawie funkcji trygonometrycznej:

$$\frac{x}{10} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$x = 10 \cdot \operatorname{tg} \alpha = 10 \cdot 0,3 = 3 \text{ [cm]}$$

KROK 3 Stwierdzamy, że spodek wysokości ostrosłupa znajduje się w punkcie przecięcia przekątnych podstawy:

$$d = 2x = 2 \cdot 3 = 6 \text{ [cm]}$$

KROK 4 Obliczamy pole podstawy, czyli pole kwadratu o przekątnej długości 6 cm:

$$P_p = \frac{d^2}{2} = \frac{6^2}{2} = \frac{36}{2} = 18 \text{ [cm}^2\text{]}$$

KROK 5 Obliczamy objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 10 = 60 \text{ [cm}^3\text{]}$$

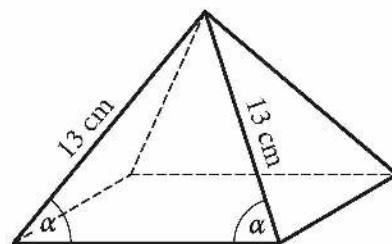
PODPOWIEDŹ

Każdy kwadrat jest rombem, więc do obliczania jego pola możemy wykorzystać wzór na pole rombu o przekątnych długości e i f :

$$P = \frac{ef}{2} = \frac{dd}{2} = \frac{d^2}{2}$$

ĆWICZENIE 3

Na rysunku przedstawiono ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego ściana boczna jest trójkątem równoramiennym o takim kącie α przy podstawie, że $\cos \alpha = \frac{5}{13}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

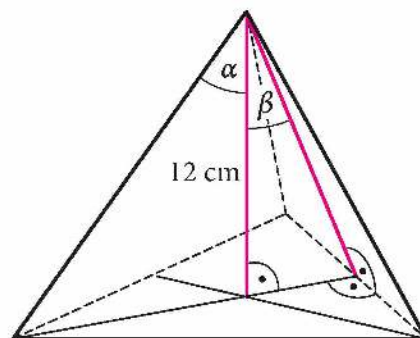


ZADANIA

Zbiór zadań, s. 140

1. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wysokość tworzy:

- a) z krawędzią boczną kąt α taki, że $\tan \alpha = 0,5$;
- b) z wysokością ściany bocznej kąt β taki, że $\tan \alpha = \frac{1}{3}$.



2. Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego tworzy z krawędzią boczną kąt 60° . Oblicz objętość tego ostrosłupa, jeśli wiadomo, że jego podstawa ma pole równe 36 cm^2 .

ZADANIA BRANŻOWE

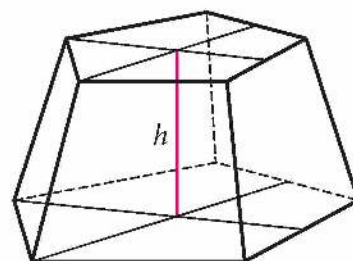
- 3. Właściciel pasieki ma 12 l wosku pszczelego, z którego postanowił zrobić świece w kształcie piramidy o wysokości równej 6 cm. Ustal, ile świeczek może zrobić, jeżeli podstawą każdej jest kwadrat o obwodzie równym 14 cm.
- 4. Nową propozycją deseru przygotowywaną przez cukiernika jest czekoladowa piramidka. Oblicz z dokładnością do 1 ml pojemność foremki, w której był przygotowywany deser. W obliczeniach przyjmij $\sqrt{2} \approx 1,41$.



4 Ostrosłupy we wnętrzach

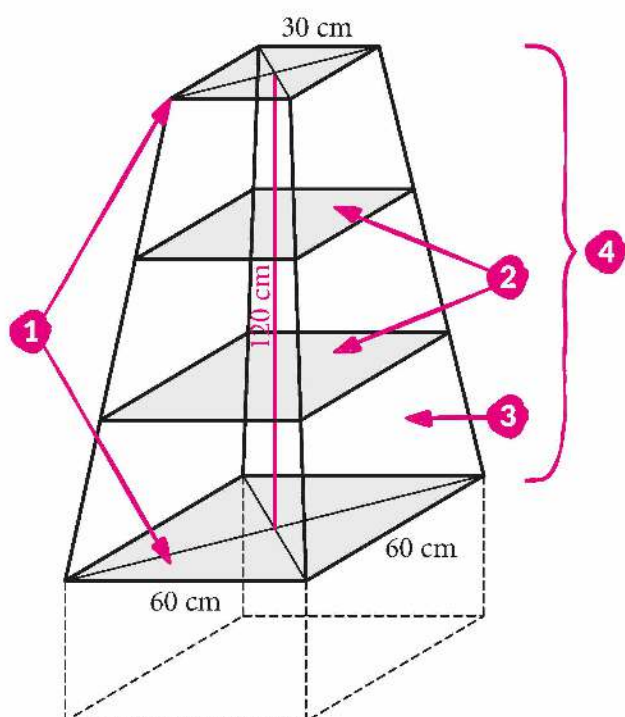
W działalności handlowej kluczem do sukcesu jest przyciągnięcie uwagi klienta. Salony kosmetyczne, jubilerskie czy ze sprzętem elektronicznym prześcigają się w oryginalnych sposobach prezentacji swoich produktów. W związku z tym przy projektowaniu gablot sklepowych stosuje się coraz ciekawsze rozwiązania. Jednym z nich może być również witryna w kształcie ostrosłupa.

Ostrosłup ścięty to ostrosłup, który przecięto płaszczyzną równoległą do jego podstawy na pewnej wysokości h . Otrzymujemy w ten sposób drugą podstawę, która jest wielokątem podobnym do wielokąta znajdującego się w podstawie ostrosłupa.



PRZYKŁADOWY PROJEKT WITRYNY

Właściciel sklepu z telefonami komórkowymi chce postawić na postumencie w kształcie prostopadłościanu szklaną witrynę w kształcie ostrosłupa ściętego. Kwadratowe półki w gablocie mają być rozmieszczone w równych odległościach. Szklarz zaproponował wykonanie witryny ze szkła hartowanego o grubości 4 mm, które kosztuje 130 zł/m². Jaki będzie koszt szkła potrzebnego do zrobienia gabloty?



- 1 Jeśli chcemy oszacować koszt wykonania nietypowej witryny, musimy dokładnie określić wymiary poszczególnych jej elementów, zwłaszcza wymiary półek. Niektóre z nich możemy odczytać bezpośrednio z projektu.

Wszystkie półki są w kształcie kwadratów. Pierwsza od góry ma bok długości 30 cm, a czwarta – długości 60 cm. Ich pole powierzchni wynosi:

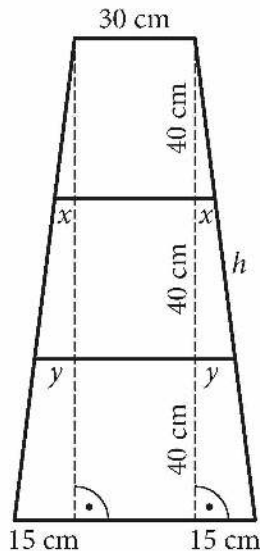
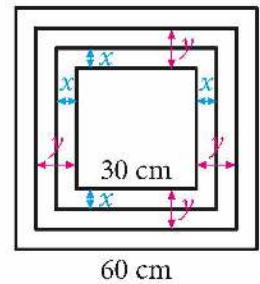
$$P_1 = a^2 = 30^2 = 900 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$P_4 = 60^2 = 3600 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Te półki są jednocześnie ścianami zewnętrznymi witryny – podstawami ściętego ostrosłupa.

- 2 Do ustalenia wymiarów półek, których nie zaznaczono na projekcie, wykorzystamy wiedzę z lekcji matematyki.

Rzutem prostokątnym pierwszej półki na płaszczyznę kolejnych półek jest kwadrat o boku długości 30 cm, co ukazano na rysunku z widokiem witryny z góry. Aby wyznaczyć wymiary kolejnych półek, należy powiększyć ten rzut odpowiednio o x oraz y z każdej strony. Druga od góry półka ma bok długości $(30 + 2x)$ cm, a trzecia: $(30 + 2y)$ cm.



By wyznaczyć brakujące długości odcinków x i y , wykonujemy rysunek przekroju witryny. Po jego lewej i prawej stronie widać trójkąty, które są podobne na mocy cechy KKK. Odpowiednie długości boków tych trójkątów są proporcjonalne:

$$\frac{x}{15} = \frac{40}{120}$$

$$\frac{y}{15} = \frac{80}{120}$$

$$x = 15 \cdot \frac{40}{120} = 15 \cdot \frac{1}{3} = 5 \text{ [cm]} \quad y = 15 \cdot \frac{80}{120} = 15 \cdot \frac{2}{3} = 10 \text{ [cm]}$$

Druga od góry półka ma kształt kwadratu o boku długości: $30 + 2 \cdot 5 = 40$ [cm] oraz polu równym: $P_2 = 40^2 = 1600$ [cm²].

Trzecia od góry półka ma bok długości: $30 + 2 \cdot 10 = 50$ [cm] oraz pole powierzchni równe: $P_3 = 50^2 = 2500$ [cm²].

- 3 Jeżeli w gablocie ma się znajdować wartościowy towar, warto wyposażać ją w ściany boczne.

W naszym przypadku ściany boczne są jednakowe – mają kształt trapezów równoramiennych o podstawach długości 30 cm i 60 cm. Wyznaczamy ich wysokość za pomocą twierdzenia Pitagorasa:

$$h^2 = 120^2 + 15^2 = 14\,400 + 225 = 14\,625$$

$$h \approx 121 \text{ [cm]}$$

Obliczamy pole powierzchni bocznej ostrosłupa ściętego:

$$P_b = 4 \cdot \frac{(a+b) \cdot h}{2} = 4 \cdot \frac{(60+30) \cdot 121}{2} = 21\,780 \text{ [cm}^2\text{]}$$

- 4 Obliczamy łączne pole powierzchni wszystkich szklanych elementów, aby oszacować koszt szkła do gabloty. Należy pamiętać, że ta kwota nie uwzględnia kosztu przycięcia szkła, montażu oraz szklanych odpadów.

$$\text{Pole powierzchni wszystkich półek wynosi: } P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 900 + 1600 + 2500 + 3600 = 8600 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$\text{Pole powierzchni szkła użytego do wykonania gabloty to: } P_c = P + P_b = 8600 + 21\,780 = 30\,380 \text{ [cm}^2\text{]} = 3,038 \text{ [m}^2\text{]}$$

$$\text{Wszystkie szklane elementy będą kosztowały: } P_c \cdot \text{cena za m}^2 = 3,038 \cdot 130 = 394,94 \text{ [zł]}$$

ZADANIA BRANŻOWE

Firma meblowa produkuje takie stoły jak ukazano na zdjęciu. Wykonaj polecenia.

- Oblicz pole powierzchni blatu stołu, jeżeli ma on kształt pięciokąta foremnego.
- Wyznacz łączną długość wszystkich elementów użytych do wykonania stelażu stołu.
- Oszacuj koszt materiałów do wykonania tego stołu, jeżeli zapłacimy 220 zł za 1 m² szkła oraz 50 zł za 1 m.b. rury ze stali. W obliczeniach pominij koszt odpadów.



5 Kąt dwuścienny

NA POCZĄTEK

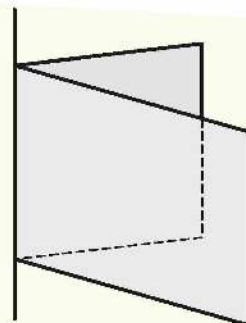
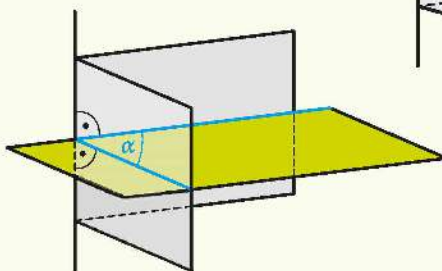
Przyjrzyj się zdjęciu. Jaki rodzaj kąta tworzą połacie dachu? Czy wiesz, w jaki sposób ustalić jego miarę?



WAŻNA WIADOMOŚĆ

Dwie półpłaszczyzny o wspólnej krawędzi dzielą przestrzeń na 2 części. Każdą z nich, łącznie z tymi półpłaszczyznami, nazywamy **kątem dwuściennym**, a półpłaszczyzny – ścianami kąta dwuściennego.

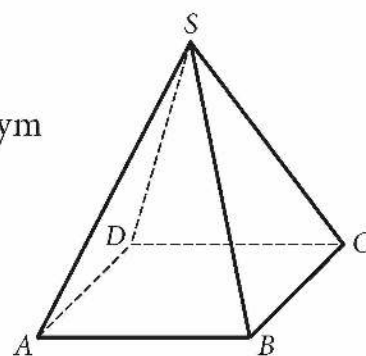
Miarą kąta dwuściennego jest miara kąta płaskiego otrzymanego jako przekrój kąta dwuściennego płaszczyzną prostopadłą do jego krawędzi.



PRZYKŁAD 1

Wskaż w narysowanym ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt między:

- a) ścianą boczną ostrosłupa a jego podstawą,
- b) sąsiednimi ścianami bocznymi.



- a) **KROK 1** Wybieramy wspólną krawędź dla podstawy ostrosłupa i jednej z jego ścian bocznych, np. krawędź BC .

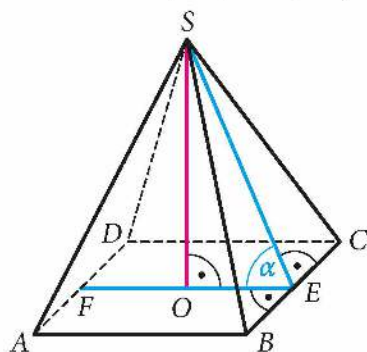
KROK 2 Wyznaczamy odcinki prostopadłe do krawędzi BC , aby otrzymać płaszczyznę do niej prostopadłą:

ES – wysokość ściany bocznej, EF – symetralna krawędzi BC

$ES \perp BC$, $EF \perp BC$

Płaszczyzna EFS jest prostopadła do krawędzi BC .

KROK 3 Zaznaczamy kąt między odcinkami EF oraz ES .



α – kąt dwuścienny między ścianą boczną ostrosłupa BCS i jego podstawą $ABCD$

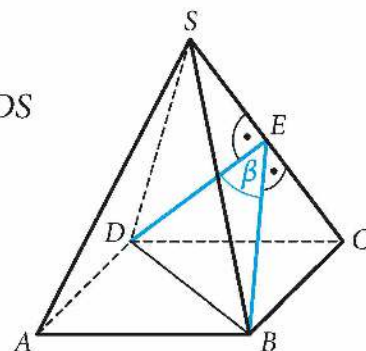
b) ROZWIĄZANIE

CS – wspólna krawędź ścian bocznych ostrosłupa BCS i CDS

BE , DE – wysokości ścian bocznych BCS i CDS

poprowadzone do krawędzi CS

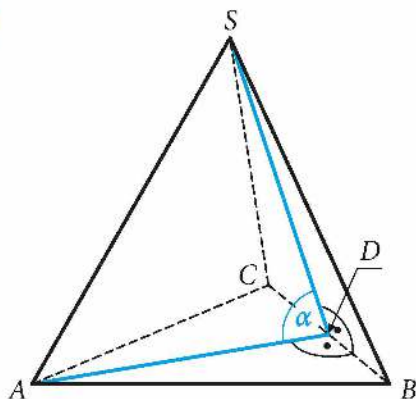
β – kąt między ścianami bocznymi ostrosłupa BCS i CDS



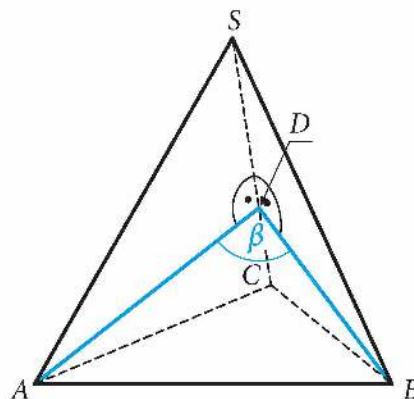
ĆWICZENIE 1

Określ, między jakimi ścianami zaznaczono kąt w narysowanym ostrosłupie prawidłowym trójkątnym o podstawie ABC . Podaj wspólną krawędź ścian tego kąta.

a)



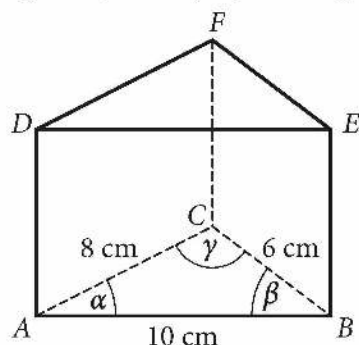
b)



PRZYKŁAD 2

Dany jest graniastosłup prosty trójkątny, którego podstawą jest trójkąt prostokątny o bokach długości 6 cm, 8 cm i 10 cm. Wyznacz miary kątów, które tworzą ze sobą ściany boczne tego graniastosłupa.

KROK 1 Sporządzamy rysunek pomocniczy.



α , β , γ – kąty wewnętrzne podstawy graniastosłupa

KROK 2 Stwierdzamy, że skoro ściany boczne graniastosłupa są prostopadłe do jego podstawy, to szukane miary kątów są miarami kątów trójkąta ABC .

KROK 3 Znajdujemy miarę kąta między ścianami $BCFE$ i $ACFD$:
 $\gamma = 90^\circ$, ponieważ jest to kąt leżący naprzeciwko najdłuższego boku trójkąta prostokątnego znajdującego się w podstawie.

KROK 4 Wyznaczamy miarę kąta między ścianami $ABED$ i $ACFD$ na podstawie funkcji trygonometrycznej:

$$\sin \alpha = \frac{6}{10} = 0,6$$

KROK 5 Odczytujemy przybliżoną miarę kąta z tablic wartości funkcji trygonometrycznych:

$$\alpha \approx 37^\circ$$

KROK 6 Obliczamy miarę kąta między ścianami $ABED$ i $BCFE$ za pomocą wzoru na sumę miar kątów ostrych w trójkącie prostokątnym:

$$\beta = 90^\circ - \alpha \approx 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$$

Ściany boczne graniastosłupa tworzą ze sobą kąt 90° oraz kąty o miarach około 37° i 53° .

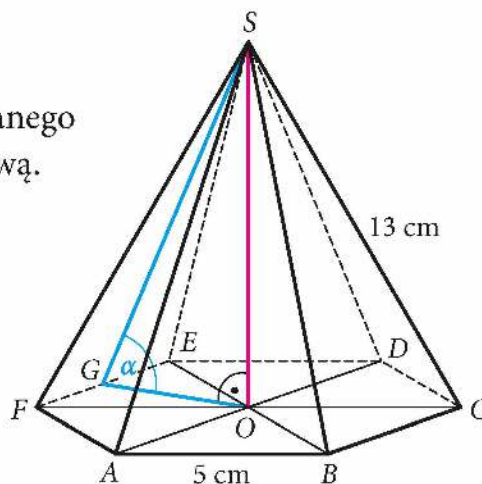
ĆWICZENIE 2

Podaj miarę kąta utworzonego przez 2 sąsiednie ściany boczne graniastosłupa prawidłowego:

- a) trójkątnego, b) czworokątnego, c) sześciokątnego.

PRZYKŁAD 3

Wyznacz miarę kąta α między ścianą boczną narysowanego ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego a jego podstawą.



KROK 1 Obliczamy wysokość ostrosłupa za pomocą twierdzenia Pitagorasa:

$$\begin{aligned} |OS|^2 &= |CS|^2 - |CO|^2 = 13^2 - 5^2 = \\ &= 169 - 25 = 144 \end{aligned}$$

$$|OS| = 12 \text{ [cm]}$$

KROK 2 Ustalamy długość odcinka GO ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego:

$$|GO| = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ [cm]}$$

KROK 3 Wyznaczamy miarę kąta α , korzystając z funkcji trygonometrycznej:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|OS|}{|GO|} = \frac{12}{\frac{5\sqrt{3}}{2}} = \frac{24}{5\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{5} \approx 2,77$$

KROK 4 Odczytujemy przybliżoną miarę kąta z tablic wartości funkcji trygonometrycznych:

$$\alpha \approx 70^\circ$$

Ściana boczna ostrosłupa jest nachylona pod kątem około 70° do jego podstawy.

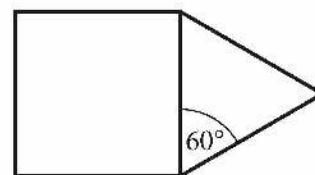
ĆWICZENIE 3

Wyznacz miarę kąta między sąsiednimi ścianami czworościanu foremnego.

ZADANIA

↻ Zbiór zadań, s. 140

- Oblicz miarę kąta, jaki tworzą ze sobą 2 sąsiednie ściany boczne graniastosłupa prawidłowego:
 - pięciokątnego,
 - ośmiokątnego,
 - dziesięciokątnego.
- Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym krawędź podstawy ma długość 12 cm, a kąt między ścianą boczną a podstawą ostrosłupa ma miarę 60° .
- Na rysunku przedstawiono fragment siatki ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego obwód podstawy wynosi 24 cm. Wyznacz miarę kąta nachylenia ściany bocznej do podstawy tego ostrosłupa.



ZADANIA BRANŻOWE

- Stolarz otrzymał zlecenie wykonania budy dla psa – takiej jak na zdjęciu. Dach wystaje po 5 cm z każdej strony tej budy, a jej nóżki mają wysokość 7 cm. Wykonaj polecenia.
 - Wyznacz miarę kąta α , pod jakim stolarz powinien nachylić do siebie połacie dachu.
 - Oblicz wysokość tej budy z dokładnością do 1 cm.
 - Ustal, ile metrów kwadratowych drewnianych desek potrzebuje stolarz do zbudowania tej budy. Nie odliczaj otworu wejściowego. Wynik zaokrąglij do jednego miejsca po przecinku.

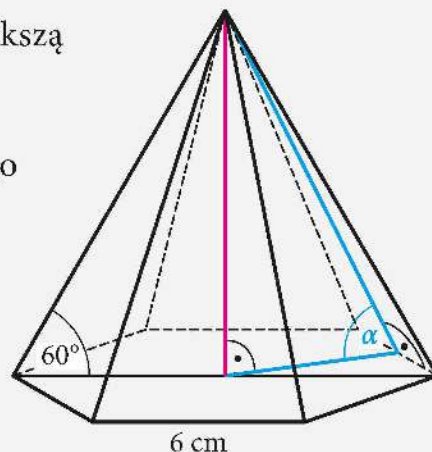
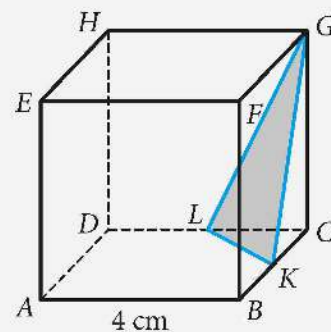


Powtórzenie rozdziału

OSTROŚŁUPY

ZADANIA PODSUMOWUJĄCE

- 1 Podaj liczbę ścian i krawędzi ostrosłupa, jeśli ma on 51 wierzchołków.
- 2 W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość 6 cm. Wyznacz długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa, jeśli tworzy ona z podstawą ostrosłupa kąt o podanej mierze.
a) 30° b) 45° c) 60°
- 3 Wszystkie krawędzie w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym mają długość 5 cm. Wskaż zdania prawdziwe.
A. Krawędź boczna ostrosłupa tworzy z krawędzią podstawy kąt 30° .
B. Pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest równe $25\sqrt{3} \text{ cm}^2$.
C. Wysokość ostrosłupa wynosi $2,5\sqrt{2} \text{ cm}$.
- 4 Sześcian $ABCDEFGH$ przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki 2 sąsiednich krawędzi podstawy (punkty K i L) i wierzchołek G . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej ostrosłupa trójkątnego $CKLG$.
- 5 Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego trójkątnego są trójkątami prostokątnymi równoramiennymi. Oblicz objętość tego ostrosłupa, jeśli krawędź podstawy ma długość 6 cm.
- 6 Ostrosłupy prawidłowe – trójkątny, czworokątny i sześciokątny – mają tę samą wysokość oraz krawędź podstawy tej samej długości. Wskaż zdania prawdziwe.
A. Ostrosłup trójkątny i czworokątny mają taką samą objętość.
B. Ostrosłup czworokątny ma ponad dwukrotnie większą objętość od ostrosłupa trójkątnego.
C. Ostrosłup sześciokątny ma objętość sześciokrotnie większą od objętości ostrosłupa trójkątnego.
- 7 Kąt nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego do podstawy wynosi 60° . Podaj miarę kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do podstawy.

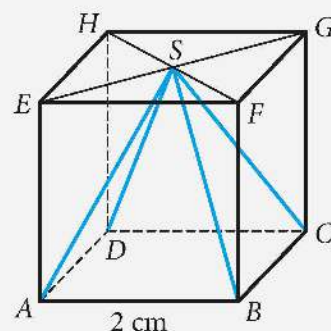


SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

- 1 Dany jest ostrosłup, który ma 10 ścian. Wskaż zdania prawdziwe.

A. Ten ostrosłup ma w podstawie pięciokąt.
B. Dany ostrosłup ma 10 wierzchołków.
C. Ten ostrosłup ma 18 krawędzi.

- 2 W sześcian wpisano ostrosłup czworokątny tak, że jego podstawą jest ściana sześcianu $ABCD$, a wierzchołkiem – punkt S leżący w miejscu przecięcia przekątnych przeciwległej ściany sześcianu. Wskaż kąt, jaki krawędź boczna tego ostrosłupa tworzy z jego podstawą, i oblicz jego miarę.

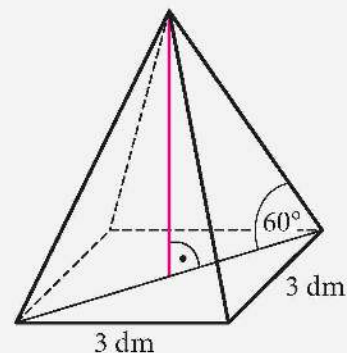


- 3 Wyznacz wysokość ściany bocznej czworościanu foremnego, którego podstawa ma pole równe $25\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

- 4 Wybierz właściwe dokończenie zdania.

