



DLA
ABSOLWENTÓW
SZKÓŁ
PODSTAWOWYCH

Zrozumieć fizykę

Zbiór zadań

1

dla liceum ogólnokształcącego i technikum

Zakres rozszerzony

**nowa
era**

Bogdan Mendel
Janusz Mendel
Teresa Stolecka
Elżbieta Wójtowicz

Zrozumieć fizykę

Zbiór zadań

1

dla liceum ogólnokształcącego i technikum

Zakres rozszerzony



Twoje mocne strony

Zrozumieć fizykę

Zbiór zadań 1 uzupełnia podręcznik autorstwa **M. Brauna, A. Byczuk, K. Byczuka i E. Wójtowicz** *Zrozumieć fizykę 1* dopuszczony do użytku szkolnego i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania fizyki w szkole ponadpodstawowej w zakresie rozszerzonym (liceum ogólnokształcące i technikum).

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2019
ISBN 978-83-267-3668-1

Autorki zadań: Teresa Stolecka, Elżbieta Wójtowicz

Klasyka fizyki: Bogdan Mendel, Janusz Mendel

Pozostali autorzy: Dorota Jeziorek-Kniola (s. 213 zad. 1, s. 214 zad. 2-4, s. 268 przykład, s. 269 zad. 1, s. 270 zad. 3), Artur Ludwikowski (s. 67 zad. 3, s. 160 przykład, s. 271 zad. 5), Bogdan Mendel, Janusz Mendel (s. 50 przykład, s. 52 przykład 2, s. 73 przykład 1, s. 79 przykład 1, s. 100 przykład 4, s. 177 przykład 4, s. 180 przykład, s. 192 przykład 3, s. 199 przykład 2, s. 247 przykład 2, s. 256 przykład)

Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna: Miłosz Budzyński

Współpraca redakcyjna: dr Agnieszka Grzebińska, Michał Matraszek, dr Piotr Nieżurawski

Redakcja językowa i korekta: Dorota Rzeszewska

Fotoedycja: Katarzyna Iwan-Malawska

Nadzór artystyczny: Kaia Pichler

Opieka graficzna: Ewa Kaletyn

Projekt graficzny: Klaudia Jarocka, Ewa Kaletyn, Dariusz Szachtsznajder, Aleksandra Szpunar, Paulina Tomaszewska

Projekt okładki: Maciej Galiński

Opracowanie graficzne: Klaudia Jarocka

Ilustracje: Ewelina Baran, Andrzej Dukata, Adam Pocziwek, Artur Polakowski, Wioletta Przybylska

Realizacja projektu graficznego: Artur Polakowski

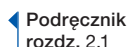
Nowa Era Sp. z o.o.
Aleje Jerozolimskie 146D, 02-305 Warszawa
www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl
Centrum Kontaktu: 801 88 10 10, 58 721 48 00

Druk i oprawa: Zakład Poligraficzny Techgraf, Łańcut

Spis treści

1. Wprowadzenie	4	4.5. Siły bezwładności	148
Najważniejsze informacje	4	Klasyka fizyki	158
1.1. Przedmiot i metody badań fizyki. Pomiary i jednostki	10	Zadania maturalne	160
1.2. Wstęp do analizy danych pomiarowych	15	5. Energia i pęd	164
1.3. Proporcjonalność prosta	20	Najważniejsze informacje	164
2. Ruch prostoliniowy	24	5.1. Praca i moc jako wielkości fizyczne	170
Najważniejsze informacje	24	5.2. Pojęcie energii. Energia potencjalna grawitacji. Energia kinetyczna	175
2.1. Jak opisać położenie ciała	30	5.3. Zasada zachowania energii	180
2.2. Opis ruchu prostoliniowego	34	5.4. Energia potencjalna sprężystości	185
2.3. Prędkość w ruchu prostoliniowym	39	5.5. Pęd. Zasada zachowania pędu	189
2.4. Ruch jednostajny prostoliniowy	44	5.6. Zderzenia sprężyste i niesprężyste	198
2.5. Ruch prostoliniowy jednostajnie zmienny	50	Klasyka fizyki	208
Klasyka fizyki	60	Zadania maturalne	210
Zadania maturalne	63	6. Bryła sztywna	216
3. Ruch krzywoliniowy	68	Najważniejsze informacje	216
Najważniejsze informacje	68	6.1. Ruch postępowy i obrotowy bryły sztywnej. Środek masy	221
3.1. Ruch krzywoliniowy	73	6.2. Moment siły. I zasada dynamiki dla ruchu obrotowego	226
3.2. Rzut poziomy i ukośny	79	6.3. Środek ciężkości i energia potencjalna bryły sztywnej	233
3.3. Prędkość w różnych układach odniesienia	88	6.4. Energia kinetyczna w ruchu obrotowym	237
3.4. Ruch po okręgu	97	6.5. Druga zasada dynamiki w ruchu obrotowym	246
3.5. Przyspieszenie dośrodkowe	103	6.6. Moment pędu bryły sztywnej	256
Klasyka fizyki	107	Klasyka fizyki	266
Zadania maturalne	109	Zadania maturalne	268
4. Ruch i siły	113	Odpowiedzi i wskazówki do zadań	272
Najważniejsze informacje	113	Dodatek matematyczny	301
4.1. Oddziaływania. Dodawanie sił i rozkładanie ich na składowe	118	Tabele	305
4.2. Zasady dynamiki Newtona	125		
4.3. Siła tarcia	132		
4.4. Siła dośrodkowa	140		

Oznaczenia stosowane w zbiorze zadań



– odsyłacze do odpowiednich treści w podręczniku *Zrozumieć fizykę* cz. 1

P1 – zadania nawiązujące do przykładu o danym numerze

D – zadania o charakterze doświadczalnym

• • • – oznaczenie stopnia trudności zadań

Klasyka fizyki **B. Mendel i J. Mendel** – zadania podsumowujące po każdym dziale

Zadania maturalne – zadania typu maturalnego po każdym dziale



1. Wprowadzenie

Najważniejsze informacje

■ Przedmiot i metody badań fizyki

Fizyka zajmuje się badaniem obiektów i zjawisk w skali makro- i mikroświata oraz formułowaniem praw rządzących obserwowanymi zjawiskami.

Badania prowadzone przez fizyków opierają się na **wykonywaniu doświadczeń i modelowaniu matematycznym** obserwowanych zjawisk i przedmiotów.

Modelowanie matematyczne polega na opisywaniu rzeczywistości za pomocą pojęć i równań matematycznych.

Eksperymenty i obserwacje pozwalają sprawdzić poprawność założonych modeli matematycznych. Natomiast modele matematyczne pozwalają przewidzieć przebieg zjawisk fizycznych. Zatem doświadczenia i modelowanie matematyczne wzajemnie się uzupełniają.

■ Jednostki odległości używane w astronomii oraz związki między nimi

1 au (1 j.a.) – jednostka astronomiczna to średnia odległość Ziemi od Słońca.

$$1 \text{ au} \approx 150 \text{ mln km} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

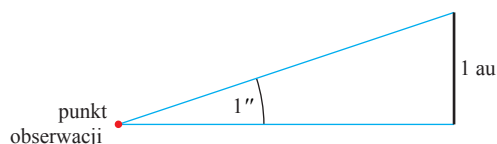
1 ly – rok świetlny to odległość, jaką światło przebywa w ciągu roku.

$$1 \text{ ly} = 9,46 \cdot 10^{12} \text{ km} = 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m}$$

prędkość światła w próżni

$$c = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

1 pc – parsek to odległość, z jakiej jedna jednostka astronomiczna (1 au) jest widoczna pod kątem jednej sekundy kątowej ($1'' = \frac{1}{3600}^\circ$).



$$1 \text{ pc} = 3,262 \text{ ly} = 206\,264,8 \text{ au} = 3,0857 \cdot 10^{16} \text{ m}$$

■ Formy zapisu wartości wielkości fizycznych stosowane w fizyce

W trakcie nauki fizyki będziemy określać rozmiary obiektów i odległości między nimi o bardzo dużych i bardzo małych wartościach. Dla przejrzystości zapisu będziemy posługiwać się notacją wykładniczą i stosować przedrostki przed symbolami wielkości fizycznych wyrażające wielokrotności i podwielokrotności jednostek (patrz tabela 1. s. 305).

■ Wielkości fizyczne i ich jednostki

Wielkości fizyczne służą do ilościowego opisu ciał i zjawisk.

Wartości wielkości fizycznych podaje się wraz z ich jednostkami.

Fizycy na całym świecie posługują się **międzynarodowym układem jednostek**, nazywanym w skrócie **układem SI**. Obejmuje on siedem jednostek podstawowych i jednostki pochodne. Każdą jednostkę pochodną można wyrazić przez jednostki podstawowe.

Jednostki podstawowe układu SI:

- kg** – kilogram, jednostka masy,
- m** – metr, jednostka długości,
- s** – sekunda, jednostka czasu,
- K** – kelwin, jednostka temperatury,
- A** – amper, jednostka natężenia prądu,
- mol** – mol, jednostka ilości materii,
- cd** – kandela, jednostka światłości źródła światła.

Przykłady jednostek pochodnych:

$\frac{\text{m}}{\text{s}}$ – jednostka prędkości,

$\text{N} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$ – niuton, jednostka siły,

$\text{J} = \text{N} \cdot \text{m} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$ – dżul, jednostka pracy lub energii,

$\text{C} = \text{A} \cdot \text{s}$ – kulomb, jednostka ładunku elektrycznego.

W tabeli 2. na s. 305 znajdziesz zestawienie jednostek pochodnych wybranych wielkości fizycznych oraz zapis tych jednostek w jednostkach podstawowych układu SI.

■ Pomiar i niepewność pomiarowa

Każdy pomiar obarczony jest niepewnością pomiarową.

Wynik pomiaru z uwzględnieniem niepewności pomiarowej zapisujemy w postaci:

$$x \pm \Delta x$$

gdzie:

x – wynik pomiaru, Δx – niepewność pomiarowa.

Taki zapis oznacza, że rzeczywista wartość zmierzonej wielkości znajduje się w przedziale $\langle x - \Delta x; x + \Delta x \rangle$.

Wynik pomiaru nie może być dokładniejszy niż dokładność przyrządu pomiarowego. Wynik należy zaokrąglić i zapisać z taką samą dokładnością, z jaką określona jest niepewność pomiarowa, np.:

długość ołówka $l = 13,8 \text{ cm} \pm 0,1 \text{ cm}$,

czas spadku kulki $t = 2,00 \text{ s} \pm 0,01 \text{ s}$.

W praktyce wynik pomiaru z uwzględnieniem niepewności pomiarowej możemy zapisać na dwa sposoby:

$$U = 3,65 \text{ V} \pm 0,05 \text{ V} \quad \text{lub} \quad U = (3,65 \pm 0,05) \text{ V}$$

■ Błędy pomiarowe

Wyróżniamy:

- ▶ **błędy grube** – może to być błędnie odczytana wartość ze skali przyrządu lub pomyłka przy odnotowywaniu wyniku pomiaru. Wynik pomiaru obarczony błędem grubym wyraźnie odbiega od pozostałych wykonanych w serii, należy więc taki wynik odrzucić.
- ▶ **błędy przypadkowe** – wynikają ze sposobu działania przyrządów lub są spowodowane przez eksperymentatora, np. ze względu na niedoskonałość zmysłów eksperymentatora. Można je zmniejszyć, używając dokładniejszych przyrządów lub zapewniając lepsze warunki podczas wykonywania doświadczenia.
- ▶ **błędy systematyczne** – wynikają ze złego działania przyrządów (np. niewypoziomowania przyrządu przed rozpoczęciem pomiarów) lub niewłaściwej metody wykonywania pomiarów.

■ Niepewność pomiaru bezwzględna i niepewność pomiaru względna

Niepewność pomiaru wyrażoną w jednostkach mierzonej wielkości nazywa się **niepewnością bezwzględną**.

Niepewność względna to iloraz niepewności bezwzględnej Δx pomiaru i wielkości x wyznaczonej z pomiarów: $\frac{\Delta x}{x}$. Zwykle podajemy ją w procentach.

Na przykład niepewność względna pomiaru długości ołówka wynosi:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1 \text{ mm}}{138 \text{ mm}} = 0,007$$

$$\text{lub} \quad \frac{\Delta l}{l} \cdot 100\% = \frac{1 \text{ mm}}{138 \text{ mm}} \cdot 100\% = 0,007 \cdot 100\% = 0,7\%$$

Niepewność względna pozwala ocenić dokładność pomiaru i metodę pomiaru. Im mniejsza jest niepewność względna, tym dokładniejsza jest metoda pomiaru.

■ Szacowanie i obliczanie niepewności wyniku pomiarów prostych (bezpośrednich)

W przypadku **pojedynczego pomiaru** niepewność pomiarowa najczęściej ma wartość najmniejszej działki przyrządu pomiarowego, np. dla pomiaru długości wykonanego za pomocą linijki niepewność pomiarowa jest równa $\pm 1 \text{ mm}$.

Pomiar wielokrotny danej wielkości pozwala uzyskać bardziej prawdopodobny wynik i zmniejsza niepewność średniego pomiaru.

Najbardziej prawdopodobny wynik pomiaru wielokrotnego jest równy **średniej arytmetycznej** poszczególnych wyników:

$$x_{\text{sr}} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

gdzie n – liczba pomiarów.

Dla średniej arytmetycznej niewielkiej liczby pomiarów niepewność pomiarową pojedynczego pomiaru można oszacować, licząc **niepewność maksymalną pomiaru**:

$$\Delta x = \frac{x_{\text{max}} - x_{\text{min}}}{2}$$

gdzie:

x_{max} – największy wynik pomiaru,

x_{min} – najmniejszy wynik pomiaru.

Aby obliczyć **niepewność maksymalną średniej**, należy niepewność maksymalną pomiaru podzielić przez pierwiastek z liczby pomiarów:

$$\Delta x_{\text{sr}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{n}} = \frac{x_{\text{max}} - x_{\text{min}}}{2\sqrt{n}}$$

Naukowcy wyznaczają niepewność pomiaru, licząc **niepewność standardową wartości średniej** σ , którą oblicza się ze wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}[(t_1 - t_{\text{sr}})^2 + (t_2 - t_{\text{sr}})^2 + \dots + (t_n - t_{\text{sr}})^2]}$$

gdzie:

$t_1, t_2, \dots, t_n$ – wyniki poszczególnych pomiarów,

t_{sr} – średnia wszystkich wyników,

n – liczba pomiarów.

Niepewność pomiarowa wyznaczona tą metodą określa przedział, w którym znajduje się wynik pomiaru, z prawdopodobieństwem ok. $\frac{2}{3}$.

Do obliczania niepewności standardowej wartości średniej można wykorzystywać kalkulator naukowy lub arkusz kalkulacyjny.

■ Szacowanie i obliczanie niepewności wyniku pomiarów złożonych (pośrednich)

Pomiar złożony (pośredni) wymaga wykonania kilku pomiarów bezpośrednich, często przy użyciu różnych przyrządów, i wyznaczenia szukanej wielkości na podstawie zależności między zmierzonymi wielkościami. Sposób wyznaczania niepewności maksymalnej pomiaru złożonego zależy od rodzaju zależności między szukaną wielkością złożoną a wielkościami wyznaczonymi za pomocą pomiarów bezpośrednich.

Niepewność maksymalną pomiaru złożonego obliczamy ze wzoru:

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}$$

Przykładowo, wyznaczamy średnią wartość prędkości. Przy użyciu linijki wykonujemy pomiar przebytej przez ciało drogi $s = 50,4 \text{ cm}$ z dokładnością $\Delta s = \pm 0,1 \text{ cm}$ i przy użyciu stopera – pomiar czasu $t = 5,37 \text{ s}$ z dokładnością $\Delta t = \pm 0,01 \text{ s}$. Wartość średnią prędkości wyznaczamy z zależności:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{50,4 \text{ cm}}{5,37 \text{ s}} = 9,39 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Wartość największą otrzymamy na podstawie zależności:

$$v_{\max} = \frac{50,4 \text{ cm} + 0,1 \text{ cm}}{5,37 \text{ s} - 0,01 \text{ s}} = \frac{50,5 \text{ cm}}{5,36 \text{ s}} = 9,42 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Wartość najmniejszą otrzymamy na podstawie zależności:

$$v_{\min} = \frac{50,4 \text{ cm} - 0,1 \text{ cm}}{5,37 \text{ s} + 0,01 \text{ s}} = \frac{50,3 \text{ cm}}{5,38 \text{ s}} = 9,35 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Dla naszego przykładu maksymalna niepewność pomiaru złożonego to:

$$\Delta v = \frac{v_{\max} - v_{\min}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{s + \Delta s}{t - \Delta t} - \frac{s - \Delta s}{t + \Delta t} \right)$$

$$\Delta v = \frac{9,42 \frac{\text{cm}}{\text{s}} - 9,35 \frac{\text{cm}}{\text{s}}}{2} = 0,04 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

■ Porcjonalność prosta

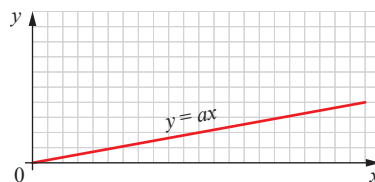
Dwie wielkości są wprost proporcjonalne, jeśli ze wzrostem jednej z nich druga rośnie tyle samo razy. Zależność między takimi wielkościami można opisać wzorem w postaci:

$$y = ax$$

w którym x i y są wielkościami wprost proporcjonalnymi, natomiast a jest współczynnikiem proporcjonalności.

Iloraz wielkości wprost proporcjonalnych jest stały $\frac{y}{x} = a = \text{const.}$

Wykresem proporcjonalności prostej jest **linia prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych**.

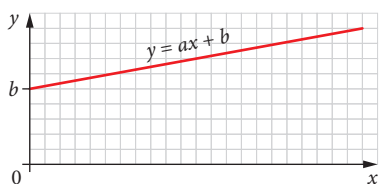


■ Zależność liniowa

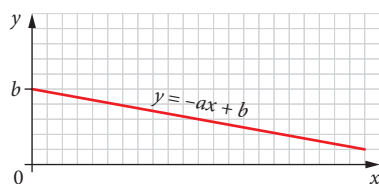
Zależnością liniową (funkcją liniową) nazywamy zależność między wielkościami x i y , którą można opisać wzorem:

$$y = ax + b$$

Wykres zależności liniowej to prosta, której nachylenie jest opisane współczynnikiem a , natomiast punkt przecięcia z osią pionową – współczynnikiem b .



Rosnąca zależność liniowa, gdy $a > 0$



Malejąca zależność liniowa, gdy $a < 0$

Jeżeli zależność liniowa dotyczy wielkości fizycznych, to współczynniki a i b mają sens fizyczny.

■ Proporcjonalność odwrotna

O dwóch wielkościach mówimy, że są odwrotnie proporcjonalne wtedy, gdy jedna z nich rośnie n razy, a druga maleje n razy.

Proporcjonalność odwrotną można opisać wzorem w postaci:

$$y = \frac{a}{x}$$

Gdzie x i y są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, natomiast a jest stałym współczynnikiem.

1.1. Przedmiot i metody badań fizyki.

Pomiary i jednostki

Podręcznik
rozdz. 1.1 i 1.2

■ Przykład 1.

Zapisz w notacji wykładniczej wartości wymienionych wielkości i stałych fizycznych:

- a) prędkość dźwięku w diamencie $v = 18\,000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$,
- b) średni promień Ziemi $R = 6\,370\,000 \text{ m}$,
- c) rozmiar drobnego pyłu $d = 0,0000063 \text{ m}$,
- d) odległość gwiazdy Syriusz B od Ziemi $l = 8,6 \text{ ly}$. Wynik wyraż w metrach.

Rozwiązanie

Liczba zapisana w notacji wykładniczej ma postać: $x \cdot 10^n$. Przypomnijmy, jak zapisywać liczby w takiej postaci.

Zamianę zapisu liczby na notację wykładniczą wykonuje się w dwóch krokach:

1. przesunięcie przecinka w liczbie tak, aby jej wartość mieściła się między 1 a 10. Powstaje wtedy liczba x .
2. ustalenie wykładnika potęgi liczby 10. Wykładnik potęgi n jest równy liczbie miejsc, o które musieliśmy przesunąć przecinek. Jeżeli przesuwaliśmy przecinek w lewo, to wykładnik potęgi będzie dodatni, a jeżeli przesuwaliśmy przecinek w prawo, to wykładnik potęgi będzie ujemny.

Zastosujmy te zasady, aby zmienić zapis wartości podanych w treści zadania.

- a) $v = 18\,000 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1,8 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
- b) $R = 6\,370\,000 \text{ m} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$
- c) $d = 0,0000063 \text{ m} = 6,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
- d) $l = 8,6 \text{ ly} = 8,6 \cdot 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m} = 8,14 \cdot 10^{16} \text{ m}$

Odpowiedź: Prędkość dźwięku wynosi $1,8 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, średni promień Ziemi ma wartość $6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$, rozmiar drobnego pyłu to $6,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, a odległość gwiazdy Syriusz B od Ziemi jest równa $8,14 \cdot 10^{16} \text{ m}$.

■ Przykład 2.

Zastosuj odpowiedni przedrostek przed jednostką dla wymienionych wielkości fizycznych. Skorzystaj z tabeli 1. na s. 305.

- a) częstotliwość fali elektromagnetycznej $f = 102\,400\,000 \text{ Hz}$
- b) długość fali dla światła czerwonego $\lambda = 6,68 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 0,000000668 \text{ m}$
- c) średnica Księżyca $d = 3\,476\,000 \text{ m}$
- d) średnica protonu $d = 17 \cdot 10^{-16} \text{ m}$

Rozwiązanie

Gdy chcemy zapisać wartość wielkości fizycznej z przedrostkiem, musimy przesunąć przecinek w prawo lub w lewo o tyle miejsc, aby w zapisie liczby pojawił się mnożnik 10^n z takim wykładnikiem potęgi n , który można zastąpić przedrostkiem.