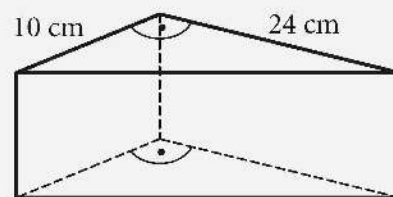
W narysowanym ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna ma długość

A. $1,5\sqrt{2} \text{ dm}$. C. $1,5\sqrt{6} \text{ dm}$.
B. $3\sqrt{2} \text{ dm}$. D. $3\sqrt{6} \text{ dm}$.



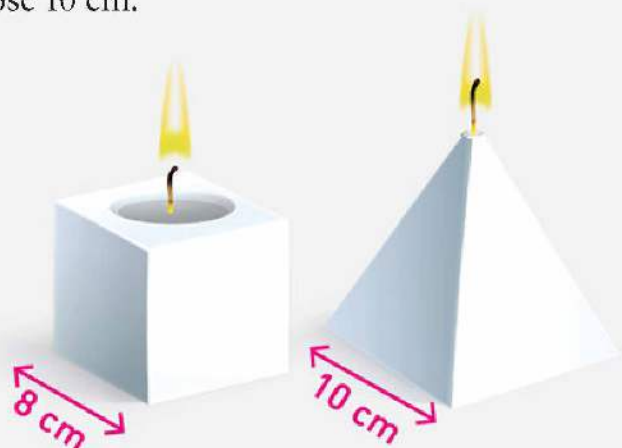
- 5 Wysokość ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi 3 cm, a pole podstawy jest równe 25 cm^2 . Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

- 6 Wyznacz miary kątów dwuściennych, które tworzą ze sobą ściany boczne narysowanego graniastosłupa prostego.



- 7 Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 8 cm, a krawędź boczna ma długość 10 cm.

- 8 Producent świec chce wykorzystać воск z wadliwej partii towaru. Oblicz wysokość świeczki w kształcie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, która powstała z przetopienia świeczki w kształcie sześcianu.



Rozdział IV

Bryły obrotowe

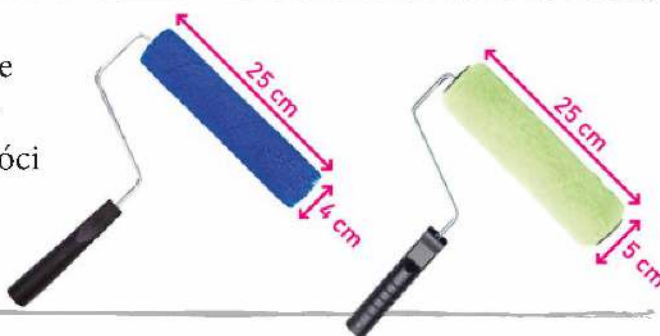
TEMATY LEKCJI

1	Walec	s. 83–87
2	Przekroje walca	s. 88–91
3	Stożek	s. 92–97
4	Przekroje stożka	s. 98–101
5	Użyteczne bryły obrotowe	s. 102–103
6	Kula	s. 104–107
	Powtórzenie rozdziału	s. 108–109
	ZADANIA PODSUMOWUJĄCE SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ	

1 Walec

NA POCZĄTEK

Na fotografiach pokazano wałki malarskie o tej samej szerokości, ale różnej średnicy zewnętrznej. Jak myślisz, który wałek obróci się więcej razy podczas malowania pasa o ustalonej długości?

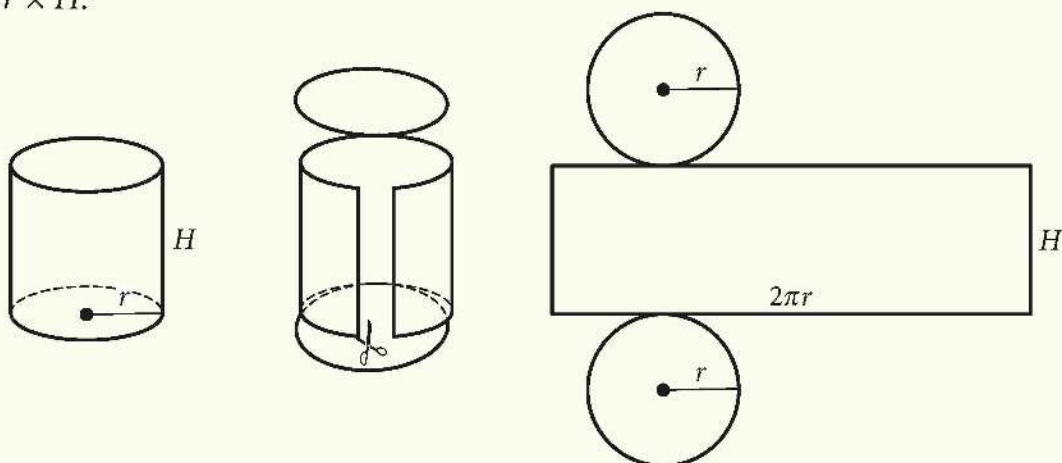
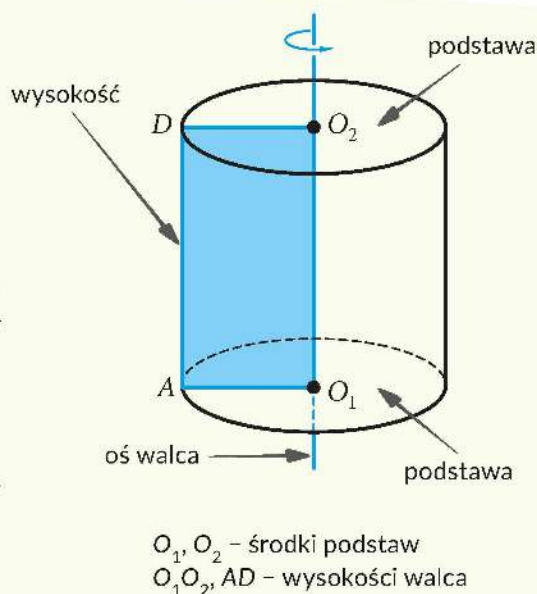


WAŻNA WIADOMOŚĆ

Walec to bryła otrzymana przez obrót prostokąta wokół prostej zawierającej jeden z jego boków lub wokół prostej będącej jego osią symetrii. Prosta tę nazywamy **osią walca**.

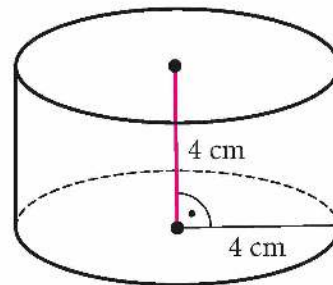
Podstawami walca są koła o takim samym promieniu, a jego wysokością jest dowolny odcinek łączący podstawy walca i do nich prostopadły.

Jeśli powierzchnię boczną walca o promieniu podstawy r i wysokości H rozetniemy prostopadłe do jego podstaw i rozwinie-
my, to otrzymamy prostokąt o wymiarach $2\pi r \times H$.



PRZYKŁAD 1

Narysuj siatkę walca, którego model ukazano na rysunku.

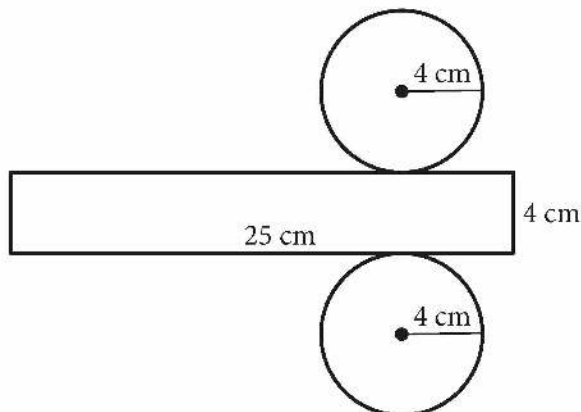


KROK 1 Ustalamy długość prostokąta, który stanowi powierzchnię boczną walca:
 $l = 2\pi r = 2\pi \cdot 4 = 8\pi \approx 8 \cdot 3,14 \approx 25$ [cm]

PODPOWIEDŹ

W obliczeniach, o ile nie wskazano inaczej, przyjmujemy, że $\pi \approx 3,14$.

KROK 2 Szkicujemy siatkę walca, którego powierzchnia boczna to prostokąt o wymiarach 25 cm × 4 cm, a podstawą jest koło o promieniu długości 4 cm.

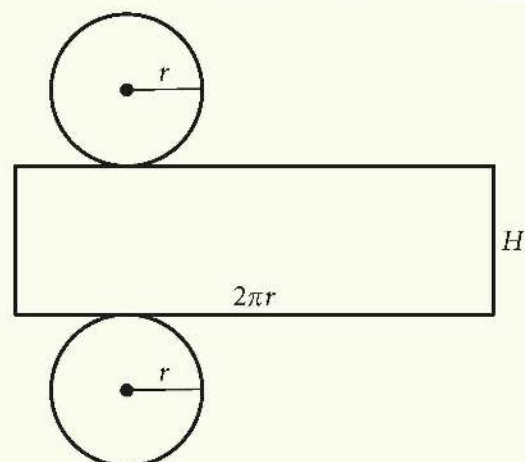
**ĆWICZENIE 1**

Naszkluj siatkę walca o promieniu podstawy długości 2 cm i wysokości równej 3 cm.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Pole powierzchni całkowitej walca o promieniu podstawy r i wysokości H wyraża się wzorem:

$$P_c = 2P_p + P_b = 2\pi r^2 + 2\pi rH = 2\pi r(r + H)$$



PRZYKŁAD 2

Oblicz pole powierzchni całkowitej walca ukazanego na rysunku. Ustal, jaką częścią tego pola powierzchni jest jego pole powierzchni bocznej.

KROK 1 Obliczamy pole podstawy walca:

$$P_p = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi \text{ [cm}^2\text{]}$$

KROK 2 Wyznaczamy pole powierzchni bocznej walca:

$$P_b = 2\pi rH = 2\pi \cdot 3 \cdot 5 = 30\pi \text{ [cm}^2\text{]}$$

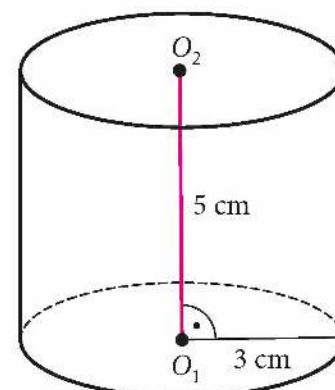
KROK 3 Obliczamy pole powierzchni całkowitej walca:

$$P_c = 2P_p + P_b = 2 \cdot 9\pi + 30\pi = 48\pi \text{ [cm}^2\text{]}$$

KROK 4 Sprawdzamy, jaką częścią pola powierzchni całkowitej walca jest jego pole powierzchni bocznej:

$$\frac{P_b}{P_c} = \frac{30\pi}{48\pi} = \frac{5}{8}$$

Pole powierzchni całkowitej walca wynosi $48\pi \text{ cm}^2$, z czego $\frac{5}{8}$ tego pola stanowi pole powierzchni bocznej walca.

**ĆWICZENIE 2**

Ustal, jaki procent pola powierzchni całkowitej walca o promieniu podstawy długości 5 cm i wysokości równej 15 cm stanowi pole jego podstawy.

To się liczy!

Na co dzień spotykamy kształt walca, kiedy kupujemy różne produkty spożywcze w puszkach. Podczas ich produkcji ważne jest określenie, jakiej wielkości etykiety należy przygotować. Warto pamiętać o tym, że rozmiar takiej etykiety obliczymy ze wzoru na pole powierzchni bocznej walca. Poniższe zadanie pomoże Wam utrwalić umiejętność obliczania tej wartości.

ZADANIE BRANŻOWE

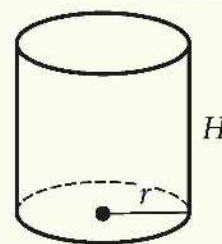
Na zdjęciu ukazano puszkę z karmą dla kotów. Oblicz, jakie jest łączne pole powierzchni etykiet naklejonych na 1000 takich puszek. Wynik podaj z dokładnością do dziesiątej części metra kwadratowego.



WAŻNA WIADOMOŚĆ

Objętość walca o promieniu podstawy r i wysokości H wyraża się wzorem:

$$V = P_p \cdot H = \pi r^2 \cdot H$$

**PRZYKŁAD 3**

Dany jest walec, którego podstawa ma średnicę długości 8 cm. Jego pole powierzchni bocznej jest czterokrotnie większe od pola jego podstawy. Oblicz objętość tego walca.

KROK 1 Wyznaczamy długość promienia podstawy walca:

$$r = \frac{d}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ [cm]}$$

KROK 2 Obliczamy pole podstawy walca:

$$P_p = \pi r^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi \text{ [cm}^2\text{]}$$

KROK 3 Ustalamy pole powierzchni bocznej walca na podstawie informacji z polecenia:

$$P_b = 4P_p = 4 \cdot 16\pi = 64\pi \text{ [cm}^2\text{]}$$

KROK 4 Wyznaczamy wysokość walca za pomocą wzoru na pole jego powierzchni bocznej:

$$P_b = 2\pi rH = 2\pi \cdot 4H = 8\pi H$$

$$8\pi H = 64\pi \quad | : (8\pi)$$

$$H = 8 \text{ [cm]}$$

KROK 5 Obliczamy objętość walca:

$$V = P_p \cdot H = 16\pi \cdot 8 = 128\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$

ĆWICZENIE 3

Oblicz objętość walca o wysokości 8 cm, którego pole powierzchni bocznej jest równe $32\pi \text{ cm}^2$.

PRZYKŁAD 4

Oblicz wysokość walca, którego pole powierzchni całkowitej jest równe $45\pi \text{ cm}^2$, a promień jego podstawy ma długość 3 cm.

KROK 1 Podstawiamy podane w poleceniu wielkości do wzoru na pole powierzchni całkowitej walca:

$$P_c = 2\pi r(r + H)$$

$$45\pi = 2\pi \cdot 3 \cdot (3 + H)$$

KROK 2 Rozwiązujemy otrzymane równanie:

$$45\pi = 6\pi \cdot (3 + H) \quad | : (6\pi)$$

$$7,5 = 3 + H$$

$$H = 7,5 - 3 = 4,5 \text{ [cm]}$$

Wysokość walca wynosi 4,5 cm.

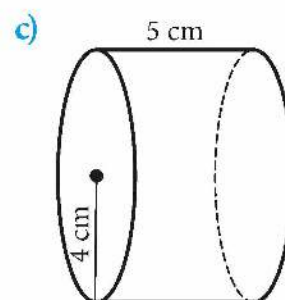
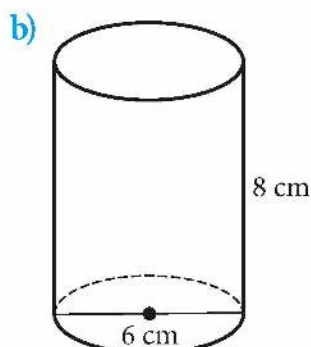
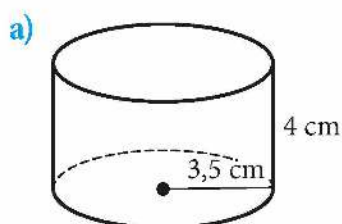
ĆWICZENIE 4

Oblicz długość promienia podstawy walca o wysokości równej 8 cm i objętości wynoszącej $50\pi \text{ cm}^3$.

ZADANIA

 Zbiór zadań, s. 141

1. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość walca przedstawionego na rysunku.



ZADANIA BRANŻOWE

2. Producent rur z tworzywa sztucznego otrzymał zlecenie wykonania rurki o wymiarach podanych na rysunku. Oblicz, ile waży taka rurka, jeżeli zrobiono ją z tworzywa o gęstości $1,41 \text{ g/cm}^3$. Wynik podaj z dokładnością do 1 g.



3. Trzypiętrowy tort weselny został zrobiony z 3 krążków w kształcie walców. Promień podstawy środkowego krążka stanowi $\frac{3}{4}$ promienia największego, a promień podstawy najmniejszego krążka to $\frac{2}{3}$ promienia środkowego krążka. Oblicz objętość tortu z dokładnością do 1 l.



2 Przekroje walca

NA POCZĄTEK

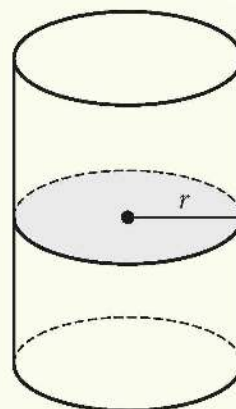
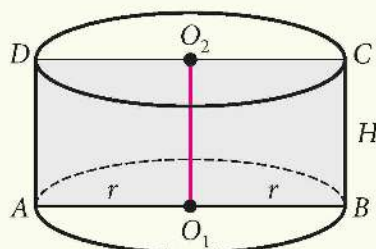
Przyjrzyj się zdjęciu drzwi. Jaką figurę geometryczną zobaczysz, jeśli będziesz je obserwować od przodu, a jaką – jeśli będziesz patrzeć z góry?



WAŻNA WIADOMOŚĆ

Jeżeli walec przetniemy płaszczyzną równoległą do jego podstawy, otrzymamy **przekrój poprzeczny walca**. Jest nim koło przystające do koła znajdującego się w podstawie.

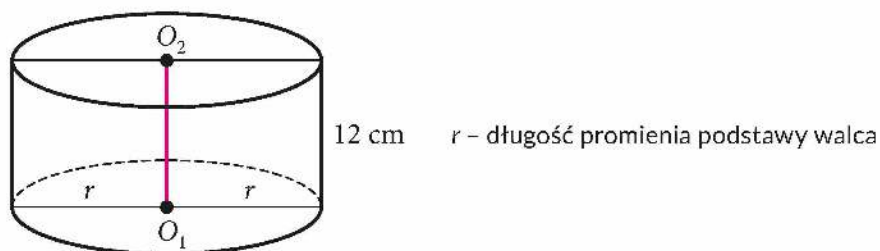
Jeżeli walec przetniemy płaszczyzną zawierającą jego oś, otrzymamy **przekrój osiowy walca**. Jest nim prostokąt o wymiarach $2r \times H$.



PRZYKŁAD 1

Oblicz pole powierzchni całkowitej walca o wysokości 12 cm, jeśli pole jego przekroju osiowego jest równe 192 cm^2 .

KROK 1 Wykonujemy rysunek pomocniczy.



KROK 2 Wyznaczamy długość promienia podstawy walca po uwzględnieniu informacji o polu jego przekroju osiowego:

$$P = 2r \cdot H = 2r \cdot 12 = 24r$$

$$24r = 192 \quad | : 24$$

$$r = 8 \text{ [cm]}$$

KROK 3 Obliczamy pole powierzchni całkowitej walca – podstawiamy wyznaczoną długość promienia podstawy i wysokość walca do odpowiedniego wzoru:

$$P_c = 2\pi r(r + H) = 2\pi \cdot 8 \cdot (8 + 12) = 16\pi \cdot 20 = 320\pi \text{ [cm}^2\text{]}$$

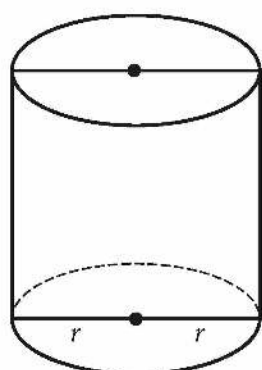
ĆWICZENIE 1

Oblicz pole powierzchni całkowitej walca o promieniu podstawy długości 8 cm, jeśli pole jego przekroju osiowego jest równe 48 cm^2 .

PRZYKŁAD 2

Oblicz objętość walca, którego przekrojem osiowym jest kwadrat o boku długości 10 cm.

KROK 1 Wykonujemy rysunek pomocniczy.



r – długość promienia podstawy walca
 H – wysokość walca

KROK 2 Stwierdzamy, że wysokość walca jest równa długości boku jego przekroju osiowego:

$$H = 10 \text{ [cm]}$$

KROK 3 Wyznaczamy długość promienia walca na podstawie informacji o jego przekroju osiowym:

$$2r = 10 \quad | : 2$$

$$r = 5 \text{ [cm]}$$

KROK 4 Obliczamy objętość walca – podstawiamy wyznaczone wymiary do wzoru:

$$V = \pi r^2 \cdot H = \pi \cdot 5^2 \cdot 10 = 250\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$

ĆWICZENIE 2

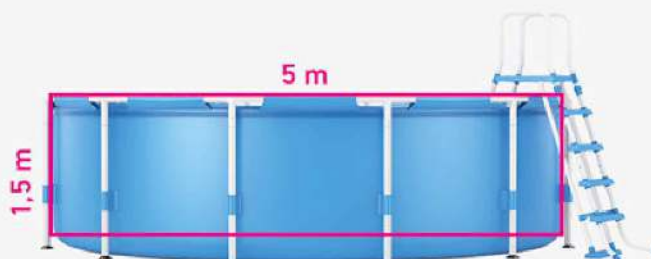
Oblicz objętość walca, którego przekrój osiowy jest kwadratem o polu równym 36 cm^2 .

To się liczy!

Coraz bardziej popularne stają się baseny ogrodowe. Mają one różne kształty i wymiary. Aby móc właściwie korzystać z takiego basenu, należy napęłnić go odpowiednią ilością wody – zalecaną przez producenta. Poniższe zadanie pomoże Wam utrwalić, jak oblicza się objętość walca na podstawie informacji o jego przekroju.

ZADANIE BRANŻOWE

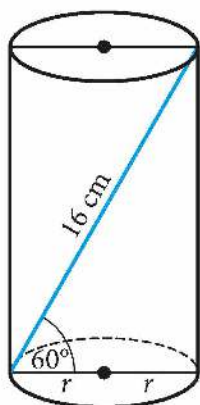
Przyjrzyj się zdjęciu. Następnie oblicz, ile hektolitrow wody należy wlać do basenu ogrodowego w kształcie walca, jeżeli producent zaleca wykorzystać 90% jego pojemności. Wynik podaj z dokładnością do 1 hl.



PRZYKŁAD 3

Oblicz pole podstawy walca, w którym przekątna przekroju osiowego ma długość 16 cm i tworzy z podstawą walca kąt 60° .

KROK 1 Wykonujemy rysunek pomocniczy.



r – długość promienia podstawy walca

KROK 2 Wyznaczamy długość promienia podstawy walca – korzystamy z funkcji trygonometrycznej:

$$\frac{2r}{16} = \cos 60^\circ$$

$$2r = 16 \cdot \cos 60^\circ = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8$$

$$r = 4 \text{ [cm]}$$

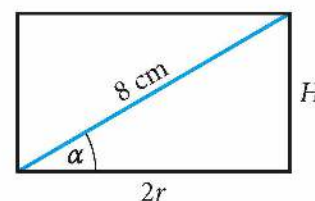
KROK 3 Obliczamy pole podstawy walca:

$$P_p = \pi r^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi \text{ [cm}^2\text{]}$$

ĆWICZENIE 3

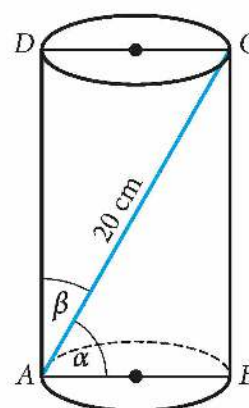
Na rysunku przedstawiono przekrój osiowy walca. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca, jeżeli przekątna jego przekroju osiowego tworzy z podstawą walca kąt o podanej mierze.

- a) $\alpha = 30^\circ$ b) $\alpha = 45^\circ$

**ZADANIA**

Zbiór zadań, s. 141

1. Oblicz objętość walca, którego przekrojem osiowym jest prostokąt o wymiarach $8 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$. Rozpatrz dwie możliwości.
2. Oblicz objętość walca ukazanego na rysunku, jeżeli kąt α ma miarę dwukrotnie większą od miary kąta β .

**ZADANIA BRANŻOWE**

3. Na terenie rafinerii postawiono 6 nowych zbiorników na ropę. Każdy z nich ma kształt walca o wysokości 22 m, którego przekrojem poprzecznym jest koło o średnicy długości 60 m. Oblicz, ile metrów sześciennych ropy można przechowywać w tych zbiornikach.
4. W sklepie sportowym sprzedawane są piłki tenisowe w pudełkach w kształcie walca pokazanego na zdjęciu. Wykonaj polecenia.



- a) Oblicz długość średnicy piłki, jeżeli przekrój osiowy tego walca ma pole równe $122,88 \text{ cm}^2$.
- b) Podaj wysokość i średnicę opakowania od piłek tenisowych.
- c) Ustal, ile maksymalnie pudełek pracownik sklepu może ustawić na półce o wymiarach $6 \text{ dm} \times 2 \text{ dm}$.

3 Stożek

NA POCZĄTEK

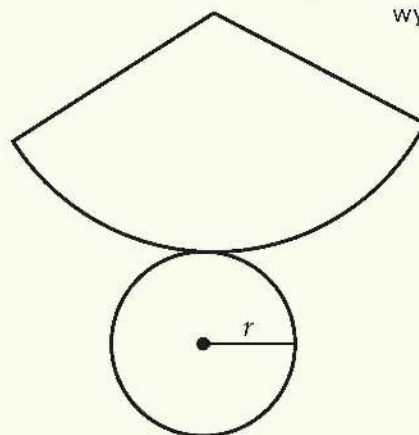
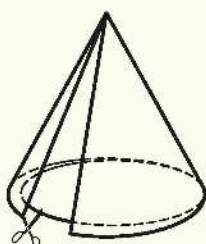
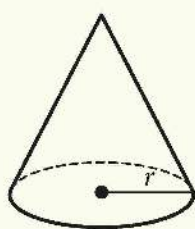
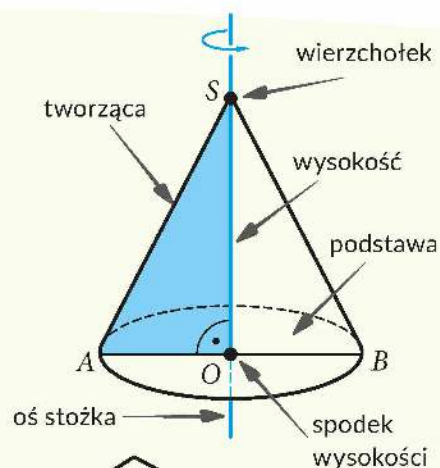
Czy wszystkie przedmioty ukazane na zdjęciach są ostrosłupami? Jakich widzisz podobieństwa, a jakie – różnice?



WAŻNA WIADOMOŚĆ

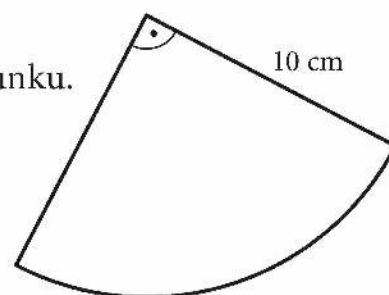
Stożek to bryła otrzymana przez obrót trójkąta prostokątnego wokół prostej zawierającej jedną z jego przyprostokątnych. Tę prostą nazywamy **osią stożka**.

Podstawą stożka jest koło. Dowolny odcinek łączący brzeg podstawy z wierzchołkiem stożka nazywamy **tworzącą stożka**. Powierznię boczną stożka tworzy wycinek koła o promieniu równym tworzącej stożka.



PRZYKŁAD 1

Oblicz pole powierzchni bocznej stożka przedstawionej na rysunku.



KROK 1 Stwierdzamy, że powierzchnia boczna stożka jest wycinkiem koła o promieniu długości 10 cm, wyznaczonym przez kąt środkowy o mierze 90° .

KROK 2 Obliczamy pole powierzchni bocznej stożka ze wzoru na pole wycinka koła:

$$P_b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 10^2 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 100 = 25\pi \text{ [cm}^2\text{]}$$

ĆWICZENIE 1

Tworząca stożka ma długość 8 cm. Oblicz pole powierzchni bocznej tego stożka, jeśli po rozcięciu jest ona wycinkiem koła wyznaczonym przez podany kąt.

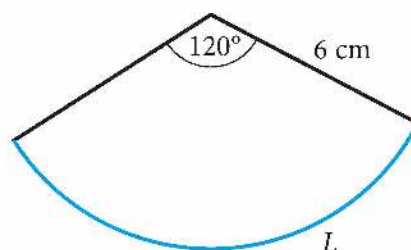
a) 90°

b) 72°

c) 300°

PRZYKŁAD 2

Oblicz długość promienia podstawy stożka, którego powierzchnię boczną ukazano na rysunku.



KROK 1 Obliczamy długość łuku wycinka koła:

$$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r = \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 6 = \frac{1}{3} \cdot 12\pi = 4\pi \text{ [cm]}$$

KROK 2 Zauważamy, że długość łuku L jest równa obwodowi podstawy stożka o promieniu długości r :

$$l = 2\pi r = L$$

$$2\pi r = 4\pi$$

KROK 3 Wyznaczamy długość promienia podstawy stożka z otrzymanego równania:

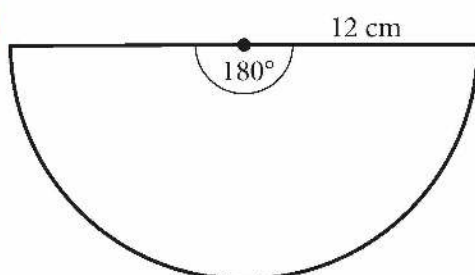
$$2\pi r = 4\pi \quad | : (2\pi)$$

$$r = 2 \text{ [cm]}$$

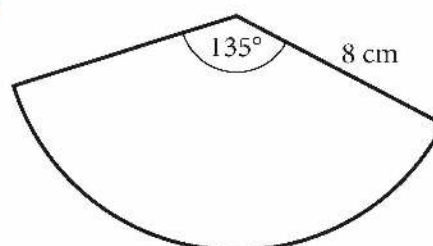
ĆWICZENIE 2

Oblicz promień podstawy stożka, którego powierzchnią boczną jest wycinek koła przedstawiony na rysunku.

a)



b)



PRZYKŁAD 3

Naszkicuj siatkę stożka o tworzącej długości 4 cm i promieniu podstawy długości 2 cm.

KROK 1 Obliczamy obwód podstawy stożka:

$$l = 2\pi r = 2\pi \cdot 2 = 4\pi \text{ [cm]}$$

KROK 2 Wyznaczamy długość łuku wycinka koła tworzącego powierzchnię boczną stożka:

$$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 4 = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 8\pi$$

KROK 3 Wyznaczamy miarę kąta środkowego wycinka koła przez przyrównanie długości jego łuku do obwodu podstawy stożka:

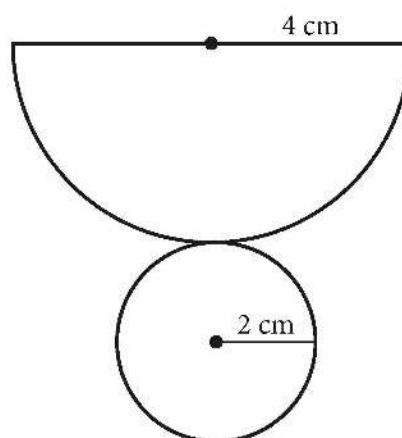
$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 8\pi = 4\pi \quad | : (8\pi)$$

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{4\pi}{8\pi}$$

$$\alpha = \frac{4\pi}{8\pi} \cdot 360^\circ = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$$

KROK 4 Stwierdzamy, że skoro wycinek koła jest utworzony przez kąt środkowy o mierze 180° , to powierzchnia boczna stożka jest półkolem.

KROK 5 Szkicujemy siatkę stożka, którego podstawą jest koło o promieniu długości 2 cm, a powierzchnię boczną stanowi półkole o promieniu długości 4 cm.

**ĆWICZENIE 3**

Naszkicuj siatkę stożka, którego promień podstawy ma długość 1,5 cm, a tworząca stożka jest 4 razy od niego dłuższa.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Pole powierzchni bocznej stożka o promieniu podstawy r i tworzącej l możemy też obliczyć ze wzoru:

$$P_b = \pi r l$$

Pole powierzchni całkowitej stożka wyraża się wzorem:

$$P_c = P_p + P_b = \pi r^2 + \pi r l = \pi r(r + l)$$

TO JEST DOWÓD

Udowodnij, że pole powierzchni bocznej stożka o promieniu podstawy długości r i tworzącej długości l wynosi πrl .

KROK 1 Wyznaczamy pole powierzchni bocznej stożka za pomocą wzoru na pole wycinka koła:

$$P_b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi l^2 = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot l \cdot l$$

KROK 2 Stwierdzamy, że długość łuku wycinka koła jest równa obwodowi podstawy stożka:

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi l = 2\pi r$$

KROK 3 Wyznaczamy długość promienia podstawy stożka z otrzymanej równości:

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi l = 2\pi r \quad | : (2\pi)$$

$$r = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot l$$

KROK 4 Zamieniamy we wzorze na pole powierzchni bocznej stożka wyrażenie $\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot l$ na długość promienia podstawy r :

$$P_b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot l \cdot l = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot l \cdot \pi \cdot l = r \cdot \pi \cdot l = \pi rl$$



I TY MOŻESZ TO UDOWODNIĆ!

Wykaż, że w dowolnym stożku, którego powierzchnią boczną jest półkole, tworząca stożka jest 2 razy dłuższa od promienia podstawy.

To się liczy!

Jednymi z najbardziej popularnych artykułów imprezowych są czapki w kształcie stożka. Poniższe zadanie pozwoli Wam utrwalić umiejętność obliczania długości różnych odcinków w stożku.

ZADANIE BRANŻOWE

Firma produkuje czapki w kształcie stożka o obwodzie podstawy równym 51 cm. Czapki wycinane są z kwadratowych kawałków tektury. Odpowiedz na pytania.

- Czy do wykonania 1 czapki wystarczy kawałek tektury w kształcie kwadratu o boku długości 32 cm?
- Ile takich czapek można wyciąć z kawałka tektury w kształcie kwadratu o boku długości 55 cm?



PRZYKŁAD 4

Oblicz pole powierzchni całkowitej stożka, którego tworząca ma długość równą 21 cm i jest 3 razy dłuższa od promienia jego podstawy.

KROK 1 Obliczamy długość promienia podstawy stożka:

$$r = 21 : 3 = 7 \text{ [cm]}$$

KROK 2 Obliczamy pole podstawy stożka:

$$P_p = \pi r^2 = \pi \cdot 7^2 = 49\pi \text{ [cm}^2\text{]}$$

KROK 3 Wyznaczamy pole powierzchni bocznej stożka:

$$P_b = \pi r l = \pi \cdot 7 \cdot 21 = 147\pi \text{ [cm}^2\text{]}$$

KROK 4 Obliczamy pole powierzchni całkowitej stożka:

$$P_c = P_p + P_b = 49\pi + 147\pi = 196\pi \text{ [cm}^2\text{]}$$

ĆWICZENIE 4

Oblicz pole powierzchni całkowitej stożka, którego promień podstawy ma długość równą 8 cm i jest 2 razy krótszy niż tworząca stożka.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

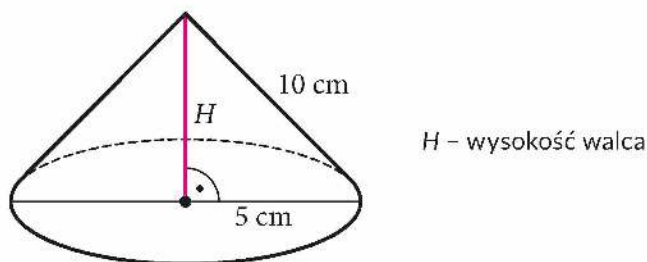
Objętość stożka o promieniu podstawy r i wysokości H wyraża się wzorem:

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H = \frac{1}{3} \pi r^2 H$$

PRZYKŁAD 5

Oblicz objętość stożka o promieniu podstawy długości 5 cm i tworzącej stożka długości 10 cm.

KROK 1 Wykonujemy rysunek pomocniczy.



KROK 2 Obliczamy wysokość stożka za pomocą twierdzenia Pitagorasa:

$$H^2 = 10^2 - 5^2 = 100 - 25 = 75$$

$$H = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \text{ [cm]}$$

KROK 3 Obliczamy pole podstawy stożka:

$$P_p = \pi r^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi \text{ [cm}^2\text{]}$$

KROK 4 Obliczamy objętość stożka:

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 25\pi \cdot 5\sqrt{3} = \frac{125\pi\sqrt{3}}{3} \text{ [cm}^3\text{]}$$

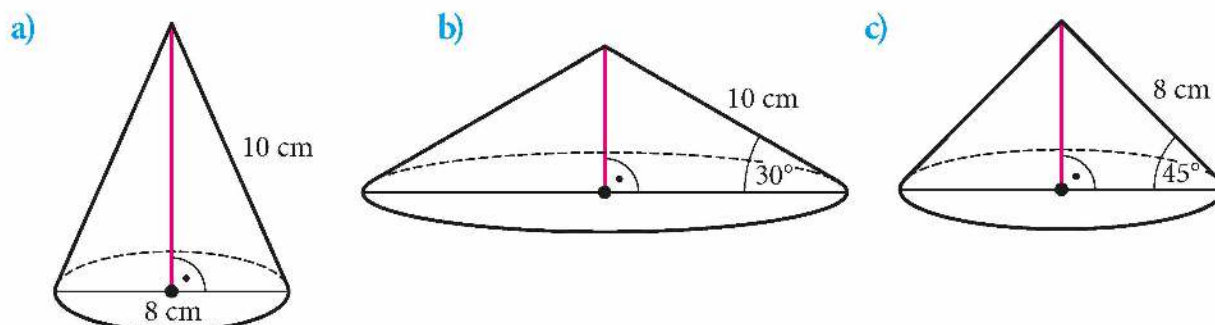
ĆWICZENIE 5

Oblicz objętość stożka, którego pole podstawy wynosi $16\pi \text{ cm}^2$, a wysokość jest równa długości promienia podstawy.

ZADANIA

 Zbiór zadań, s. 142

1. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość stożka przedstawionego na rysunku.



2. Wyznacz miarę kąta między tworzącą i podstawą stożka, jeśli jego objętość jest równa:

- a) $\pi \text{ cm}^3$, a promień podstawy stożka ma długość $\sqrt{3} \text{ cm}$;
- b) $72\pi \text{ cm}^3$, a wysokość stożka jest równa 6 cm.

ZADANIA BRANŻOWE

3. W lodziarni sprzedawane są lody w wafelku – takim, jak pokazano na zdjęciu. Wykonaj polecenia.

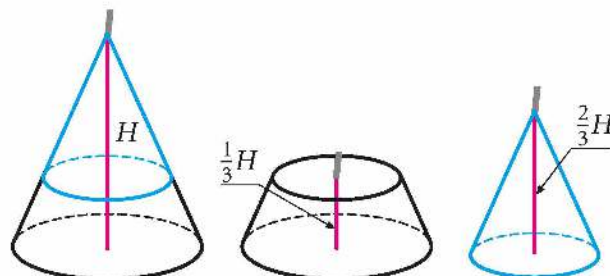
- a) Oblicz pojemność tego wafelka w zaokrągleniu do 1 ml
- b) Ustal z dokładnością do 1 ml objętość lodów wystających ponad brzeg wafelka, gdy jest ona równa objętości odpowiadającego im stożka.
- c) Podaj w mililitrach objętość porcji lodów pokazanej na zdjęciu.
- d) Oblicz z dokładnością do 0,1 gr, ile kosztuje 1 ml lodów, jeżeli za 1 porcję zapłacisz 12 zł.



4 Przekroje stożka

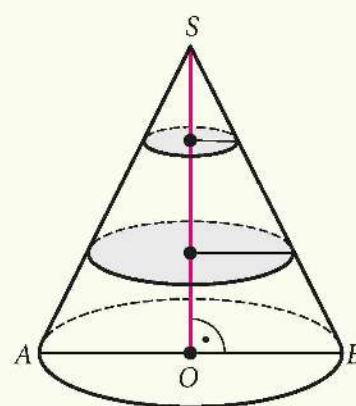
NA POCZĄTEK

Na rysunku ukazano świeczkę w kształcie stożka, którą przecięto na $\frac{1}{3}$ jej wysokości, otrzymując w ten sposób 2 świeczki. Która z nich będzie się dłużej paliła?

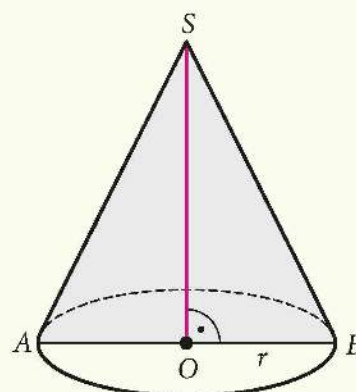


WAŻNA WIADOMOŚĆ

Jeżeli przetniemy stożek płaszczyzną równoległą do podstawy, otrzymamy **przekrój poprzeczny stożka**. Jest nim koło o promieniu tym mniejszym, im bardziej płaszczyzna przekroju oddalona jest od podstawy stożka.



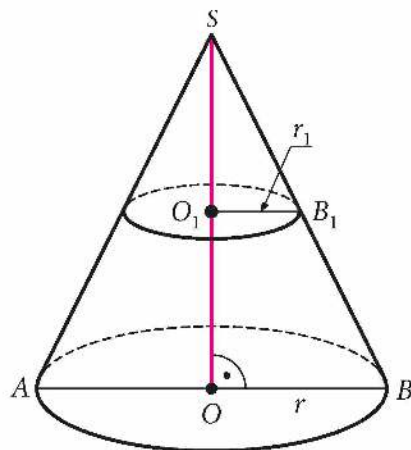
Jeżeli przetniemy stożek płaszczyzną zawierającą jego oś, otrzymamy **przekrój osiowy stożka**. Jest nim trójkąt równoramienny: $|AS| = |BS|$.



PRZYKŁAD 1

Podstawa stożka jest kołem o polu równym $64\pi \text{ cm}^2$. Oblicz pole przekroju poprzecznego tego stożka płaszczyzną przecinającą jego wysokość w połowie.

KROK 1 Sporządzamy rysunek pomocniczy.



r – długość promienia podstawy stożka
 r_1 – długość promienia koła będącego przekrojem poprzecznym stożka

KROK 2 Stwierdzamy, że trójkąty BOS i B_1O_1S są podobne na mocy cechy KKK: Oba trójkąty są prostokątne i mają wspólny kąt przy wierzchołku S .

KROK 3 Wyznaczamy skalę podobieństwa trójkątów BOS i B_1O_1S :

$$k = \frac{|O_1S|}{|OS|} = \frac{\frac{1}{2}H}{H} = \frac{1}{2}$$

KROK 4 Obliczamy pole przekroju poprzecznego stożka na podstawie skali podobieństwa:

$k^2 = \frac{P_1}{P_p}$, gdzie P_p – pole podstawy stożka, P_1 – pole przekroju poprzecznego

$$P_1 = k^2 \cdot P_p = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 64\pi = \frac{1}{4} \cdot 64\pi = 16\pi \text{ [cm}^2\text{]}$$

ĆWICZENIE 1

Dany jest stożek o wierzchołku w punkcie S . Promień podstawy stożka ma długość 8 cm, a wysokość stożka wynosi 10 cm. Stożek przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy przecinającą jego wysokość w punkcie O_1 . Oblicz pole tego przekroju, jeśli odcinek O_1S ma podaną długość.

a) 4 cm

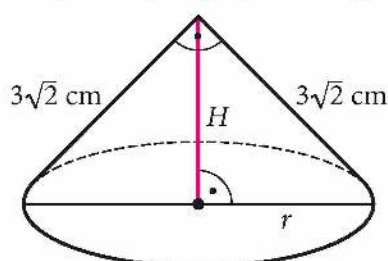
b) 2 cm

c) 6 cm

PRZYKŁAD 2

Oblicz objętość stożka, którego przekrój osiowy jest trójkątem prostokątnym o przyprostokątnych długości $3\sqrt{2}$ cm.

KROK 1 Wykonujemy rysunek pomocniczy.



r – długość promienia podstawy stożka
 H – wysokość stożka

KROK 2 Zauważamy, że wysokość stożka dzieli przekrój osiowy stożka na 2 trójkąty prostokątne równoramienne.

KROK 3 Wyznaczamy długość promienia i wysokość stożka ze wzorów na długości boków w trójkącie o kątach 45° , 45° , 90° :

$$a\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$a = 3 \text{ [cm]}$$

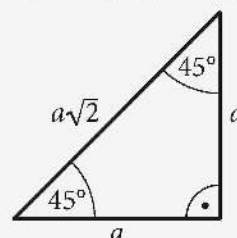
$$H = r = a = 3 \text{ [cm]}$$

KROK 4 Obliczamy objętość stożka:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 9\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$

PODPÓWIEDŹ

W trójkącie o kątach 45° , 45° i 90° boki mają następujące długości:

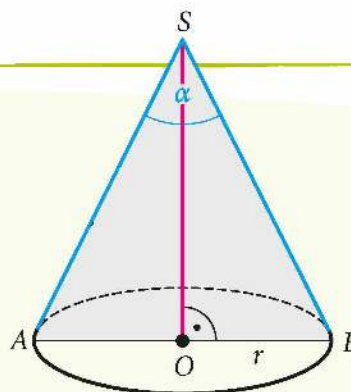


ĆWICZENIE 2

Oblicz objętość stożka, którego przekrój osiowy jest trójkątem prostokątnym o przeciwprostokątnej długości $8\sqrt{2}$ cm.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Kąt rozwarcia stożka to kąt między ramionami trójkąta równoramiennego będącego przekrojem poprzecznym stożka.

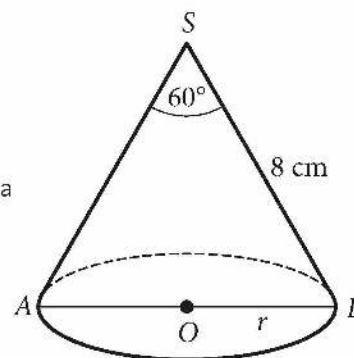


PRZYKŁAD 3

Kąt rozwarcia stożka ma miarę 60° , a jego tworząca ma długość 8 cm. Oblicz pole podstawy tego stożka.

KROK 1 Sporządzamy rysunek pomocniczy.

r – długość promienia podstawy stożka



KROK 2 Stwierdzamy, że przekrój osiowy tego stożka jest trójkątem równobocznym:

$$|\sphericalangle BAS| = |\sphericalangle ABS| = (180^\circ - 60^\circ) : 2 = 60^\circ$$

KROK 3 Wyznaczamy długość promienia podstawy stożka:

$$|AB| = 2r = 8 \text{ [cm]}$$

$$r = 4 \text{ [cm]}$$

KROK 4 Obliczamy pole podstawy stożka:

$$P_p = \pi r^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi \text{ [cm}^2\text{]}$$

ĆWICZENIE 3

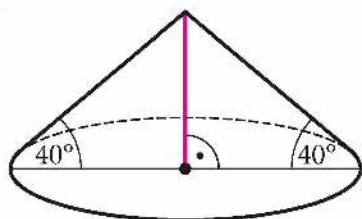
Oblicz objętość stożka o kącie rozwarcia 120° i wysokości równej 5 cm.

ZADANIA

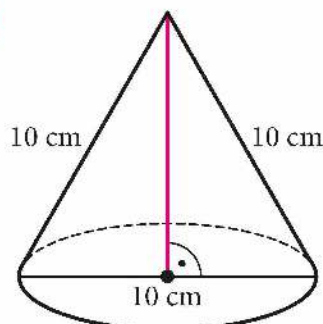
↻ Zbiór zadań, s. 142

1. Podaj miarę kąta rozwarcia narysowanego stożka.

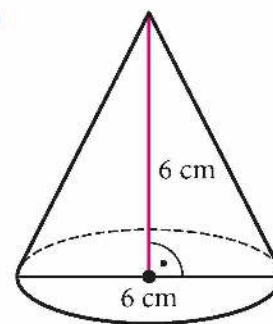
a)



b)



c)



2. Wyznacz miarę kąta rozwarcia stożka, którego tworząca ma długość 4 cm, a pole podstawy jest równe $12\pi \text{ cm}^2$.

3. Oblicz pole powierzchni bocznej i objętość stożka, którego przekrój osiowy jest trójkątem:

a) prostokątnym o polu równym 81 cm^2 ,

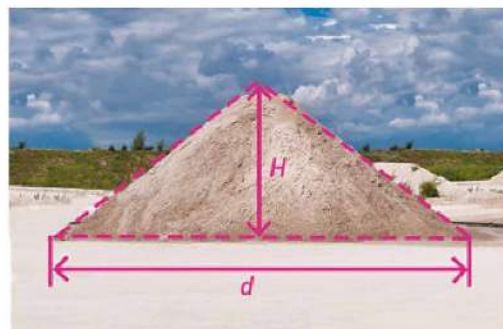
b) równobocznym o polu równym $25\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

ZADANIA BRANŻOWE

4. W składzie materiałów budowlanych znajduje się hałda piasku. Oblicz z dokładnością do jednego miejsca po przecinku, z ilu metrów sześciennych piasku ją usypano, jeśli wiadomo, że jej objętość jest o 10% większa od objętości odpowiadającego jej stożka o średnicy podstawy d i wysokości H . Określ, ile kursów będzie musiał wykonać kierowca wywrotki o pojemności 6 m^3 , by wywieźć cały piasek z tej hałdy.

a) $d = 10 \text{ m}$, $H = 3 \text{ m}$

b) $d = 12 \text{ m}$, $H = 4 \text{ m}$



5 Użyteczne bryły obrotowe

Bryły obrotowe mają zastosowanie w różnych dziedzinach działalności człowieka. Walec od razu kojarzy się z walcem drogowym, a stożek – z pacholkiem stawianym podczas robót drogowych. Natomiast w gospodarstwach rolniczych czy zakładach produkcyjnych spotykamy silosy, których kształt powstał z połączenia dwóch brył obrotowych – walca i stożka.

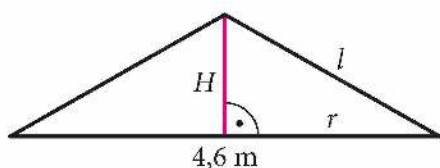
Silosy to budowle do składowania materiałów sypkich. Mogą być stawiane pojedynczo lub łączone po kilka sztuk w tzw. baterie. Najczęściej budowane są silosy zbożowe, które służą do przechowywania nasion zbóż albo roślin oleistych.

PRZYKŁADOWY SILOS

Na zdjęciu przedstawiono silos płaskodenny wykonany z blachy falistej. Stawia się go na odpowiednio przygotowanej płycie fundamentowej. Ile wynosi pojemność tego silosu? Ile metrów kwadratowych blachy potrzeba na wykonanie jego ścian zewnętrznych?

- 1 Górna część silosu ma kształt stożka. Aby ustalić objętość oraz pole powierzchni stożka, musimy wyznaczyć jego wymiary.

Wykonujemy rysunek pomocniczy przekroju osiowego stożka.



Stożek ma promień podstawy długości:

$$r = 4,6 : 2 = 2,3 \text{ [m]}$$

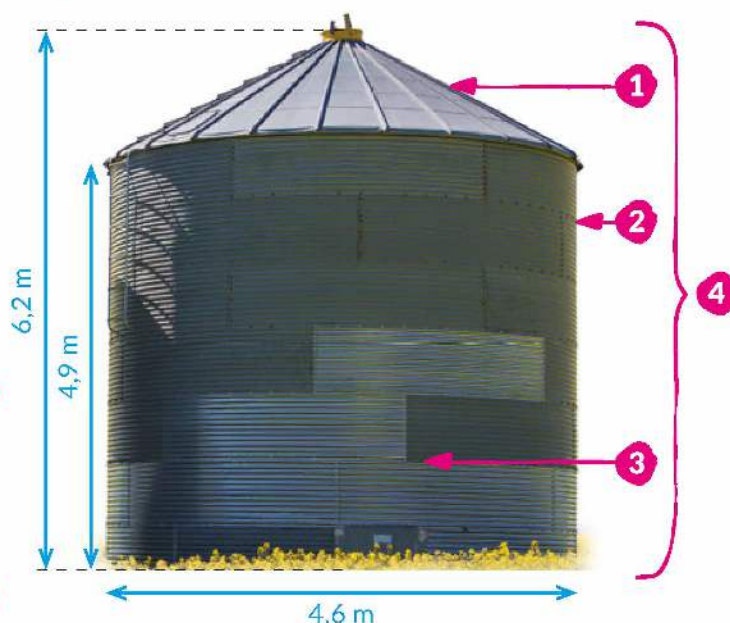
Wysokość stożka to różnica wysokości całkowitej silosu oraz wysokości jego części w kształcie walca:

$$H = 6,2 - 4,9 = 1,3 \text{ [m]}$$

Długość tworzącej stożka wyznaczamy za pomocą twierdzenia Pitagorasa:

$$l^2 = r^2 + H^2 = (2,3)^2 + (1,3)^2 = 5,29 + 1,69 = 6,98$$

$$l \approx 2,64 \text{ [m]}$$



Pole podstawy stożka jest równe:

$$P_p = \pi r^2 = \pi \cdot (2,3)^2 = 5,29\pi \approx 16,61 \text{ [m}^2\text{]}$$

Pole powierzchni bocznej stożka to:

$$P_b = \pi r l = \pi \cdot 2,3 \cdot 2,64 = 6,072\pi \approx 19,07 \text{ [m}^2\text{]}$$

Objętość stożka wynosi:

$$V_s = \frac{1}{3} P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 16,61 \cdot 1,3 \approx 7,198 \text{ [m}^3\text{]}$$

- 2 Wymiary części silosu w kształcie walca odczytujemy z fotografii. Jego pole powierzchni i objętość obliczymy, gdy podstawimy wymiary do odpowiednich wzorów.

Dolna część silosu ma kształt walca o promieniu długości 2,3 m oraz wysokości równej 4,9 m.