Zazwyczaj wybieramy przedrostek, z którym liczba będzie najwygodniejsza w użyciu.

Korzystamy z tabeli 1. na s. 305.

- a)** Aby inaczej zapisać wartość $f = 102\,400\,000\text{ Hz}$, możemy zastosować przedrostki odpowiadające wartościom $10^6 = \text{M}$ (mega) lub $10^9 = \text{G}$ (giga). Przyjmie ona wtedy postać:

$$f = 102\,400\,000\text{ Hz} = 102,4 \cdot 10^6\text{ Hz} = 102,4\text{ MHz}$$

lub

$$f = 0,1024 \cdot 10^9\text{ Hz} = 0,1024\text{ GHz}$$

- b)** Analogicznie dla wartości $\lambda = 0,000000668\text{ m}$ możemy zastosować przedrostki odpowiadające wartościom $10^{-6} = \mu$ (mikro) lub $10^{-9} = \text{n}$ (nano). Przyjmie ona wtedy postać:

$$\lambda = 0,000000668\text{ m} = 6,68 \cdot 10^{-7}\text{ m} = 0,668 \cdot 10^{-6}\text{ m} = 0,668\text{ }\mu\text{m}$$

lub

$$\lambda = 6,68 \cdot 10^{-7}\text{ m} = 668 \cdot 10^{-9}\text{ m} = 668\text{ nm}$$

- c)** Aby inaczej zapisać wartość $d = 3\,476\,000\text{ m}$, możemy zastosować przedrostki odpowiadające wartościom $10^3 = \text{k}$ (kilo) lub $10^6 = \text{M}$ (mega). Przyjmie ona wtedy postać:

$$d = 3\,476\,000\text{ m} = 3476 \cdot 10^3\text{ m} = 3476\text{ km}$$

lub

$$d = 3\,476\,000\text{ m} = 3,476 \cdot 10^6\text{ m} = 3,476\text{ Mm}$$

Możemy zastosować ten przedrostek, ale w praktyce nie używa się megametrów.

- d)** Analogicznie dla wartości $d = 17 \cdot 10^{-16}\text{ m}$ możemy zastosować przedrostki odpowiadające wartościom $10^{-12} = \text{p}$ (piko) lub $10^{-15} = \text{f}$ (femto). Przyjmuje ona wtedy postać:

$$d = 17 \cdot 10^{-16}\text{ m} = 0,0017 \cdot 10^{-12}\text{ m} = 0,0017\text{ pm}$$

lub

$$d = 17 \cdot 10^{-16}\text{ m} = 1,7 \cdot 10^{-15}\text{ m} = 1,7\text{ fm}$$

Odpowiedź: Po zastosowaniu przedrostków wymienione wielkości przyjmują postać: częstotliwość fali elektromagnetycznej $f = 102,4\text{ MHz} = 0,1024\text{ GHz}$, długość fali dla światła czerwonego $\lambda = 0,668\text{ }\mu\text{m} = 668\text{ nm}$, średnica Księżyca $d = 3476\text{ km}$, średnica protonu $d = 0,0017\text{ pm} = 1,7\text{ fm}$.

■ Przykład 3.

Ciepło właściwe substancji definiujemy na podstawie wzoru:

$$c = \frac{Q}{m \cdot \Delta T}$$

a jego jednostką jest:

$$\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

Przedstaw jednostkę ciepła właściwego w jednostkach podstawowych układu SI.

Rozwiązanie

Jednostka ciepła właściwego składa się z trzech jednostek. Dwie z nich to jednostki podstawowe układu SI: kg i K. Natomiast J (dżul) to jednostka pochodna w układzie SI.

Dżul jest jednostką energii i pracy. Możemy więc wyrazić go poprzez jednostki wielkości fizycznych definiujących pracę $W = F \cdot s$:

$$[\text{J}] = [\text{N} \cdot \text{m}]$$

Niuton N, który również jest jednostką pochodną układu SI, możemy wyrazić w jednostkach podstawowych. Pamiętajmy, że w niutonach podajemy siłę, którą na podstawie II zasady dynamiki Newtona opisujemy wzorem $F = m \cdot a$. Zatem niuton to iloczyn jednostki masy i jednostki przyspieszenia:

$$[\text{N}] = [\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}]$$

Jednostkę ciepła właściwego przekształcimy więc następująco:

$$\left[\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right] = \left[\frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right] = \left[\frac{\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right] = \left[\frac{\text{m}^2}{\text{K} \cdot \text{s}^2} \right]$$

Uwaga. Jest to tylko jeden ze sposobów, które mogliśmy zastosować.

Do wyrażenia dżula w innych jednostkach można jeszcze skorzystać np. ze wzoru na energię kinetyczną $E_k = \frac{m \cdot v^2}{2}$. Jak widzimy, dżul to iloczyn jednostki masy i kwadratu jednostki prędkości:

$$[\text{J}] = [\text{kg} \cdot (\frac{\text{m}}{\text{s}})^2] = [\text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}] = \left[\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} \right]$$

W tym przypadku posługujemy się tylko jednostkami podstawowymi układu SI.

Jednostkę ciepła właściwego przekształcamy teraz następująco:

$$\left[\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right] = \left[\frac{\text{kg} \cdot (\frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right] = \left[\frac{\text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right] = \left[\frac{\text{m}^2}{\text{K} \cdot \text{s}^2} \right]$$

Odpowiedź: Jednostka ciepła właściwego substancji w jednostkach podstawowych układu SI ma postać $\frac{\text{m}^2}{\text{K} \cdot \text{s}^2}$.

Pytania i zadania

- P1
 • 1.1.1. Zapisz wartości wymienionych wielkości i stałych fizycznych w notacji wykładniczej:
 - a) prędkość światła w diamencie $v = 123\,600\,000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$,
 - b) masa Ziemi $m = 5\,972\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,\text{kg}$,
 - c) średnia odległość Ziemia–Księżyc $d = 384\,400\,000\,\text{m}$,
 - d) przenikalność elektryczna próżni $\epsilon_0 = 0,00000000000885 \frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2}$,
 - e) rozmiar ziarna pyłku kwiatu $d = 0,0000007\,\text{m}$.

 - 1.1.2. Zapisz podane wartości w notacji wykładniczej.
 - P1 a) średnia odległość Mars–Słońce $r \approx 1,52\,\text{au}$, wyrażona w metrach
 - b) jeden rok marsjański $\approx 687\,\text{dob}$, wyrażony w sekundach (przyjmij, że marsjańska doba trwa 24 h i 37 min, czyli 24,6229 h)
 - c) jedna z długości fal promieniowania elektromagnetycznego emitowanych przez atom wodoru $\lambda = 102,7\,\text{nm}$, wyrażona w metrach,
 - d) rozmiar białej krwinki (leukocytu) $12\,\mu\text{m}$, wyrażona w metrach
 - e) masa bakterii $m = 0,3\,\text{pg}$ (pikogramy), wyrażona w gramach

 - • 1.1.3. Jedną z gwiazd gwiazdozbioru Trójkąta jest Wega, która znajduje się w odległości 7,664 pc od Ziemi. Wyraź tę odległość kolejno: w latach świetlnych (ly), w jednostkach astronomicznych (au), w milionach kilometrów (mln km) oraz w metrach (m). Zastosuj notację wykładniczą i podaj te wartości z dokładnością do trzech cyfr znaczących, a następnie dwóch cyfr znaczących.

 - 1.1.4. Zastosuj odpowiedni przedrostek przed jednostką wymienionych wielkości fizycznych. Skorzystaj z tabeli 1. na s. 305.
 - P2 a) wielkość czerwonej krwinki krwi (erytrocytu) $l = 0,000007\,\text{m}$
 - b) napięcie elektryczne między ziemią i chmurą $U = 30\,000\,000\,\text{V}$
 - c) długość fali dla światła żółtego $\lambda = 58 \cdot 10^{-8}\,\text{m}$
 - d) czas przeskoku elektronu na drodze kilkudziesięciu metrów podczas burzy $t = 0,0000085\,\text{s}$
 - e) prędkość Ziemi w ruchu obiegowym w $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ (przyjmij, że Ziemia obiega Słońce po kołowej orbicie o promieniu 150 mln km w ciągu 365 dob)

Podczas rozwiązywania zadań 1.1.5, 1.1.6, i 1.1.7 możesz skorzystać z tabeli 2., zamieszczonej na końcu zbioru zadań.

- **1.1.5.** Wartość indukcji magnetycznej B definiujemy na podstawie wzoru:

$$B = \frac{F}{l \cdot l}$$

gdzie: F – siła, I – natężenie prądu elektrycznego, l – długość. Jednostkę tej wielkości fizycznej nazywamy tesłą i oznaczamy symbolem T. Przedstaw tesłę w jednostkach podstawowych układu SI.

- **1.1.6.** Napięcie elektryczne definiujemy na podstawie wzoru:

$$U = \frac{W}{q}$$

gdzie: W – praca, q – ładunek elektryczny. Napięcie elektryczne podajemy w woltach [V]. Przedstaw wolt w jednostkach podstawowych układu SI.

- **1.1.7.** Stała elektrostatyczna przyjmuje wartość $k = 8,99 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$. Przedstaw jednostkę tej stałej fizycznej w jednostkach podstawowych układu SI.

P3

- **1.1.8.** Wzór na pierwszą prędkość kosmiczną dla Ziemi ma postać:

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

gdzie: G – stała grawitacji, M – masa Ziemi, R – promień Ziemi. Za pomocą odpowiednich zapisów wykaż, że prędkość kosmiczną wyraża się w takich samych jednostkach układu SI jak każdą inną prędkość.

- **1.1.9.** Okres drgań wahadła matematycznego zależy od długości wahadła l i przyspieszenia grawitacyjnego g . Który z przedstawionych niżej wzorów opisuje okres drgań tego wahadła? Odpowiedź uzasadnij, wykonując przeliczenia jednostek w jednostkach układu SI.

a) $T = 2\pi\sqrt{lg}$

b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

c) $T = 2\pi l^2 g$

- **1.1.10.** Okres drgań wahadła sprężynowego zależy od masy ciężarka m i współczynnika sprężystości k (jednostka $[k] = \frac{\text{N}}{\text{m}}$). Który z przedstawionych wzorów opisuje okres drgań tego wahadła?

Odpowiedź uzasadnij, wykonując przeliczenia jednostek w jednostkach układu SI.

a) $T = 2\pi\sqrt{mk}$

b) $T = 2\pi mk$

c) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

- **1.1.11.** W wyniku promieniowania elektromagnetycznego Słońce traci masę. Jej ubytek można wyliczyć ze wzoru:

$$\Delta M_s = \frac{4\pi \cdot r_{zs}^2 \cdot S \cdot \Delta t}{c^2}$$

gdzie:

r_{zs} – odległość Ziemi od Słońca,

S – stała słoneczna $[\frac{\text{W}}{\text{m}^2}]$,

Δt – czas emisji promieniowania,

c – prędkość światła.



- a) Wykaż, że jednostką ubytku masy w układzie SI jest kilogram.
- b) Oszacuj, ile masy traci Słońce w ciągu 1 s. Brakujące dane znajdź w dostępnych źródłach.
- **1.1.12.** Z pierwszego postulatu Bohra wynika, że elektron w atomie wodoru może krążyć po orbitach o promieniach określonych wzorem:

$$r_n = n^2 \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi \cdot m_e e^2}$$

gdzie: h – stała Plancka, ϵ_0 – przenikalność dielektryczna próżni, m_e – masa elektronu, e – wartość ładunku elementarnego, n – liczba naturalna 1, 2, 3...

Wykaż, że w tym modelu atomu promień orbity, po której krążyłby elektron, można wyrazić w metrach.

1.2. Wstęp do analizy danych pomiarowych

Podręcznik
rozd. 1.3

■ Przykład 1.

Uczniowie mierzyli obwód balonu w najszerszym miejscu. Otrzymali wyniki, które zamieścili w tabeli:

Nr pomiaru	1	2	3	4	5	6	7	8
Obwód / [cm]	73,7	74,0	73,8	74,4	73,5	73,9	74,1	73,6

Oblicz średnią arytmetyczną wyników i niepewność maksymalną wartości średniej. Zapisz średni wynik wraz z niepewnością pomiarową.

Rozwiązanie

Średnią arytmetyczną wyników pomiarów obwodu balonu obliczamy zgodnie z matematyczną formułą:

$$l_{\text{sr}} = \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_8}{8}$$

a wynik zapisujemy z tą samą dokładnością co poszczególne pomiary. Podstawiamy dane:

$$l_{\text{sr}} = \frac{73,7 \text{ cm} + 74,0 \text{ cm} + 73,8 \text{ cm} + 74,4 \text{ cm} + 73,5 \text{ cm} + 73,9 \text{ cm} + 74,1 \text{ cm} + 73,6 \text{ cm}}{8} = 73,9 \text{ cm}$$

Spośród wyników pomiarów zamieszczonych w tabeli wybieramy wynik o największej i wynik o najmniejszej wartości: $l_{\text{max}} = 74,4 \text{ cm}$, $l_{\text{min}} = 73,5 \text{ cm}$.

Niepewność maksymalną wartości średniej obliczamy ze wzoru:

$$\Delta l_{\text{sr}} = \frac{l_{\text{max}} - l_{\text{min}}}{2\sqrt{n}}$$

$$\Delta l_{\text{sr}} = \frac{74,4 \text{ cm} - 73,5 \text{ cm}}{2\sqrt{8}} = 0,16 \text{ cm} \approx 0,2 \text{ cm}$$

Średni wynik wraz z niepewnością pomiarową przedstawiamy w postaci:

$$l = 73,9 \text{ cm} \pm 0,2 \text{ cm} \quad \text{lub} \quad l = (73,9 \pm 0,2) \text{ cm}$$

Odpowiedź: Średnia arytmetyczna mierzonego obwodu balonu wynosi $l_{\text{sr}} = 73,9 \text{ cm}$, niepewność maksymalna wartości średniej $\Delta l_{\text{sr}} = 0,2 \text{ cm}$, natomiast wynik pomiarów $l = 73,9 \text{ cm} \pm 0,2 \text{ cm}$.

■ Przykład 2.

Przyspieszenie ziemskie można wyznaczyć przy użyciu wahadła matematycznego. Po zmierzeniu długości wahadła i czasu ustalonej liczby drgań wartość przyspieszenia oblicza się ze wzoru:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

gdzie:

l – długość wahadła matematycznego, T – okres drgań.

Dane są przykładowe wyniki pomiarów:

długość wahadła $l = 120 \text{ cm} \pm 1 \text{ cm}$,

średni okres drgań $T = 2,20 \text{ s} \pm 0,02 \text{ s}$.

Na podstawie podanych informacji:

- oblicz przyspieszenie ziemskie na podstawie danych doświadczalnych,
- oblicz maksymalną niepewność bezwzględną i niepewność względną,
- zapisz wynik doświadczenia wraz z niepewnością pomiarową.

Rozwiązanie

- Do podanego wzoru na przyspieszenie ziemskie podstawiamy dane wyrażone w jednostkach podstawowych układu SI:

$$g = \frac{4\pi^2 \cdot 1,20 \text{ m}}{(2,20 \text{ s})^2} = 9,778 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- Zapisujemy wyrażenie na niepewność maksymalną pomiaru złożonego (pośredniego):

$$\Delta g = \frac{g_{\max} - g_{\min}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi^2(l + \Delta l)}{(T - \Delta T)^2} - \frac{4\pi^2(l - \Delta l)}{(T + \Delta T)^2} \right)$$

Obliczamy niepewność maksymalną:

$$\Delta g = \frac{g_{\max} - g_{\min}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi^2(1,20 \text{ m} + 0,01 \text{ m})}{(2,20 \text{ s} - 0,02 \text{ s})^2} - \frac{4\pi^2(1,20 \text{ m} - 0,01 \text{ m})}{(2,20 \text{ s} + 0,02 \text{ s})^2} \right) = 0,26 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Zauważ, że przyspieszenie ziemskie obliczono z inną dokładnością niż niepewność pomiarową. Wartość przyspieszenia należy zaokrąglić do dwóch cyfr do przecinka.

Obliczamy niepewność względną:

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{0,26 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{9,78 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0,03, \text{ czyli } 3\%$$

- Zapisujemy wynik doświadczenia:

$$g = 9,78 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \pm 0,26 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Odpowiedź: Wyznaczone doświadczalnie przyspieszenie ziemskie ma wartość $g = 9,78 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \pm 0,26 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, a niepewność względna pomiaru wynosi 3%.

■ Przykład 3.

Na lekcji fizyki do badania ruchu jednostajnego prostoliniowego użyto rurki wypełnionej cieczą z pęcherzykiem powietrza (patrz zdjęcie), którą przymocowano do drewnianej linijki wyskalowanej co 1 cm od 0 do 100 cm tak, że 0 znajdowało się przy pęcherzyku. Rurkę wraz z przymocowaną do niej linijką przechyleno w taki sposób, aby pęcherzyk powietrza poruszał się w cieczy ruchem jednostajnym. Doświadczenie powtórzono jeszcze cztery razy, za każdym razem ustawiając rurkę pod takim samym kątem do poziomu. Czas ruchu mierzono za pomocą stopera w telefonie komórkowym (dokładność pomiaru $\Delta t = 0,5$ s), a położenie pęcherzyka odczytywano z linijki.

W tabeli 1. podano wyniki pomiarów czasu, w którym pęcherzyk z powietrzem pokonywał określone odcinki drogi.



Tabela 1.

s [cm]	40	50	60	70	80
t [s]	9,33	11,79	14,56	16,62	18,60

Na podstawie danych doświadczalnych oblicz prędkość średnią pęcherzyka powietrza i zapisz wynik wraz z niepewnością pomiarową.

Rozwiązanie

Obliczamy prędkość na poszczególnych odcinkach i prędkość średnią pęcherzyka powietrza. Wyniki tych obliczeń przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2.

s [cm]	40	50	60	70	80
t [s]	9,33	11,79	14,56	16,62	18,60
$v = \frac{s}{t} \left[\frac{\text{cm}}{\text{s}} \right]$	4,29	4,24	4,12	4,21	4,30
$v_{\text{sr}} \left[\frac{\text{cm}}{\text{s}} \right]$	$v_{\text{sr}} = \frac{4,29 \frac{\text{cm}}{\text{s}} + 4,24 \frac{\text{cm}}{\text{s}} + 4,12 \frac{\text{cm}}{\text{s}} + 4,21 \frac{\text{cm}}{\text{s}} + 4,30 \frac{\text{cm}}{\text{s}}}{5} = 4,23 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$				

Niepewność pomiarową możemy obliczyć różnymi metodami.

Metoda 1. Uwzględnienie niepewności maksymalnej wartości średniej

Dla mierzonej wartości x maksymalną niepewność pomiarową wyznaczamy z zależności:

$$\Delta x_{\text{sr}} = \frac{x_{\text{max}} - x_{\text{min}}}{2\sqrt{n}}$$

gdzie: x_{min} i x_{max} to odpowiednio najmniejsza i największa zmierzona wartość x .

W naszym przypadku wartość x_{sr} jest prędkością średnią, której wartości w poszczególnych próbach zapisaliśmy w tabeli 2. Odczytujemy szukane wartości:

$$v_{\text{max}} = 4,30 \frac{\text{cm}}{\text{s}}, \quad v_{\text{min}} = 4,12 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

stąd:

$$\Delta v_{\text{sr}} = \frac{4,30 \frac{\text{cm}}{\text{s}} - 4,12 \frac{\text{cm}}{\text{s}}}{2\sqrt{5}} = 0,04 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Wynik pomiaru zapisujemy w postaci: $v = v_{\text{sr}} \pm \Delta v$.

Prędkość pęcherzyka powietrza wraz z niepewnością maksymalną: $v = (4,23 \pm 0,04) \frac{\text{cm}}{\text{s}}$.

Uwaga. Niepewność tę stosuje się przy niewielkiej liczbie pomiarów.

Metoda 2. Uwzględnienie niepewności standardowej wartości średniej

Jeżeli wykonaliśmy co najmniej kilka pomiarów, możemy obliczyć niepewność pomiarową, korzystając ze wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}[(x_1 - x_{\text{sr}})^2 + \dots + (x_n - x_{\text{sr}})^2]},$$

gdzie:

n – liczba pomiarów, $x_1, x_2, \dots, x_n$ – wyniki poszczególnych pomiarów (pośrednich lub bezpośrednich), x_{sr} – średnia arytmetyczna pomiarów.

W naszym zadaniu wykonaliśmy pięć niezależnych pomiarów prędkości średniej, stąd:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{5 \cdot 4}[(4,29 - 4,23)^2 + (4,24 - 4,23)^2 + (4,12 - 4,23)^2 + (4,21 - 4,23)^2 + (4,30 - 4,23)^2]} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

$$\sigma = 0,04 \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

Wynik pomiaru prędkości ma postać: $v = (4,23 \pm 0,04) \frac{\text{cm}}{\text{s}}$.

Uwaga. Niepewność tę liczymy przy długiej serii pomiarów. Niepewność pomiarowa liczona tą metodą jest tym mniejsza, im więcej wykonamy pomiarów. Najlepiej stosować ją wtedy, gdy wykonano co najmniej 10 pomiarów.

Wniosek. Ze względu na niewielką liczbę pomiarów przeprowadzonych w doświadczeniu najlepiej jest obliczyć maksymalną niepewność pomiarową.