Pole powierzchni bocznej tego walca wynosi:

$$P_b = 2\pi r \cdot H = 2\pi \cdot 2,3 \cdot 4,9 = 22,54\pi \approx 70,78 \text{ [m}^2\text{]}$$

Pole podstawy walca jest równe polu podstawy stożka, w kształcie którego jest górna część silosu:

$$P_p \approx 16,61 \text{ [m}^2\text{]}$$

Objętość walca wynosi:

$$V_w = P_p \cdot H = 16,61 \cdot 4,9 = 81,389 \text{ [m}^3\text{]}$$

- 3 Pojemność silosu obliczymy poprzez dodanie do siebie objętości jego górnej i dolnej części.

Silos ukazany na zdjęciu ma pojemność równą:

$$V = V_s + V_w = 7,198 + 81,389 = 88,587 \text{ [m}^3\text{]}$$

- 4 Aby obliczyć pole powierzchni blachy potrzebnej do wykonania silosu, musimy wybrać odpowiednie elementy składające się na pole powierzchni całkowitej walca i stożka. Dodajemy do siebie tylko te, które stanowią ściany zewnętrzne konstrukcji.

W naszym przypadku pole powierzchni ścian silosu jest równe sumie pól powierzchni bocznych stożka i walca. Zatem pole powierzchni blachy potrzebnej do wykonania silosu wynosi:

$$P = 19,07 + 70,78 = 89,85 \text{ [m}^2\text{]}$$

ZADANIA BRANŻOWE

W domu jednorodzinnym hydraulik zamontował bojler ukazany na zdjęciu. Wykonaj polecenia.

- Oblicz z dokładnością do 0,01 m², ile stali zużyto do wykonania ścian zewnętrznych bojlera.
- Wyznacz pojemność bojlera w litrach, jeżeli izolacja termiczna stanowi ok. 40% jego objętości.



6 Kula

NA POCZĄTEK

Jakie wymiary powinno mieć pudełko w kształcie sześcianu, żeby zmieściła się w nim w całości piłka o promieniu długości 15 cm?



WAŻNA WIADOMOŚĆ

Kula to bryła otrzymana przez obrót koła wokół prostej zawierającej jego średnicę.

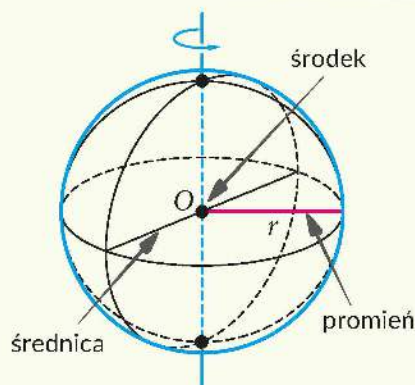
Jeżeli jej środkiem jest punkt O , a promień ma długość r , to kula jest zbiorem punktów przestrzeni, których odległość od punktu O jest mniejsza lub równa r .

Powierzchnię kuli nazywamy **sferą**.

Powierzchni tej nie rozłożymy na płaszczyźnie, dlatego nie szkicujemy siatki kuli.

Pole powierzchni (P) oraz **objętość** (V) kuli o promieniu r obliczamy ze wzorów:

$$P = 4\pi r^2, V = \frac{4}{3}\pi r^3$$



PRZYKŁAD 1

Wyznacz długość promienia kuli wpisanej w sześcian o objętości 8000 cm^3 .

KROK 1 Obliczamy długość krawędzi sześcianu na podstawie informacji o jego objętości:

$$V = a^3 = 8000$$

$$a = \sqrt[3]{8000} = 20 \text{ [cm]}$$

KROK 2 Stwierdzamy, że skoro kula została wpisana w sześcian, to jej średnica ma taką samą długość co krawędź sześcianu:

$$a = 2r$$

KROK 3 Wyznaczamy długość promienia kuli:

$$r = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10 \text{ [cm]}$$

ĆWICZENIE 1

Oblicz długość promienia sfery, w którą wpisano sześcián o krawędzi długości 6 cm.

PRZYKŁAD 2

Oblicz pole powierzchni i objętość kuli o średnicy długości 10 cm.

KROK 1 Wyznaczamy długość promienia kuli:

$$r = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5 \text{ [cm]}$$

KROK 2 Obliczamy pole powierzchni kuli:

$$P = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi \text{ [cm}^2\text{]}$$

KROK 3 Obliczamy objętość kuli:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 = \frac{500\pi}{3} \text{ [cm}^3\text{]}$$

Pole powierzchni kuli wynosi $100\pi \text{ cm}^2$, a jej objętość jest równa $\frac{500\pi}{3} \text{ cm}^3$.

ĆWICZENIE 2

Oblicz pole powierzchni i objętość kuli o danym promieniu.

a) 9 cm

b) 10 cm

c) 14 cm

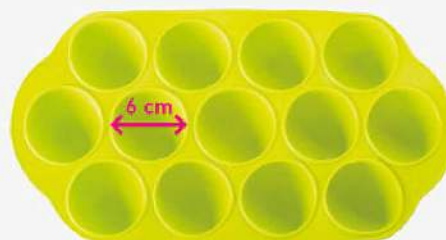
d) 18 cm

To się liczy!

Kształt kuli oraz półkuli wykorzystywany jest m.in. w cukiernictwie. Przydaje się wówczas umiejętność obliczania objętości produktu potrzebnego do wypełnienia formy w określonym kształcie. Poniższe zadanie pomoże Wam utrwalić tę umiejętność.

ZADANIE BRANŻOWE

Na zdjęciu przedstawiono formę do galaretek w kształcie półkul. Oblicz łączną objętość wszystkich galaretek, które otrzyma się z 20 takich form. Wynik podaj w zaokrągleniu do 0,1 l.



PRZYKŁAD 3

Oblicz objętość kuli, której pole powierzchni jest równe $36\pi \text{ cm}^2$.

KROK 1 Wyznaczamy długość promienia kuli za pomocą wzoru na pole jej powierzchni:

$$P = 4\pi r^2 = 36\pi$$

$$r^2 = 9$$

$$r = 3 \text{ [cm]}$$

KROK 2 Obliczamy objętość kuli:

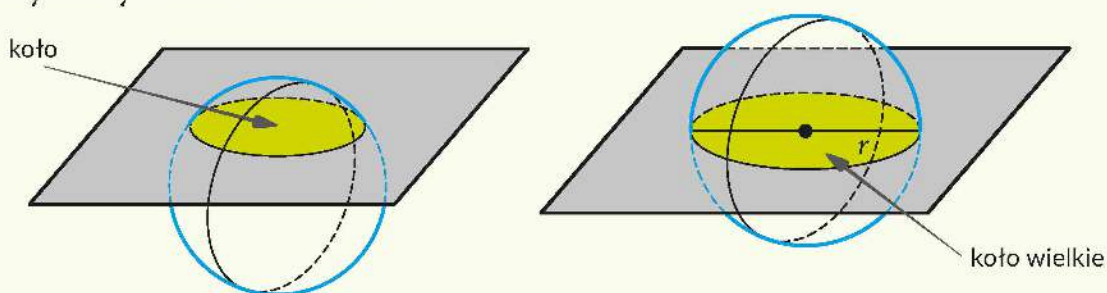
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi \text{ [cm}^3\text{]}$$

ĆWICZENIE 3

Oblicz pole powierzchni kuli, której objętość wynosi $\frac{32}{3}\pi \text{ cm}^3$.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Każdy przekrój kuli płaszczyzną, która ma więcej niż 1 punkt wspólny z tą kulą, jest kołem. Jeśli płaszczyzna ta przechodzi przez środek kuli, przekrój ten nazywamy **kołem wielkim**.

**PRZYKŁAD 4**

Oblicz pole koła wielkiego kuli o średnicy 6 cm.

KROK 1 Wyznaczamy długość promienia koła wielkiego kuli:

$$r = 6 : 2 = 3 \text{ [cm]}$$

KROK 2 Obliczamy pole koła wielkiego kuli:

$$P = \pi r^2 = 9\pi \text{ [cm}^2\text{]}$$

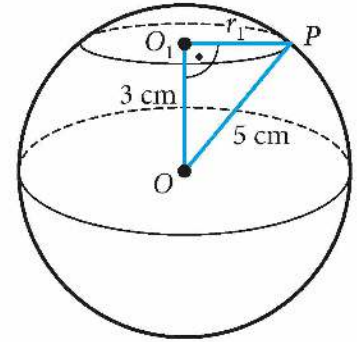
ĆWICZENIE 4

4.1. Oblicz pole koła wielkiego kuli o średnicy długości 7 cm.

4.2. Oblicz długość średnicy kuli, jeśli pole jej koła wielkiego wynosi $20,25\pi \text{ cm}^2$.

PRZYKŁAD 5

Na rysunku przedstawiono kulę przeciętą płaszczyzną. Otrzymany przekrój jest kołem o środku oddalonym o 3 cm od środka kuli. Oblicz pole tego koła.



KROK 1 Wyznaczamy długość promienia przekroju kuli za pomocą twierdzenia Pitagorasa:

$$r_1^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$$

$$r_1 = 4 \text{ [cm]}$$

KROK 2 Obliczamy pole przekroju kuli:

$$P = \pi r^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi \text{ [cm}^2\text{]}$$

ĆWICZENIE 5

Kulę o promieniu długości 15 cm przecięto płaszczyzną. Otrzymany przekrój jest kołem o polu równym $144\pi \text{ cm}^2$. Oblicz odległość środka tego koła od środka kuli.

ZADANIA

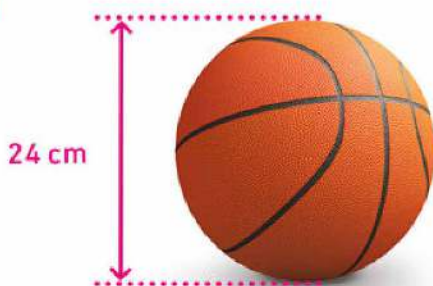
Zbiór zadań, s. 143

1. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

Długość promienia kuli	6	7	?	?	?
Pole powierzchni kuli	?	?	256π	?	$3,24\pi$
Objętość kuli	?	?	?	$\frac{1}{6}\pi$	?

2. Oblicz pole powierzchni piłki zamieszczonej na zdjęciu. Wynik zaokrąglij do 1 cm^2 .

a)



b)



ZADANIA BRANŻOWE

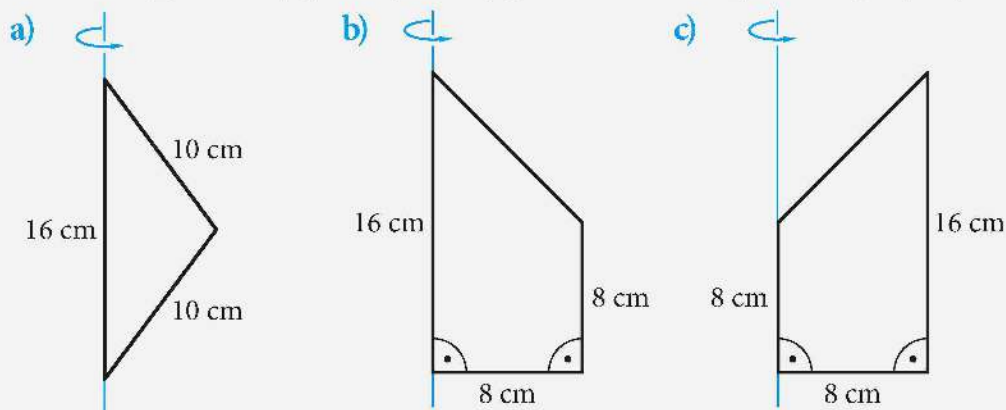
3. Firma wyprodukowała partię bombek choinkowych będących kulami o promieniu długości 4 cm. Bombki będą pakowane po 8 sztuk w pudełka w kształcie prostopadłościów. Oblicz, jakie wymiary powinny mieć pudełka, jeśli bombki przylegają do siebie i równocześnie do ścian pudełka. Rozpatrz wszystkie możliwości.

Powtórzenie rozdziału

BRYŁY OBROTOWE

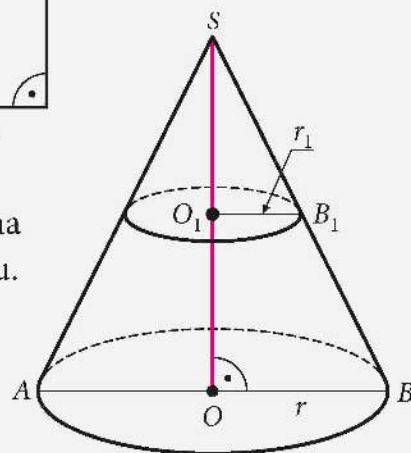
ZADANIA PODSUMOWUJĄCE

- 1 Oblicz objętość bryły otrzymanej przez obrót narysowanej figury wokół zaznaczonej osi.

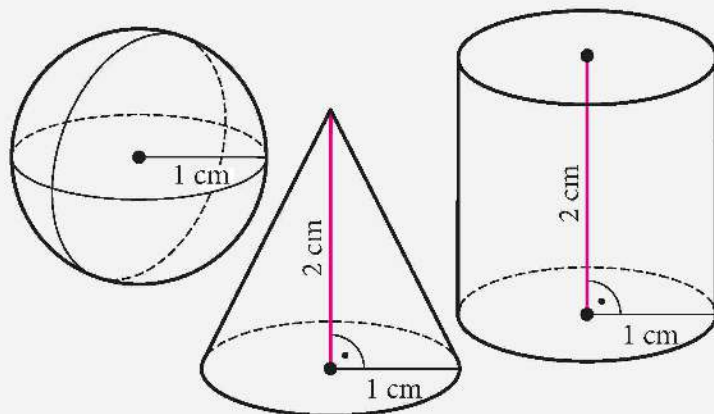


- 2 Przekrój poprzeczny stożka ma pole równe $4\pi \text{ cm}^2$ i przecina stożek w połowie jego wysokości – jak pokazano na rysunku. Jaką długość ma promień podstawy stożka? Wybierz właściwą odpowiedź.

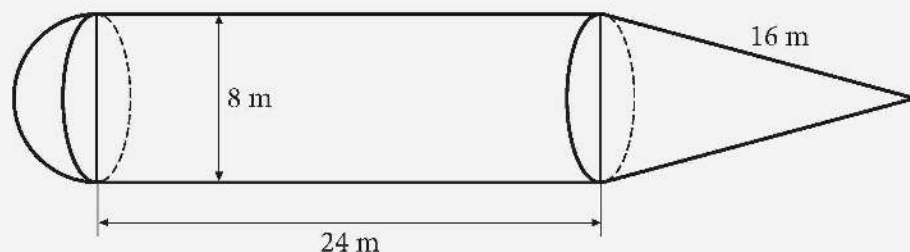
A. 3 cm C. 5 cm
B. 4 cm D. 6 cm



- 3 Cukiernik przygotowuje czekoladki w 3 różnych kształtach – takich, jak pokazano na rysunku. Uzasadnij, że ilość czekolady potrzebnej do wykonania czekoladek w kształcie kuli i stożka jest równa ilości czekolady potrzebnej do wykonania czekoladki w kształcie walca.



- 4 Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej bryły ukazanej na rysunku.



- 5 Najmniejsze pudełko, w którym udało się umieścić 16 kul bilardowych, ma objętość równą 3456 cm^3 . Uzasadnij, że te kule są większe od standardowo używanych, których średnica wynosi 5,715 cm.

SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

- 1 W warsztatach samochodowych przechowuje się olej silnikowy w metalowych beczkach o pojemności 216 l. Beczka ukazana na zdjęciu jest wypełniona do $\frac{2}{3}$ wysokości. Odpowiedz na pytania.



- a) Jaką wysokość osiągnie olej w tej beczce, jeśli wlano do niej jeszcze 36 l oleju?
- b) Ile litrów oleju należałoby jeszcze dolać, żeby olej sięgnął wysokości 1,1 m?

- 2 Wybierz właściwe dokończenie zdania.

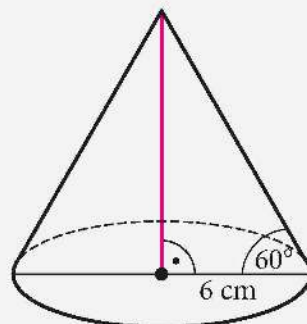
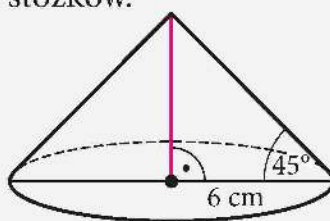
Jeżeli powierzchnią boczną stożka jest półkole o promieniu długości 7 dm, to promień podstawy stożka ma długość

- A. 3,5 dm. B. 7 dm. C. 14 dm. D. 21 dm.

- 3 Przyjrzyj się rysunkom. Wykonaj polecenia.

- a) Podaj miarę kąta rozwarcia każdego ze stożków.

- b) Oblicz pole powierzchni całkowitej bryły otrzymanej przez złączenie tych stożków podstawami.



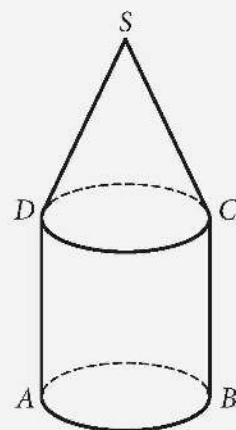
- 4 Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Średnica kuli o polu powierzchni równym $400\pi \text{ m}^2$ ma długość

- A. 5 m. B. 10 m. C. 20 m. D. 40 m.

- 5 Na rysunku przedstawiono bryłę powstałą przez złączenie podstawami walca i stożka, których pole podstawy jest równe $9\pi \text{ cm}^2$, a wysokości wynoszą 4 cm. Wskaż zdania prawdziwe.

- A. Objętość tej bryły wynosi $48\pi \text{ cm}^3$.
- B. Pole przekroju osiowego ABCSD jest równe 36 cm^2 .
- C. Kula o promieniu długości 4 cm ma objętość mniejszą niż ta bryła.



- 6 Kulę o promieniu długości 10 cm przecięto płaszczyzną. Otrzymany przekrój jest kołem o środku oddalonym o 6 cm od środka kuli. Oblicz obwód tego koła.

Rozdział V

Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

TEMATY LEKCJI

- | | | |
|----------|--|------------|
| 1 | Doświadczenia losowe i zdarzenia losowe | s. 111–114 |
| 2 | Reguła mnożenia | s. 115–119 |
| 3 | Reguła dodawania | s. 120–123 |
| 4 | Jaki mamy wybór? | s. 124–125 |
| 5 | Prawdopodobieństwo klasyczne | s. 126–129 |
| | Powtórzenie rozdziału | s. 130–131 |

ZADANIA PODSUMOWUJĄCE
SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

Doświadczenia losowe i zdarzenia losowe

NA POCZĄTEK

Jak myślisz, czy zanim rzucisz kostką do gry, jesteś w stanie przewidzieć, ile oczek wypadnie?



WAŻNA WIADOMOŚĆ

Doświadczenie losowe to eksperyment, np. rzut kostką, monetą, który możemy wielokrotnie powtórzyć w jednakowych warunkach. Gdy przeprowadzamy doświadczenie losowe, wiemy, jakie mogą być jego wyniki, ale nie możemy przewidzieć, który z nich otrzymamy.

Każdy z możliwych wyników doświadczenia losowego nazywamy **zdarzeniem elementarnym** i oznaczamy małą literą grecką ω [czyt.: omega].

Zbiór zdarzeń elementarnych nazywamy **przestrzenią zdarzeń elementarnych** i oznaczamy wielką literą grecką Ω [czyt.: omega].

Liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych nazywamy **mocą zbioru** i oznaczamy symbolami $\overline{\Omega}$ lub $|\Omega|$.

PRZYKŁAD 1

Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie monetą. Podaj przestrzeń zdarzeń elementarnych tego doświadczenia.

KROK 1 Ustalamy możliwe wyniki rzutu monetą: orzeł lub reszka.

KROK 2 Zapisujemy przestrzeń zdarzeń elementarnych rzutu monetą:
 $\Omega = \{O, R\}$, gdzie O oznacza otrzymanie orła, a R – reszki.

ĆWICZENIE 1

Podaj przestrzeń zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego, które polega na jednokrotnym rzucie sześcienną kostką.

PRZYKŁAD 2

Rzucamy dwukrotnie czworościenną kostką do gry. Podaj wyniki, które możesz otrzymać. Zapisz przestrzeń zdarzeń elementarnych i ustal ich liczbę.

KROK 1 Zapisujemy wszystkie możliwe wyniki w tabeli.

Wyniki dwukrotnego rzutu kostką		Wynik drugiego rzutu			
		1	2	3	4
Wynik pierwszego rzutu	1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4
	2	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4
	3	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4
	4	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4

KROK 2 Zapisujemy przestrzeń zdarzeń elementarnych:

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$$

KROK 3 Podajemy liczbę zdarzeń elementarnych:

$$\overline{\Omega} = 16$$

ĆWICZENIE 2

2.1. Rzucamy dwukrotnie sześcienną kostką do gry. Podaj wyniki, które możesz otrzymać. Określ moc zbioru zdarzeń elementarnych.

2.2. Rzucamy dwiema kostkami do gry – czworościenną i sześcienną. Zapisz przestrzeń zdarzeń elementarnych i ustal ich liczbę.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Zdarzeniem losowym nazywamy zestaw wyników spełniających pewien warunek. Stanowi on dowolny podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych. Zdarzenia losowe oznaczamy wielkimi literami: A , B , C itd.

Wynikiem sprzyjającym danemu zdarzeniu losowemu nazywamy zdarzenie elementarne, które spełnia warunek określający to zdarzenie losowe. Liczbę wyników sprzyjających zdarzeniu A oznaczamy symbolem $\overline{A}$.

PRZYKŁAD 3

Rzucamy jeden raz sześcienną kostką. Ustal, ile wyników sprzyja zdarzeniu losowemu polegającemu na wyrzuceniu parzystej liczby oczek.

KROK 1 Oznaczamy zdarzenie losowe polegające na wyrzuceniu parzystej liczby oczek jako A .

KROK 2 Zapisujemy wyniki sprzyjające zdarzeniu losowemu A :

$$A = \{2, 4, 6\}$$

KROK 3 Podajemy liczbę wyników sprzyjających zdarzeniu losowemu A :

$$\overline{A} = 3$$

ĆWICZENIE 3

Rzucamy jeden raz sześcienną kostką do gry. Wypisz wszystkie wyniki sprzyjające podanemu zdarzeniu losowemu. Podaj liczbę tych wyników.

a) zdarzenie losowe A – wypadła nieparzysta liczba oczek

b) zdarzenie losowe B – wypadła liczba oczek podzielna przez 3

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Zdarzenie pewne to zdarzenie losowe, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne (zbiór Ω). Zdarzenie, któremu nie sprzyja żaden wynik elementarny, jest **zdarzeniem niemożliwym** (zbiór pusty $\emptyset$).

PRZYKŁAD 4

Rzucamy trzykrotnie monetą. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne oraz sprzyjające podanemu zdarzeniu losowemu.

a) zdarzenie losowe A – otrzymaliśmy tyle samo orłów, ile reszek

b) zdarzenie losowe B – wyrzuciliśmy co najwyżej 3 orły

a) **KROK 1** Zapisujemy przestrzeń zdarzeń elementarnych doświadczenia polegającego na trzykrotnym rzucie monetą:

$$\Omega = \{(O, O, O), (O, O, R), (O, R, O), (R, O, O), (O, R, R), (R, O, R), (R, R, O), (R, R, R)\},$$

gdzie O – orzeł, R – reszka

KROK 2 Stwierdzamy, że wśród zdarzeń elementarnych nie ma wyników sprzyjających zdarzeniu A :

$$A = \emptyset, \overline{A} = 0$$

Zdarzenie A jest zdarzeniem niemożliwym.

b) **ROZWIĄZANIE**

Wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjają zdarzeniu B :

$$B = \Omega$$

Zdarzenie B jest zdarzeniem pewnym.

ĆWICZENIE 4

Rzucamy raz 2 sześciennymi kostkami. Ustal, czy podane zdarzenie jest zdarzeniem niemożliwym, czy – zdarzeniem pewnym.

- suma liczb oczek wyrzuconych na obu kostkach jest mniejsza od 13
- różnica liczb oczek uzyskanych na kostkach jest równa 6

ZADANIA

↪ **Zbiór zadań, s. 144**

- Podaj przestrzeń zdarzeń elementarnych opisanego doświadczenia.
 - wylosowano 1 liczbę spośród wszystkich dzielników liczby 12
 - zapisano liczbę dwucyfrową za pomocą cyfr 1, 2, 3 (cyfry mogą się powtarzać)
 - zapisano kod, w którym na pierwszym miejscu jest 1 litera spośród liter A, B, C, a na drugim widnieje 1 cyfra spośród cyfr 5, 6
- Doświadczenie losowe polega na wyciągnięciu 1 karty z talii. Podaj wszystkie możliwe wyniki sprzyjające podanemu zdarzeniu.
 - została wylosowana dama
 - wylosowana karta jest blotką mniejszą niż 5
 - wylosowano czerwonego asa
- Doświadczenie losowe polega na wyciągnięciu kolejno 2 kart z talii bez zwracania (pierwsza karta nie wraca do talii). Określ liczbę wyników sprzyjających podanemu zdarzeniu.
 - wylosowano waleta i blotkę większą od 7
 - wylosowane karty to dama i król

PODPOWIEDŹ

Standardowa talia kart składa się z 52 kart, po 13 w każdym z 4 kolorów. Kolory w kartach to:

- pik ♠ – barwa czarna,
- kier ♥ – barwa czerwona,
- karo ♦ – barwa czerwona
- trefl ♣ – barwa czarna.

W każdym kolorze mamy 9 kart numerowanych od 2 do 10, są to tzw. blotki, oraz 4 karty figur: waleta, damę, króla i asa.

ZADANIA BRANŻOWE

- Pani Ania otrzymała voucher [czyt: wólczer] podarunkowy do salonu kosmetycznego na kwotę 300 zł. Planuje wykorzystać pełną kwotę vouchera podczas jednej wizyty. Wypisz wszystkie możliwości wyboru zabiegów kosmetycznych przy założeniu, że pani Ania nie będzie musiała do nich dopłacać.

OFERTA SALONU KOSMETYCZNEGO		
• manicure klasyczny z malowaniem: 50 zł • manicure hybrydowy: 75 zł • pedicure z malowaniem: 90 zł • pedicure hybrydowy: 120 zł	• masaż twarzy: 60 zł • mikrodermabrazja twarzy: 110 zł • oczyszczanie manualne twarzy: 120 zł • zabieg z kwasami: 180 zł	• przedłużanie rzęs metodą 1:1: 200 zł • regulacja brwi z henną: 20 zł • regulacja brwi: 10 zł

Reguła mnożenia

NA POCZĄTEK

Tomek chce kupić 1 kg pomidorów i 1 kg ogórków. W sklepie sprzedawane są 2 rodzaje pomidorów: malinowe i żółte oraz 2 rodzaje ogórków: szklarniowe i gruntowe. Ile możliwości zakupu ma Tomek?



WAŻNA WIADOMOŚĆ

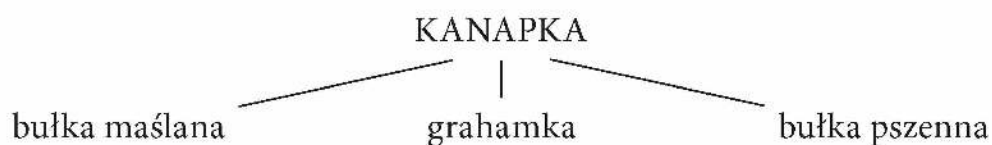
Jeśli wybieramy jedną z m możliwości, a w kolejnym kroku jedną z n możliwości, to wszystkich możliwości wyboru jest $m \cdot n$.

Kolejne wybory możemy przedstawić w postaci **drzewa stochastycznego**, które jest pewnym rodzajem grafu.

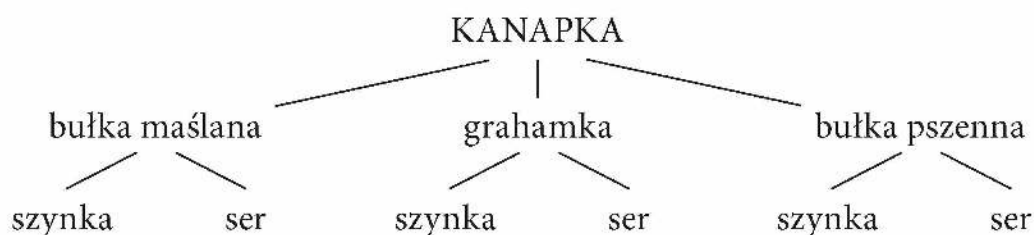
PRZYKŁAD 1

Na śniadanie przygotowujesz kanapkę, wybierając losowo rodzaj pieczywa – bułka maślana, grahamka lub bułka pszenna oraz rodzaj dodatku – szynka albo ser. Narysuj drzewo przedstawiające, na ile sposobów możesz zrobić kanapkę. Sprawdź za pomocą obliczeń otrzymany wynik.

KROK 1 Szkicujemy pierwsze gałęzie drzewa – wypisujemy możliwości wyboru pieczywa:



KROK 2 Rysujemy kolejne gałęzie drzewa przedstawiające możliwości wyboru dodatku do pieczywa:



KROK 3 Sprawdzamy liczbę wyników – mnożymy przez siebie liczby możliwych wyborów: $3 \cdot 2 = 6$, co jest równe liczbie rozgałęzień na końcu drzewa.

Kanapkę można zrobić na 6 sposobów.

ĆWICZENIE 1

Ustal na podstawie tabeli, na ile sposobów możesz przygotować obiad składający się z zupy, dania głównego oraz napoju. Narysuj odpowiednie drzewo ilustrujące tę sytuację.

Zupy	rosół, pomidorowa
Dania główne	kotlet mielony, makaron z sosem, naleśniki
Napoje	kompot, woda

WAŻNA WIADOMOŚĆ

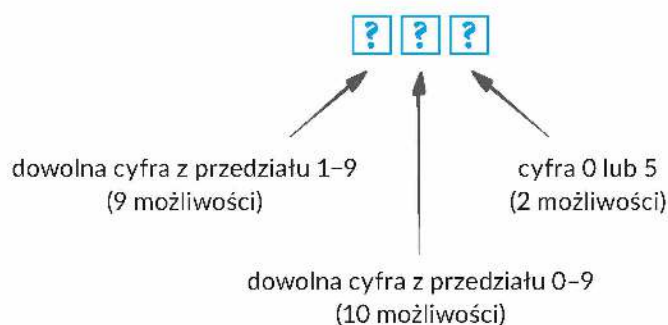
Jeśli pewien wybór polega na podjęciu n decyzji, przy czym pierwszą decyzję można podjąć na k_1 sposobów, drugą – na k_2 sposobów, ..., n -tą – na k_n sposobów, to takiego wyboru można dokonać na $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$ sposobów.

Jest to **reguła mnożenia**.

PRZYKŁAD 2

Oblicz, ile jest różnych trzycyfrowych liczb podzielnych przez 5.

KROK 1 Ustalamy, jakie cyfry mogą występować na odpowiednich miejscach:



PODPowiedź

CECHY PODZIELNOŚCI

Liczba naturalna jest podzielna przez:

- 2, gdy ostatnią jej cyfrą jest: 0, 2, 4, 6 lub 8;
- 4, gdy jej ostatnie 2 cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4;
- 5, gdy ostatnią jej cyfrą jest 0 lub 5;
- 10, gdy ostatnią jej cyfrą jest 0.

KROK 2 Obliczamy liczbę wszystkich możliwych wyników na podstawie reguły mnożenia:

$$9 \cdot 10 \cdot 2 = 180$$

Mamy 180 liczb trzycyfrowych podzielnych przez 5.

ĆWICZENIE 2

2.1. Ustal, ile jest różnych trzycyfrowych liczb parzystych.

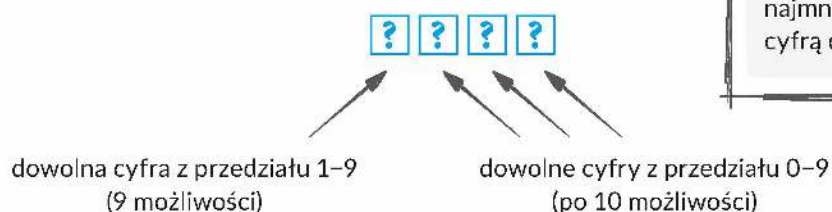
2.2. Podaj, ile jest różnych pięciocyfrowych liczb nieparzystych.

PRZYKŁAD 3

Oblicz, ile różnych liczb czterocyfrowych można utworzyć, jeśli:

- a) cyfry mogą się powtarzać,
- b) cyfry nie mogą się powtarzać.

a) **KROK 1** Ustalamy, jakie cyfry mogą występować na odpowiednich miejscach:

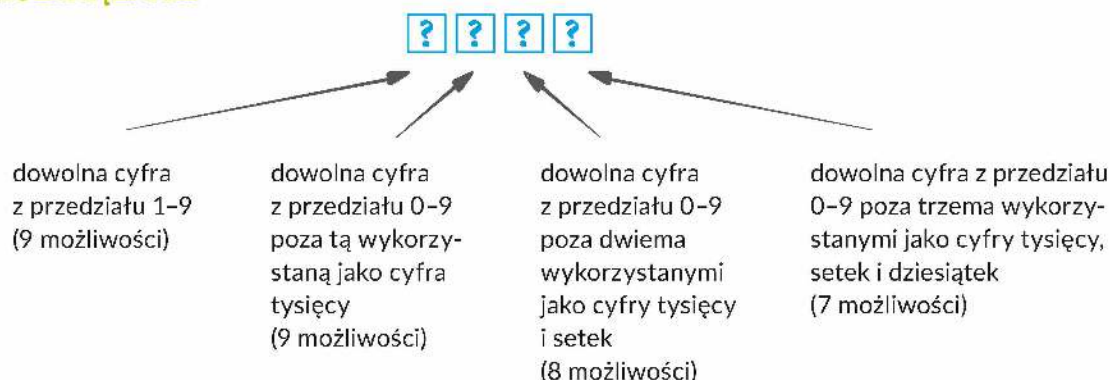
**PODPOWIEDŹ**

W dowolnej liczbie całkowitej, co najmniej dwucyfrowej, pierwszą cyfrą od lewej nie może być 0.

KROK 2 Obliczamy liczbę możliwych wyborów:

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$$

Możemy utworzyć 9000 liczb czterocyfrowych.

b) ROZWIĄZANIE

$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$, czyli możemy utworzyć 4536 liczb czterocyfrowych, w których cyfry się nie powtarzają.

ĆWICZENIE 3

Ustal, ile różnych liczb trzycyfrowych możemy utworzyć, jeśli:

- a) cyfry mogą się powtarzać,
- b) cyfry nie mogą się powtarzać.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

Silnia dowolnej dodatniej liczby naturalnej n to iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n . Zapisujemy ją symbolem $n!$ [czyt.: en silnia] i obliczamy w następujący sposób:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

PRZYKŁAD 4

Oblicz, ile różnych liczb sześciocyfrowych można utworzyć z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, jeśli cyfry nie mogą się powtarzać.

KROK 1 Wykonujemy pomocniczy schemat liczby sześciocyfrowej:

— — — — —

Każda kreska symbolizuje jedną cyfrę.

KROK 2 Nad każdą kreską zapisujemy liczbę cyfr, którą mamy do wyboru:

6 5 4 3 2 1

KROK 3 Zauważamy, że otrzymaliśmy kolejne liczby naturalne, dlatego możemy obliczyć liczbę wszystkich wyborów, korzystając z silni:

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

Z podanych cyfr możemy utworzyć 720 różnych liczb sześciocyfrowych, w których cyfry się nie powtarzają.

ĆWICZENIE 4

Oblicz, ile różnych liczb dziewięciocyfrowych o niepowtarzających się cyfrach można utworzyć z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

To się liczy!

W sklepach odzieżowych witryny sklepowe zmieniane są co sezon, aby zaprezentować nową kolekcję ubrań. Za pomysł na to, jak ciekawie i oryginalnie wyeksponować ubrania, odpowiada pracownik nazywany window designerem [czyt.: łindoł dizajnerem]. Poniższe zadanie pomoże Wam ustalić, na ile różnych sposobów można zaprezentować ubrania na manekinie.

ZADANIE BRANŻOWE

Nowa kolekcja wiosenno-letnia odzieży damskiej składa się m.in. z 4 rodzajów żakietów, 5 modeli sukienek oraz 3 różnych par butów. Oblicz, na ile różnych sposobów można ubrać manekina, by zaprezentować nową kolekcję.



ZADANIA

↻ Zbiór zadań, s. 144

1. Oblicz, na ile różnych sposobów można skomponować strój składający się z koszuli, spodni oraz krawata, jeśli masz 3 różne koszule, 4 pary różnych spodni oraz 5 różnych krawatów.
2. Na parkingu z pięcioma miejscami postojowymi stoi 5 aut. Ustal, na ile różnych sposobów mogą one zająć miejsca na parkingu.
3. Ośmioosobowa grupa rowerzystów chce objechać Półwysep Helski. Oblicz, na ile różnych sposobów mogą się ustawić jeden za drugim.

ZADANIA BRANŻOWE

4. Na zdjęciu pokazano ofertę pewnej kawiarni. W Międzynarodowym Dniu Kawy właściciele ogłosili promocję i do dowolnej kawy klienci otrzymują makaronik gratis. Oblicz, na ile sposobów można wybrać taki zestaw.



5. Kosmetyczka ma 10 różnych kolorów lakieru do paznokci. Chce pomalować klientce każdy paznokieć u obu dłoni innym kolorem. Oblicz, na ile sposobów może to zrobić.
6. Zakład ślusarski produkuje kłódki szyfrowe z możliwością ustawienia własnego czterocyfrowego kodu. Odpowiedz na pytania.
 - a) Ile jest wszystkich możliwości ustawienia kodu?
 - b) Na ile sposobów można ustawić parzysty numer kodu?
 - c) Ile jest wszystkich możliwości ustawienia kodu złożonego z różnych cyfr?



Reguła dodawania

NA POCZĄTEK

Hubert ma 3 szare i 2 czarne koszule oraz 2 pary szarych adidasów i 1 parę czarnych trampek. Chciałby włożyć koszulę i buty w jednakowym kolorze. Ile ma możliwości wyboru stroju?



PRZYKŁAD 1

Podaj, ile jest różnych liczb dwucyfrowych, których suma cyfr jest równa 12.

KROK 1 Ustalamy pary cyfr, których suma jest równa 12:

$$3 + 9 = 12$$

$$4 + 8 = 12$$

$$5 + 7 = 12$$

$$6 + 6 = 12$$

Możliwe pary cyfr to 3 i 9, 4 i 8, 5 i 7 oraz 6 i 6.

KROK 2 Ustalamy, ile jest liczb o podanych cyfrach:

- 2 liczby o cyfrach 3 i 9 (39 lub 93)
- 2 liczby o cyfrach 4 i 8 (48 lub 84)
- 2 liczby o cyfrach 5 i 7 (57 lub 75)
- liczba o cyfrach 6 i 6 (66)

KROK 3 Zliczamy wszystkie możliwości:

$$2 + 2 + 2 + 1 = 7$$

Istnieje 7 liczb dwucyfrowych, których suma cyfr jest równa 12.

ĆWICZENIE 1

Oblicz, ile jest różnych liczb:

- dwucyfrowych, których suma cyfr jest równa 10;
- trzydcyfrowych, których suma cyfr wynosi 4.

WAŻNA WIADOMOŚĆ

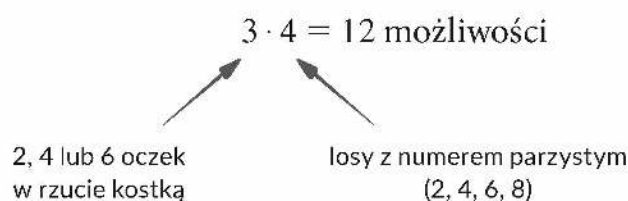
Jeśli pewien wybór polega na podjęciu jednej z n decyzji, przy czym pierwszą decyzję można podjąć na k_1 sposobów, drugą – na k_2 sposobów, ..., n -tą – na k_n sposobów, to takiego wyboru można dokonać na $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ sposobów.

Jest to **reguła dodawania**.

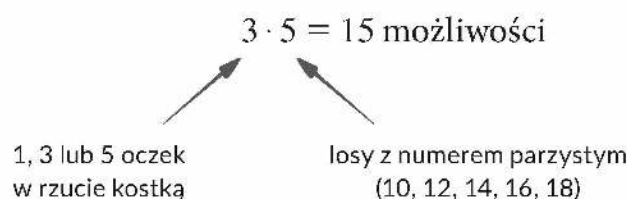
PRZYKŁAD 2

Doświadczenie polega na rzucie kostką oraz na wyciągnięciu losu z jednego z dwóch pojemników. W pierwszym pojemniku są losy z numerami od 1 do 9, a w drugim – losy z numerami od 10 do 19. Jeśli wypadnie parzysta liczba oczek, wyciągamy los z pierwszego pojemnika. Gdy wypadnie nieparzysta liczba oczek, losujemy z drugiego pojemnika. Oblicz, ile jest możliwości wyciągnięcia losu z numerem parzystym.

KROK 1 Ustalamy, ile jest wszystkich możliwości wyciągnięcia losu z numerem parzystym z pierwszego pojemnika, korzystając z reguły mnożenia:



KROK 2 Obliczamy wszystkie możliwości wyciągnięcia losu z numerem parzystym z drugiego pojemnika:



KROK 3 Ustalamy wszystkie możliwości wylosowania losu z numerem parzystym, korzystając z reguły dodawania:

$$12 + 15 = 27 \text{ możliwości}$$

ĆWICZENIE 2

Z talii 52 kart losujemy kolejno 2 karty bez zwracania. Oblicz, ile jest możliwości wylosowania:

- a) 2 kart o jednakowej barwie, jeśli pierwsza karta ma być waletem lub królem, a druga – blotką;
- b) 2 kart jednakowych kolorów, z których żadna nie jest blotką.

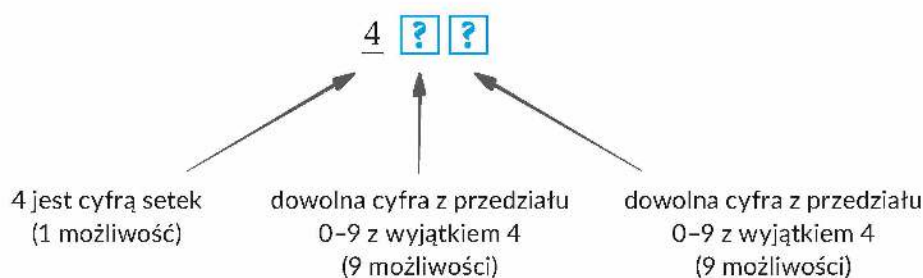
PRZYKŁAD 3

Oblicz, ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych mniejszych od 500, w których zapisie cyfra 4 występuje tylko raz.

KROK 1 Zauważamy, że mamy do czynienia z 3 różnymi sytuacjami w zależności od położenia cyfry 4:

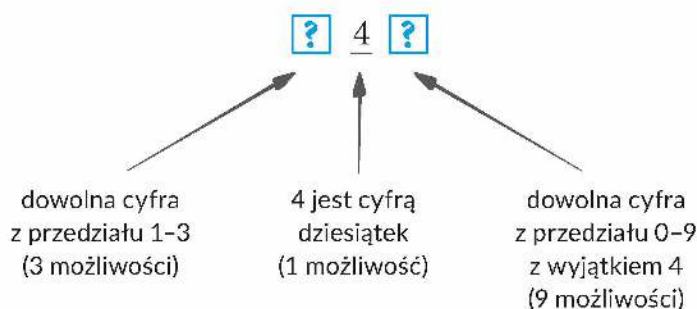
4 może być cyfrą setek, cyfrą dziesiątek lub cyfrą jedności.

KROK 2 Korzystając z reguły mnożenia, obliczamy, ile jest liczb trzycyfrowych mniejszych od 500, których cyfrą setek jest 4:



$1 \cdot 9 \cdot 9 = 81$, czyli mamy 81 takich liczb.

KROK 3 Ustalamy za pomocą reguły mnożenia, ile jest liczb trzycyfrowych mniejszych od 500, w których 4 jest cyfrą dziesiątek:



$3 \cdot 1 \cdot 9 = 27$, czyli mamy 27 takich liczb.

KROK 4 Obliczamy, ile jest liczb trzycyfrowych mniejszych od 500, w których 4 jest cyfrą jedności:



$3 \cdot 9 \cdot 1 = 27$, czyli mamy 27 takich liczb.

KROK 5 Ustalamy, ile mamy razem liczb trzycyfrowych o podanym warunku, korzystając z reguły dodawania:

$$81 + 27 + 27 = 135$$

ĆWICZENIE 3

Podaj, ile jest wszystkich liczb czterocyfrowych mniejszych od 6500, w których zapisie cyfra 5 występuje tylko raz.

ZADANIA

↻ Zbiór zadań, s. 145

1. Ustal, ile jest liczb trzycyfrowych, które w zapisie mają co najmniej 1 cyfrę parzystą.
2. Dyrektor szkoły chce wybrać dwuosobową delegację klas trzecich składającą się z jednej dziewczyny i jednego chłopaka z tej samej klasy. Klasa IIIA liczy 13 chłopców i 9 dziewczyn, IIIB liczy 15 chłopców i 4 dziewczyny, a IIIC liczy 23 chłopców i 2 dziewczyny. Oblicz, na ile sposobów może dokonać takiego wyboru.

ZADANIA BRANŻOWE

3. Hurtownia porcelany stołowej przygotowała katalog produktów ukazany na zdjęciu. Ustal, na ile sposobów można zestawić serwis kawowy składający się z filiżanki i talerzyka, który będzie w całości kolorowy lub w całości biały.



4. Tapicer ma w ofercie materiał poliestrowy w 5 kolorach lub skórę barwioną w 3 kolorach, którymi obija sofę. Natomiast do obijania foteli używa materiału poliestrowego w 4 kolorach lub skóry barwionej w 3 kolorach. Oblicz, ile możliwości skomponowania zestawu mebli ma tapicer, jeżeli obicia sofy i fotela chce wykonać z tego samego rodzaju materiału.

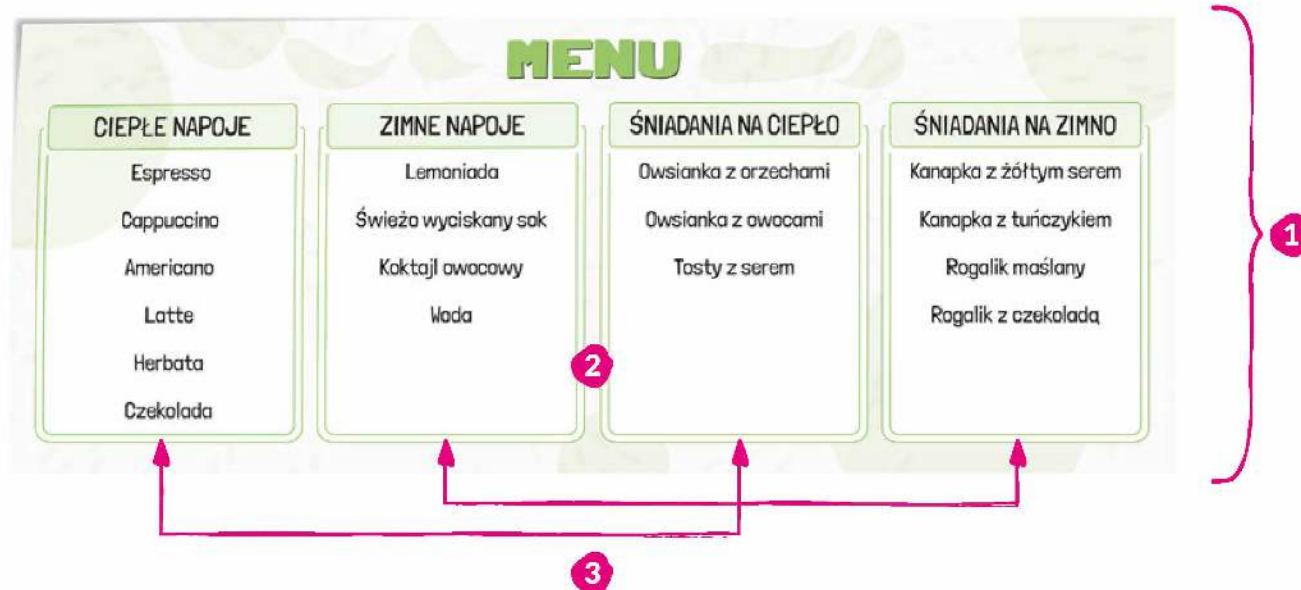
4 Jaki mamy wybór?

Właściciele firm przyciągają uwagę klientów m.in. bogatą ofertą produktów czy usług. Kiedy szukają ciekawego pomysłu na nowe promocje, mogą wykorzystać wiadomości z działu matematyki nazywanego kombinatoryką. Dzięki temu może się okazać, że np. skromne menu wcale nie oznacza małych możliwości promocyjnych.

Kombinatoryka to dział matematyki zajmujący się zliczaniem elementów zbiorów skończonych.

PRZYKŁADOWE MENU

Właściciel kawiarni szukał nowego pomysłu na promocję swojego lokalu. Uznał, że warto pokazać szeroką ofertę serwowanych śniadań. Poniżej znajduje się menu kawiarni. Zapoznaj się z nim i odpowiedz, czy obecna propozycja jest wystarczająco bogata, czy musi coś dodać do menu, żeby tak było.



1 Ustalamy, ile posiłków z dowolnym napojem można skomponować z dotychczasowego menu.

Ustalamy, ile jest łącznie napojów zimnych i ciepłych:

$$6 + 4 = 10$$

Tę czynność powtarzamy dla śniadań:

$$3 + 4 = 7$$

Korzystając z reguły mnożenia, obliczamy, ile różnych posiłków może skomponować klient:

$$10 \cdot 7 = 70$$

Właściciel kawiarni może zatem napisać w menu: „Mamy w ofercie aż 70 zestawów śniadaniowych.”

- 2 Wydaje się, że wprowadzenie dodatkowych pozycji do menu niewiele zmieni w ofercie kawiarni. Sprawdźmy to za pomocą kolejnych obliczeń matematycznych.

Założmy, że liczba możliwości wybrania napoju pozostanie bez zmian (10), a liczba możliwości wybrania śniadania wzrośnie tylko o 1, np. przez dodanie jajecznicy do śniadań na ciepło. Obliczamy nową liczbę możliwości skomponowania posiłku za pomocą reguły mnożenia:

$$10 \cdot 8 = 80$$

Klient może skomponować posiłek z napojem na 80 różnych sposobów, czyli ma o 10 możliwości więcej.

Jeśli właściciel kawiarni wprowadzi do menu 1 napój więcej i 1 śniadanie więcej, to na podstawie reguły mnożenia możemy określić nową liczbę zestawów śniadaniowych oferowanych przez kawiarnię:

$$11 \cdot 8 = 88$$

Klient będzie mógł wybrać 88 różnych zestawów śniadaniowych. Zatem oferta zwiększy się o 18 opcji.

- 3 Można też zaproponować klientowi zniżkę, jeśli wybierze on zestaw śniadaniowy tylko na ciepło lub tylko na zimno. Obliczymy więc, na ile sposobów da się skomponować właśnie taki zestaw.

Kawiarnia oferuje 4 zimne napoje i 4 zimne śniadania, więc można skomponować 16 zestawów na zimno:

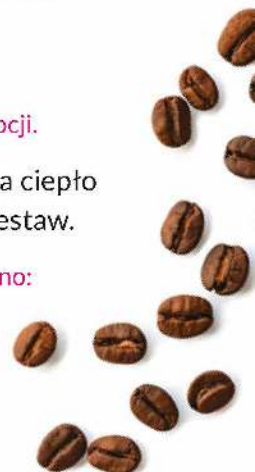
$$4 \cdot 4 = 16$$

W menu jest 6 ciepłych napoi oraz 3 ciepłe śniadania, zatem mamy 18 możliwości skomponowania zestawu na ciepło:

$$6 \cdot 3 = 18$$

Łączną liczbę zestawów śniadaniowych w całości ciepłych albo zimnych obliczymy dzięki regule dodawania:

$$16 + 18 = 34$$



ZADANIA BRANŻOWE

Do schroniska górskiego dotarła wycieczka szkolna składająca się z 25 uczniów i 2 opiekunów. Stołówka schroniska codziennie oferuje inne dania. Aktualne menu zamieszczono poniżej. Sprawdź, czy jest możliwe, że każdy z uczestników wycieczki dostanie inny zestaw obiadowy.

ZUPY	DANIA GŁÓWNE
• POMIDOROWA	• KOTLET SCHABOWY Z SURÓWKĄ I ZIEMNIAKAMI
• ROSÓŁ	• FILET Z KURCZAKA Z SURÓWKĄ I ZIEMNIAKAMI
• KWAŚNICA	• PIEROGI Z KAPUSTĄ
	• PIEROGI Z MIĘSEM
	• PSTRAĆ GÓRSKI Z SURÓWKĄ I ZIEMNIAKAMI
DESERY	
• DOMOWA SZARLOTKA	
• NALEŚNIKI Z JAGODAMI	



Prawdopodobieństwo klasyczne

NA POCZĄTEK

Jak myślisz, czy podczas rzutu monetą szansa wyrzucenia orła jest taka sama jak szansa wyrzucenia reszki?