Odpowiedź: Prędkość pęcherzyka powietrza wraz z niepewnością maksymalną jest równa $v = (4,23 \pm 0,04) \frac{\text{cm}}{\text{s}}$.

Pytania i zadania

- **1.2.1.** Chłopiec chciał wyznaczyć czas jednego obrotu karuzeli łańcuchowej. Gdy karuzela wirowała ze stałą prędkością, zmierzył kilkakrotnie czas, w jakim wybrane krzeselko karuzeli wykonało $n = 10$ okrążeń. Do pomiaru użył stopera w telefonie komórkowym, umożliwiającego pomiar z dokładnością 0,01 s. Wyniki pomiarów przedstawiono w tabeli.

P1

D

Pomiar	1	2	3	4	5	6	7
t [s]	52,76	48,90	51,03	50,48	49,64	60,21	50,59

- a) Odrzuć pomiar, który jest obarczony błędem grubym. Jak mógł powstać ten błąd?
- b) Ustal niepewność **pojedynczego** pomiaru czasu. Dlaczego nie można przyjąć, że $\Delta t = 0,01$ s?
- c) Oblicz średni czas jednego obrotu karuzeli i zapisz wynik wraz z niepewnością pomiarową.

P2

- **1.2.2.** Ogniskową soczewki można wyznaczyć doświadczalnie, gdy soczewka ta wytworzy na ekranie rzeczywisty obraz świecącego przedmiotu. Po zmierzeniu odległości przedmiotu i odległości jego obrazu od środka soczewki ogniskową oblicza się ze wzoru:

$$f = \frac{x \cdot y}{x + y}$$

gdzie: f – ogniskowa soczewki, x – odległość świecącego przedmiotu od środka soczewki, y – odległość obrazu od środka soczewki.

Przykładowe wyniki pomiarów to: odległość przedmiotu: $x = 34 \text{ cm} \pm 1 \text{ cm}$, odległość obrazu: $y = 91 \text{ cm} \pm 1 \text{ cm}$. Na podstawie powyższych informacji:

- oblicz ogniskową soczewki,
- oblicz niepewność bezwzględną i niepewność względną,
- zapisz wynik doświadczenia wraz z niepewnością pomiarową.

P2

D

- **1.2.3.** Mechaniczna waga kuchenna wskazuje masę z dokładnością do $\Delta m_k = 0,01 \text{ kg}$, a waga elektroniczna – z dokładnością do $\Delta m_e = 1 \text{ g}$. Gospodyni odważyła $m = 15 \text{ dag}$ cukru na obu wagach. Wyznacz błąd bezwzględny i błąd względny pomiaru masy przy użyciu wagi mechanicznej i elektronicznej.

P3

D

- **1.2.4.** Uczniowie w tych samych warunkach wyznacali doświadczalnie przyspieszenie ziemskie przy użyciu wahadła matematycznego. Otrzymali następujące wyniki:

Nr pomiaru	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$g \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$	9,77	9,73	9,95	9,69	9,18	9,33	9,91	9,72	9,76	9,93

Oblicz średnią arytmetyczną wartości przyspieszenia, a następnie za pomocą kalkulatora naukowego lub arkusza kalkulacyjnego oblicz niepewność standardową wartości średniej σ . Zapisz wynik wraz z niepewnością pomiarową.

••

D

1.2.5. Uczniowie wyznacali przyspieszenie ziemskie na podstawie doświadczenia ze swobodnie spadającym ciałem. Z wysokości $h = 1,5 \text{ m}$ puścili metalową kulkę. Do pomiaru czasu użyli komputera ze specjalnym oprogramowaniem umożliwiającym pomiar z dokładnością do $\Delta t = 0,01 \text{ s}$, sprzężonego z czujnikiem ruchu. Czas spadku kulki wynosił $t = 0,55 \text{ s}$. Wysokość h zmierzili z dokładnością do $\Delta h = 0,5 \text{ cm}$.

- Oblicz przyspieszenie kulki podczas spadku swobodnego ze wzoru $g = \frac{2s}{t^2}$, gdzie s to pokonana droga.
- Oblicz niepewność bezwzględną i niepewność względną pomiaru przyspieszenia ziemskiego, korzystając ze wzoru:

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta s}{s} + 2 \frac{\Delta t}{t}$$

- Zapisz wynik doświadczenia wraz z jego niepewnością. Porównaj wynik z wartością przyspieszenia ziemskiego podaną w tablicach fizycznych.



1.3. Proporcjonalność prosta

Podręcznik
rozdz. 1.4

■ Przykład 1.

Tabela zawiera informacje o wysokości słupa cieczy w zbiorniku i wartości ciśnienia, jakie wskazywał manometr znajdujący się na dnie naczynia. Przedstaw zależność ciśnienia od wysokości słupa cieczy na wykresie $p(h)$. Zapisz funkcję opisującą tę zależność. Ustal sens fizyczny współczynników występujących we wzorze i wyznacz gęstość cieczy.

Skorzystaj ze wzoru $p = dgh$, gdzie d – gęstość cieczy. Do obliczeń przyjmij przyspieszenie ziemskie $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Wysokość słupa cieczy h [m]	0	5	10	15	20	25
Ciśnienie p [hPa]	1013	1513	2013	2513	3013	3513

Rozwiązanie

Przedstawiamy zależność $p(h)$ na wykresie.

Otrzymaliśmy wykres liniowy typu $y = ax + b$.

Gdy $h = 0$ m, wykres przecina oś ciśnienia dla wartości 1013 hPa. Odpowiada to wartości ciśnienia w zbiorniku bez cieczy. Jest to wartość ciśnienia atmosferycznego p_a w chwili pomiaru, a jednocześnie współczynnik b funkcji liniowej.

Gdy w zbiorniku jest ciecz, manometr wskazuje ciśnienie, które jest sumą ciśnienia atmosferycznego i ciśnienia hydrostatycznego wywieranego przez słup cieczy na dno naczynia, co możemy zapisać w postaci $p = p_a + p_H$.

Ciśnienie atmosferyczne p_a jest stałe i – jak już powiedzieliśmy – odpowiada stałemu współczynnikowi b . Zatem tylko wzrost wysokości słupa cieczy w zbiorniku powoduje proporcjonalny wzrost ciśnienia hydrostatycznego p_H . Oznacza to, że $p_H \sim h$. Aby ustalić współczynnik proporcjonalności skorzystamy z wykresu. Odczytujemy wybrany przyrost ciśnienia Δp i odpowiadający mu przyrost Δh , np. $\Delta p = 500$ hPa, $\Delta h = 5$ m i obliczamy:

$$\frac{\Delta p}{\Delta h} = 10\,000 \frac{\text{Pa}}{\text{m}}$$

Otrzymana wartość $\frac{\Delta p}{\Delta h}$ to współczynnik kierunkowy a funkcji liniowej.

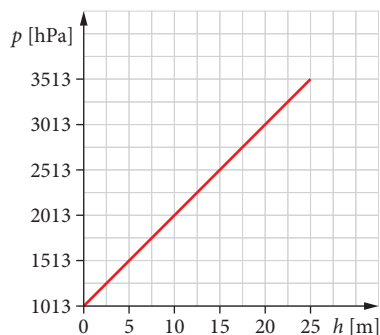
Funkcja liniowa, która opisuje zależność $p(h)$, ma postać:

$$p = 10\,000 \cdot h + 101\,300$$

Porównajmy ten zapis ze wzorem na ciśnienie hydrostatyczne:

$$p = dgh + p_a$$

Widzimy, że współczynnik kierunkowy a tej funkcji w postaci $y = ax + b$ to w tym przypadku wartość iloczynu dg .



Możemy sprawdzić jeszcze jednostki obu wartości:

$$\frac{\Delta p}{\Delta h} = \left[\frac{\text{Pa}}{\text{m}} = \frac{\frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{\text{m}} = \frac{\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\text{m}^3} = \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}^2} \right]$$

$$dg = \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}^2} \right]$$

Skoro współczynnik kierunkowy funkcji jest równy iloczynowi dg , to możemy obliczyć gęstość cieczy:

$$dg = 10\,000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}^2}, \quad \text{więc} \quad d = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

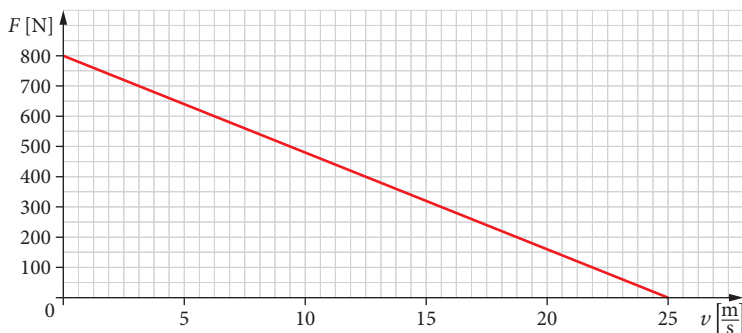
Taką gęstość ma woda. Oczywiście gęstość $1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ nie oznacza, że w zbiorniku na pewno była woda, bo taką gęstość mogą mieć też inne ciecze, ale stanowi to pewną wskazówkę.

Odpowiedź: Zależność ciśnienia wywieranego na dno zbiornika od wysokości słupa cieczy opisuje funkcja $p = 10\,000 \cdot h + 101\,300$.

Jest to funkcja liniowa rosnąca w postaci $y = ax + b$. Współczynnik $b = 101\,300 \text{ [Pa]}$ to wartość ciśnienia atmosferycznego, współczynnik $a = 10\,000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}^2}$ to wartość iloczynu dg , na podstawie którego można było wyznaczyć gęstość cieczy. Gęstość $1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ wskazuje, że w zbiorniku była prawdopodobnie woda.

■ Przykład 2.

Skoczek spadochronowy po wyskoczeniu z samolotu przez kilka sekund nie otwierał spadochronu. W tym czasie działała na niego wypadkowa siła F , której wartość zmieniała się wraz ze wzrostem prędkości skoczka, tak jak pokazano na wykresie.



Przyjmij, że w czasie spadania bez otwartego spadochronu na skoczka działała siła grawitacji F_g i siła oporu F_{op} proporcjonalna do prędkości: $F_{op} = k \cdot v$.

Na podstawie wykresu $F(v)$ i podanych informacji zapisz wzór opisujący, jak zmienia się wartość siły wypadkowej działającej na skoczka spadochronowego wraz ze wzrostem jego prędkości.

Rozwiązanie

Przedstawiony wykres ilustruje funkcję liniową typu $y = -ax + b$.

Gdy prędkość spadochroniarza wynosiła $v_0 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, działała na niego tylko siła grawitacji F_g . Wartość tej siły odczytana z wykresu to $F_g = 800 \text{ N}$. Odpowiada ona wartości współczynnika b funkcji liniowej.

Siła wypadkowa $\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_{\text{op}}$ jest sumą wektorów $\vec{F}_g$ i $\vec{F}_{\text{op}}$, natomiast jej wartość to $F = F_g - F_{\text{op}}$. Wartość siły F maleje proporcjonalnie do wzrostu prędkości. Możemy przyjąć, że siła grawitacji nie zmienia swojej wartości, natomiast wzrasta wartość siły oporu F_{op} wraz ze wzrostem prędkości skoczka. Zatem siła oporu jest proporcjonalna do prędkości $F_{\text{op}} \sim v$. Współczynnik proporcjonalności między tymi wielkościami ma wartość współczynnika kierunkowego $-a$ funkcji liniowej.

Odczytujemy z wykresu odpowiednie wartości ΔF i Δv , np. $\Delta F = -160 \text{ N}$, $\Delta v = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Obliczamy wartość współczynnika kierunkowego prostej ilustrującej zależność $F(v)$:

$$-a = \frac{\Delta F}{\Delta v} = \frac{-160 \text{ N}}{5 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = -32 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$$

Funkcja $F(v)$ siły wypadkowej działającej na skoczka spadochronowego od jego prędkości ma postać:

$$F = 800 - 32v$$

Zapiszmy tę zależność, posługując się symbolami wielkości fizycznych: $F = F_g - kv$.

Po porównaniu obu zapisów widzimy, że siła grawitacji ma stałą wartość $F_g = 800 \text{ N}$, a współczynnik zależny od oporu powietrza $k = 32 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$.

Odpowiedź: Wartość siły wypadkowej działającej na skoczka spadochronowego opisuje równanie $F = 800 - 32v$.

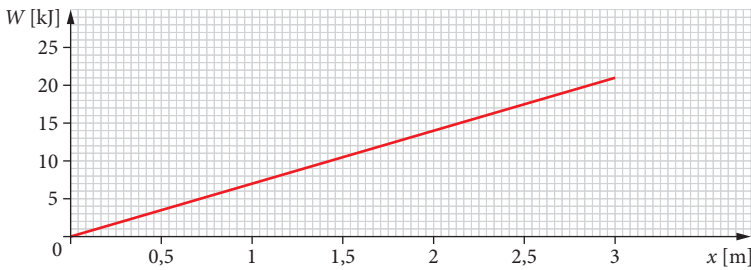
Pytania i zadania

- **1.3.1.** Na sprężynie zawieszano kolejno ciężarki o takiej samej masie $m = 50 \text{ g}$, w wyniku czego sprężyna coraz bardziej się wydłużała. Tabela zawiera dane i wyniki pomiarów eksperymentu. Uzupełnij brakujące wpisy w tabeli, a następnie przedstaw graficznie zależność wartości siły rozciągającej sprężynę od wydłużenia sprężyny $F_c(\Delta x)$. Sprawdź, czy ta zależność jest zależnością liniową. Przyjmij przyspieszenie ziemskie $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Liczba ciężarków	0	1	2	3	4	5
Masa zawieszonych ciężarków m [g]	0	50	100	150	200	250
Siła rozciągająca sprężynę $F_c = mg$ [N]	0	0,5	1,0			
Wydłużenie Δx [cm]	0	1,1	2,0	2,9	4,2	5,0

- ● **1.3.2.** Samochód osobowy jest wciągany na lawetę za pomocą wciągarki. Zależność pracy W wykonanej przez wciągarkę od przemieszczenia samochodu x jest zilustrowana na poniższym wykresie.

P1



Zapisz wzór opisujący zależność pracy wciągarki od przemieszczenia. Określ, jaki jest sens fizyczny współczynnika kierunkowego prostej ilustrującej tę zależność.

- ● **1.3.3.** Tabela przedstawia, jak zmieniają się z upływem czasu wskazania prędkościomierza zamontowanego w samochodzie. Na podstawie danych zawartych w tabeli przedstaw na wykresie zależność prędkości od czasu $v(t)$. Zapisz wzór opisujący tę zależność i ustal sens fizyczny współczynników występujących we wzorze. Wszystkie wartości podaj w jednostkach układu SI.

P1

Czas t [s]	0	1	2	3	4	5
Prędkość v [$\frac{\text{km}}{\text{h}}$]	54	58	62	66	70	74

- ● **1.3.4.** Styropianowy klocek w kształcie sześcianu o boku 25 cm został naciśnięty tak, że znalazł się całkowicie pod powierzchnią wody, a jego górna ścianka była ustawiona równolegle do powierzchni cieczy. Po puszczeniu klocek wynurzał się na powierzchnię cieczy (przyjmij, że ostatecznie wynurzył się całkowicie).

P2

W tabeli zapisano wysokości wynurzonej części klocka oraz wartości siły wyporu działającej na jego część zanurzoną w wodzie.

Wysokość części wynurzonej h [cm]	0	5	10	15	20	25
Siła wyporu działająca na zanurzoną część klocka F [N]	156,25	125,00	93,75	62,50	31,25	0

Przedstaw zależność siły wyporu od wysokości, na jaką klocek wystaje nad wodę $F(h)$. Zapisz równanie opisujące tę zależność. Wszystkie wartości podaj w jednostkach układu SI.



2. Ruch prostoliniowy

Najważniejsze informacje

■ Położenie ciała

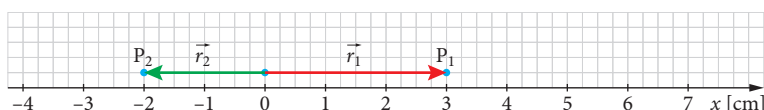
Położenie ciała określamy względem **układu odniesienia**, np. innego ciała.

Gdy opisujemy położenie różnych ciał, np. samochodu lub samolotu, często pomijamy rozmiary tych ciał, a zamiast nich wprowadzamy pewien model ciała, zwany **punktem materialnym**.

Punkt materialny to model ciała, którego rozmiary są nieskończenie małe i które ma określoną masę.

Aby opisać położenie ciała względem wybranego układu odniesienia, wprowadzamy związany z nim **układ współrzędnych**. W zależności od potrzeb możemy zastosować układ współrzędnych: **jedno-, dwu- lub trójwymiarowy**. **Początek układu współrzędnych można wybrać dowolnie**.

Do określenia położenia ciała w wybranym układzie współrzędnych służy **wektor położenia**, który łączy początek układu współrzędnych z ciałem.



- ▶ Wektor $\vec{r}_1$ opisujący położenie punktu materialnego P_1 ma zwrot zgodny z wybraną osią x układu współrzędnych i jego współrzędna położenia jest dodatnia $\vec{r}_1 = [3]$
- ▶ Wektor $\vec{r}_2$ opisujący położenie punktu materialnego P_2 ma zwrot przeciwny do osi x układu współrzędnych i jego współrzędna położenia jest ujemna $\vec{r}_2 = [-2]$.

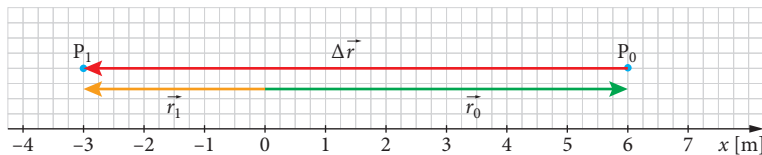
■ Opis ruchu prostoliniowego

Ruch to zmiana położenia ciała względem przyjętego układu odniesienia.

Do opisu ruchu w przyjętym układzie współrzędnych posługujemy się **wektorem przemieszczenia** $\Delta \vec{r}$.

Wektor przemieszczenia łączy **położenie początkowe** P_0 punktu materialnego z jego **położeniem końcowym** P_1 . Zwrot wektora przemieszczenia jest od punktu P_0 do P_1 .

Wektor przemieszczenia jest równy różnicy wektorów położenia końcowego i początkowego danego punktu materialnego: $\Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$.



Zapis $P_0 = (6 \text{ m})$ oznacza, że punkt P_0 ma współrzędną $x_0 = 6 \text{ m}$ – jest to położenie początkowe ciała, zapis $P_1 = (-3 \text{ m})$ oznacza, że punkt P_1 ma współrzędną $x_1 = -3 \text{ m}$ – jest to położenie końcowe ciała. Zapis $\vec{r}_0 = [6 \text{ m}]$ oznacza wektor położenia początkowego o współrzędnej $r_{0x} = 6 \text{ m}$, zapis $\vec{r}_1 = [-3 \text{ m}]$ oznacza wektor położenia końcowego o współrzędnej $r_{1x} = -3 \text{ m}$.

Współrzedną wektora przemieszczenia obliczamy, odejmując współrzedną wektora $\vec{r}_0$ od współrzednej wektora $\vec{r}_1$:

$$\Delta \vec{r} = [\Delta r_x] = [r_{1x} - r_{0x}]$$

$$\Delta \vec{r} = [-3 \text{ m} - 6 \text{ m}], \text{ zatem } \Delta \vec{r} = [-9 \text{ m}]$$

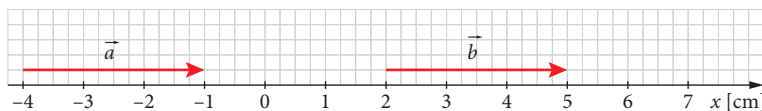
Równoważne działanie na współrzednych wektora możemy zapisać następująco:

$$\Delta r_x = r_{1x} - r_{0x}$$

$$\Delta r_x = -3 \text{ m} - 6 \text{ m} = -9 \text{ m}$$

Współrzedne punktów zapisujemy w nawiasach okrągłych, współrzedne wektorów – w nawiasach kwadratowych.

Współrzedne wektora w żaden sposób nie wskazują jego położenia w układzie współrzednych! Określają jedynie długość i zwrot wektora względem odpowiedniej osi układu współrzednych.



Wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ mają takie same współrzedne: $\vec{a} = [3 \text{ cm}]$, $\vec{b} = [3 \text{ cm}]$

Jeśli współrzedna wektora przemieszczenia $\Delta \vec{r}$ jest dodatnia, to przemieszczenie nastąpiło zgodnie ze zwrotem osi układu współrzednych.

Jeśli współrzedna wektora przemieszczenia $\Delta \vec{r}$ jest ujemna, to przemieszczenie nastąpiło przeciwnie do zwrotu osi układu współrzednych.

Tor ruchu to linia, jaką zakreśla punkt materialny będący w ruchu.

Długość toru ruchu to **droga**. Droga to skalarna wielkość fizyczna, która zawsze przyjmuje wartości dodatnie.

W ruchu prostoliniowym odbywającym się **w jedną stronę** długość wektora przemieszczenia jest równa drodze przebytej przez punkt materialny:

$$|\Delta \vec{r}| = s$$

■ Prędkość w ruchu prostoliniowym

Ciało przemieszcza się od punktu P_0 do punktu P_1 w określonym przedziale czasu Δt . Iloraz przemieszczenia ciała i czasu, w którym to przemieszczenie nastąpiło, nazywamy **prędkością średnią**:

$$\vec{v}_{\text{sr}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Kierunek i zwrot wektora prędkości średniej jest taki jak wektora przemieszczenia. Jednostką prędkości w układzie SI jest $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Wartość wektora prędkości średniej jest to iloraz wartości przemieszczenia ciała i czasu, w którym to przemieszczenie nastąpiło, obliczany ze wzoru: $|\vec{v}_{\text{sr}}| = \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t}$.