WAŻNA WIADOMOŚĆ

Prawdopodobieństwem klasycznym nazywamy prawdopodobieństwo P określone dla doświadczeń losowych, w których każdy wynik jest jednakowo prawdopodobny. **Prawdopodobieństwo zdarzenia A** oznaczamy jako $P(A)$ i obliczamy ze wzoru:

$$P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}}$$

gdzie $\overline{A}$ jest liczbą zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A , natomiast $\overline{\Omega}$ – liczbą wszystkich zdarzeń elementarnych.

Jeżeli zdarzenie A jest zdarzeniem niemożliwym, to $P(A) = 0$. Jeżeli $P(A) = 1$, to zdarzenie A jest zdarzeniem pewnym. Prawdopodobieństwo zdarzenia A może przyjmować następujące wartości:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

PRZYKŁAD 1

Rzucamy dwukrotnie monetą. Oblicz, ile wynosi prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na uzyskaniu co najmniej 1 orła.

KROK 1 Ustalamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych:

$$\Omega = \{(O, O), (O, R), (R, O), (R, R)\} \quad \overline{\Omega} = 4$$

KROK 2 Opisujemy zdarzenie losowe:

A – zdarzenie losowe polegające na wyrzuceniu co najmniej 1 orła

$$A = \{(O, O), (O, R), (R, O)\}$$

KROK 3 Ustalamy liczbę wyników sprzyjających zdarzeniu A :

$$\overline{A} = 3$$

KROK 4 Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A na podstawie odpowiedniego wzoru:

$$P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}} = \frac{3}{4}$$

ĆWICZENIE 1

1.1. Rzucamy dwukrotnie monetą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na otrzymaniu co najmniej 1 reszki.

1.2. Rzucamy trzykrotnie monetą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia B , w którym wypadł co najmniej 1 orzeł.

PRZYKŁAD 2

Rzucamy sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wyrzuceniu:

- a) 2 oczek, b) 1 oczka lub 6 oczek, c) co najmniej 4 oczek.

ROZWIĄZANIE

- a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$\overline{\Omega} = 6$$

A – zdarzenie losowe polegające na wyrzuceniu 2 oczek

$$A = \{2\} \quad \overline{A} = 1$$

$$P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}} = \frac{1}{6}$$

- b) B – zdarzenie losowe polegające na wyrzuceniu 1 oczka lub 6 oczek

$$B = \{1, 6\} \quad \overline{B} = 2$$

$$P(B) = \frac{\overline{B}}{\overline{\Omega}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- c) C – zdarzenie losowe polegające na wyrzuceniu co najmniej 4 oczek

$$C = \{4, 5, 6\} \quad \overline{C} = 3$$

$$P(C) = \frac{\overline{C}}{\overline{\Omega}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ĆWICZENIE 2

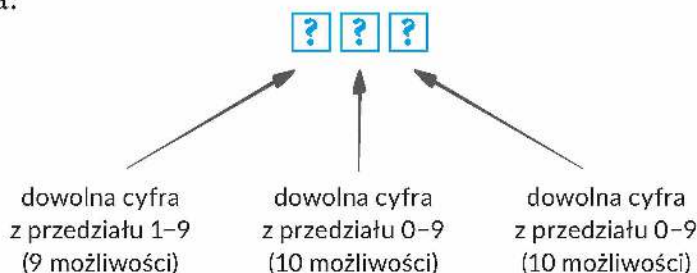
Rzucamy jeden raz sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na otrzymaniu:

- a) liczby podzielnej przez 3, b) dzielnika liczby 10, c) dzielnika liczby 42.

PRZYKŁAD 3

Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrana liczba trzycyfrowa jest większa od 325.

KROK 1 Ustalamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych, korzystając z reguły mnożenia:



$$\overline{\Omega} = 9 \cdot 10 \cdot 10 = 900, \text{ czyli mamy } 900 \text{ liczb trzycyfrowych.}$$

KROK 2 Ustalamy zdarzenia sprzyjające zdarzeniu A, które polega na wylosowaniu liczby trzycyfrowej większej od 325.

- Jeżeli cyfrą setek jest 3 (1 możliwość), a cyfra dziesiątek to 2 (1 możliwość), to na miejscu jedności mogą być cyfry 6, 7, 8, 9 (4 możliwości):
 $1 \cdot 1 \cdot 4 = 4$, czyli mamy 4 takie liczby.
- Jeżeli cyfrą setek jest 3 (1 możliwość), a cyfra dziesiątek jest większa niż 2 (7 możliwości – cyfry z przedziału 3–9), to cyfra jedności jest dowolna (10 możliwości – cyfry z przedziału 0–9):
 $1 \cdot 7 \cdot 10 = 70$, czyli mamy 70 takich liczb.
- Jeżeli cyfra setek jest większa niż 3 (6 możliwości – cyfry z przedziału 4–9), to cyfra dziesiątek i jedności jest dowolna (po 10 możliwości):
 $6 \cdot 10 \cdot 10 = 600$, czyli mamy 600 takich liczb.

KROK 3 Korzystając z reguły dodawania, podajemy liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A:

$$\overline{A} = 4 + 70 + 600 = 674$$

KROK 4 Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A:

$$P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}} = \frac{674}{900} = \frac{337}{450}$$

Prawdopodobieństwo, że losowo wybrana liczba trzycyfrowa jest większa od 325, wynosi $\frac{337}{450}$.

ĆWICZENIE 3

- 3.1.** Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrana liczba trzycyfrowa jest mniejsza niż 223.
- 3.2.** Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrana liczba trzycyfrowa jest większa niż 712.

ZADANIA **Zbiór zadań, s. 145**

1. Na półce z książkami leżą 4 komiksy, 3 biografie, 7 kryminałów i 1 reportaż. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrana książka jest biografią.
2. Paulina rzuca jednocześnie monetą i kostką. Oblicz prawdopodobieństwo, że wypadnie orzeł i mniej niż 3 oczka lub reszka i więcej niż 3 oczka.
3. W tabeli przedstawiono klasyfikację języków używanych w Europie.

Języki germańskie	Języki słowiańskie		Języki romańskie
• niemiecki • angielski • duński • szwedzki • niderlandzki • norweski • islandzki • jidysz	• polski • rosyjski • ukraiński • białoruski • słowacki • czeski	• bułgarski • chorwacki • serbski • bośniacki • macedoński • słoweński	• hiszpański • francuski • włoski • portugalski • rumuński

Na zjazd młodzieży przybyła 25-osobowej grupa, w której każdy mówił innym językiem europejskim. Wykonaj polecenia.

- a) Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba mówi językiem z rodziny języków słowiańskich.
- b) Wybieramy kolejno trzyosobową delegację – pierwsza osoba jest przewodniczącym, druga – protokolantem, a trzecia – skarbnikiem. Oblicz prawdopodobieństwo, że wybrane osoby będą mówić językiem z jednej rodziny językowej.

ZADANIA BRANŻOWE

4. Pracownik telewizji kablowej polecił klientowi pakiet podstawowy zawierający 50 programów. Wśród nich są kanały: 7 filmowych, 5 sportowych, 8 informacyjnych, 12 poradnikowych oraz 18 ogólnych. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo włączony przez klienta program:
 - a) jest kanałem sportowym,
 - b) **nie** jest kanałem filmowym,
 - c) jest kanałem poradnikowym lub informacyjnym.

Powtórzenie rozdziału

KOMBINATORYKA I RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA

ZADANIA PODSUMOWUJĄCE

- 1 Podaj liczbę możliwych wyników doświadczenia losowego, w którym zapisujemy liczbę:
 - a) dwucyfrową za pomocą jedynie cyfr nieparzystych;
 - b) trzycyfrową, wykorzystując cyfry 1, 2, 3, 4 (cyfry mogą się powtarzać);
 - c) czterocyfrową składającą się z 2 cyfr parzystych i 2 cyfr nieparzystych.
- 2 W każdym rzędzie w teatrze jest 16 miejsc. Odpowiedz na pytania.
 - a) Na ile sposobów 3 osoby mogą usiąść w 1 rzędzie?
 - b) Na ile sposobów 2 osoby mogą usiąść w 1 rzędzie, nie siedząc obok siebie?
- 3 Sprawdzian składa się z 10 pytań zamkniętych. Każde z pytań ma 4 możliwe odpowiedzi, z których zawsze tylko 1 jest poprawna. Na ile różnych sposobów można rozwiązać test? Wybierz właściwą odpowiedź.
A. 14 B. 40 C. 10^4 D. 4^{10}
- 4 Na ile sposobów można posadzić 6 uczniów na sześćoosobowej ławce? Wybierz właściwą odpowiedź.
A. $6 \cdot 6$ B. $6!$ C. 66 D. 6^6
- 5 Kinga rzuca jednocześnie monetą i kostką. Oblicz prawdopodobieństwo, że otrzyma orła i parzystą liczbę oczek lub orła i liczbę oczek, która jest dzielnikiem liczby 6.
- 6 Właściciel sklepu ze słodyczami wprowadził zasadę, że każdy klient może się poczęstować cukierkiem, jeśli wyciągnie z talii odpowiednią kartę. Jeśli wylosowana karta jest czerwoną damą, to wybiera cukierka z pierwszego pudełka, w którym znajdują się 4 cukierki owocowe i 5 cukierków czekoladowych. Jeśli wyciągnięta karta to błotka, losuje cukierka z drugiego pudełka, w którym jest 1 cukierek czekoladowy i 6 cukierków owocowych. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrany cukierek jest czekoladowy.
- 7 Losujemy 1 liczbę dwucyfrową. Zdarzenie A polega na tym, że wylosowana liczba jest podzielna przez 3, a zdarzenie B – że iloczyn cyfr wylosowanej liczby jest parzysty. Wskaż prawdziwe nierówności.
A. $P(A) < P(B)$ B. $P(A) + P(B) > 1$ C. $P(B) > \frac{3}{4}$
- 8 Spośród wszystkich liczb trzycyfrowych losujemy 1 liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby parzystej większej od 480.

SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ

- 1 Rzucamy dwukrotnie sześcienną kostką. Wypisz wszystkie wyniki sprzyjające podanemu zdarzeniu.
 - a) W zdarzeniu A suma liczb oczek otrzymanych podczas rzutów jest równa co najmniej 10.
 - b) Zdarzenie B polega na wyrzuceniu liczb oczek, których iloczyn jest równy 12.
 - c) W zdarzeniu C iloczyn liczb oczek otrzymanych podczas rzutów jest podzielny przez 6.
- 2 Pani Natalia ma 7 sukienek wieczorowych, każdą w innym kolorze, oraz 10 torebek w różnych kolorach. Na ile sposobów może dobrać torebkę do sukienki? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. 7 B. 17 C. 49 D. 70
- 3 W pewnej klasie są 3 szatynki, 4 blondynki i 2 rudowłose oraz 5 blondynów, 4 szatynów i 1 rudowłosy. Wybieramy dwuosobową delegację klasy składającą się z 1 dziewczyny i 1 chłopaka. Oblicz, na ile sposobów można utworzyć taką delegację, jeżeli dziewczyna i chłopak mają mieć włosy w tym samym kolorze.
- 4 Rzucamy trzykrotnie monetą. Ustal, które z podanych zdarzeń losowych jest bardziej prawdopodobne: zdarzenie A – wypadła co najmniej 1 reszka, czy B – nie wypadły 2 reszki.
- 5 W barze kanapkowym możesz samodzielnie zdecydować, z czego ma się składać Twoja kanapka. Wybierasz rodzaj pieczywa, składnik główny, warzywo, pastę, sos i przyprawę. Za każdym razem możesz wybrać tylko 1 produkt spośród proponowanych. Wykonaj polecenia.
 - a) Podaj, ile różnych kanapek może przygotować Ci pracownik baru.
 - b) Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo przygotowana przez niego kanapka składa się z bułki żytniej, sera, pomidora i zostały do niej dodane dowolna pasta, sos i przyprawy.

Pieczywo	• bułka pszenna • bułka żytnia
Składnik główny	• ser (gouda, masdamer) • wędlina (salami, pieczona wołowina, szynka drobiowa)
Warzywo	• pomidor • papryka • ogórek
Pasta	• hummus • awocado • pasta z czerwonej fasoli
Sos	• majonezowy • czosnkowy • miodowy
Przyprawy	• oregano • bazylia

Zbiór zadań

ROZDZIAŁY

I.	Proporcjonalność	s. 133-135
II.	Graniastopy	s. 135-138
III.	Ostrostopy	s. 139-140
IV.	Bryły obrotowe	s. 141-143
V.	Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa	s. 144-145

I. Proporcjonalność

1. Proporcje

↶ Lekcja 1, s. 7-10

1. Wyznacz wartość niewiadomej. Zapisz odpowiednie założenie, jeśli to konieczne.

a) $\frac{3}{4} = \frac{12}{y}$

c) $\frac{6}{k} = \frac{2}{5}$

e) $\frac{4}{9} = \frac{36}{m}$

g) $\frac{7}{2b} = \frac{35}{4}$

b) $\frac{4}{5} = \frac{20}{z}$

d) $\frac{8}{l} = \frac{4}{15}$

f) $\frac{5}{3a} = \frac{10}{21}$

h) $\frac{9}{20} = \frac{6}{5c}$

2. Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Jeżeli zgodnie z tabelami zamienności produktów 125 g miodu dietetyk zastąpił 100 g cukru, to 40 g cukru można zastąpić

A. 32 g miodu.

B. 50 g miodu.

C. 100 g miodu.

D. 125 g miodu.

3. Grupa badaczy złowiła, oznakowała i wypuściła z powrotem do jeziora 60 leszczy.

Po pewnym czasie ponownie odłowiła 50 leszczy, spośród których 6 było oznakowanych. Ile wynosi przybliżona liczba leszczy w jeziorze? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. 60

B. 500

C. 1000

D. 3000

2. Wielkości wprost proporcjonalne

↶ Lekcja 2, s. 11-14

1. Wyznacz współczynnik proporcjonalności a , jeżeli wielkości x i y są wprost proporcjonalne.

a) $x = 14, y = 16$

b) $x = \frac{9}{4}, y = \frac{3}{8}$

c) $x = 3\frac{1}{3}, y = 1\frac{2}{3}$

2. Między wielkościami x i y zachodzi zależność określona wzorem $y = 1\frac{3}{4}x$.

Wskaż zdania prawdziwe.

A. Dla $x = 16$ wartość y wynosi 28.

B. Jeżeli wartość x wzrośnie o 1, to wartość y wzrośnie o $\frac{3}{4}$.

C. Jeżeli wartość x zmniejszy się o 8, to wartość y zmaleje o 14.

3. W hotelowej restauracji przygotowano poczęstunek dla uczestników konferencji. Koszt poczęstunku dla 1 uczestnika wynosi 45 zł. Odpowiedz na pytania.

a) Ile wyniesie całkowity koszt poczęstunku, jeżeli w konferencji weźmie udział 50 osób?

b) Ilu maksymalnie może być uczestników konferencji, jeśli jej organizator nie chce przekroczyć kwoty 4000 zł za poczęstunek?

3. Wielkości odwrotnie proporcjonalne

↶ Lekcja 3, s. 15-19

1. Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Jeżeli wielkości x i y zapisane w tabeli są odwrotnie proporcjonalne, to symbol ? należy zastąpić liczbą

x	2	3
y	15	?

- A. 10. B. 16. C. 22,5. D. 30.

2. Dany jest wykres proporcjonalności odwrotnej, do którego należy punkt $P(\sqrt{3} + 1, \sqrt{3} - 1)$. Wskaż zdania prawdziwe.

A. Do wykresu tej proporcjonalności należy też punkt $Q(\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

B. Do wykresu tej proporcjonalności należy też punkt $R(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

C. Ta proporcjonalność określona jest wzorem $y = \frac{2}{x}$.

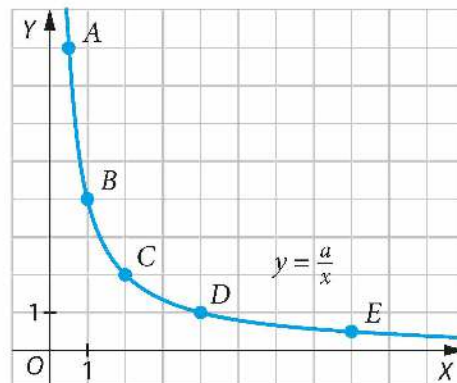
3. Na rysunku przedstawiono wykres proporcjonalności odwrotnej $y = \frac{a}{x}$. Wykonaj polecenia.

a) Podaj współrzędne punktów A, B, C, D i E.

b) Zapisz wzór tej proporcjonalności.

c) Oblicz wartość y dla $x = 1,6$.

d) Ustal wartość x , dla którego $y = \frac{3}{8}$.



- *4. Firma krawiecka otrzymała zamówienie uszycia kompletu obrusów do restauracji hotelowej. Pierwszej grupie krawcowych wykonanie zamówienia zajęłoby 4 roboczodni (rd.), a drugiej – 6 rd. Oblicz, ile czasu potrwa uszycie kompletu obrusów, jeżeli obie grupy będą pracowały jednocześnie. Przyjmij, że 1 rd. to 8 godzin.

5. Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$

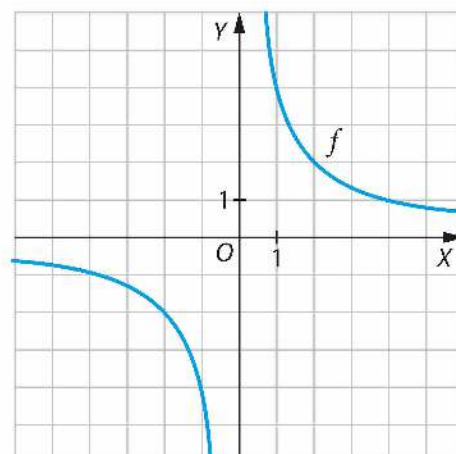
↶ Lekcja 5, s. 22-25

1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{4}{x}$. Wskaż zdania prawdziwe.

A. Największa wartość funkcji f w przedziale $\langle 1; 2 \rangle$ wynosi 4.

B. Najmniejsza wartości funkcji f w przedziale $\langle 2; 4 \rangle$ jest równa 4.

C. Najmniejsza wartość funkcji f w przedziale $\langle -4; -1 \rangle$ wynosi -4.



2. Wybierz właściwe dokończenie zdania.

Do wykresu funkcji $f(x) = \frac{12}{x}$ **nie** należy punkt

- A. $(-6, -2)$. B. $(-\frac{1}{2}, -24)$. C. $(\frac{2}{7}, 42)$. D. $(\frac{3}{4}, 32)$.

3. Ile punktów wspólnych z prostą o równaniu $y = 2x$ ma hiperbola określona wzorem $y = \frac{2}{x}$? Wybierz właściwą odpowiedź.

- A. 0 B. 1 C. 2 D. nieskończenie wiele

4. Naskicuj wykres funkcji.

a) $f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x} & \text{dla } x \in \langle 1; 4 \rangle \\ -x - 1 & \text{dla } x < 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} & \text{dla } x > 3 \\ 1 & \text{dla } x \in \langle -4; 3 \rangle \end{cases}$

II. Graniastopy

1. Proste i płaszczyzny w przestrzeni

🔄 Lekcja 1, s. 29–33

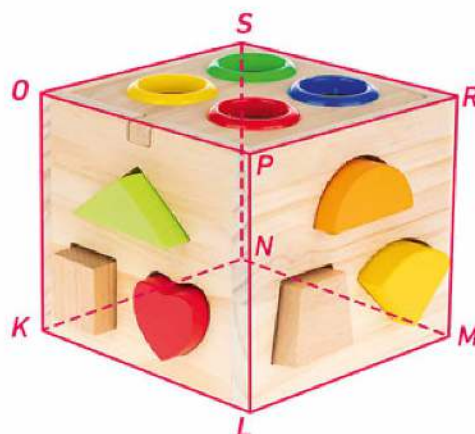
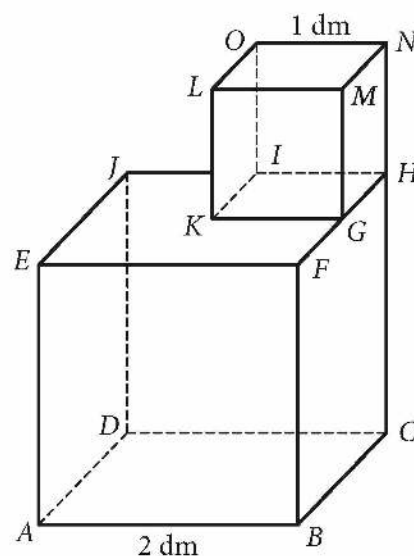
1. Bryła przedstawiona na rysunku składa się z 2 sześcianów. Wskaż zdania prawdziwe.

- A. Rzuty prostokątne odcinków GN i KO na płaszczyznę ABC mają te same długości.
B. Rzut prostokątny odcinka AN na płaszczyznę ABC ma długość $2\sqrt{3}$ dm.
C. Proste AJ i HM są prostopadłe.

2. Jaką długość ma rzut prostokątny odcinka HL na płaszczyznę ABC w bryle pokazanej na rysunku w zadaniu 1? Wybierz właściwą odpowiedź.

- A. $\sqrt{2}$ dm B. $2\sqrt{2}$ dm C. $\sqrt{3}$ dm D. $2\sqrt{3}$ dm

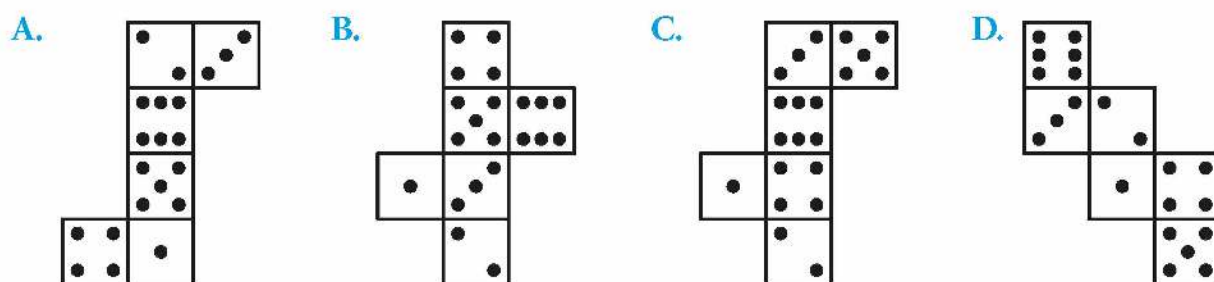
3. Przyjrzyj się fotografii. Wskaż płaszczyzny przecinające się, w których zawierają się ściany zabawki wykonanej przez stolarza. Wymień wierzchołki sześcianu, przez które przechodzi prosta będąca częścią wspólną tych płaszczyzn.



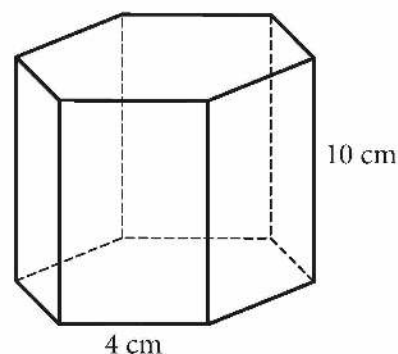
1. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

Rodzaj graniastosłupa	Liczba		
	ścian	wierzchołków	krawędzi
trójkątny	?	?	?
czworokątny	?	?	?
sześciokątny	?	?	?
piętnastokątny	?	?	?

2. Suma oczek znajdujących się na przeciwległych ścianach sześcienniej kostki do gry jest równa 7. Która z przedstawionych siatek **nie** jest siatką takiej kostki? Wybierz właściwą odpowiedź.

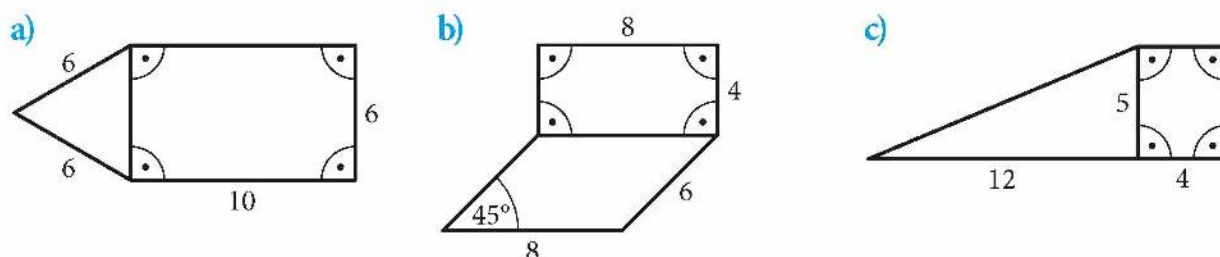


3. Oblicz, ile centymetrów drutu potrzebuje spawacz na wykonanie konstrukcji lampionu w kształcie graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego – takiego jak na rysunku.



3. Pole powierzchni graniastosłupa

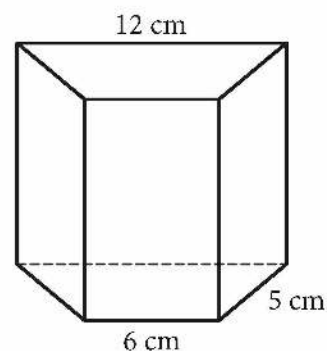
1. Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prostego, którego fragment siatki pokazano na rysunku.



2. Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastoslupa prostego, którego podstawą jest romb o kącie ostrym 30° i boku długości 12 cm. Wysokość tego graniastoslupa wynosi 8 cm.

3. Na rysunku przedstawiono graniastosłup prosty, którego pole powierzchni bocznej wynosi 560 cm^2 , a podstawą jest trapez równoramienny. Wskaż zdania prawdziwe.

- A. Wysokość tego graniastoslupa jest równa 20 cm.
 B. Pole podstawy tego graniastoslupa wynosi 48 cm^2 .
 C. Pole powierzchni całkowitej tego graniastoslupa jest równe 632 cm^2 .



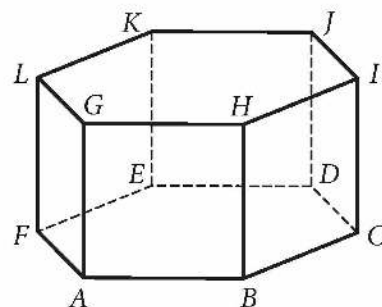
4. Odcinki w graniastoslupie

↪ Lekcja 4, s. 41–45

1. Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny, w którym przekątna ściany bocznej ma długość 4 cm, a obwód podstawy wynosi $6\sqrt{3} \text{ cm}$. Wyznacz miarę kąta między przekątną ściany bocznej a krawędzią podstawy tego graniastoslupa.

2. W narysowanym graniastoslupie prawidłowym sześciokątnym wszystkie krawędzie mają tę samą długość. Wskaż zdania prawdziwe.