Średnia wartość prędkości (zwana szybkością średnią) jest to iloraz całkowitej drogi i całkowitego czasu trwania ruchu. Obliczamy ją ze wzoru:

$$v_{\text{sr}} = \frac{s_{\text{cał}}}{t_{\text{cał}}}$$

$$v_{\text{sr}} = \frac{s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n}{t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n}$$

Prędkość chwilowa jest to iloraz wektora przemieszczenia ciała i czasu trwania ruchu, gdy czas jest bardzo krótki, tzn. dąży do zera.

$$\vec{v}_{\text{sr}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad \text{dla} \quad \Delta t \rightarrow 0$$

Ruch prostoliniowy to ruch, w którym kierunek wektora prędkości pozostaje stały, natomiast mogą zmieniać się zwrot i wartość prędkości.

■ Ruch jednostajny prostoliniowy

W tym ruchu wektor prędkości jest stały, co oznacza, że nie zmieniają się jego wartość, kierunek i zwrot:

$$\vec{v}_{\text{ch}} = \text{const}$$

Prędkość **średnia** jest równa prędkości chwilowej:

$$\vec{v}_{\text{sr}} = \vec{v}_{\text{ch}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Współrzedną przemieszczenia można obliczyć ze wzoru:

$$\Delta x = v \cdot \Delta t$$

Zależność drogi od czasu w ruchu jednostajnym prostoliniowym jest opisana wzorem:

$$s = |v| \cdot \Delta t$$

Jeśli ruch ciała w przyjętym układzie współrzędnych odbywa się wzdłuż osi x , to równanie ruchu jednostajnego prostoliniowego przyjmuje postać równania współrzędnej:

$$x = x_0 + v_x \Delta t$$

■ Ruch prostoliniowy jednostajnie zmienny

Przyspieszenie średnie to iloraz zmiany prędkości i czasu, w którym ta zmiana nastąpiła.

$$\vec{a}_{\text{sr}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Jednostką przyspieszenia w układzie SI jest $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Przyspieszenie chwilowe to iloraz zmiany prędkości i czasu, w którym ta zmiana nastąpiła, gdy czas dąży do zera:

$$\vec{a}_{\text{ch}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad \text{dla} \quad \Delta t \rightarrow 0$$

■ Ruch prostoliniowy jednostajnie zmienny

W ruchu tym **wektor przyspieszenia** jest stały, co oznacza, że nie zmieniają się jego kierunek, zwrot i wartość:

$$\vec{a} = \text{const}$$

Przyspieszenie średnie jest równe przyspieszeniu chwilowemu: $\vec{a}_{\text{sr}} = \vec{a}_{\text{ch}} = \vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$.

Równanie prędkości:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \Delta t$$

gdzie: $\vec{v}$ – wektor prędkości końcowej, $\vec{v}_0$ – wektor prędkości początkowej, a – przyspieszenie, Δt – czas trwania ruchu.

Jeżeli ruch ciała w przyjętym układzie współrzędnych odbywa się wzdłuż osi x , to równanie prędkości przyjmuje postać **równania współrzędnej**:

$$v_x = v_{0x} + at$$

Jeżeli zwrot wektora przyspieszenia $\vec{a}$ jest zgodny ze zwrotem osi x , to jego współrzędna jest dodatnia, jeżeli zwrot jest przeciwny, to jego współrzędna jest ujemna.

Równanie wektora położenia:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

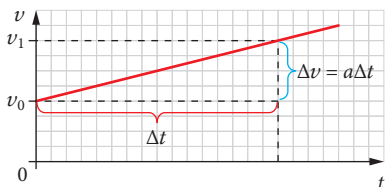
Rozróżniamy **ruch prostoliniowy jednostajnie przyspieszony**, kiedy wektory prędkości i przyspieszenia mają taki sam kierunek i zwrot, oraz **jednostajnie opóźniony**, kiedy wektory prędkości i przyspieszenia mają taki sam kierunek, ale przeciwne zwroty.

■ Droga a zależność wartości prędkości od czasu w ruchu prostoliniowym jednostajnie przyspieszonym

Droga przebyta przez ciało w czasie Δt jest liczbowo równa polu figury pod wykresem wartości prędkości od czasu.

Ruch jednostajnie przyspieszony

W ruchu przyspieszonym wektor przyspieszenia i wektor prędkości mają zgodne zwroty, a więc współrzędne obu wektorów mają taki sam znak.



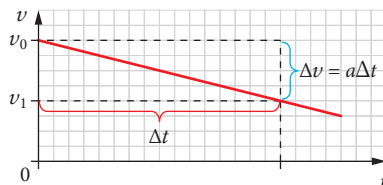
$$v = v_0 + at$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} \Delta v t$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

Ruch jednostajnie opóźniony

W ruchu opóźnionym wektor przyspieszenia jest zwrócony przeciwnie do wektora prędkości, co oznacza, że jeśli wektor prędkości ma dodatnią współrzędną, to wektor przyspieszenia ma współrzędną ujemną i dlatego we wzorze na drogę wartość przyspieszenia występuje ze znakiem minus.



$$v = v_0 - at$$

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} \Delta v t$$

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} at^2$$

Tabela 1. Zestawienie ruchów prostoliniowych

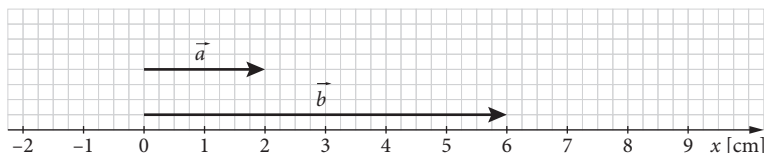
Ruch prostoliniowy				
	Równania	Wykresy	Równania	Wykresy
Ruch jednostajny	prędkości $\vec{v} = \text{const}$		współrzędnej położenia $x = x_0 + v_x t$	
	współrzędnej prędkości $v_x = \text{const}$		drogi $s = s_0 + v t$	
	wektora położenia $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v} t$			
Ruch jednostajnie zmienny	prędkości $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t$		wektora położenia $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$	
	współrzędnej prędkości $v_x = v_{0x} + a_x t$		współrzędnej położenia $x = x_{0x} + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$	
	wartości prędkości $v = v_0 + a t$		drogi $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$	
	wartości prędkości $v = v_0 - a t$		drogi $s = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2} a t^2$	

2.1. Jak opisać położenie ciała

Podręcznik
rozdz. 2.1

■ Przykład 1.

Dane są wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (patrz rysunek poniżej), których długości wynoszą odpowiednio $|\vec{a}| = 2 \text{ cm}$ i $|\vec{b}| = 6 \text{ cm}$.



Znajdź graficznie wektory:

a) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$,

b) $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$,

c) $\vec{e} = \vec{b} - \vec{a}$.

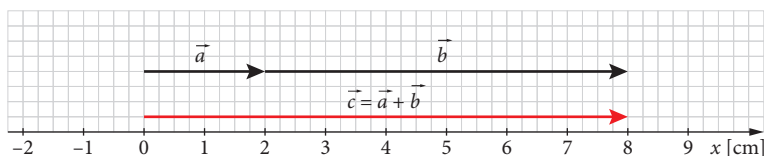
Podaj współrzędne i długości otrzymanych wektorów: $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$.

Rozwiązanie

Wektory warto umieścić na osi liczbowej tak, aby początek pierwszego z nich znalazł się w punkcie zero tej osi.

a) Dodawanie wektorów: $\vec{a} + \vec{b}$

Rysujemy oś liczbową i w punkcie zero osi umieszczamy początek wektora $\vec{a}$. Korzystamy z tego, że wektory możemy przesuwając równolegle i przesuwamy wektor $\vec{b}$ tak, aby jego początek znalazł się w punkcie, w którym jest koniec pierwszego wektora. Wektor wypadkowy otrzymamy, łącząc początek wektora $\vec{a}$ z końcem wektora $\vec{b}$.



Współrzedną wektora $\vec{c}$ otrzymamy, dodając współrzędne wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$:

$$\vec{a} = [2 \text{ cm}], \vec{b} = [6 \text{ cm}]$$

zatem

$$\vec{c} = [2 \text{ cm} + 6 \text{ cm}] = [8 \text{ cm}]$$

Możemy zapisać również:

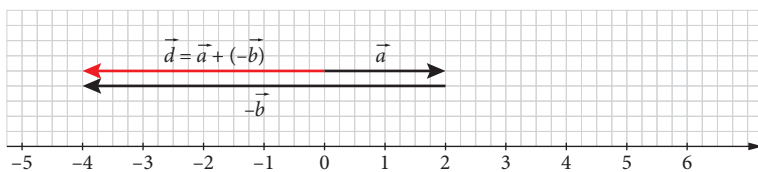
$$c_x = a_x + b_x, c_x = 2 \text{ cm} + 6 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$$

Ponieważ wektor jest ułożony wzdłuż osi x , jego długość jest równa wartości bezwzględnej współrzędnej c_x wektora.

Długość wektora wynosi $|\vec{c}| = |c_x| = 8 \text{ cm}$.

b) Odejmowanie wektorów: $\vec{a} - \vec{b}$

Aby graficznie odjąć wektory, zamieniamy drugi wektor $\vec{b}$ na przeciwny, czyli $-\vec{b}$, i dodajemy do wektora $\vec{a}$.



$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Współrzedną wektora $\vec{d}$ obliczamy, odejmując współrzedną wektora $\vec{b}$ od współrzednej wektora $\vec{a}$:

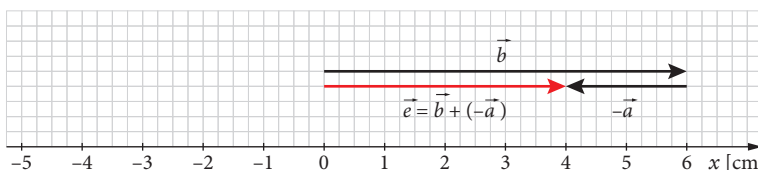
$$\vec{d} = [2 \text{ cm} - 6 \text{ cm}] = [-4 \text{ cm}]$$

Długość wektora $\vec{d}$ jest równa wartości bezwzględnej współrzednej wektora d_x , zatem:

$$|\vec{d}| = |d_x| = 4 \text{ cm}$$

c) Odejmowanie wektorów: $\vec{b} - \vec{a}$

Postępujemy tak jak w punkcie b), a więc do wektora pierwszego $\vec{b}$ dodajemy wektor przeciwny do drugiego, czyli $-\vec{a}$.



Współrzedną wektora $\vec{e}$ obliczamy, odejmując współrzedną wektora $\vec{a}$ od współrzednej wektora $\vec{b}$:

$$\vec{e} = [6 \text{ cm} - 2 \text{ cm}] = [4 \text{ cm}]$$

Długość wektora $\vec{e}$:

$$|\vec{e}| = |e_x| = 4 \text{ cm}$$

Odpowiedź: Współrzedne wektorów wynoszą odpowiednio: $\vec{c} = [8 \text{ cm}]$, $\vec{d} = [-4 \text{ cm}]$, $\vec{e} = [4 \text{ cm}]$, natomiast długości wektorów: $|\vec{c}| = 8 \text{ cm}$, $|\vec{d}| = 4 \text{ cm}$, $|\vec{e}| = 4 \text{ cm}$.

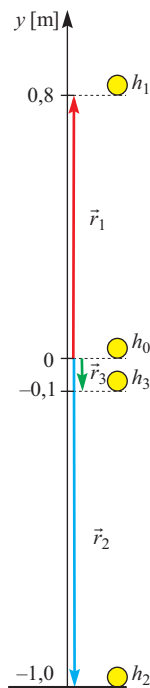
Uwaga. Z porównania rozwiązań w punktach b) i c) widzimy, że odejmowanie wektorów nie jest przemienne, tzn. $\vec{a} - \vec{b} \neq \vec{b} - \vec{a}$.

■ Przykład 2.

Zawodnik podrzucił piłkę tenisową z wysokości $h_0 = 1$ m nad podłożem. Piłka wzniosła się na wysokość $h_1 = 1,8$ m nad podłoże, spadła i po odbiciu od podłoża wzniosła się na wysokość $h_3 = 0,9$ m. Narysuj wektor położenia piłki i oblicz współrzędną położenia piłki w przyjętym układzie współrzędnych:

- gdy znajduje się ona w maksymalnym górnym położeniu,
- w chwili uderzenia o podłoże,
- gdy znajduje się ona na wysokości h_3 .

Wprowadź jednowymiarowy układ współrzędnych tak, aby punkt zero na osi znajdował się w miejscu wyrzucenia piłki, a oś y była skierowana do góry.



Rozwiązanie

Rysujemy oś y skierowaną do góry. Zaznaczamy punkt zero odpowiadający odległości 1 m od podłoża. Zaznaczamy na osi pozostałe punkty odpowiadające położeniom piłki opisanym w treści zadania:

h_0 – położenie piłki w chwili wyrzucania w górę,

h_1 – maksymalne górne położenie piłki po podrzuceniu jej przez tenisistę,

h_2 – położenie piłki w chwili uderzenia o podłoże,

h_3 – maksymalne górne położenie piłki po odbiciu od podłoża.

Rysujemy wektory położenia i odczytujemy z osi ich zwrot i wartość:

$\vec{r}_1$ – wektor położenia piłki w maksymalnym górnym położeniu; współrzędna położenia piłki na osi jest dodatnia i wynosi $y_1 = 0,8$ m,

$\vec{r}_2$ – wektor położenia piłki w chwili uderzenia o podłoże; współrzędna położenia piłki na osi jest ujemna i wynosi $y_2 = -1,0$ m,

$\vec{r}_3$ – wektor położenia piłki w maksymalnym położeniu po odbiciu; współrzędna położenia piłki na osi jest ujemna i wynosi $y_3 = -0,1$ m.

Pytania i zadania

Uwaga do zadań 2.1.1–2.1.3. Wektory należy umieścić na osi liczbowej tak, aby początek pierwszego z nich znalazł się w punkcie zero tej osi.

- **2.1.1.** Dodawanie wektorów jest przemienne: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, ale odejmowanie wektorów nie jest przemienne $\vec{a} - \vec{b} \neq \vec{b} - \vec{a}$. Sprawdź graficznie słuszność tych twierdzeń dla danych wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, których długości wynoszą odpowiednio $|\vec{a}| = 3$ cm i $|\vec{b}| = 7$ cm.

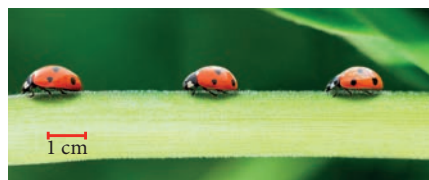


- ● **2.1.2.** Długości wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ wynoszą odpowiednio $|\vec{a}| = 2$ cm, $|\vec{b}| = 4$ cm i $|\vec{c}| = 6$ cm.

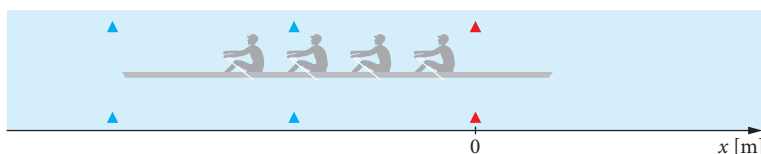


- Znajdź graficznie wektory: $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{e} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{f} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{g} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$.
- Podaj długości i współrzędne otrzymanych wektorów: $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$, $\vec{g}$.

- **2.1.3.** Na łodydze rośliny o długości $l = 10$ cm znajdują się 3 biedronki. Skorzystaj ze skali podanej na zdjęciu i podaj współrzędne położenia każdej z biedronek. Przyjmij początek układu współrzędnych z lewej strony zdjęcia, oś zwróconą w prawo.



- • **2.1.4.** Tor wioślarski jest wyznaczony przez boje. Przyjmij, że boje oznaczone na czerwono znajdują się w początku układu współrzędnych. Oblicz długość łodzi regatowej – czwórki podwójnej, jeżeli współrzędna dziubu łodzi wynosi $x_{dz} = 1,5$ m, a współrzędna rufy łodzi $x_r = -11,9$ m.



- • **2.1.5.** Samochód o długości $l_s = 480$ cm pokonał prostoliniowy odcinek drogi $l_d = 30$ m między dwoma skrzyżowaniami. Przyjmij jednowymiarowy układ współrzędnych, którego początek znajduje się w miejscu, z którego ruszył samochód (przód samochodu). Oś współrzędnych jest skierowana w kierunku, w którym samochód się poruszał.

- Wyznacz wektory położenia przodu, środka i tyłu samochodu w chwili, gdy przód samochodu dotarł do drugiego skrzyżowania.
- Podaj przykłady sytuacji, w których samochód można traktować jak punkt materialny. Zinterpretuj wyniki otrzymane w punkcie a), odnosząc się do pojęcia punktu materialnego.

- **2.1.6.** Piłeczka pingpongowa spadła z blatu stołu tenisowego i po odbiciu od podłogi wzniosła się na wysokość $h = 55$ cm. Wysokość stołu do ping-ponga $h_s = 76$ cm. Podaj współrzędną położenia piłeczki:

P2

- gdy leżała na blacie stołu tenisowego,
- w chwili zetknięcia z podłogą,
- gdy wzniosła się na wysokość maksymalną.

Skieruj oś liczbową pionowo w górę i przyjmij punkt zero osi na powierzchni stołu.

- **2.1.7.** Piłeczka pingpongowa, uderzona raketką, po odbiciu od stołu tenisowego wzniosła się na wysokość $h = 45$ cm nad poziomem stołu. Wysokość stołu do ping-ponga $h_s = 76$ cm. Określ współrzędną położenia piłeczki w najwyższym punkcie lotu:

P2

- względem stołu,
- względem podłogi, na której stoi stół.

Skieruj oś liczbową pionowo w górę.

2.2. Opis ruchu prostoliniowego

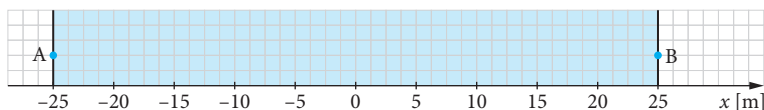
Podręcznik
rozdz. 2.2

■ Przykład 1.

Zawodnik trenuje na basenie sportowym o długości toru 50 m. Wyznacz współrzędną przemieszczenia zawodnika i drogę pokonaną po przepłynięciu jeśli startuje z punktu A:

- a) 4 długości basenu, b) $3\frac{1}{2}$ długości basenu.

Przyjmij, że punkt zero osi x układu współrzędnych znajduje się w połowie długości basenu, a oś jest zwrócona w prawo. A i B oznaczają ścianki basenu, których musi dotknąć zawodnik.



Rozwiązanie a)

Aby wyznaczyć przemieszczenie zawodnika, należy na osi liczbowej zaznaczyć jego współrzędne położenia początkowego i końcowego.

Zawodnik w chwili startu znajduje się przy ścianie A basenu, czyli współrzędna jego położenia początkowego wynosi $x_0 = -25$ m.

Po przepłynięciu czterech długości basenu zawodnik ponownie znajdzie się przy ścianie A basenu, czyli współrzędna jego położenia końcowego $x_k = -25$ m.

Współrzędną przemieszczenia obliczymy, odejmując od współrzędnej położenia końcowego współrzędną położenia początkowego:

$$\Delta x = x_k - x_0 \quad \Delta x = -25 \text{ m} - (-25 \text{ m}) = 0 \text{ m}$$

Drogę obliczymy, dodając 4 długości basenu:

$$s = 4 \cdot |AB| \quad s = 4 \cdot 50 \text{ m} = 200 \text{ m}$$

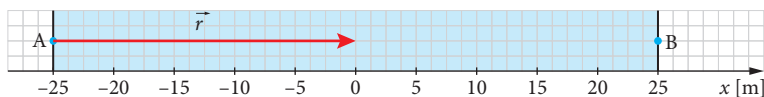
Odpowiedź: Położenie początkowe pokrywa się z położeniem końcowym, a więc przemieszczenie zawodnika wynosi zero, natomiast droga pokonana podczas pływania to 200 m.

Rozwiązanie b)

Postępujemy podobnie jak w punkcie a).

W chwili startu zawodnik znajduje się przy ścianie A basenu, czyli współrzędna jego położenia początkowego wynosi $x_0 = -25$ m.

Po przepłynięciu $3\frac{1}{2}$ długości basenu pływak znajduje się na środku basenu, czyli współrzędna jego położenia końcowego wynosi $x_k = 0$ m.



Obliczamy współrzędną przemieszczenia:

$$\Delta x = x_k - x_0 \quad \Delta x = 0 \text{ m} - (-25 \text{ m}) = 25 \text{ m}$$

Obliczamy drogę:

$$s = 3,5 \cdot |\text{AB}| \quad s = 3,5 \cdot 50 \text{ m} = 175 \text{ m}$$

Odpowiedź: Końcowe położenie zawodnika znajduje się w punkcie o współrzędnej $x_k = 0 \text{ m}$, współrzędna wektora przemieszczenia zawodnika wynosi 25 m , $\Delta \vec{x} = [25 \text{ m}]$, co oznacza, że wektor przemieszczenia łączący położenie początkowe z końcowym ma zwrot zgodny ze zwrotem przyjętej osi układu współrzędnych. Pokonana przez zawodnika droga $s = 175 \text{ m}$.

Przykład 2.

Pasażer autobusu jadącego po prostym odcinku drogi notował co 10 minut liczby, które widział na mijanych słupkach kilometrowych. Liczby zapisał w przygotowanej tabeli:

Nr pomiaru	1	2	3	4	5	6	7	8
Nr słupka kilometrowego	72	86	100	114	114	126	138	150
Współrzędna położenia autobusu x [km]								
Czas jazdy autobusu [min]	0	10	20	30	40	50	60	70

Przyjmij, że w chwili pierwszego pomiaru współrzędna położenia autobusu to $x_0 = 0 \text{ km}$, i uzupełnij drugi wiersz tabeli, wpisując położenia autobusu co kolejne 10 minut.

Narysuj wykres zależności położenia autobusu od czasu jazdy $x(t)$.

Wyznacz współrzędną przemieszczenia i drogę autobusu:

- po pierwszych 30 min,
- między 30 min a 40 min,
- między 40 min a 70 min jazdy autobusu.

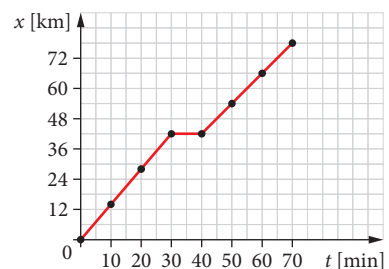
Rozwiązanie

Numer słupka kilometrowego oznacza liczbę pokonanych kilometrów trasy. Współrzędne położenia autobusu dla danego pomiaru obliczymy, gdy od numeru słupka kilometrowego dla danego pomiaru odejmiemy numer słupka kilometrowego pierwszego pomiaru.

Nr pomiaru	1	2	3	4	5	6	7	8
Nr słupka kilometrowego	72	86	100	114	114	126	138	150
Współrzędna położenia autobusu x [km]	0	14	28	42	42	54	66	78
Czas jazdy autobusu [min]	0	10	20	30	40	50	60	70

Rysujemy układ współrzędnych $x(t)$ i dobieramy odpowiednie jednostki na osiach. Następnie nanosimy punkty odpowiadające położeniom autobusu zamieszczonym w tabeli.

Punkty łączymy liniami prostymi. Zauważmy, że wykres składa się z trzech odcinków.



- a) Z wykresu lub z tabeli odczytujemy współrzędną położenia początkowego: $x_0 = 0$ km, i położenia po 30 min ruchu: $x_3 = 42$ km. Współrzędną przemieszczenia obliczamy, odejmując od współrzędnej położenia końcowego współrzędną położenia początkowego:

$$\Delta x_1 = x_3 - x_0 \quad \Delta x_1 = 42 \text{ km} - 0 \text{ km} = 42 \text{ km}$$

Odpowiedź: Przemieszczenie i droga po pierwszych 30 minutach ruchu były równe: $\Delta x_1 = 42$ km i $s_1 = 42$ km.

- b) Z wykresu lub z tabeli odczytujemy współrzędną położenia początkowego, czyli współrzędną położenia po 30 min ruchu $x_3 = 42$ km, i współrzędną położenia końcowego po 40 min ruchu $x_4 = 42$ km. Współrzędną przemieszczenia obliczamy, odejmując od współrzędnej położenia końcowego współrzędną położenia początkowego:

$$\Delta x_2 = x_4 - x_3 \quad \Delta x_2 = 42 \text{ km} - 42 \text{ km} = 0 \text{ km}$$

Odpowiedź: Przemieszczenie i droga między 30 a 40 minutą wynosiły: $\Delta x_2 = 0$ i $s_2 = 0$ km, czyli autobus się nie poruszał.

- c) Z wykresu lub z tabeli odczytujemy współrzędną położenia początkowego po 40 min ruchu $x_4 = 42$ km i współrzędną położenia końcowego po 70 min ruchu $x_7 = 78$ km. Współrzędną przemieszczenia obliczamy analogicznie jak w punktach a) i b):

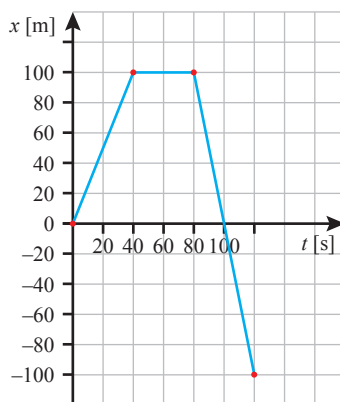
$$\Delta x_3 = x_7 - x_4 \quad \Delta x_3 = 78 \text{ km} - 42 \text{ km} = 36 \text{ km}$$

Odpowiedź: Przemieszczenie i droga pokonana między 40 a 70 minutą wynoszą: $\Delta x_3 = 36$ km, $s_3 = 36$ km.

■ Przykład 3.

Na wykresie przedstawiono zależność położenia ciała od czasu $x(t)$.

- a) Odczytaj z wykresu, ile wynosi współrzędną położenia ciała po 40 s, 80 s, 120 s, licząc od początku trwania ruchu.
- b) Oblicz współrzędną przemieszczenia w kolejnych 40-sekundowych przedziałach czasu oraz określ, czy w danym przedziale czasu ciało poruszało się zgodnie ze zwrotem osi układu współrzędnych czy przeciwnie do niego.
- c) Oblicz wartość całkowitego przemieszczenia i całkowitą drogę przebytą w ciągu 120 s ruchu.



Rozwiązanie

- a) Odczytane z wykresu współrzędne położenia wynoszą:
po 40 s: $x_1 = 100$ m, po 80 s: $x_2 = 100$ m, po 120 s: $x_3 = -100$ m

- b)** Współrzedną przemieszczenia w kolejnych takich samych przedziałach czasu obliczamy, odejmując od współrzednej końca współrzedną początku.

W przedziale czasu od 0 s do 40 s: $\Delta x_1 = x_1 - x_0 = 100 \text{ m} - 0 \text{ m} = 100 \text{ m}$.

W przedziale czasu od 40 s do 80 s: $\Delta x_2 = x_2 - x_1 = 100 \text{ m} - 100 \text{ m} = 0 \text{ m}$.

W przedziale czasu od 80 s do 120 s: $\Delta x_3 = x_3 - x_2 = -100 \text{ m} - 100 \text{ m} = -200 \text{ m}$.

- c)** Całkowite przemieszczenie w czasie $\Delta t = 120 \text{ s}$ obliczamy następująco:

$$\Delta x_4 = x_3 - x_0 = -100 \text{ m} - 0 \text{ m} = -100 \text{ m}$$

Drogę obliczamy, sumując wartości bezwzględne przemieszczeń w poszczególnych przedziałach czasu:

$$s = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3| = 100 \text{ m} + 0 \text{ m} + 200 \text{ m} = 300 \text{ m}$$

Odpowiedź:

- a)** Współrzedne położenia po 40 s, 80 s, 120 s ruchu wynosiły odpowiednio: $x_1 = 100 \text{ m}$, $\Delta x_2 = 100 \text{ m}$, $x_3 = -100 \text{ m}$.
- b)** Współrzedne przemieszczenia w kolejnych 40 s przedziałach czasu wynoszą: $\Delta x_1 = 100 \text{ m}$, $\Delta x_2 = 0 \text{ m}$, $\Delta x_3 = -200 \text{ m}$.
- c)** Całkowite przemieszczenie i droga w ciągu $\Delta t = 120 \text{ s}$ wynoszą odpowiednio: $\Delta x_4 = -100 \text{ m}$, $s = 300 \text{ m}$.

Pytania i zadania

P1

- 2.2.1.** Chłopiec pływa w basenie wzdłuż toru o długości $l = 10 \text{ m}$. Wyznacz współrzedną przemieszczenia i drogę pokonaną przez chłopca po przepłynięciu 3 długości basenu. Przyjmij punkt zero osi układu współrzędnych:
 - a)** przy ścianie, od której rozpoczął pływanie,
 - b)** w połowie długości basenu.

P1

- 2.2.2.** Krążek uderzony przez hokeistę przebył po lodzie drogę $s = 4 \text{ m}$ i po odbiciu od bandy zatrzymał się 2 m przed hokeistą. Oblicz współrzedną położenia końcowego, współrzedną wektora przemieszczenia i całkowitą drogę krążka hokejowego. Przyjmij, że krążek poruszał się prostoliniowo wzdłuż osi skierowanej od hokeisty do bandy, a punkt zero osi to miejsce, w którym stał hokeista.

P2

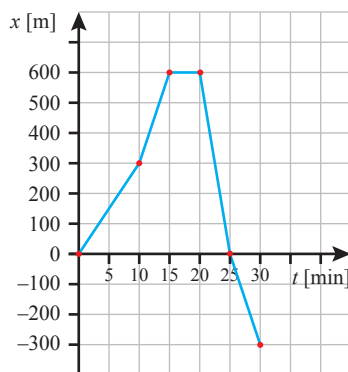
- 2.2.3.** Rowerzysta jechał prostoliniowym odcinkiem drogi. Słupek kilometrowy z napisem 5 przyjął jako początek układu współrzędnych. Zapis kolejnych mijanych słupków kilometrowych po jednakowych 10-minutowych przedziałach czasu przedstawiono w tabeli.

Nr słupka kilometrowego	5	9	13	17	17	13	9	5
Współrzędna położenia rowerzysty x [km]								
Czas jazdy rowerzysty [min]	0	10	20	30	40	50	60	70

- Uzupełnij drugi wiersz tabeli, wpisując położenia jadącego rowerzysty.
- Narysuj wykres zależności położenia rowerzysty od czasu jazdy $x(t)$.
- Wyznacz współrzędną przemieszczenia i drogę rowerzysty: po pierwszych 30 minutach, między 30 a 40 minutą ruchu, po 70 minutach ruchu.

- P3** 2.2.4. Ruch spychacza pracującego przy budowie jezdni przedstawiono na wykresie zależności współrzędnej położenia pojazdu od czasu.

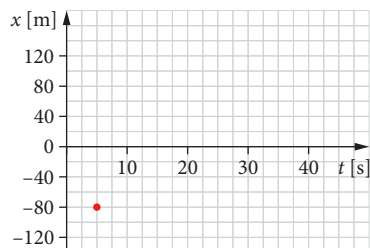
- Odczytaj z wykresu i zapisz współrzędne położenia i współrzędne wektora przemieszczenia spychacza po 15 min, 20 min, 25 min i 30 min, licząc od początku trwania ruchu.
- Oblicz wartość całkowitego przemieszczenia i całkowitą drogę spychacza w ciągu 30 min.



- 2.2.5. Deskorolkarz porusza się po prostym odcinku ścieżki asfaltowej. Na rysunku zaznaczono jego położenie w chwili $t = 5$ s.

- Narysuj kolejne fragmenty wykresu, jeśli wiadomo, że w kolejnych następujących po sobie przedziałach czasu: $\Delta t_1 = 10$ s, $\Delta t_2 = 15$ s, $\Delta t_3 = 5$ s, $\Delta t_4 = 10$ s, współrzędne wektorów przemieszczenia wynoszą odpowiednio: $\Delta x_1 = 120$ m, $\Delta x_2 = 80$ m, $\Delta x_3 = 0$ m, $\Delta x_4 = -120$ m. Przyjmij, że w poszczególnych przedziałach czasu położenie deskorolkarza jest zależnością liniową czasu.
- Wykaż, że przemieszczenie całkowite jest sumą przemieszczeń cząstkowych:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4.$$



- 2.2.6. Lokomotywa stoi 10 m przed znakiem kolejowym. Maszynista zaczyna manewrować lokomotywą, aby ustawić wagony przy platformie załadunkowej. Kolejne współrzędne przemieszczeń mają wartości $\Delta x_1 = -40$ m, $\Delta x_2 = 25$ m, $\Delta x_3 = -5$ m. Oblicz współrzędną całkowitego przemieszczenia lokomotywy, jej położenie po zakończeniu manewru i drogę, jaką w tym czasie przejechała. Przyjmij, że znak kolejowy znajduje się w początku układu współrzędnych, a współrzędna początkowego położenia lokomotywy jest dodatnia.

2.3. Prędkość w ruchu prostoliniowym

Podręcznik
rozdz. 2.3 i 2.5

■ Przykład 1.

Monika trenowała chód sportowy. W ramach rozgrzewki przed treningiem wykonywała ćwiczenie polegające na 10-krotnym powtórzeniu sekwencji 5 kroków do przodu i 6 kroków do tyłu. Łączny czas 10 powtórzeń po 5 kroków do przodu wyniósł $t_1 = 0,2$ min, a łączny czas 10 powtórzeń po 6 kroków do tyłu wynosi $t_2 = 0,4$ min. Długość kroku Moniki była taka sama zarówno przy poruszaniu się do przodu, jak i do tyłu i wynosiła $l = 40$ cm.

- W jednowymiarowym układzie współrzędnych o początku w miejscu rozpoczęcia treningu narysuj wektory: przemieszczenia Moniki do przodu, jej przemieszczenia do tyłu, całkowitego jej przemieszczenia po jednym powtórzeniu ćwiczenia oraz wektor całkowitego przemieszczenia dziewczyny po 10 powtórzeniach.
- Oblicz współrzędną wektora prędkości średniej po 10 powtórzeniach.
- Oblicz średnią wartość prędkości (szybkość) Moniki w trakcie rozgrzewki.

Porównaj wartość wektora prędkości średniej ze średnią wartością prędkości.

Wyniki obliczonych prędkości podaj w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Rozwiązanie

- Aby narysować wektory wymienione w treści zadania, musimy wyznaczyć ich współrzędne. Długość kroku ma wartość zawsze dodatnią, ale przemieszczenie o jeden krok będzie mieć współrzędną dodatnią lub ujemną w zależności od tego, czy ruch nastąpi zgodnie ze zwrotem osi układu współrzędnych czy przeciwnie do niego. Przyjmijmy, że ruch do przodu był zgodny ze zwrotem osi. Zatem współrzędna pojedynczego kroku do przodu $\Delta \vec{x}_p = [l] = [40 \text{ cm}]$, a współrzędna pojedynczego kroku do tyłu $\Delta \vec{x}_t = [-l] = [-40 \text{ cm}]$.

Współrzędną wektora przemieszczenia do przodu $\vec{r}_p$ wyznaczamy, mnożąc liczbę kroków wykonanych do przodu przez współrzędną kroku do przodu:

$$\vec{r}_p = [5 \cdot \Delta x_p] = [5 \cdot 40 \text{ cm}] = [2 \text{ m}]$$

Współrzędną wektora przemieszczenia do tyłu $\vec{r}_t$ wyznaczamy, mnożąc liczbę kroków wykonanych do tyłu przez współrzędną kroku do tyłu:

$$\vec{r}_t = [6 \cdot \Delta x_t] = [6 \cdot (-40 \text{ cm})] = [-2,4 \text{ m}]$$

Współrzędna całkowitego przemieszczenia po jednym powtórzeniu ćwiczenia będzie sumą przemieszczeń do przodu i do tyłu:

$$\Delta \vec{r}_1 = \vec{r}_p + \vec{r}_t = [2 \text{ m} + (-2,4 \text{ m})] = [-0,4 \text{ m}]$$

Wektor całkowitego przemieszczenia po 10 powtórzeniach będzie miał współrzędną równą:

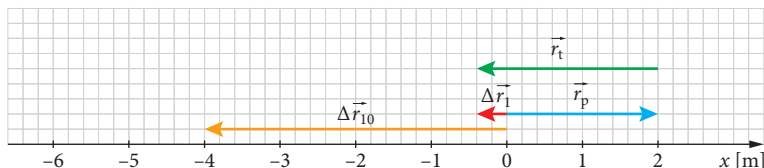
$$\Delta \vec{r}_{10} = [10 \cdot \Delta r_1] = [-4 \text{ m}]$$

Odpowiedź: Współrzędna wektora przemieszczenia do przodu w jednym powtórzeniu ćwiczenia $\vec{r}_p = [2 \text{ m}]$.

Współrzędna wektora przemieszczenia do tyłu w jednym powtórzeniu ćwiczenia $\vec{r}_t = [-2,4 \text{ m}]$.

Współrzędna całkowitego przemieszczenia po jednym powtórzeniu ćwiczenia $\Delta\vec{r}_1 = [-0,4 \text{ m}]$.

Wektor całkowitego przemieszczenia po 10 powtórzeniach ma współrzędną $\Delta\vec{r}_{10} = [-4 \text{ m}]$.



b) Współrzędną wektora prędkości średniej obliczamy ze wzoru:

$$\vec{v}_x = \frac{\Delta\vec{r}_{10}}{\Delta t}$$

gdzie $\Delta t = t_1 + t_2$.

Wstawiamy do wzoru dane:

$$v_x = \frac{-4 \text{ m}}{(0,2 \text{ min} + 0,4 \text{ min})} = \frac{-4 \text{ m}}{0,6 \text{ min}} = \frac{-4 \cdot 10^{-3} \text{ km}}{(0,6 \cdot \frac{1}{60} \text{ h})} = -0,4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Odpowiedź: Współrzędna wektora prędkości średniej jest ujemna i wynosi $v_x = -0,4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Wektor prędkości średniej ma zwrot przeciwny do osi układu współrzędnych.

c) Aby obliczyć **średnią wartość prędkości** (szybkość) Moniki musimy obliczyć całkowitą drogę i całkowity czas. Ponieważ długość kroku do przodu i do tyłu była taka sama, możemy zapisać:

$$s = 10 \cdot (5 + 6) \cdot l = 10 \cdot 11 \cdot 0,4 \text{ m} = 44 \text{ m}$$

Całkowity czas:

$$\Delta t = t_1 + t_2 = 0,2 \text{ min} + 0,4 \text{ min} = 0,6 \text{ min}$$

Średnią wartość prędkości (szybkość) obliczamy ze wzoru:

$$v_{\text{sr}} = \frac{s_c}{t_c}$$

Po podstawieniu danych otrzymamy:

$$v_{\text{sr}} = \frac{44 \text{ m}}{0,6 \text{ min}} = \frac{44 \cdot 10^{-3} \text{ km}}{0,6 \cdot \frac{1}{60} \text{ h}} = 4,4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Wartość prędkości średniej to wartość bezwzględna współrzędnej wektora prędkości średniej obliczonej w punkcie b): $|v_x| = 0,4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Odpowiedź: Średnia wartość prędkości (szybkość) wynosi $v_{\text{sr}} = 4,4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a wartość prędkości średniej $|v_x| = 0,4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Zauważmy, że średnia wartość prędkości (szybkość) **jest wielkością skalarną**, ponieważ droga jest skalarem. Natomiast prędkość średnia jest wektorem, który posiada kierunek, zwrot i **wartość**.

■ Przykład 2.

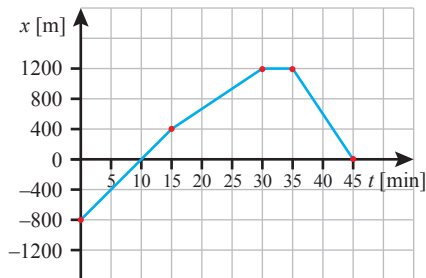
Wykres przedstawia zależność współrzędnej położenia od czasu $x(t)$ dla kuracjusza spacerującego po ścieżce w parku zdrojowym. Za punkt zero na osi x przyjęto Pijalnię Wód Mineralnych „Celina”.

Kuracjusz wyruszył na spacer ścieżką, która na odcinku $s = 2$ km biegła prostoliniowo. W chwili początkowej $t_0 = 0$ jego współrzędna położenia wynosiła $x_p = -800$ m.

Oblicz:

- całkowite przemieszczenie i wartość prędkości średniej kuracjusza,
- całkowitą drogę, jaką przeszedł kuracjusz i średnią wartość jego prędkości (szybkość średnią) kuracjusza.

Wartość prędkości średniej i średnią wartość prędkości podaj w podstawowych jednostkach układu SI.



Rozwiązanie

- Z wykresu odczytujemy współrzędną położenia początkowego $x_p = -800$ m i współrzędną położenia końcowego $x_k = 0$ m.

Przemieszczenie kuracjusza obliczymy, odejmując od współrzędnej x_k współrzędną x_p :

$$\Delta x = x_k - x_p = 0 - (-800) = 800 \text{ m}$$

Czas spaceru odczytujemy z wykresu:

$$\Delta t = 45 \text{ min} = 2700 \text{ s}$$

Wartość prędkości średniej jest zdefiniowana wzorem:

$$|\vec{v}| = \frac{|\Delta \vec{x}|}{\Delta t}$$

Zatem:

$$|\vec{v}_x| = \frac{800 \text{ m}}{2700 \text{ s}} = 0,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Odpowiedź: Współrzędna przemieszczenia wynosi $\Delta x = 800$ m i jest dodatnia, tzn. wektor przemieszczenia ma zwrot zgodny z wybraną osią układu współrzędnych. Wektor prędkości średniej ma zwrot zgodny ze zwrotem przemieszczenia, a jego wartość wynosi $0,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

- Na podstawie wykresu obliczamy całkowitą drogę kuracjusza przebytą w ciągu 45 min:

$$s_c = 2000 \text{ m} + 0 \text{ m} + 1200 \text{ m} = 3200 \text{ m}$$

Średnią wartość prędkości określa wzór:

$$v_{sr} = \frac{s_c}{t_c} \qquad v_{sr} = \frac{3200 \text{ m}}{2700 \text{ s}} = 1,19 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Odpowiedź: Całkowita droga kuracjusza podczas spaceru wynosiła $s_c = 3200$ m. Kuracjusz poruszał się ze średnią wartością prędkości (szybkością średnią) $v_{sr} = 1,19 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

■ Przykład 3.

Podczas treningu terenowego kolarz jedzie początkowo po poziomym odcinku drogi o długości s , a następnie wjeżdża na wzniesienie i ponownie jedzie po poziomym terenie. Dwa poziome odcinki trasy o tej samej długości s kolarz pokonuje z taką samą prędkością $v_1 = 54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Odcinek trasy pod górę, który jest dwa razy dłuższy niż odcinek poziomy, kolarz pokonuje z prędkością $v_2 = 18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Oblicz średnią wartość prędkości kolarza na całej trasie.