- A. Przekątna ściany bocznej BG tworzy z krawędzią boczną BH kąt 60° .
 B. Przekątna podstawy BD tworzy z krawędzią podstawy BC kąt 30° .
 C. Przekątna graniastoslupa BJ tworzy z przekątną podstawy BD kąt 30° .



3. Ile wynosi cosinus kąta, jaki przekątna sześcianu tworzy z jego krawędzią? Wybierz właściwą odpowiedź.

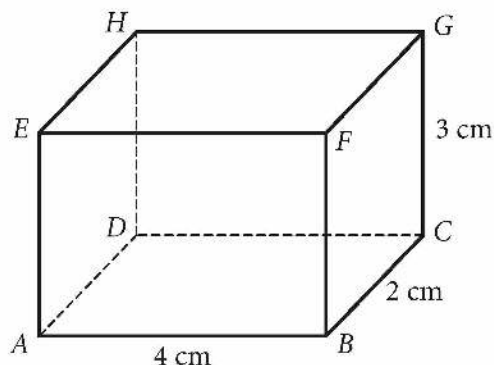
- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$

5. Kąt między prostą a płaszczyzną

↪ Lekcja 5, s. 46–51

1. Jeden koniec liny podtrzymującej 10-metrowy maszt zamocowano w połowie jego wysokości. Drugi koniec zakotwiczo w odległości 4 m od podstawy masztu. Wyznacz miarę kąta, który ta lina tworzy z powierzchnią ziemi.

2. Wyznacz miary kątów między przekątną narysowanego prostopadłościanu a jego ścianami bocznymi. Następnie oblicz miarę kąta między przekątną tej bryły a jej podstawą.



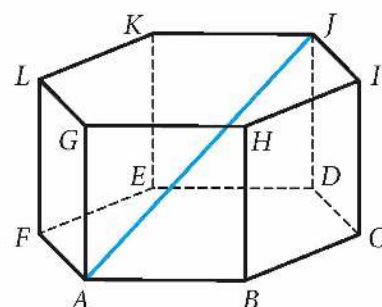
3. W narysowanym graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym wszystkie krawędzie mają długość 2 cm. Ile wynosi tangens kąta między przekątną AJ tego graniastosłupa a jego ścianą boczną $ABHG$? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$



6. Objętość graniastosłupa

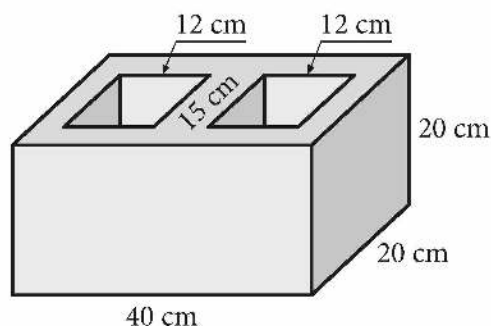
🔄 Lekcja 6, s. 52–55

1. Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego o wysokości równej 15 cm i krawędzi podstawy długości 6 cm, jeśli podstawą tego graniastosłupa jest podany wielokąt.
- a) trójkąt b) czworokąt c) sześciokąt

2. Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 8 cm i tworzy z krawędzią podstawy taki kąt α , że $\sin \alpha = \frac{3}{4}$. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

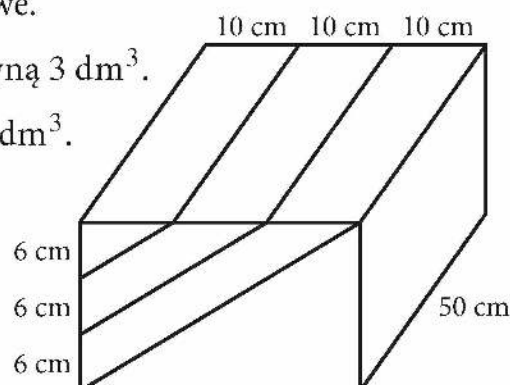
3. Na rysunku przedstawiono betonowy bloczek. Oblicz, ile metrów sześciennych betonu potrzeba na wykonanie:

- a) 100 takich bloczków,
b) 5000 takich bloczków.



- *4. Stolarz pociął drewniany klocek w kształcie prostopadłościanu na 4 części tak, jak przedstawiono to na rysunku. Wskaż zdania prawdziwe.

- A. Najmniejsza z otrzymanych części ma objętość równą 3 dm^3 .
B. Jedna z otrzymanych części ma objętość równą $7,5 \text{ dm}^3$.
C. Objętość jednej z otrzymanych części jest równa $\frac{1}{6}$ objętości całego klocka.

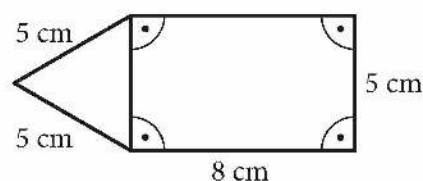


III. Ostrosłupy

1. Ostrosłup

↪ Lekcja 1, s. 61–64

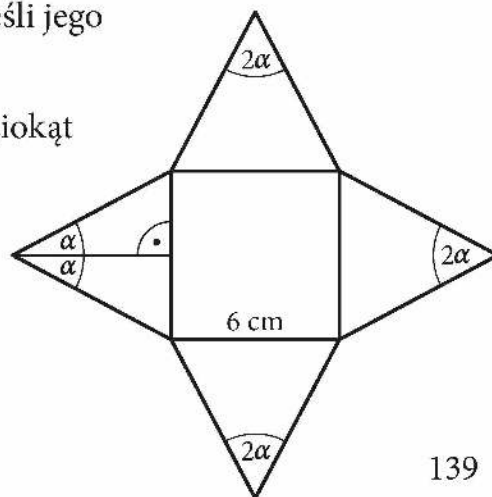
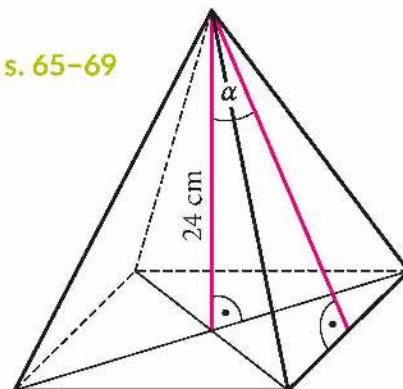
1. Narysuj siatkę ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego wszystkie krawędzie mają długość 2,5 cm. Oblicz sumę długości krawędzi tego ostrosłupa.
2. Na rysunku przedstawiono fragment siatki ostrosłupa, którego wszystkie krawędzie boczne mają tę samą długość. Wskaż zdania prawdziwe.
 - A. Wszystkie ściany boczne tego ostrosłupa są trójkątami równobocznymi.
 - B. Suma długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa wynosi 46 cm.
 - C. Wysokość tego ostrosłupa jest równa $\frac{\sqrt{11}}{2}$ cm.
3. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość 4 cm, a krawędź boczna – długość 8 cm. Wyznacz miarę kąta, jaki tworzy krawędź boczna z podstawą tego ostrosłupa.



2. Pole powierzchni ostrosłupa

↪ Lekcja 2, s. 65–69

1. Wysokość narysowanego ostrosłupa prawidłowego czworokątnego i wysokość jego ściany bocznej tworzą taki kąt α , że $\text{tg } \alpha = \frac{5}{12}$. Oblicz:
 - a) pole podstawy tego ostrosłupa,
 - b) pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.
2. Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego jest trójkątem równoramiennym, w którym ramiona mają długość 2 cm, a kąt między nimi ma miarę 30° . Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa, jeśli jego podstawą jest podany wielokąt.
 - a) trójkąt
 - b) czworokąt
 - c) sześciokąt
3. Na rysunku przedstawiono siatkę ostrosłupa prawidłowego czworokątnego. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa, jeśli:
 - a) $\text{tg } \alpha = 0,3$;
 - b) $\sin \alpha = 0,6$.



3. Objętość ostrosłupa

↶ Lekcja 3, s. 70–73

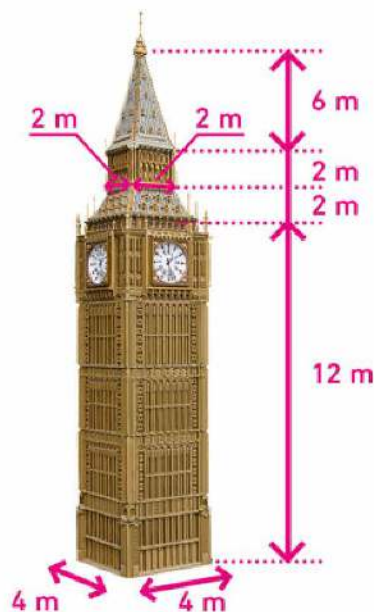
1. Wysokość ostrosłupa jest równa 15 cm, a obwód jego podstawy wynosi 24 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa, jeśli w jego podstawie znajduje się podany wielokąt.

a) trójkąt b) czworokąt c) sześciokąt

2. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o wysokości równej 6 cm, jeśli tangens kąta między wysokością tego ostrosłupa a jego krawędzią boczną wynosi $\frac{4}{3}$.

- *3. Firma remontowa ma przeprowadzić renowację wieży zegarowej przedstawionej na zdjęciu. Oblicz:

- a) pole powierzchni elewacji budynku,
b) pole powierzchni pokrytej dachówką z dokładnością do $0,1 \text{ m}^2$,
c) kubaturę tego budynku w zaokrągleniu do 1 m^3 , jeżeli część wieży nad zegarem ma kształt ostrosłupa ściętego w połowie jego wysokości.



5. Kąt dwuścienny

↶ Lekcja 5, s. 76–79

1. Oblicz miary kątów, jakie tworzą ze sobą ściany boczne graniastosłupa prostego, którego podstawą jest trójkąt prostokątny o podanych długościach przyprostokątnych.

a) 2 cm, 2 cm b) 3 cm, 5 cm c) 4 cm, 10 cm

2. Na rysunku przedstawiono ostrosłup prawidłowy czworokątny. Wskaż zdania prawdziwe.

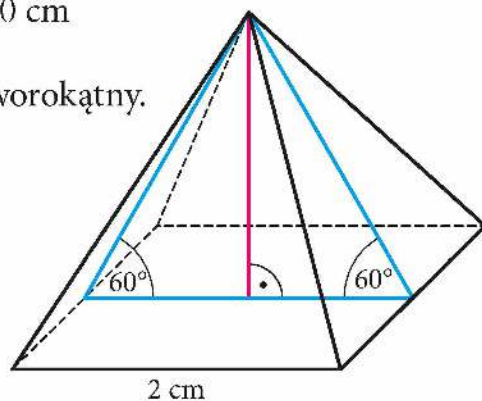
A. Ściany boczne tego ostrosłupa są trójkątami równobocznymi.

B. Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równe 8 cm^2 .

C. Objętość narysowanego ostrosłupa wynosi $\frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$.

3. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość 6 cm, a kąt między ścianą boczną a podstawą ostrosłupa ma miarę 45° . Ile wynosi objętość tego ostrosłupa? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. 24 cm^3 B. 36 cm^3 C. 45 cm^3 D. 72 cm^3

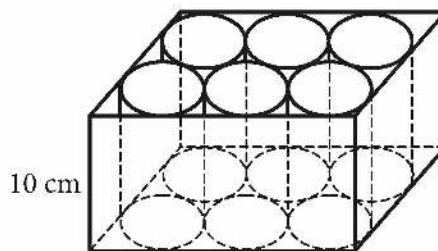


IV. Bryły obrotowe

1. Walec

↪ Lekcja 1, s. 83–87

1. Na rysunku przedstawiono karton, w którym umieszczono puszki o objętości 1 l każda. Uzasadnij, że pole powierzchni dna kartonu jest większe niż 750 cm^2 .



- *2. Dane są 2 walce o takiej samej wysokości oraz promieniach podstaw o długości r_1 i r_2 . Oblicz stosunek objętości tych walców, jeśli:
- a) długość r_2 jest dwukrotnie większa od długości r_1 ,
 - b) długość r_1 jest o 50% większa od długości r_2 .
3. Kelner przyniósł klientowi wodę w szklance w kształcie walca o średnicy podstawy długości 8 cm i wysokości 10 cm. Szklanka jest w 90% wypełniona wodą. Osobno podał pojemnik z kostkami lodu – każda z nich jest jednakowa: ma kształt sześciannu o krawędzi długości 2 cm. Ile maksymalnie takich kostek klient może włożyć do szklanki tak, aby woda się nie przelewała? Wybierz właściwą odpowiedź.
- A. 5 B. 6 C. 7 D. 10

2. Przekroje walca

↪ Lekcja 2, s. 88–91

1. Przekątna przekroju osiowego walca ma długość 40 cm i tworzy z podstawą walca kąt α . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca dla podanej wartości funkcji trygonometrycznej kąta α .
- a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos \alpha = 0,8$ *c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$
2. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej walca o wysokości 24 cm, jeśli:
- a) przekątna przekroju osiowego tego walca tworzy z jego podstawą kąt α taki, że $\sin \alpha = 0,8$;
 - *b) pole powierzchni bocznej walca jest 8 razy większe od pola jego podstawy.
3. Dany jest walec o polu podstawy równym $16\pi \text{ cm}^2$, którego przekątna przekroju osiowego ma długość 10 cm. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego walca.
4. Oblicz, ile metrów sześciennych gazu mieści się w rurze o długości 1 km, jeżeli przekrojem poprzecznym rury jest pierścień kołowy o średnicy wewnętrznej długości 50 cm.

3. Stożek

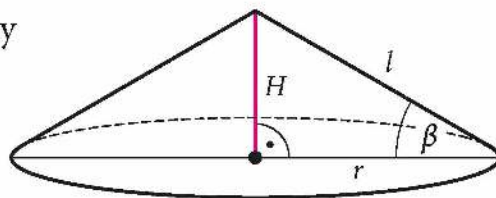
↶ Lekcja 3, s. 92-97

1. Oblicz pole podstawy stożka, którego powierzchnią boczną jest wycinek koła o podanym kącie środkowym α i promieniu długości 12 cm.

a) $\alpha = 60^\circ$ b) $\alpha = 180^\circ$ c) $\alpha = 270^\circ$

2. Na rysunku ukazano stożek, w którym kąt między tworzącą stożka a jego podstawą ma miarę β . Oblicz objętość tego stożka, jeśli:

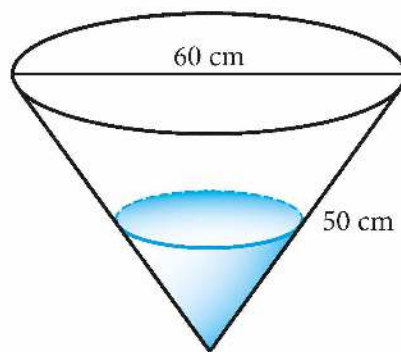
a) $\tan \beta = \frac{2}{5}$; $r = 10$ cm, b) $\sin \beta = \frac{3}{5}$; $l = 15$ cm.



- *3. Oblicz długość promienia podstawy stożka, którego pole powierzchni całkowitej wynosi 75π cm², a tworząca stożka jest 2 razy dłuższa od promienia jego podstawy.

4. Poziom wody w zbiorniku w kształcie narysowanego stożka sięga połowy jego wysokości. Wykonaj polecenia.

a) Oblicz objętość wody w zbiorniku.
b) Ustal, po ilu minutach zbiornik będzie pełny, jeśli wlewamy do niego wodę z szybkością 25 cm³/s.
Do obliczeń przyjmij $\pi \approx 3$.



4. Przekroje stożka

↶ Lekcja 4, s. 98-101

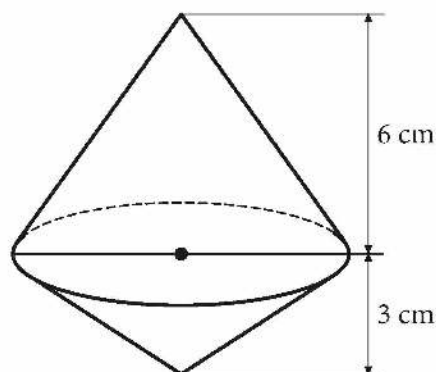
1. Oblicz objętość stożka, którego przekrój osiowy jest trójkątem równobocznym o boku długości 6 cm.

2. Jaką miarę ma kąt rozwarcia stożka o polu podstawy równym 27π cm² oraz objętości wynoszącej 27π cm³? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. 30° B. 45° C. 60° D. 120°

3. Dwa stożki złączono podstawami i otrzymano taką bryłę, jak przedstawiona na rysunku. Pole podstawy każdego ze stożków jest równe 16π cm². Wskaż zdania prawdziwe.

A. Przekrój osiowy tej bryły jest rombem.
B. Pole przekroju osiowego tej bryły jest równe 36 cm².
C. Objętość tej bryły wynosi 48π cm³.



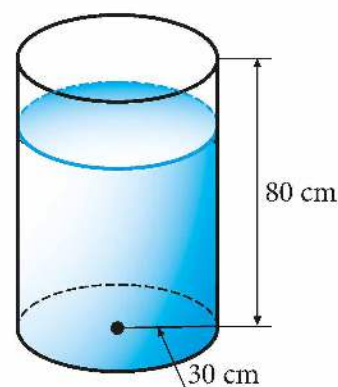
4. Oblicz z dokładnością do jednego miejsca po przecinku, ile litrów farby konserwującej potrzeba do dwukrotnego pomalowania 100 jednakowych boi, jeżeli farba ma wydajność $11 \text{ m}^2/\text{l}$. Boja przedstawiona na zdjęciu ma kształt dwóch złączonych podstawami stożków. Jej przekrojem osiowym jest romb, którego krótsza przekątna jest średnicą podstaw obu stożków.



6. Kula

↻ Lekcja 6, s. 104–107

- Oblicz pole powierzchni i objętość kuli o podanym polu koła wielkiego tej kuli.
 - $4\pi \text{ cm}^2$
 - $9\pi \text{ cm}^2$
 - $900\pi \text{ cm}^2$
- Bałwana ulepiono z 3 śnieżnych kul o średnicach długości 120 cm, 60 cm i 30 cm. Wskaż zdania prawdziwe.
 - Największa kula ma objętość większą niż $800\,000 \text{ cm}^3$.
 - Najmniejsza kula waży dwukrotnie mniej niż średnia kula.
 - Największa kula waży 64 razy więcej niż najmniejsza kula.
- Balon w kształcie kuli ma promień długości 20 cm. Wykonaj polecenia.
 - Sprawdź, czy balon podwoił swoją objętość, jeżeli po dopompowaniu powietrza długość promienia balonu zwiększyła się o 5 cm.
 - *b) Podaj z dokładnością do 1%, o ile procent zmalała objętość balonu, z którego spuszczone częściowo powietrze tak, że promień balonu zmniejszył się o 5 cm.
- W zakładzie produkcyjnym chłodzi się odlewy żeliwne w beczce, która jest w 75% wypełniona cieczą chłodzącą. Odlew ma kształt kuli o promieniu długości 15 cm, a model beczki przedstawiono na rysunku. Wykonaj polecenia.
 - a) Oblicz, na jakiej wysokości znajduje się teraz poziom lustra cieczy, jeżeli odlew całkowicie się w niej zanurzył.
 - *b) Ustal, jaką maksymalnie długość może mieć promień odlewu w kształcie kuli, który można schłodzić w tej beczce bez przelania się cieczy. Wynik podaj z dokładnością do 0,1 cm.



- Mała manufaktura kosmetyczna produkuje naturalny krem do twarzy. Pracownicy pakują go do pojemników z wyżłobioną wewnątrz półkulą o średnicy długości 5 cm. Oblicz, ile pełnych pojemników kremu otrzymają, jeśli przygotowali 15 l kremu.

V. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

1. Doświadczenia losowe i zdarzenia losowe

↶ Lekcja 1, s. 111-114

- Doświadczenie polega na dwukrotnym rzucie monetą. Podaj przestrzeń zdarzeń elementarnych, a następnie wypisz wszystkie wyniki sprzyjające podanemu zdarzeniu.
 - zdarzenie losowe A – wypadł co najmniej 1 orzeł
 - zdarzenie losowe B – w obu rzutach wypadło to samo
- Rzucamy dwukrotnie sześcienną kostką do gry. Podaj liczbę wyników sprzyjających podanemu zdarzeniu.
 - zdarzenie losowe A – suma liczb oczek w obu rzutach jest większa niż 5
 - zdarzenie losowe B – iloczyn liczb oczek w obu rzutach jest liczbą nieparzystą
 - zdarzenie losowe C – za drugim razem wypadła liczba oczek o 2 większa niż w pierwszym rzucie
 - zdarzenie losowe D – suma liczb oczek w obu rzutach jest liczbą podzielną przez 4
- Doświadczenie polega na wyjęciu 1 losu z pudełka, w którym znajdują się losy oznaczone kolejnymi liczbami od 10 do 99. Podaj wszystkie możliwe wyniki sprzyjające podanemu zdarzeniu.
 - zdarzenie losowe A – numer losu jest liczbą podzielną przez 11
 - zdarzenie losowe B – numer losu ma sumę cyfr równą 16

2. Reguła mnożenia

↶ Lekcja 2, s. 115-119

- Oblicz, ile różnych liczb czterocyfrowych można utworzyć z cyfr $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, jeśli cyfry:
 - nie mogą się powtarzać,
 - mogą się powtarzać.
- Ustal, ile różnych liczb pięciocyfrowych można utworzyć z cyfr $\{0, 2, 3, 5, 7, 8, 9\}$, jeśli cyfry:
 - nie mogą się powtarzać,
 - mogą się powtarzać.
- Fryzjerka ma 7 odcieni farby do włosów w kolorze blond. Oblicz, na ile sposobów może dobrać 7 klientkom farbę blond, jeśli każda z nich ma mieć inny odcień.

3. Reguła dodawania

↪ Lekcja 3, s. 120–123

1. Oblicz, ile jest nieparzystych liczb trzycyfrowych, w zapisie których cyfra 3 występuje co najwyżej raz.
2. Z talii 52 kart losujemy kolejno 2 karty bez zwracania. Ile jest możliwości tego losowania, jeśli pierwsza karta ma być damą lub asem, a druga – błotką w tym samym kolorze co wylosowana figura? Wybierz właściwą odpowiedź.
A. 9 B. 18 C. 36 D. 72
3. Wybierz właściwe dokończenie zdania.
Liczby trzycyfrowe, których suma cyfr jest mniejsza od 5 i żadna cyfra się nie powtarza, jest
A. 3. B. 5. C. 8. D. 10.

5. Prawdopodobieństwo klasyczne

↪ Lekcja 5, s. 126–129

1. Dane są 2 zdarzenia:
 - zdarzenie A – w dwukrotnym rzucie sześcienną kostką wypadły parzyste liczby oczek,
 - zdarzenie B – w dwukrotnym rzucie monetą wypadły 2 orły.Wskaż zdania prawdziwe.
A. Prawdopodobieństwo zdarzenia B wynosi $\frac{1}{4}$.
B. Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest mniejsze niż $\frac{1}{2}$.
C. Zdarzenie A jest bardziej prawdopodobne niż zdarzenie B .
2. Ola dwukrotnie rzuciła monetą. Oblicz prawdopodobieństwo, że w drugim rzucie otrzymała inny wynik niż w pierwszym.
3. Na urodzinową loterię w klubie sportowym przygotowano 1000 losów. Na podstawie danych z tabeli odpowiedz na pytania.
 - a) Jakie jest prawdopodobieństwo wygrania w tej loterii?
 - b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyciągając 1 los na loterii wygrasz trening personalny lub karnet miesięczny?