Rozwiązanie

Korzystamy ze wzoru na średnią wartość prędkości:

$$v_{\text{sr}} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{t_1 + t_2 + t_3} \quad (1)$$

Droga całkowita wynosi:

$$s_1 + s_2 + s_3 = 4s$$

Poszczególne czasy obliczamy ze wzoru na drogę w ruchu jednostajnym. $s = vt$, skąd:

$$t_1 = \frac{s}{v_1}, \quad t_2 = \frac{2s}{v_2}, \quad t_3 = \frac{s}{v_1}$$

Drogę i wyznaczone czasy wstawiamy do wzoru (1) i otrzymujemy:

$$v_{\text{sr}} = \frac{4s}{\frac{s}{v_1} + \frac{2s}{v_2} + \frac{s}{v_1}} = \frac{4s}{\frac{2s}{v_1} + \frac{2s}{v_2}} = \frac{4sv_1v_2}{2s(v_1 + v_2)} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$$

Podstawiamy wartości liczbowe:

$$v_{\text{sr}} = \frac{2 \cdot 54 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 18 \frac{\text{km}}{\text{h}}}{54 \frac{\text{km}}{\text{h}} + 18 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 27 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Odpowiedź: Średnia wartość prędkości kolarza na całej trasie wynosiła $27 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Uwaga. Zauważmy, że do wyliczenia średniej wartości prędkości nie była konieczna znajomość długości pokonanej drogi.

Pytania i zadania

- **2.3.1.** W ramach przygotowań do treningu trener polecił zawodniczce wykonać sekwencję kroków: 4 kroki do przodu i 7 kroków do tyłu. Sekwencję miała powtórzyć 15 razy. Przyjmij długość kroku dziewczyny $l = 40 \text{ cm}$. Całkowity czas tego ćwiczenia wynosił $t_c = 0,94 \text{ min}$. Wybierz początek układu współrzędnych w miejscu rozpoczęcia treningu. Oblicz:

P1

- współrzedną przemieszczenia dziewczyny po wykonaniu całego ćwiczenia,
- współrzedną wektora prędkości średniej,
- średnią wartość prędkości (szybkość) trenującej dziewczyny.

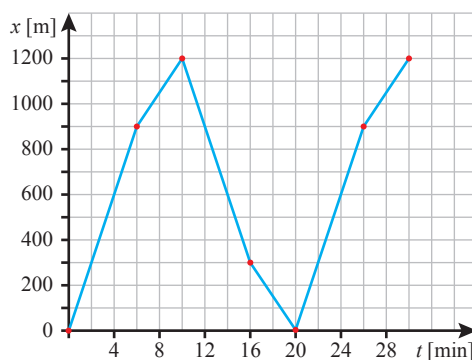
Wyniki obliczonych prędkości podaj w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

- P1** 2.3.2. Kajakarz trenował na prostoliniowym odcinku rzeki o długości $l = 0,5$ km, który przepłynął 5 razy z prądem i 4 razy pod prąd. Płynąc z prądem, odcinek 0,5 km pokonywał w czasie $t_1 = 6$ min, a płynąc pod prąd w czasie $t_2 = 15$ min. Pierwszy odcinek pokonał z prądem rzeki. Przyjmij początek układu współrzędnych w miejscu rozpoczęcia treningu. Oblicz:
- współrzedną przemieszczenia kajakarza po zakończeniu pływania,
 - współrzedną wektora prędkości średniej i średnią wartość prędkości (szybkość) kajakarza.

Informacja do zadań 2.3.3–2.3.5

Kasia zaczęła uprawiać marszobieg. Treningi trwały po 30 minut. Po każdych 10 minutach treningu dziewczyna zawracała. Sensor biegowy umieszczony w podeszwie jej buta wskazywał prędkość Kasi przy chodzeniu $v_{ch} = 1,25 \frac{m}{s}$, a przy bieganiu $v_b = 2,5 \frac{m}{s}$. W każdym kolejnym treningu dziewczyna stopniowo wydłużała czas biegu, a skracała czas marszu.

- P2** 2.3.3. Przebieg jednego z treningów przedstawiono na wykresie. Punkt zero osi układu współrzędnych przyjęto w chwili startu biegaczki dla $t_0 = 0$. Strome odcinki wykresu odpowiadają biegowi, a łagodne odcinki – marszowi.
- Odczytaj z wykresu, ile trwał bieg, a ile marsz podczas pierwszych 10 minut treningu.
 - Oblicz, ile wynoszą: całkowite przemieszczenie biegaczki i wartość jej prędkości średniej.
 - Oblicz całkowitą pokonaną przez Kasię drogę i średnią wartość prędkości Kasi.



- P2** 2.3.4. Pierwszy trening Kasi to cykl 4 min biegu i 6 min marszu powtórzony trzykrotnie.
- Sporządź wykres $x(t)$ ilustrujący zależność współrzędnej położenia biegaczki od czasu. Przyjmij, że współrzędna położenia w chwili startu $t_0 = 0$ to punkt zero osi układu współrzędnych.
 - Oblicz średnią wartość prędkości dziewczyny w czasie treningu.
- P2** 2.3.5. Ostatni trening to cykl 9 min biegu i 1 min chodu wykonany trzykrotnie. Oblicz średnią wartość prędkości biegaczki podczas tego treningu.
- P3** 2.3.6. Biegacz pokonał pierwszy odcinek trasy z prędkością $v_1 = 2,5 \frac{m}{s}$, a drugi o tej samej długości z prędkością $v_2 = 3 \frac{m}{s}$. Oblicz średnią wartość jego prędkości na całej trasie.
- P3** 2.3.7. Przez pierwsze $t_1 = 30$ min sportowiec biegł z prędkością $v_1 = 2,5 \frac{m}{s}$, a przez następne $t_2 = 30$ min biegł z prędkością $v_2 = 3 \frac{m}{s}$. Oblicz średnią wartość jego prędkości na całej trasie. Porównaj otrzymany wynik z wynikiem uzyskanym w zadaniu 2.3.7. Wyciągnij wnioski.
- P3** 2.3.8. Kierowca przebył odcinek trasy o długości $l_1 = 90$ km w czasie $t_1 = 45$ min. W jakim czasie t_2 i z jaką średnią wartością prędkości $v_{śr}$ kierowca przejechał następny odcinek o długości $l_2 = 180$ km, jeżeli pokonał całą trasę ze średnią wartością prędkości $v_{śr} = 90 \frac{km}{h}$?

2.4. Ruch jednostajny prostoliniowy

Podręcznik
rozdz. 2.4

■ Przykład 1.

Mała modelarska rakietka ma zostać odpalona za pomocą lontu, który spala się powoli i równomiernie z prędkością $v_1 = 1 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$. Jaką co najmniej długość powinien mieć lont, by po zapaleniu go można było szybkim krokiem oddalić się na bezpieczną odległość $s = 20 \text{ m}$? Przyjmij, że człowiek porusza się ze stałą prędkością $v_2 = 7,2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Rozwiązanie

Korzystamy ze wzoru na drogę w ruchu jednostajnym:

$$s = v \cdot t$$

Układamy równania:

droga płomienia wzdłuż lontu (długość lontu): $l = v_1 \cdot t_1$

droga przebyta przez człowieka: $s = v_2 \cdot t_2$

Czas palenia lontu musi być równy czasowi niezbędnemu na oddalenie się człowieka na bezpieczną odległość: $t_1 = t_2$.

Możemy zatem zapisać równanie:

$$\frac{l}{v_1} = \frac{s}{v_2}$$

które przekształcamy tak, aby obliczyć długość lontu:

$$l = \frac{v_1 \cdot s}{v_2}$$

Dane liczbowe są podane w różnych jednostkach. Zamieniamy wszystkie jednostki na jednostki układu SI:

$$s = 20 \text{ m}$$

$$v_1 = 1 \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 0,01 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2 = 7,2 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

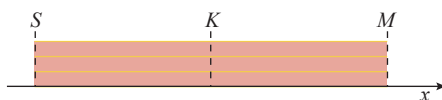
A następnie podstawiamy do wzoru:

$$l = 0,01 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{20 \text{ m}}{2 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0,1 \text{ m} = 10 \text{ cm}$$

Odpowiedź: Bezpieczna długość lontu wynosi $l = 10 \text{ cm}$.

■ Przykład 2.

Sportowiec trenuje bieg na dystansie 100 m. Na prostoliniowym odcinku bieżni zaznaczono start S , punkt kontrolny K i metę M . Napisz równanie ruchu sportowca, jeśli biegnie on z prędkością $\vec{v}$, a oś współrzędnych skierowana jest w prawo oraz:



- a) w chwili początkowej sportowiec znajdował się w punkcie S i biegł w kierunku mety, a początek układu współrzędnych też jest w punkcie S ,
- b) w chwili początkowej sportowiec znajdował się w punkcie S i biegł w kierunku mety, a początek układu współrzędnych jest w punkcie M ,
- c) w chwili początkowej sportowiec znajdował się w punkcie M i biegł w kierunku startu, a początek układu współrzędnych jest w punkcie K .

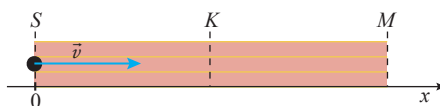
Rozwiązanie

Ponieważ oś układu współrzędnych jest skierowana wzdłuż toru ruchu sportowca, to równanie ruchu przyjmuje postać równania współrzędnej:

$$x = x_0 + v_x t,$$

gdzie $\vec{v}_x = \vec{v}$ i $\vec{x}_0$ to wektor położenia początkowego. Dalej rozpatrujemy równanie dla wartości wskazanych w poszczególnych punktach zadania.

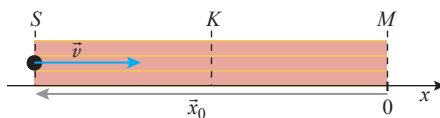
- a) Przyjmujemy początek układu współrzędnych w punkcie oznaczającym miejsce, gdzie sportowiec rozpoczął bieg (S), stąd długość wektora położenia początkowego: $x_0 = 0$. Zwrot wektora prędkości jest zgodny ze zwrotem osi x i równanie współrzędnej przyjmuje postać:



$$x = vt$$

Odpowiedź: Równanie współrzędnej sportowca ma postać $x = vt$.

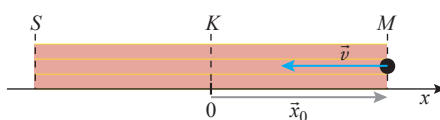
- b) Przyjmujemy początek układu współrzędnych w punkcie M i rysujemy wektor położenia początkowego łączący punkty M i S (gdzie S jest miejscem, w którym sportowiec rozpoczął bieg). Na podstawie treści zadania i rysunku wiemy, że: $x_0 = -100$ m, a zwrot wektora położenia początkowego jest przeciwny do zwrotu osi x , natomiast zwrot wektora prędkości jest zgodny z osią x . Stąd równanie współrzędnej przyjmuje postać:



$$x = -100 + vt.$$

Odpowiedź: Równanie współrzędnej sportowca ma postać $x = -100 + vt$.

- c) Przyjmujemy początek układu współrzędnych w punkcie K i rysujemy wektor położenia początkowego łączący punkty K i M (gdzie M jest miejscem, w którym sportowiec rozpoczął bieg). Na podstawie treści zadania i rysunku wiemy, że: $x_0 = 50$ m, a zwrot wektora położenia początkowego jest zgodny ze zwrotem osi x , natomiast zwrot wektora prędkości jest przeciwny do zwrotu osi x . Stąd równanie współrzędnej przyjmuje postać:



$$x = 50 - vt$$

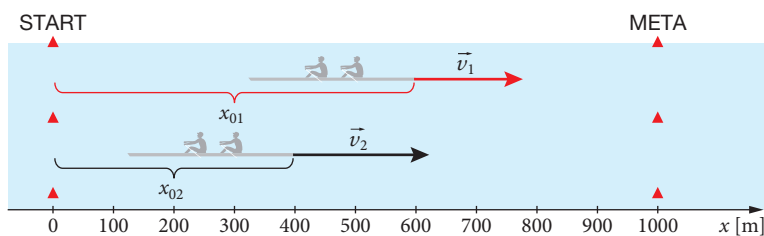
Odpowiedź: Równanie współrzędnej sportowca ma postać $x = 50 - vt$.

■ Przykład 3.

Na torach regatowych odbywały się zawody wioślarskie dwójek podwójnych (załoga dwuosobowa, każdy z zawodników wiosłuje dwoma wiosłami) na dystansie $d = 1000$ m. Jeden z widzów zaczął mierzyć czas w chwili, gdy pierwsza załoga znajdowała się 600 m od linii startu, a druga załoga pokonała dystans 400 m. Tempo wiosłowania obu załóg było stałe. Prędkość pierwszej łodzi to $v_1 = 14,4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a drugiej łodzi to $v_2 = 18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Przyjmij włączenie stopera przez widza za chwilę $t_0 = 0$.



- Ułóż równania ruchu obu łodzi.
- W jednym układzie współrzędnych sporządź wykresy zależności współrzędnej położenia od czasu dla obu łodzi.
- Z otrzymanych wykresów odczytaj, która z łodzi zwycięży w tych zawodach i jaki przedział czasu będzie dzielić drugą załogę od zwycięzcy.



Rozwiązanie

- Korzystamy z ogólnego wzoru na równanie ruchu:

$$x = x_0 + vt$$

Ustalamy parametry.

Dla pierwszej łodzi współrzędna położenia początkowego jest zgodna ze zwrotem osi x i wynosi $x_{01} = 600$ m. Wektor prędkości jest zgodny z osią x , współrzędna prędkości jest dodatnia: $v_1 = 14,4 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Dla drugiej łodzi współrzędna położenia początkowego jest zgodna z osią x i wynosi $x_{02} = 400$ m. Wektor prędkości jest zgodny z osią x , współrzędna prędkości jest dodatnia:

$$v_2 = 18 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Zapisujemy równania (wielkości w równaniach zapisujemy w jednostkach układu SI):

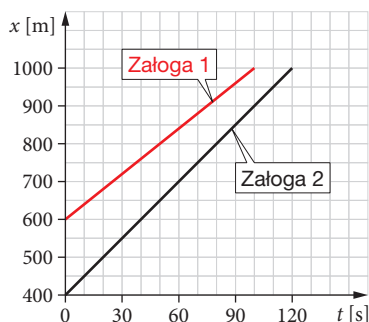
$$x_1 = x_{01} + v_1 t, \quad \text{zatem} \quad x_1 = 600 + 4t$$

$$x_2 = x_{02} + v_2 t, \quad \text{zatem} \quad x_2 = 400 + 5t$$

- b) Sporządzamy tabelę. W pierwszym wierszu zapisujemy czas co 20 s, a w wierszach drugim i trzecim – położenia obu łodzi obliczone dla kolejnych chwil.

t [s]	0	20	40	60	80	100	120
x_1 [m]	600	680	760	840	920	1000	
x_2 [m]	400	500	600	700	800	900	1000

Sporządzamy wykres $x(t)$ i nanosimy punkty z tabeli dla dwóch łodzi.



- c) Z wykresu odczytujemy, że załoga pierwszej łodzi osiągnie 1000 m w chwili $t_1 = 100$ s, a załoga drugiej łodzi dotrze do mety w chwili $t_2 = 120$ s, a więc 20 sekund później.

Pytania i zadania

- P1** 2.4.1. Prędkość dźwięku w powietrzu to $v = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Z jaką prędkością (w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$) powinien poruszać się samolot odrzutowy, aby przekroczyć barierę dźwięku?
- P1** 2.4.2. Na placu Zamkowym w Warszawie odbywa się koncert transmitowany przez rozgłośnię radiową. Kto usłyszy wcześniej głos piosenkarza: słuchacz radiowy mieszkający w odległości $x_1 = 500$ km od Warszawy czy bezpośredni uczestnik koncertu stojący w odległości $x_2 = 50$ m od estrady? Prędkość dźwięku w powietrzu to $v_{\text{dz}} = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a prędkość fal radiowych $v_f = 3 \cdot 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}}$. Pomiń opóźnienia powstające w urządzeniach elektronicznych.
- P1** 2.4.3. Kanał La Manche można przebyć promem lub pociągiem. Ile czasu trwa pokonanie $s = 34$ km kanału pociągiem, który porusza się z prędkością $v_1 = 160 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a ile promem, który rozwija prędkość $v_2 = 9$ węzłów?
Wskazówka. Przelicz węzły na jednostki układu SI.
- P2** 2.4.4. Położenie chłopca podczas biegu na prostoliniowym odcinku bieżni jest opisane równaniem: $x = -50 + 4t$. Wielkości w równaniu podane są w jednostkach układu SI.

 - a) Podaj współrzędną położenia początkowego (w chwili $t_0 = 0$) i prędkość chłopca.
 - b) Oblicz, po jakim czasie współrzędną położenia chłopca wyniesie zero?
 - c) Oblicz, ile wyniesie współrzędną położenia chłopca po czasie $t = 25$ s i jaką w tym czasie przebędzie on drogę?

• • • **2.4.5.** Jazdę rowerzysty ruchem jednostajnym na prostoliniowym odcinku drogi opisuje równanie ruchu: $x = 200 - 8t$. Wielkości w równaniu są podane w jednostkach układu SI.

P2

- Podaj współrzędną położenia początkowego (w chwili $t_0 = 0$) i prędkość rowerzysty.
- Po jakim czasie współrzędna jego położenia wyniesie $x = 0$ m.
- W jakim czasie rowerzysta przejedzie drogę $s = 400$ m i jaka będzie współrzędna jego położenia końcowego.

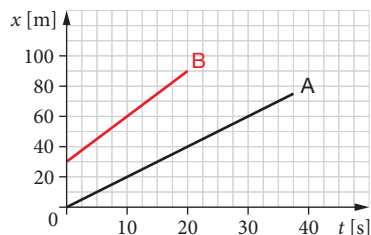
• **2.4.6.** Równanie ruchu biegacza zapisano jako $x = -200 + 5t$. Wielkości w równaniu są podane w jednostkach układu SI. Na podstawie równania:

P2

- podaj współrzędną położenia początkowego (w chwili $t_0 = 0$) i prędkość sportowca,
- oblicz drogę przebytą przez biegacza oraz współrzędną jego położenia po czasie $t = 3$ min ruchu.

• **2.4.7.** Odczytaj z wykresu współrzędne położenia początkowego ciał A i B. Oblicz ich prędkości i napisz równania ruchu tych ciał.

P3



• • • **2.4.8.** Samochód osobowy poruszający się ze stałą prędkością $v_1 = 70 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ minął znak drogowy informujący, że do celu pozostało 210 km. Tę chwilę przyjęto za czas początkowy $t_0 = 0$. Po upływie $t_1 = 0,5$ h ten sam znak drogowy z prędkością $v_2 = 140 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ minął jadący w tę samą stronę motocyklista.

P3

- W jakiej odległości od znaku drogowego motocyklista dogoni samochód? Po jakim czasie?
- Naszkicuj wykresy położenia samochodu i motocyklisty w układzie współrzędnych $x(t)$. Obierz punkt zero na osi w miejscu, w którym znajdował się znak drogowy.

• • • **2.4.9.** Podczas rajdu rowerowego na prostym odcinku drogi dwaj koledzy ustalili telefonicznie, że jadący przodem Maciek mija właśnie słupek kilometrowy z napisem 5 km, a pozostający w tyle Jacek mija słupek z napisem 3 km. Od tego momentu obaj koledzy jadą ze stałymi prędkościami: Maciek $v_1 = 8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a Jacek $v_2 = 16 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

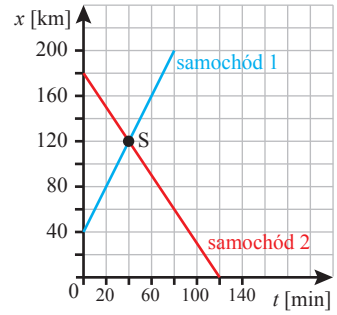
P3

Wykonaj polecenia opisane w punktach a–c. Przyjmij dwa różne układy odniesienia: pierwszy związany z początkowym położeniem Jacka, a drugi – z początkowym położeniem Maćka.

- Zapisz równania ruchu rowerzystów.
- Ustal, gdzie i kiedy Jacek dogoni Maćka.
- Naszkicuj wykres $x(t)$ dla rowerzystów.
- Porównaj wyniki otrzymane dla układów odniesienia związanych z początkowymi położeniami Jacka i Maćka i zapisz wnioski.

- • **2.4.10.** Na wykresie przedstawiono zależność położenia od czasu $x(t)$ dwóch samochodów poruszających się po przeciwnych pasach drogi szybkiego ruchu.

- Ułóż równania ruchu poruszających się samochodów.
- Zinterpretuj punkt przecięcia prostych na wykresie w odniesieniu do sytuacji na drodze.
- Potwierdź swoją interpretację wykresu obliczeniowo, korzystając z równań ruchu. Oblicz, kiedy samochody się miną. Podaj współrzędną położenia samochodów w chwili mijania. Potrzebne dane odczytaj z wykresu.



- • **2.4.11.** Z Kołobrzegu do portu Nexø na Bornholmie kursują statki pasażerskie. Statek wyruszył w rejs o godzinie 7:00, a przybył na miejsce o 12:00. Jednocześnie z Nexø do Kołobrzegu wypłynął jacht motorowy poruszający się ze stałą prędkością $v_2 = 30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Wyspa Bornholm leży w odległości $l = 100 \text{ km}$ na północ od Kołobrzegu.



- Napisz równania ruchu dla statku pasażerskiego i jachtu motorowego w wybranym układzie odniesienia.
- Przedstaw graficznie w jednym układzie współrzędnych zależność $x(t)$ dla obu pływających jednostek.
- W jakiej odległości od Kołobrzegu jednostki się miną? O której godzinie?

2.5. Ruch prostoliniowy jednostajnie zmienny

Podręcznik
rozd. 2.6 i 2.7

■ Przykład 1.

Samochód sportowy przez pierwsze $t = 10$ s po starcie przyspieszał, poruszając się ruchem jednostajnie zmiennym, i zwiększył swoją prędkość w trzeciej sekundzie jazdy o $\Delta v = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

- Sporządź wykres zależności prędkości od czasu dla pierwszych $t = 7$ s jazdy samochodu.
- Oblicz drogi, jakie samochód przejechał w pierwszej i w siódmej sekundzie wyścigu.
- Na podstawie wykresu, wykaż słuszność twierdzenia: „Drogi przebyte przez ciało poruszające się ruchem jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej w kolejnych sekundach ruchu mają się do siebie jak kolejne nieparzyste liczby naturalne”.

Rozwiązanie

- Słowa „po starcie” oznaczają, że prędkość początkowa samochodu była równa zero. W ruchu jednostajnie zmiennym w każdej sekundzie ruchu następuje taki sam przyrost prędkości, tak więc określenie „w trzeciej sekundzie” można zignorować. Ważny jest jedynie płynący z niego wniosek, że zmiana prędkości o $\Delta v = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ nastąpiła w czasie jednej sekundy. Przyspieszenie możemy obliczyć, podstawiając dane liczbowe z zadania do wzoru podstawowego:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Otrzymujemy:

$$a = \frac{6 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ s}} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Po przekształceniu wzoru na przyspieszenie otrzymamy zależność:

$$\Delta v = a \Delta t$$

więc

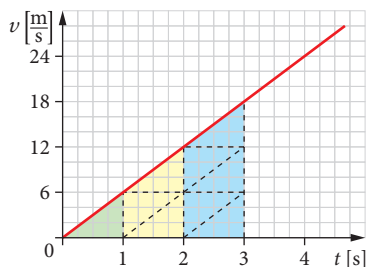
$$v - v_p = a(t - t_0)$$

Ponieważ prędkość początkowa wynosi $v_p = 0$, a za chwilę początkową przyjmujemy $t_0 = 0$, wzór opisujący prędkość naszego samochodu możemy zapisać jako:

$$v = at = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t$$

Jak widać, jest to zależność liniowa $v(t)$, gdzie przyspieszenie a jest stałym współczynnikiem.

Po podstawieniu kolejnych wartości czasu: 0 s, 1 s, 2 s, 3 s itd., otrzymujemy linię prostą nachyloną pod pewnym kątem do osi czasu.



- b)** Prędkość początkowa $v_0 = 0$, zatem drogę w pierwszej sekundzie obliczymy ze wzoru:

$$s_{0-1} = \frac{1}{2}at^2$$

$$s_{0-1} = \frac{1}{2} \cdot \left(6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cdot (1 \text{ s})^2 = 3 \text{ m}$$

Drogę pokonaną w siódmej sekundzie możemy obliczyć na dwa sposoby. Możemy przedłużyć wykres dla kolejnych kilku sekund i odczytać z wykresu prędkość na początku 7. sekundy (czyli w chwili $t = 6 \text{ s}$ prędkość $v_6 = 36 \frac{\text{m}}{\text{s}}$) i skorzystać ze wzoru:

$$s_{6-7} = v_6 \Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2$$

$$s_{6-7} = 36 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot (7 \text{ s} - 6 \text{ s}) + \frac{1}{2} \cdot 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (7 \text{ s} - 6 \text{ s})^2 = 36 \text{ m} + 3 \text{ m} = 39 \text{ m}$$

Możemy też obliczyć drogę w 7. sekundzie jako różnicę dróg pokonanych w ciągu pierwszych 7 s i w ciągu pierwszych 6 s:

$$s_{6-7} = s_{0-7} - s_{0-6}$$

$$s_{6-7} = \frac{1}{2} \cdot 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (7 \text{ s})^2 - \frac{1}{2} \cdot 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (6 \text{ s})^2 = 147 \text{ m} - 108 \text{ m} = 39 \text{ m}$$

Odpowiedź: Samochód przejechał w pierwszej sekundzie ruchu drogę $s = 3 \text{ m}$, a w siódmej sekundzie ruchu drogę $s = 39 \text{ m}$.

- c)** Drogę z wykresu możemy obliczyć jako pole figury pod krzywą $v(t)$.

Droga w pierwszej sekundzie jest liczbowo równa polu trójkąta:

$$s_{0-1} = \frac{1}{2} \Delta v_{0-1} \Delta t_{0-1}$$

Na wykresie widzimy, że droga w drugiej sekundzie ruchu jest 3 razy większa niż droga w pierwszej sekundzie:

$$s_{1-2} = 3s_{0-1}$$

Droga w trzeciej sekundzie ruchu jest z kolei 5 razy większa niż droga w pierwszej sekundzie:

$$s_{2-3} = 5s_{0-1}$$

Widzimy więc, że drogi pokonane w kolejnych sekundach ruchu mają się do siebie tak jak kolejne nieparzyste liczby naturalne:

$$s_1 : s_2 : s_3 : s_n = 1 : 3 : 5 : (2n - 1)$$

Zastosowanie tej zależności to trzeci sposób, aby obliczyć drogę pokonaną przez nasz samochód sportowy w siódmej sekundzie ruchu:

$$s_{0-1} : s_{6-7} = 1 : (2 \cdot 7 - 1)$$

a więc

$$s_{6-7} = s_{0-1} \cdot 13 = 39 \text{ m}$$

■ Przykład 2.

Dźwig podnosi element konstrukcyjny domu najpierw z przyspieszeniem $a_1 = 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ przez $t_1 = 4 \text{ s}$, następnie ruchem jednostajnym przez $t_2 = 10 \text{ s}$, a w końcu ruchem jednostajnie opóźnionym z przyspieszeniem o współrzędnej $a_3 = -0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ przez czas $t_3 = 4 \text{ s}$. Oblicz wysokość, na jaką dźwig podniósł ładunek.

- Zilustruj ruch dźwigu na wykresie $v(t)$.
- Oblicz wysokość, na jaką dźwig podniósł ładunek.

Rozwiązanie

- Obliczamy prędkość końcową pierwszej fazy ruchu (jednostajnie przyspieszonego):

$$v_1 = a_1 t_1 \quad v_1 = 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4 \text{ s} = 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Rysujemy na wykresie odcinek między dwoma punktami o współrzędnych: $(0 \text{ s}, 0 \frac{\text{m}}{\text{s}})$ i $(4 \text{ s}, 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}})$.

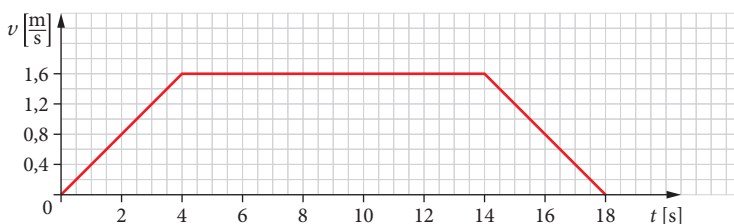
Z treści zadania wiemy, że dalszy ruch był jednostajny i trwał 10 s, więc od punktu $(4 \text{ s}, 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}})$ rysujemy odcinek równoległy do osi czasu i kończący się dla chwili $t = t_1 + t_2 = 14 \text{ s}$.

Z treści zadania wiemy również, że ostatni etap ruchu trwał tyle samo co pierwszy (4 s) i że przyspieszenie w ruch opóźnionym miało taką samą wartość bezwzględną jak w pierwszej fazie ruchu. Oznacza to, że prędkość końcowa po fazie trzeciej będzie taka sama jak na początku fazy pierwszej, czyli $v_k = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Możemy też oczywiście skorzystać ze wzoru i obliczyć tę wartość:

$$v_k = v_1 + a_3 t_3 \quad v_k = 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4 \text{ s} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Rysujemy odcinek łączący dwa punkty o współrzędnych: $(14 \text{ s}, 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}})$ i $(18 \text{ s}, 0 \frac{\text{m}}{\text{s}})$.



- Wysokość możemy wyznaczyć dwoma sposobami.

I sposób

Aby wyznaczyć wysokość h , na którą dźwig podniósł ładunek, trzeba obliczyć i zsumować wysokości pokonane w trakcie trzech różnych ruchów: h_1 – jednostajnie przyspieszonego, h_2 – jednostajnego i h_3 – jednostajnie opóźnionego:

$$h = h_1 + h_2 + h_3$$

W ruchu jednostajnie przyspieszonym drogę oblicza się ze wzoru:

$$h_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a_1 t_1^2$$

Ponieważ dźwig zaczął dopiero podnosić ładunek, to: $v_0 = 0$, więc po podstawieniu danych otrzymujemy: $h_1 = 3,2 \text{ m}$.

W ruchu jednostajnym drogę oblicza się ze wzoru:

$$h_2 = v_1 t_2$$

gdzie v_1 jest prędkością końcową osiągniętą przez ładunek w ruchu jednostajnie przyspieszonym, czyli $v_1 = 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Po podstawieniu tej wartości do wzoru na drogę w drugim etapie ruchu otrzymujemy:

$$h_2 = 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10 \text{ s} = 16 \text{ m}$$

W ruchu jednostajnie opóźnionym drogę obliczamy ze wzoru:

$$h_3 = v_1 t_3 + \frac{1}{2} a_3 t_3^2$$

Po podstawieniu danych (pamiętamy, że a_3 jest ujemną współrzędną wektora przyspieszenia) otrzymujemy $h_3 = 3,2 \text{ m}$.

Całkowita droga pokonana przez ładunek wynosi:

$$h = 3,2 \text{ m} + 16 \text{ m} + 3,2 \text{ m} = 22,4 \text{ m}$$

II sposób

Obliczenie pola figury pod wykresem $v(t)$. Pole powierzchni jest liczbowo równe drodze w tym ruchu:

$$P_{\text{trapezu}} = \frac{a+b}{2} h = \frac{18 \text{ s} + 10 \text{ s}}{2} \cdot 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 22,4 \text{ m}$$

■ Przykład 3.

Austriak Felix Baumgartner 14 października 2012 r. wzniósł się w kapsule podwieszonej do stratosferycznego balonu na wysokość 39 045 m. Kiedy stanął na trapie swojej kapsuły, „nad głową miał czernią kosmosu, a pod stopami mieniącą się lekkim błękitem Ziemię”. Po 4 min i 22 s swobodnego lotu otworzył spadochron. Kaskader przeszedł do historii – podczas pierwszych 50 s lotu swobodnego osiągnął prędkość $v = 1342,8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.



- Oblicz, o ile procent Baumgartner przekroczył prędkość dźwięku. Przyjmij, że prędkość dźwięku $v_{\text{dź}} = 330 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
- Założ, że do momentu otwarcia spadochronu kaskader poruszał się ruchem przyspieszonym, i oblicz jego średnie przyspieszenie podczas lotu swobodnego.
- Czy lot Baumgartnera był spadkiem swobodnym, takim jak jest definiowany w fizyce? Odpowiedź uzasadnij.
- Oblicz wysokość, z jakiej musiałby skoczyć kaskader, aby podczas spadku swobodnego z przyspieszeniem grawitacyjnym $g_{\text{sr}} = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ osiągnąć prędkość v do momentu otwarcia spadochronu na wysokości $h = 1500 \text{ m}$ nad ziemią.

Rozwiązanie

- a) Przeliczmy prędkość v na metry na sekundę: $v = 1342,8 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 373 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Obliczamy, o ile procent Felix Baumgartner podczas lotu swobodnego przekroczył prędkość dźwięku, ze wzoru:

$$\frac{v - v_{dz}}{v_{dz}} \cdot 100\%$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy:

$$\frac{373 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 330 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{330 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \cdot 100\% = 13\%$$

Odpowiedź: Felix Baumgartner przekroczył prędkość dźwięku o 13%.

- b) Średnie przyspieszenie podczas skoku kaskadera obliczamy z definicji przyspieszenia:

$$a_{sr} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_{sr} = \frac{373 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{50 \text{ s}} = 7,46 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Odpowiedź: Kaskader poruszał się ze średnim przyspieszeniem $7,46 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

- c) Spadek swobodny to ruch ciała bez prędkości początkowej, który odbywa się pod wpływem siły grawitacji. Przyspieszenie w spadku swobodnym w pobliżu Ziemi wynosi $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Przyspieszenie g zmienia się wraz z odległością od powierzchni Ziemi zgodnie ze wzorem:

$$g = \frac{F_g}{m} = \frac{G \frac{M_Z m}{(R_Z + r)^2}}{m} = G \frac{M_Z}{(R_Z + r)^2}$$

gdzie r to wysokość nad Ziemią.

Jeśli z powyższego wzoru obliczymy przyspieszenie skoczka (teoretyczne) i porównamy je z wynikiem uzyskanym w punkcie b), to okaże się, że przyspieszenie, z jakim się poruszał, obliczone w punkcie b), jest znacznie mniejsze od wartości teoretycznej. Różnica ta wynika z oporów powietrza, które działały na skoczka w trakcie lotu. Ponieważ w spadku swobodnym nie uwzględnia się sił oporu, skok Baumgartnera nie był spadkiem swobodnym w sensie fizycznym.

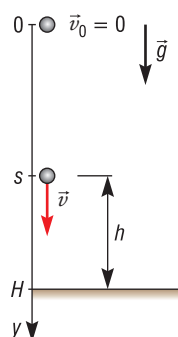
Odpowiedź: Lot Felixa Baumgartnera nie był spadkiem swobodnym w rozumieniu fizyki.

- d) Spadek swobodny jest to ruch jednostajnie przyspieszony bez prędkości początkowej, dlatego aby wyznaczyć czas lotu kaskadera, korzystamy ze wzoru na prędkość w ruchu jednostajnie zmiennym $v = gt$. Przekształcamy go do postaci:

$$t = \frac{v}{g}$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$t = 38 \text{ s}$$



Drogę w spadku swobodnym obliczamy ze wzoru:

$$s = \frac{gt^2}{2} \text{ (równoważne wyrażenie: } s = \frac{v^2}{2g}\text{)}$$

Szukana wysokość to:

$$H = h + s, \text{ czyli } H = h + \frac{v^2}{2g}$$

Podstawiamy dane liczbowe:

$$H = 8590 \text{ m}$$

Odpowiedź: Gdyby Felix Baumgartner rzeczywiście spadał swobodnie i osiągnął prędkość $1342,8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, z kapsuły musiałby wyskoczyć na wysokości 8590 m, aby 1500 m nad Ziemią otworzyć spadochron.

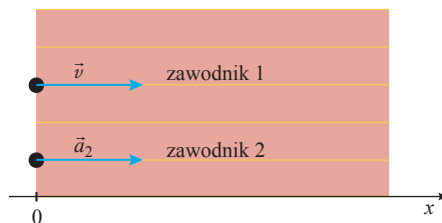
■ Przykład 4.

Na obozie sportowym urządzono zawody. Jedną z konkurencji był bieg drużynowy. Pięciu zawodników każdej z drużyn było rozstawionych na prostoliniowym torze co 100 m. Drugi zawodnik każdej drużyny ruszał w chwili, gdy pierwszy przekroczył linię 100 m, trzeci ruszał, gdy drugi przekroczył linię 200 m itd. W jednej z drużyn pierwszy zawodnik minął linię 100 m z prędkością $v = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i zaczął zwalniać z przyspieszeniem o współrzędnej $a_1 = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Drugi zawodnik czekał na linii 100 m i ruszył z przyspieszeniem $a_2 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ w chwili, gdy tę linię przekroczył pierwszy zawodnik.

- Ułóż równania współrzędnej położenia obu zawodników w wybranym przez siebie układzie odniesienia.
- Po jakim czasie od chwili startu drugi zawodnik dogoni i minie pierwszego biegacza.
- Oblicz prędkość drugiego zawodnika w chwili, gdy wyprzedza zawodnika pierwszego.
- Sporządź w jednym układzie współrzędnych dla obu biegaczy wykresy $x(t)$ i $v(t)$.

Rozwiązanie

- a) Przyjmujemy jednowymiarowy układ odniesienia. Załóżmy, że ruch obu zawodników odbywa się wzdłuż osi x , a początek układu odniesienia znajduje się w punkcie odpowiadającym położeniu linii 100 m na bieżni. Zawodnicy poruszają się zgodnie ze zwrotem osi x . W chwili $t_0 = 0$ s sytuacja wygląda tak jak na rysunku.



Ruch zawodników odbywa się wzdłuż prostej. Równania współrzędnych położenia przyjmują odpowiednio postać taką jak poniżej. Zwróć uwagę, że do pierwszego równania wstawiamy współrzędną przyspieszenia, która ma znak minus.

$$\text{Dla zawodnika pierwszego: } x_1 = vt + \frac{1}{2}a_1t^2 = 8t - t^2$$

$$\text{Dla zawodnika drugiego: } x_2 = \frac{1}{2}a_2t^2 = \frac{3}{2}t^2$$

Odpowiedź: Równania współrzędnej dla zawodników 1. i 2. mają postać: $x_1 = 8t - t^2$, $x_2 = \frac{3}{2}t^2$.

- b)** Gdy drugi zawodnik dogoni pierwszego, ich współrzędne położenia będą miały taką samą wartość $x_1 = x_2$. Korzystamy z równań współrzędnych z punktu a) i otrzymujemy równanie:

$$vt + \frac{1}{2}a_1t^2 = \frac{1}{2}a_2t^2$$

Wyznaczamy z niego czas:

$$t = \frac{2v}{-a_1 + a_2}$$

Po wstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$t = 3,2 \text{ s}$$

Odpowiedź: Drugi zawodnik dogoni pierwszego po 3,2 s od startu.

- c)** Prędkość drugiego zawodnika w chwili przekazywania pałeczki gdy wyprzedza zawodnika pierwszego obliczamy ze wzoru na prędkość w ruchu jednostajnie zmiennym:

$$v_2 = a_2t$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy: $v_2 = 9,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

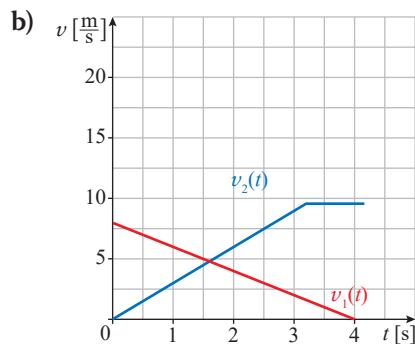
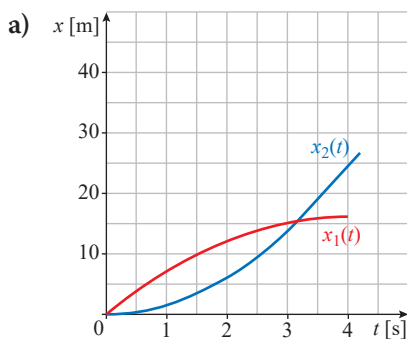
Odpowiedź: Prędkość drugiego zawodnika w chwili wyprzedzania zawodnika pierwszego wynosiła $9,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

- d)** Obliczenie kilku kolejnych współrzędnych położenia zawodników pierwszego i drugiego pozwala sporządzić wykresy $x(t)$ dla obu biegaczy (rysunek a). Współrzędne punktu przecięcia wykresów $x_1(t)$ i $x_2(t)$ to czas i miejsce spotkania gdy zawodnik drugi wyprzedził pierwszego.

Prędkość pierwszego zawodnika zmniejsza się, zawodnik zwalnia:

$$v_1 = v + a_1t$$

Jest to zależność liniowa, więc obliczamy dwie wartości v_1 dla różnych t i rysujemy prostą (rysunek b). W przypadku drugiego zawodnika, poruszającego się ruchem jednostajnie przyspieszonym, zależność $v_2 = a_2t$ również jest liniowa. Obliczamy dwie wartości v_2 dla dwóch różnych t i rysujemy prostą. Współrzędne punktu przecięcia wykresów $v_1(t)$ i $v_2(t)$ oznaczają chwilę, w której prędkości obu zawodników są takie same.