Wygrana	Liczba losów
trening personalny	6
masaż częściowy ciała	10
karnet miesięczny	25
jednorazowe wejście na siłownię lub salę fitness	45

Odpowiedzi

Rozdział I. Proporcjonalność

Lekcja	Ćwiczenia	Zadania	Zbiór zadań
1 s. 7-10	1. a) $x = 4$ b) $x = 3\frac{3}{4}$ c) $x = 1\frac{1}{3}$ d) $x = 3\frac{1}{2}$ 2. Ania otrzymała 15 l farby. 3. Marek dostanie 1600 zł premii, a Monika 2000 zł.	1. a) $x = 7,5$ b) $x = 6$ c) $x = 54$ d) $x = 2\frac{2}{3}$ e) $x = 4$ f) $x = 33$ g) $x = -7$ h) $x = -4$ lub $x = 4$ 2. a) 50 l b) 36 l c) $73\frac{1}{3}$ l 3. a) 18 cm b) 7,5 mm c) $25\text{ mm} \times 6,25\text{ mm} \times 22,5\text{ mm}$ 4. a) 9,3 m b) 12,5 cm c) 6,1 cm	1. a) $y = 16$ b) $z = 25$ c) $k = 15$ d) $l = 30$ e) $m = 81$ f) $a = 3,5$ g) $b = \frac{2}{5}$ h) $c = \frac{8}{3}$ 2. B 3. B
2 s. 11-14	1.1. $y = 80x$ 1.2. $y = 34,2x$ 2. a) $a = 3$ b) $a = 2\pi$ 3. a) $a = 1,5$; $y = 1,5x$; 10,5; 10 b) $a = \frac{1}{3}$; $y = \frac{1}{3}x$; 3, $\frac{4}{3}$ 4. $y = 1,2x$	1. a) $a = 3$ b) $a = \frac{1}{3}$ c) $a = 1,25$ 2. a) $y = 3,5x$; 7; 10,5; 4; 5 b) $y = 5,5x$; 0,5; 11; 16,5; 4 3. a) 90 zł b) 135 zł c) 900 zł d) $(22,5x)$ zł 4. a) 12 zł/kg b) $y = 12x$ c) Za 4 kg śrub zapłacimy 48 zł, a za 6,5 kg zapłacimy 78 zł.	1. a) $a = \frac{8}{7}$ b) $a = \frac{1}{6}$ c) $a = \frac{1}{2}$ 2. A, C 3. a) 2250 zł b) 88 uczestników
3 s. 15-19	1. 15; 10; 7,5; 5; 3; 2,5; $y = \frac{15}{x}$ 2. a) $a = 24$ b) $a = 3$ c) $a = 117$ 3. a) $a = 12$; $y = \frac{12}{x}$; 3, 4 b) $a = 42$; $y = \frac{42}{x}$; 21, 6	1. a) $y = \frac{3}{x}$, 2 b) $y = \frac{4,5}{x}$, 3 c) $y = \frac{63}{x}$, 9 2. a) $y = \frac{28}{x}$ b) $y = \frac{54}{x}$ c) $y = \frac{5}{x}$ d) $y = \frac{1}{6x}$ 3. a) $a = 5$, (1, 5), (5, 1) b) $a = 6$, (1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1) c) $a = 9$, (1, 9), (3, 3), (9, 1) 4. a) 10 kg b) 7,5 kg c) 6 kg 5. 5 dni 6. a) $y = \frac{24}{x}$ b) 3 dni	1. A 2. B, C 3. a) $A(\frac{1}{2}, 8)$, $B(1, 4)$, $C(2, 2)$, $D(4, 1)$, $E(8, \frac{1}{2})$ b) $y = \frac{4}{x}$ c) $y = 2,5$ d) $x = 10\frac{2}{3}$ 4. 19 h 12 min
5 s. 22-25	4. a) niebieski wykres: $f(x) = -\frac{2}{x}$, różowy wykres: $g(x) = -\frac{6}{x}$ b) f: C, D; g: A, B c) f: (-2, 1), (-1, 2), (1, -2), (2, -1); g: (-6, 1), (-3, 2), (-2, 3), (-1, 6), (1, -6), (2, -3), (3, -2), (6, -1)	1. a) $y = \frac{1}{2}$ b) $y = 12$ c) $y = \frac{3}{2}$ d) $x = \frac{3}{2}$ 2. a) $f(x) = \frac{48}{x}$ b) $f(x) = \frac{144}{x}$ 3. a) $a = 5$, $(-\frac{5}{2}, -2)$ b) $a = -4$, (2, -2)	1. A, C 2. D 3. C
Powtórzenie rozdziału s. 26-27	ZADANIA PODSUMOWUJĄCE		
	1. a) $x = -2$ b) $x = -6$ 2. a) $a = 3$ b) $a = \frac{2}{3}$ 3. B, C 4. a) $y = \frac{18}{x}$, np. (2, 9), (6, 3) b) $y = \frac{20}{x}$, np. (2, 10), (5, 4) c) $y = \frac{1}{8x}$, np. $(\frac{1}{8}, 1)$, $(1, \frac{1}{8})$ d) $y = \frac{4}{x}$, np. (1, 4), (2, 2) 5. A, B 6. 2 h 7. b) $L = 12 + 6\sqrt{2}$		
	SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ		
	1. B 2. B 3. C 4. a) $y = 16$ b) $y = 4$ c) $y = 36$ d) $y = 10$ 5. B 7. a) $a = 3$ b) 6 c) 4 punkty		

Rozdział II. Graniastolupy

Lekcja	Ćwiczenia	Zadania	Zbiór zadań												
1 s. 29–33	1. a) DEK b) EFL c) AFL 2. a) CD, CG, DH, GH b) AD, FG 3. a) AC, CH b) AC, GH c) BD, GH	1. a) BC, FG, EH b) AB, CD, DH, AE c) BF, CG, EF, GH 2. a) BJ, EH b) BJ, AH c) AJ, AH d) AC, AH 3. a) AD, FG b) AB, AD, EF, FG c) AB, EF 4. a) AD b) LM c) JS	1. A, C 2. A 3. np. płaszczyzny KLM i KLP, wierzchołki K, L												
2 s. 34–37	1. a) 8 ścian, 18 krawędzi, 12 wierzchołków b) 12 ścian, 30 krawędzi, 20 wierzchołków c) (n + 2) ścian, (3n) krawędzi, (2n) wierzchołków 2. 28 cm 3. 90 cm	1. a) 24 cm b) 15 cm 2. 60 cm 3. 12 m drutu 4. np. 60 cm × 60 cm, 60 cm × 90 cm, 45 cm × 122 cm	1. <table><tr><td>5</td><td>6</td><td>9</td></tr><tr><td>6</td><td>8</td><td>12</td></tr><tr><td>8</td><td>12</td><td>18</td></tr><tr><td>17</td><td>30</td><td>45</td></tr></table> 2. C 3. 108 cm drutu	5	6	9	6	8	12	8	12	18	17	30	45
5	6	9													
6	8	12													
8	12	18													
17	30	45													
3 s. 38–40	1.1. 1,5 m ² 1.2. 15 cm 2. a) 470 cm ² b) 98 dm ² 3. a) (27 + 4,5√3) cm ² b) 54 cm ² c) (54 + 27√3) cm ²	1. rys. II, 12 cm ² 2. 1150 cm ² 3. 3 puszki farby	1. a) 180 + 18√3 b) 112 + 48√2 c) 180 2. 528 cm ² 3. A, C												
4 s. 41–45	1. (150 + 25√3) cm ² 2. a) 16 m b) 16√2 m 3.1. 3√21 cm 3.2. 648 cm ²	2. (36 + 72√6) cm ² 3. 1296 cm ² 4. a) 350√3 cm ² b) 168√3 cm ² 5. maks. długość: 130 cm	1. 30° 2. B, C 3. A												
5 s. 46–51	1. 100√2 cm ² 2. d = 3√15 cm, P _c = 135√3 cm ² 3. a) 30° b) 60° c) ok. 56° 4. ok. 19°	1. a) np. ∠CFI b) np. ∠EAK c) np. ∠DGE d) np. ∠AIE 2. a) 24√2 cm b) ok. 35° 3. α = 30°, β = 42° 4. 6 cm	1. ok. 51° 2. np. ∠FAG ≈ 22°, ∠AGB ≈ 48°, ∠CAG ≈ 34° 3. D												
6 s. 52–55	1. a) 50 dm ³ b) 60 dm ³ 2. a) 720 cm ³ b) 3 dm ³ c) 168 cm ³ 3. a) 150 cm ² b) 0,96 m ² c) 216 dm ² 4.1. 160 cm ³ 4.2. P _c = 156 cm ² , V = 72 cm ³	1. d = 8 cm, α = 30° 2. rys. I, V = 96√3 cm ³ 3. 25 worków 4. a) V = 16 800 cm ³ , masa 134,4 kg b) V = 13 600 cm ³ , masa 108,8 kg	1. a) 135√3 cm ³ b) 540 cm ³ c) 810√3 cm ³ 2. 168 cm ³ 3. a) 0,88 m ³ betonu b) 44 m ³ betonu 4. B, C												
Powtórzenie rozdziału s. 58–59	ZADANIA PODSUMOWUJĄCE														
	1. A, B, C 2. P _c = (448 + 352√3) cm ² 3. A, C 4. 450 000 m ³ ziemi 5. a) 2,16 l b) 4,8 l c) 1,92 l 6. 648 cm ³														
	SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ														
	1. D 2. d = √61 cm, P _c = (90 + 12,5√3) cm ² 3. C 4. A, C 5. A 6. 100 cm ³ 7. P _c = (100 + 25√3) cm ² , V = 62,5√3 cm ³ 8. C														

Rozdział III. Ostrosłupy

Lekcja	Ćwiczenia	Zadania	Zbiór zadań
1 s. 61–64	1. a) 7 ścian, 12 krawędzi, 7 wierzchołków b) 11 ścian, 20 krawędzi, 11 wierzchołków c) $(n + 1)$ ścian, $(2n)$ krawędzi, $(n + 1)$ wierzchołków 3. a) 18 cm b) 24 cm	1. a) ośmiokątny b) czternastokątny c) piętnastokątny 2. 52 cm lub 60 cm 3. a) $4\sqrt{2}$ cm b) 4 cm c) $4\sqrt{7}$ cm 4. a) np. $ \sphericalangle FCS = 60^\circ$ b) np. $ \sphericalangle DAS = 45^\circ$ c) np. $ \sphericalangle BES = 30^\circ$ 5. 1 m – krawędzie podstawy; 1,5 m – krawędzie boczne 6. 191 cm	1. 20 cm 2. B, C 3. ok. 69°
2 s. 65–69	1. $(144 + 144\sqrt{3}) \text{ cm}^2$ 2. $25\sqrt{3} \text{ cm}^2$ 3. a) 340 cm^2 b) $(96\sqrt{3} + 48\sqrt{21}) \text{ cm}^2$	1. rys. II, $P_c = (4 + 8\sqrt{2}) \text{ cm}^2$ 2. 12 cm 3. $(260 + 16\sqrt{61}) \text{ cm}^2$ 4. $(37,5 + 12,5\sqrt{3}) \text{ cm}^2$ 5. $13,5 \text{ m}^2$ materiału	1. a) 400 cm^2 b) 1040 cm^2 2. a) 3 cm^2 b) 4 cm^2 c) 6 cm^2 3. a) 156 cm^2 b) 84 cm^2
3 s. 70–73	1. a) $26\frac{2}{3} \text{ cm}^3$ b) $40\sqrt{3} \text{ cm}^3$ 2.1. $972\sqrt{3} \text{ cm}^3$ 2.2. $\frac{128\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$ 3. $\frac{100\sqrt{119}}{3} \text{ cm}^3$	1. a) $108\sqrt{3} \text{ cm}^3$ b) $192\sqrt{3} \text{ cm}^3$ 2. $12\sqrt{6} \text{ cm}^3$ 3. 489 świeczek 4. 29 ml	1. a) $80\sqrt{3} \text{ cm}^3$ b) 180 cm^3 c) $120\sqrt{3} \text{ cm}^3$ 2. 256 cm^3 3. a) 208 m^2 b) $51,2 \text{ m}^2$ c) 227 m^3
5 s. 76–79	1. a) α – kąt między podstawą ostrosłupa ABC a jego ścianą boczną BCS, BC – wspólna krawędź b) β – kąt między 2 ścianami bocznymi ostrosłupa ACS i BCS, CS – wspólna krawędź 2. a) 60° b) 90° c) 120° 3. ok. 71°	1. a) 108° b) 135° c) 144° 2. $288\sqrt{3} \text{ cm}^3$ 3. ok. 55° 4. a) $\alpha \approx 118^\circ$ b) 88 cm c) $2,6 \text{ m}^2$	1. a) $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ b) ok. 31° , ok. $59^\circ, 90^\circ$ c) ok. 22° , ok. $68^\circ, 90^\circ$ 2. B, C 3. B
Powtórzenie rozdziału s. 80–81	ZADANIA PODSUMOWUJĄCE		
	1. 51 ścian, 100 krawędzi 2. a) $2\sqrt{6} \text{ cm}$ b) 6 cm c) $6\sqrt{2} \text{ cm}$ 3. B, C 4. $P_c = 16 \text{ cm}^2, V = 2\frac{2}{3} \text{ cm}^3$ 5. $9\sqrt{2} \text{ cm}^3$ 6. B, C 7. $\alpha \approx 63^\circ$		
	SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ		
	1. B, C 2. np. $ \sphericalangle CAS \approx 55^\circ$ 3. $5\sqrt{3} \text{ cm}$ 4. B 5. 30 cm^2 6. ok. 23° , ok. $67^\circ, 90^\circ$ 7. $192\sqrt{3} \text{ cm}^3$ 8. $15,36 \text{ cm}$		

Rozdział IV. Bryły obrotowe

Lekcja	Ćwiczenia	Zadania	Zbiór zadań
1 s. 83–87	2. $P_o = 12,5\%P_c$ 3. $32\pi \text{ cm}^3$ 4. 2,5 cm	1. a) $P_c = 52,5\pi \text{ cm}^2$, $V = 49\pi \text{ cm}^3$ b) $P_c = 66\pi \text{ cm}^2$, $V = 72\pi \text{ cm}^3$ c) $P_c = 72\pi \text{ cm}^2$, $V = 80\pi \text{ cm}^3$ 2. 1992 g 3. 23 l	2. a) 4 b) $\frac{4}{9}$ 3. B
2 s. 88–91	1. $176\pi \text{ cm}^2$ 2. $54\pi \text{ cm}^3$ 3. a) $(24\pi + 16\pi\sqrt{3}) \text{ cm}^2$ b) $48\pi \text{ cm}^2$	1. $160\pi \text{ cm}^3$ lub $200\pi \text{ cm}^3$ 2. $250\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3$ 3. ok. 373 032 m ³ ropy 4. a) 6,4 cm b) $H = 19,2 \text{ cm}$; $d = 6,4 \text{ cm}$ c) 27 pudełek	1. a) $(200\pi + 400\pi\sqrt{3}) \text{ cm}^2$ b) $1280\pi \text{ cm}^2$ c) $1056\pi \text{ cm}^2$ 2. a) $P_c = 594\pi \text{ cm}^2$, $V = 1944\pi \text{ cm}^3$ b) $P_c = 360\pi \text{ cm}^2$, $V = 864\pi \text{ cm}^3$ 3. $P_c = 80\pi \text{ cm}^2$, $V = 96\pi \text{ cm}^3$ 4. ok. 196,25 m ³ gazu
3 s. 92–97	1. a) $16\pi \text{ cm}^2$ b) $12,8\pi \text{ cm}^2$ c) $\frac{160\pi}{3} \text{ cm}^2$ 2. a) 6 cm b) 3 cm 4. $192\pi \text{ cm}^2$ 5. $\frac{64\pi}{3} \text{ cm}^3$	1. a) $P_c = 56\pi \text{ cm}^2$, $V = \frac{32\pi\sqrt{21}}{3} \text{ cm}^3$ b) $P_c = (75\pi + 50\pi\sqrt{3}) \text{ cm}^2$, $V = 125\pi \text{ cm}^3$ c) $P_c = (32\pi + 32\pi\sqrt{2}) \text{ cm}^2$, $V = \frac{128\pi\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$ 2. a) 30° b) 45° 3. a) 79 ml b) 52 ml c) ok. 131 ml d) 9,2 gr	1. a) $4\pi \text{ cm}^2$ b) $36\pi \text{ cm}^2$ c) $81\pi \text{ cm}^2$ 2. a) $\frac{400\pi}{3} \text{ cm}^3$ b) $432\pi \text{ cm}^3$ 3. 5 cm 4. a) $1500\pi \text{ cm}^3$ b) 21 min
4 s. 98–101	1. a) $10,24\pi \text{ cm}^2$ b) $2,56\pi \text{ cm}^2$ c) $23,04\pi \text{ cm}^2$ 2. $\frac{128\pi\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$ 3. $125\pi \text{ cm}^3$	1. a) 100° b) 60° c) ok. 54° 2. 120° 3. a) $P_b = 81\pi\sqrt{2} \text{ cm}^2$, $V = 243\pi \text{ cm}^3$ b) $P_b = 50\pi \text{ cm}^2$, $V = \frac{125\pi\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$ 4. a) 86,4 m ³ ; 15 kursów b) 165,8 m ³ ; 28 kursów	1. $9\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3$ 2. D 3. B, C 4. 18,6 l farby
6 s. 104–107	1. $3\sqrt{3} \text{ cm}$ 2. a) $P = 324\pi \text{ cm}^2$, $V = 972\pi \text{ cm}^3$ b) $P = 400\pi \text{ cm}^2$, $V = \frac{4000\pi}{3} \text{ cm}^3$ c) $P = 784\pi \text{ cm}^2$, $V = \frac{10976\pi}{3} \text{ cm}^3$ d) $P = 1296\pi \text{ cm}^2$, $V = 7776\pi \text{ cm}^3$ 3. $16\pi \text{ cm}^2$ 4.1. $12,25\pi \text{ cm}^2$ 4.2. 9 cm 5. 9 cm	1. r : 8; $\frac{1}{2}$; 0,9 P : 144π , 196π , π V : 288π ; $\frac{1372\pi}{3}$; $\frac{2048\pi}{3}$; $0,972\pi$ 2. a) 1809 cm^2 b) 1492 cm^2 3. $8 \text{ cm} \times 8 \text{ cm} \times 64 \text{ cm}$ lub $8 \text{ cm} \times 16 \text{ cm} \times 32 \text{ cm}$ lub $16 \text{ cm} \times 16 \text{ cm} \times 16 \text{ cm}$	1. a) $P = 16\pi \text{ cm}^2$, $V = \frac{32\pi}{3} \text{ cm}^3$ b) $P = 36\pi \text{ cm}^2$, $V = 36\pi \text{ cm}^3$ c) $P = 3600\pi \text{ cm}^2$, $V = 36\,000\pi \text{ cm}^3$ 2. A, C 3. a) nie b) o 58% 4. a) 65 cm b) 23,8 cm 5. 458 pojemników
Powtórzenie rozdziału s. 108–109	ZADANIA PODSUMOWUJĄCE		
	1. a) $192\pi \text{ cm}^3$ b) $\frac{2048\pi}{3} \text{ cm}^3$ c) $\frac{2560\pi}{3} \text{ cm}^3$ 2. B 4. $P_c = 288\pi \text{ m}^2$, $V = \frac{1280\pi + 64\pi\sqrt{15}}{3} \text{ m}^3$		
	SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ		
	1. a) 1 m b) 18 l 2. A 3. a) 90°, 60° b) $P_c = (72\pi + 36\pi\sqrt{2}) \text{ cm}^2$ 4. C 5. A, B 6. $16\pi \text{ cm}$		

Rozdział V. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

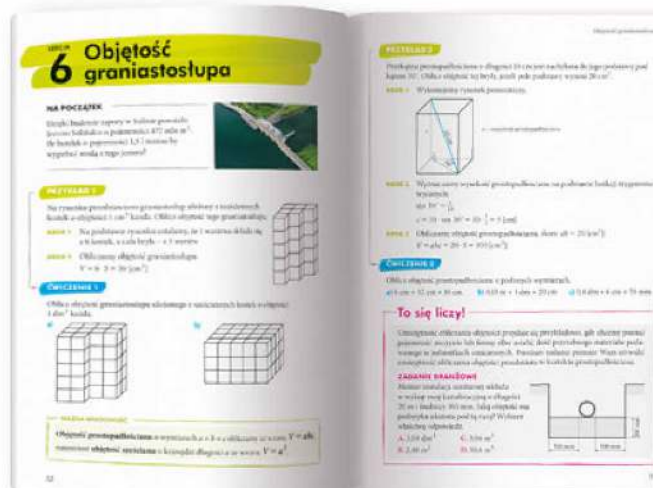
Lekcja	Ćwiczenia	Zadania	Zbiór zadań
1 s. 111–114	1. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 2.1. $\overline{\Omega} = 36$ 2.2. $\overline{\Omega} = 24$ 3. a) $A = \{1, 3, 5\}$, $\overline{A} = 3$ b) $B = \{3, 6\}$, $\overline{B} = 2$ 4. a) zdarzenie pewne b) zdarzenie niemożliwe	1. a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ b) $\Omega = \{11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33\}$ c) $\Omega = \{A5, A6, B5, B6, C5, C6\}$ 2. a) {dama♠, dama♥, dama♦, dama♣} b) $\{2♠, 2♥, 2♦, 2♣, 3♠, 3♥, 3♦, 3♣, 4♠, 4♥, 4♦, 4♣\}$ c) {as♥, as♦} 3. a) 48 b) 16 4. np. oczyszczanie manualne twarzy + zabieg z kwasami	1. $\Omega = \{(O, O), (O, R), (R, O), (R, R)\}$ a) $A = \{(O, R), (R, O), (O, O)\}$ b) $B = \{(O, O), (R, R)\}$ 2. a) $\overline{A} = 26$ b) $\overline{B} = 9$ c) $\overline{C} = 4$ d) $\overline{D} = 9$ 3. a) $A = \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$ b) $B = \{79, 88, 97\}$
2 s. 115–119	1. 12 2.1. 450 2.2. 45 000 3. a) 900 b) 648 4. 362 880	1. 60 2. 120 3. 40 320 4. 45 5. 3 628 800 6. a) 10 000 b) 5000 c) 5040	1. a) 3024 b) 6561 2. a) 2160 b) 14 406 3. 5040
3 s. 120–123	1. a) 9 b) 10 2. a) 72 b) 24 3. 1791	1. 775 2. 223 3. 50 4. 29	1. 428 2. D 3. C
5 s. 126–129	1.1. $P(A) = \frac{3}{4}$ 1.2. $P(B) = \frac{7}{8}$ 2. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ 3.1. $\frac{41}{300}$ 3.2. $\frac{287}{900}$	1. $\frac{1}{5}$ 2. $\frac{5}{12}$ 3. a) $\frac{12}{25}$ b) $\frac{143}{1150}$ 4. a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{43}{50}$ c) $\frac{2}{5}$	1. A, B 2. $\frac{1}{2}$ 3. a) 0,086 b) 0,031
Powtórzenie rozdziału s. 130–131	ZADANIA PODSUMOWUJĄCE		
	1. a) 25 b) 64 c) 3375 2. a) na 3360 sposobów b) na 210 sposobów 3. D 4. B 5. $\frac{5}{12}$ 6. $\frac{197}{1638}$ 7. A, B 8. $\frac{259}{900}$		
	SPRAWDŹ, CZY POTRAFISZ		
	1. a) $A = \{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$ b) $B = \{(2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)\}$ c) $C = \{(1, 6), (2, 3), (2, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 3), (4, 6), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$ 2. D 3. 34 4. Zdarzenie A jest bardziej prawdopodobne. 5. a) 540 kanapek b) $\frac{1}{15}$		

Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów ostrych

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
1°	0,0175	0,9998	0,0175
2°	0,0349	0,9994	0,0349
3°	0,0523	0,9986	0,0524
4°	0,0698	0,9976	0,0699
5°	0,0872	0,9962	0,0875
6°	0,1045	0,9945	0,1051
7°	0,1219	0,9925	0,1228
8°	0,1392	0,9903	0,1405
9°	0,1564	0,9877	0,1584
10°	0,1736	0,9848	0,1763
11°	0,1908	0,9816	0,1944
12°	0,2079	0,9781	0,2126
13°	0,2250	0,9744	0,2309
14°	0,2419	0,9703	0,2493
15°	0,2588	0,9659	0,2679
16°	0,2756	0,9613	0,2867
17°	0,2924	0,9563	0,3057
18°	0,3090	0,9511	0,3249
19°	0,3256	0,9455	0,3443
20°	0,3420	0,9397	0,3640
21°	0,3584	0,9336	0,3839
22°	0,3746	0,9272	0,4040
23°	0,3907	0,9205	0,4245
24°	0,4067	0,9135	0,4452
25°	0,4226	0,9063	0,4663
26°	0,4384	0,8988	0,4877
27°	0,4540	0,8910	0,5095
28°	0,4695	0,8829	0,5317
29°	0,4848	0,8746	0,5543
30°	0,5000	0,8660	0,5774
31°	0,5150	0,8572	0,6009
32°	0,5299	0,8480	0,6249
33°	0,5446	0,8387	0,6494
34°	0,5592	0,8290	0,6745
35°	0,5736	0,8192	0,7002
36°	0,5878	0,8090	0,7265
37°	0,6018	0,7986	0,7536
38°	0,6157	0,7880	0,7813
39°	0,6293	0,7771	0,8098
40°	0,6428	0,7660	0,8391
41°	0,6561	0,7547	0,8693
42°	0,6691	0,7431	0,9004
43°	0,6820	0,7314	0,9325
44°	0,6947	0,7193	0,9657
45°	0,7071	0,7071	1,0000

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
46°	0,7193	0,6947	1,0355
47°	0,7314	0,6820	1,0724
48°	0,7431	0,6691	1,1106
49°	0,7547	0,6561	1,1504
50°	0,7660	0,6428	1,1918
51°	0,7771	0,6293	1,2349
52°	0,7880	0,6157	1,2799
53°	0,7986	0,6018	1,3270
54°	0,8090	0,5878	1,3764
55°	0,8192	0,5736	1,4281
56°	0,8290	0,5592	1,4826
57°	0,8387	0,5446	1,5399
58°	0,8480	0,5299	1,6003
59°	0,8572	0,5150	1,6643
60°	0,8660	0,5000	1,7321
61°	0,8746	0,4848	1,8040
62°	0,8829	0,4695	1,8807
63°	0,8910	0,4540	1,9626
64°	0,8988	0,4384	2,0503
65°	0,9063	0,4226	2,1445
66°	0,9135	0,4067	2,2460
67°	0,9205	0,3907	2,3559
68°	0,9272	0,3746	2,4751
69°	0,9336	0,3584	2,6051
70°	0,9397	0,3420	2,7475
71°	0,9455	0,3256	2,9042
72°	0,9511	0,3090	3,0777
73°	0,9563	0,2924	3,2709
74°	0,9613	0,2756	3,4874
75°	0,9659	0,2588	3,7321
76°	0,9703	0,2419	4,0108
77°	0,9744	0,2250	4,3315
78°	0,9781	0,2079	4,7046
79°	0,9816	0,1908	5,1446
80°	0,9848	0,1736	5,6713
81°	0,9877	0,1564	6,3138
82°	0,9903	0,1392	7,1154
83°	0,9925	0,1219	8,1443
84°	0,9945	0,1045	9,5144
85°	0,9962	0,0872	11,430
86°	0,9976	0,0698	14,300
87°	0,9986	0,0523	19,081
88°	0,9994	0,0349	28,636
89°	0,9998	0,0175	57,290

Podręcznik *To się liczy!* dla klasy trzeciej szkoły branżowej jest podzielony na dwie części. Pierwsza z nich składa się z pięciu rozdziałów, w których ujęto wszystkie treści obowiązkowe, w tym lekcje i zadania branżowe poświęcone wykorzystaniu matematyki w praktyce. Druga część to zbiór dodatkowych zadań.

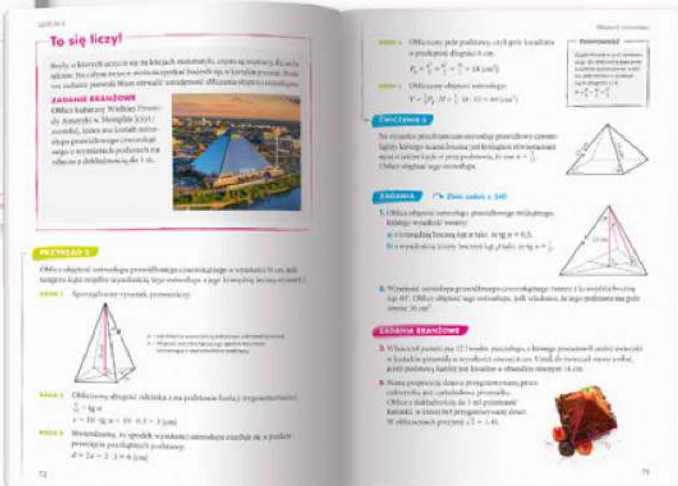


Zadania branżowe

W poszczególnych lekcjach znajdują się zadania branżowe, dzięki którym ćwiczyście umiejętności matematyczne na przykładach powiązanych z wybranymi zawodami, oraz które pomogą Wam zdać egzamin zawodowy.

Zagadnienia matematyczne krok po kroku

W *To się liczy!* umiejętności matematyczne przedstawiane są przez przykłady rozwiązywane krok po kroku. Dzięki temu uczniowie mogą samodzielnie przechodzić od treści zadania do jego rozwiązania.



Matematyka w praktyce

W podręczniku zamieszczono lekcje branżowe dotyczące takich zagadnień, jak ostrosłupy we wnętrzach czy wykorzystanie brył obrotowych w przemyśle, z którymi absolwenci szkoły branżowej mogą się spotkać w życiu zawodowym. Pojęcia omawiane w tych lekcjach są wyjaśnione prostym językiem i dodatkowo obudowane przykładami, tak żeby pokazać zastosowanie matematyki w praktyce.