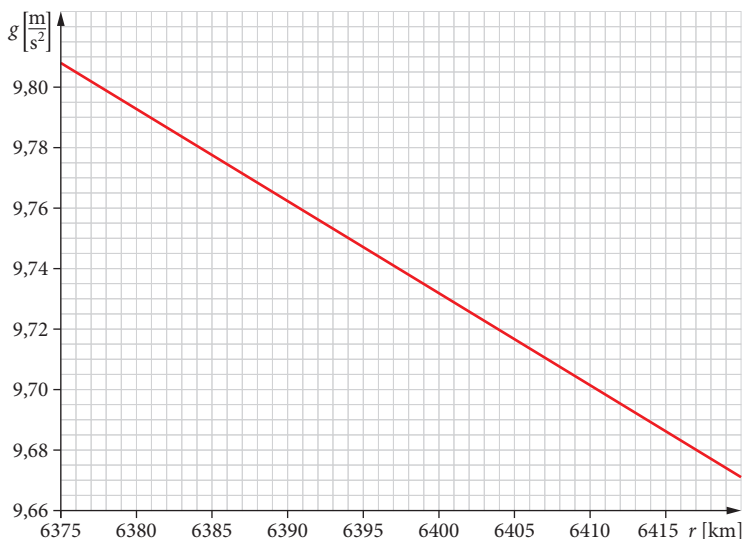
Pytania i zadania

- P1** • **2.5.1.** Samochód wyścigowy po starcie jechał ruchem jednostajnie przyspieszonym i w chwili $t = 3$ s jego prędkość wynosiła $v_3 = 18 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz drogę, jaką przejechał samochód w pierwszej i trzeciej sekundzie jazdy.
- P1** • **2.5.2.** Na torze testowym samochód osobowy osiągnął prędkość $v = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ w czasie $\Delta t = 8,5$ s. Oblicz średnie przyspieszenie pojazdu i drogę, na jakiej osiągnął prędkość v .
- P1** • **2.5.3.** Podczas kozłowania koszykarz nadaje piłce prędkość o kierunku pionowym. Piłka uderza w parkiet boiska z prędkością $v_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i odbija się z prędkością $v_2 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ po czasie $\Delta t = 0,02$ s. Oblicz jej średnie przyspieszenie w czasie odbicia.
- P1** • • **2.5.4.** W terenie zabudowanym samochód osobowy jedzie z dopuszczalną prędkością $v_1 = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Po opuszczeniu rejonu ograniczenia prędkości pojazd po przejechaniu $s = 50$ m ma już prędkość $v_2 = 96 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Oblicz przyspieszenie samochodu i czas, w jakim pojazd przyspieszył do prędkości v_2 .
- P2** • • **2.5.5.** Winda towarowa ruszyła z parteru i jechała przez $t_1 = 2$ s z przyspieszeniem $a_1 = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, potem ruchem jednostajnym przez $t_2 = 5$ s i następnie w ciągu $t_3 = 2$ s wyhamowała z przyspieszeniem $a_2 = -1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.
- a) Przedstaw ruch windy na wykresie $v(t)$.
- b) Oblicz, na które piętro wjechała winda? Przyjmij, że piętro (razem ze stropem) ma 3 m wysokości.
- P2** • • **2.5.6.** Na koloniach zorganizowano dzień sportu. Zawodnicy brali udział w nietypowych konkurencjach. Jedną z nich był wyścig w pchaniu obciążonego wózka na drodze $s = 100$ m. Jeden z zawodników pierwszy odcinek $s_1 = 14,7$ m pokonał w czasie $t_1 = 3,50$ s, biegnąc ze stałym przyspieszeniem, a potem ze stałą prędkością dobiegł do mety, po czym zwalniał jednostajnie i zatrzymał wózek w odległości $l = 9,45$ m za linią mety. Oblicz:
- a) przyspieszenie w pierwszej fazie ruchu i prędkość, z jaką zawodnik przekroczył linię mety,
- b) całkowity czas na dystansie 100 m,
- c) czas, po którym zawodnik zatrzymał się po przekroczeniu linii mety.
- P2** • • **2.5.7.** Sprinter pokonuje dystans $l = 100$ m w czasie $t = 9,94$ s. Przez pierwsze $t_1 = 3,3$ s biegnie ze stałym przyspieszeniem, a potem ze stałą prędkością dobiega do mety. Oblicz przyspieszenie zawodnika w pierwszej części trasy i prędkość, z jaką przekracza on linię mety.
- P3** • **2.5.8.** Nad otworem studni o głębokości $h = 31$ m puszczono swobodnie kamień. Plusk wody usłyszano po $t = 2,6$ s. Oblicz prędkość dźwięku w powietrzu w studni oraz prędkość, z jaką kamień uderzył w taflę wody.

● ● ● **2.5.9.** Balon meteorologiczny z kapsułą zawierająca aparaturę wzniósł się na wysokość $h_1 = 17$ km nad powierzchnię Ziemi i na tej wysokości został odczepiony. Kapsuła zaczęła spadać i osiągnęła prędkość $v_1 = 1260 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ po przebyciu drogi $s_1 = 7$ km. Na wysokości $h_2 = 10$ km nad powierzchnią Ziemi otworzyła się czasza pierwszego spadochronu. Kapsuła zaczęła spadać z prędkością o wartości $v_2 = 600 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ i pokonała drogę $s_2 = 6000$ m. Następnie otworzyła się druga czasza spadochronu i kapsuła opadała z prędkością o wartości $v_3 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

P3

- a) Załóż, że do momentu otwarcia spadochronu kapsuła poruszała się ruchem przyspieszonym, i oblicz jej średnie przyspieszenie w pierwszej fazie lotu bez otwartych spadochronów.
- b) Poniżej przedstawiono wykres ilustrujący zależność przyspieszenia grawitacyjnego od odległości od środka Ziemi. Porównaj średnie przyspieszenie kapsuły uzyskane w punkcie a) ze średnim przyspieszeniem grawitacyjnym dla analogicznego przedziału wysokości wyznaczonego na podstawie danych odczytanych z wykresu. Wynik podaj w procentach. Promień Ziemi wynosi 6378 km.



- c) Oblicz czas opadania kapsuły na Ziemię od chwili jej odczepienia od balonu meteorologicznego. Pomiń czas rozwijania czaszy spadochronu.

● **2.5.10.** Rozbitkowie wystrzelili racy światłne, które wznosiły się na maksymalną wysokość $h = 30$ m i tam wybuchły. Oblicz prędkość, z jaką raca wylatywała z pistoletu, i czas jej wznoszenia.

P3

● ● **2.5.11.** Piłeczce pingpongowej na wysokości $h_1 = 1$ m nad blatem stołu pingpongowego zawodnik nadał prędkość początkową skierowaną pionowo w dół. Piłeczka po odbiciu od stołu wzniosła się na wysokość $h_2 = 1,5$ m. Oblicz jej prędkość początkową i czas ruchu piłeczki od nadania jej prędkości przez zawodnika do osiągnięcia wysokości h_2 . Przyjmij, że piłeczka uderza o stół i się od niego odbija z taką samą prędkością.

P3



- • • **2.5.12.** Piłkarz, uderzając głową piłkę na wysokości $h = 1,95$ m nad ziemią, nadaje jej prędkość $v_0 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, skierowaną pionowo do góry, a następnie się odsuwa. Oblicz wysokość, na jaką wzniesie się piłka, oraz prędkość, z jaką uderzy w ziemię.

P3

- • • **2.5.13.** Uczniowie przygotowali cienką mocną nić i sześć ołowianych obciążników wędkarskich o takiej samej masie. Przymocowali obciążniki do nici tak, że odległości między nimi tworzą ciąg liczb 1, 3, 5, 7, ..., np. 1 dm, 3 dm, 5 dm, Jeden z uczniów wszedł na drabinę i trzymał nić w taki sposób, że najniższy obciążnik prawie dotykał podłogi. Następnie puścił nić, a uczniowie słuchali, w jakich odstępach czasu obciążniki uderzają o podłogę.

P3

D



- a) Porównaj odstępy czasu między kolejnymi uderzeniami obciążników o podłogę. Zinterpretuj otrzymane wyniki.
b) Wykaż, że przy takim zamocowaniu obciążników odległości między sąsiednimi obciążnikami mają się do siebie tak, jak kolejne wyrazy ciągu liczb nieparzystych:

$$\frac{h_{n+1} - h_n}{h_n - h_{n-1}} = \frac{2n+1}{2n-1}$$

- • **2.5.14.** Podczas wyścigów samochodowych punkt kontrolny minęły jednocześnie dwa samochody: pierwszy z prędkością $v_{01} = 45 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i przyspieszeniem $a_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, drugi z prędkością $v_{02} = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i przyspieszeniem $a_2 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Dalej jadą po prostoliniowym odcinku trasy.

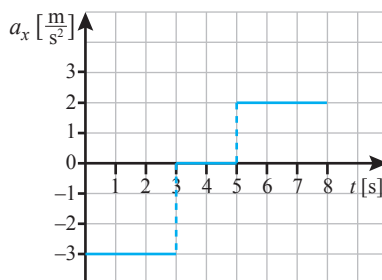
P4



- a) Po jakim czasie i w jakiej odległości od punktu kontrolnego nastąpi spotkanie obu pojazdów?
b) Oblicz prędkości obu pojazdów w chwili spotkania.
c) Zilustruj ruch pojazdów na wykresach $x(t)$ i $v(t)$.

- **2.5.15.** Na wykresie $a_x(t)$ przedstawiono zależność przyspieszenia od czasu samochodu jadącego po prostoliniowym odcinku jezdni. Na początku pojazd jechał z prędkością $v = 54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, następnie zwolnił przed przejściem dla pieszych, które przejechał ze stałą prędkością, a potem przyspieszył. Sporządź wykresy:

P4



- a) zależności współrzędnej prędkości od czasu $v_x(t)$. Prędkość podaj w $\frac{\text{m}}{\text{s}}$,
b) drogi od czasu $s(t)$ w ciągu wskazanych 8 s ruchu.

- • • **2.5.16.** Janek, który się zatrzymał, aby napić się wody, dostrzegł kolegę oddalającego się chodnikiem wzdłuż jezdni z prędkością $v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Gdy kolega znajdował się już w odległości $d = 24$ m od Janka, ten ruszył w jego stronę z przyspieszeniem $a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

P4

- a) Po jakim czasie i gdzie chłopcy się spotkają?
b) Zilustruj ich ruch na wykresach $x(t)$ i $v(t)$.
c) Ustal prędkość Janka w chwili, gdy dogonił kolegę.

Klasyka fizyki B. Mendel i J. Mendel

2.1. Samochód osobowy przejechał drogę $s_1 = 40$ km w czasie $\Delta t_1 = 30$ min, natomiast motocykl pokonał drogę $s_2 = 30$ km w czasie $\Delta t_2 = 20$ min. Średnia prędkość samochodu była:

- większa niż średnia prędkość motocykla,
- mniejsza niż średnia prędkość motocykla,
- równa średniej prędkości motocykla,
- dziesięciokrotnie większa od średniej prędkości motocykla.

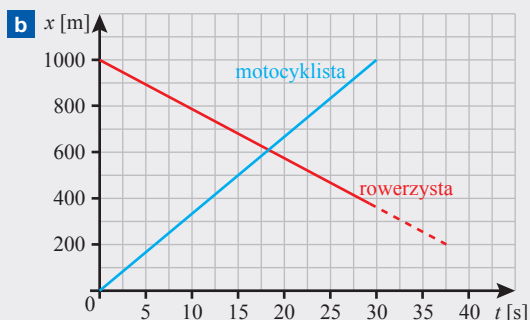
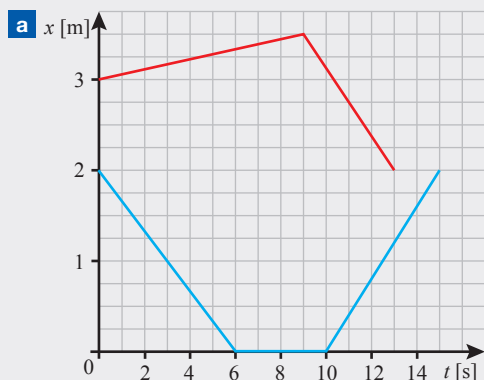
2.2. Na wiadukt o długości $l = 500$ m wjechał pociąg towarowy poruszający się ze stałą prędkością $v = 27 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Od chwili wjechania elektrowozu na wiadukt do momentu zjechania z niego ostatniego wagonu upłynęło $\Delta t = 6$ min. Oblicz, ile wagonów liczył skład tego pociągu razem z elektrowozem, jeżeli przeciętna długość jednego wagonu i elektrowozu $a = 20$ m.

2.3. Kierowca jechał z Warszawy do Rzeszowa. Pierwszą połowę trasy przejechał ze średnią prędkością $v_1 = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a drugą z prędkością $v_2 = 70 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Wracając do Warszawy, pierwszą połowę czasu jechał ze średnią prędkością v_1 , a drugą z prędkością v_2 . Z jaką średnią prędkością kierowca podróżował do Rzeszowa, a z jaką wracał do Warszawy? Zinterpretuj otrzymane wyniki.

2.4. Dwa pociągi jadące po sąsiednich torach w przeciwnie strony wjeżdżają jednocześnie na przejazd kolejowy, a po czasie $\Delta t_0 = 30$ s ich ostatnie wagony także jednocześnie zjeżdżają z tego przejazdu. Pierwszy pociąg jest $n = 1,5$ raza dłuższy od drugiego pociągu. Jak długo pierwszy pociąg mijałby stojący drugi pociąg, jeżeli poruszałyby się z taką samą prędkością jak na przejeździe kolejowym?

2.5. Na podstawie wykresu zależności przemieszczenia od czasu $x(t)$ dwóch pojazdów (patrz rys. a) sporządź wykres zależności $v(t)$ dla tych pojazdów. Zachowaj skalę na osi czasu.

2.6. Na rysunku b) przedstawiono wykresy zależności przemieszczenia od czasu $x(t)$ jazdy motocyklisty i rowerzysty. Na ich podstawie sporządź wykres zależności odległości między motocyklistą a rowerzystą od czasu.



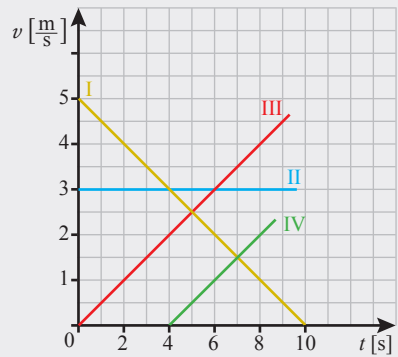
2.7. Z każdego z dwóch samolotów znajdujących się na różnych wysokościach wyskoczyli w tym samym czasie spadochroniarze. Iloraz wysokości, na jakich znajdowały się samoloty, wynosił $h_1 : h_2 = 0,75$. Średnie prędkości opadających skoczków miały się do siebie $v_1 : v_2 = 1,5$.

- Wykonaj odpowiednie obliczenia i wskaż, który ze skoczków opadał dłużej.
- Ile razy dłużej trwał jego skok?

2.8. Pocisk wystrzelono pionowo do góry z prędkością $v_0 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Przyjmij, że przyspieszenie ziemskie $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

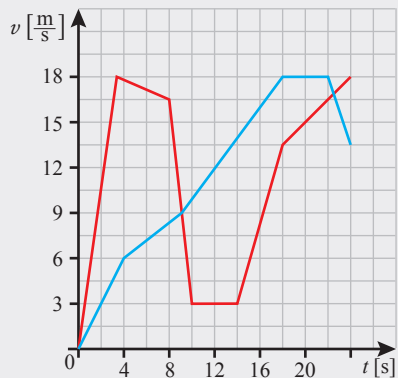
- Oblicz wysokość h_w , na której będzie się znajdować pocisk, zanim zacznie opadać.
- Po jakim czasie pocisk znajdzie się na wysokości h_w ?
- Jaką prędkość v będzie miał pocisk na wysokości $h = 15 \text{ m}$ nad punktem wystrzelenia?

2.9. Na rysunku przedstawiono wykresy zależności prędkości od czasu $v(t)$ kilku ciał. Na jego podstawie sporządź wykresy przyspieszenia od czasu $a(t)$ dla tych ciał. Zachowaj skalę czasu z rysunku.



2.10. Podczas próby bicia rekordu świata w prędkości samochód poruszał się ruchem jednostajnie przyspieszonym z prędkością początkową v_0 . Stwierdzono, że prędkość samochodu w czasie Δt wzrosła n razy w stosunku do v_0 . Oblicz przyspieszenie, z jakim poruszał się ten eksperymentalny samochód.

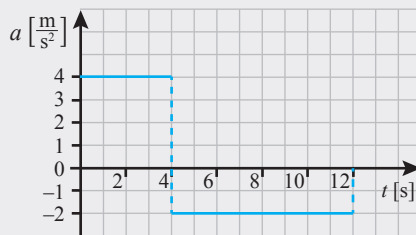
2.11. Dwa samochody poruszające się w ruchu ulicznym stale zmieniały prędkość. Fragmenty wykresów zależności wartości ich prędkości od czasu $v(t)$ przedstawiono na rysunku. Na tej podstawie narysuj wykres zależności wartości przyspieszeń tych samochodów od czasu $a(t)$.



2.12. Samochód osobowy ruszył z przyspieszeniem $a_1 = 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Po czasie $t = 1 \text{ min}$ ruszył za nim drugi samochód z takim samym przyspieszeniem. Oblicz, po jakim czasie od chwili startu pierwszego samochodu odległość między samochodami będzie trzy razy większa od odległości, jaka dzieliła je w momencie startu drugiego samochodu.

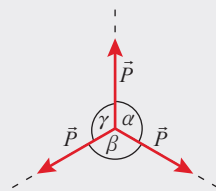
2.13. W czasie zawodów sportowych zmierzono prędkość, z jaką skoczek z wieży wpada do wody. Wynosiła ona $v = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Jak długo trwał skok zawodnika? Przyjmij, że skok się odbywał bez prędkości początkowej.

2.14. Na rysunku obok przedstawiono wykres zależności przyspieszenia od czasu $a(t)$ pewnego samochodu. Oblicz prędkość, z jaką będzie poruszał się ten samochód po $t = 12$ s, jeżeli jego prędkość początkowa wynosiła $v_0 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



2.15. Z gondoli balonu wznoszącego się pionowo do góry z prędkością $v_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ wyrzucono niewielki ciężarek w chwili, kiedy gondola znajdowała się na wysokości $h = 300$ m. Jak długo będzie spadał ten przedmiot na powierzchnię ziemi?

2.16. Trzy jednakowe wektory, każdy o długości 25 cm, są rozmieszczone w przestrzeni w jednej płaszczyźnie wzdłuż trzech kierunków tworzących kąty $\alpha = \beta = \gamma = 120^\circ$, jak na rysunku obok. Oblicz wypadkową tych wektorów.



2.17. Z wieży puszczone swobodnie kamyk i stwierdzono, że w ostatniej sekundzie ruchu przebył $\frac{3}{4}$ całej drogi. Jaką wysokość miała wieża?

2.18. Z wysokiej wieży rzucono jednocześnie dwie metalowe kulki z jednakowymi prędkościami początkowymi v_0 , przy czym pierwszą z nich pionowo w dół, a drugą pionowo do góry.

- Opisz wzorem, jak będzie się zmieniać z upływem czasu odległość między kulkami.
- Oblicz, ile wyniesie odległość między kulkami w chwili, gdy kulka rzucona do góry osiągnie maksymalną wysokość.

Wskazówka. Zastanów się, jakim ruchem względem puszczonej kulki porusza się kulka rzucona do góry.

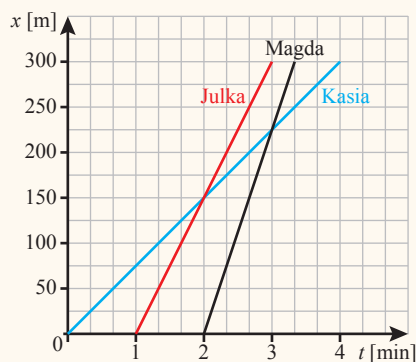
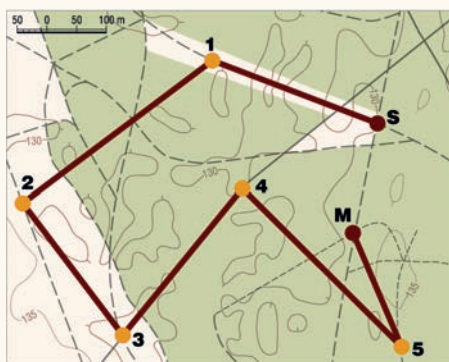
2.19. Jeden kamień spada z wysokości $h_1 = 100$ cm, a drugi z wysokości $h_2 = 400$ cm. Ile razy dłużej będzie spadał drugi kamień?

Zadania maturalne

■ Przykład. Bieg na orientację

Bieg na orientację polega na pokonaniu w jak najkrótszym czasie trasy z punktami kontrolnymi. Zawodnicy sami wyznaczają trasę pomiędzy nimi, posługując się mapą i kompasem. Bieg uznaje się za ukończony, jeżeli zawodnik przebiegł przez wszystkie punkty kontrolne (w których potwierdził obecność) i dotarł do mety. Start poszczególnych zawodników odbywa się w równych odstępach czasu.

Na mapie zaznaczono start S, poszczególne punkty kontrolne i metę M biegu na orientację dla kategorii wiekowej 15 lat, w którym pobiegły Kasia, Julka i Magda. Wykres przedstawia zależność pomiędzy położeniem a czasem biegu tych zawodniczek na pierwszym odcinku trasy (od startu do punktu kontrolnego 1). Za początek układu współrzędnych przyjęto start biegu.



Informacja do zadań P.1, P.2 i P.3

Kasia wystartowała o godzinie 13:00 jako pierwsza spośród dziewcząt. Wszystkie trzy uczestniczki biegu pokonały odcinek od startu do punktu kontrolnego 1 w taki sam sposób, biegnąc po linii prostej traktem leśnym.

P.1. Na podstawie mapy, wykresu i niezbędnych obliczeń wyznacz czas, po jakim poszczególne zawodniczki dotarły do pierwszego punktu kontrolnego. Oblicz prędkości średnie, z jakimi pokonały ten odcinek biegu. Prędkość wyraż w $\frac{m}{s}$.

P.2. Napisz równania ruchu Kasi, Julki i Magdy na trasie ze startu do pierwszego punktu kontrolnego.

P.3. Z równań ruchu oblicz, po jakim czasie Julka dogoni Kasię. W jakiej odległości od miejsca startu i po jakim czasie Magda dogoniłaby Julkę, gdyby dziewczęta przez cały czas poruszały się traktem leśnym po linii prostej.

Informacja do zadań P.4 i P.5

Magda nie znalazła punktu kontrolnego 2 i o godzinie 13:12 znalazła się przy punkcie kontrolnym 3. Zrezygnowała z dalszego biegu i wróciła na start.

P.4. Oblicz przemieszczenie Magdy między punktami kontrolnymi 1 i 3 oraz wartość wektora jej prędkości średniej. Odcinek 1–2 tworzy z odcinkiem 2–3 kąt prosty.

P.5. Ile wyniosło całkowite przemieszczenie Magdy?

Informacja do zadań P.6 i P.7

Julka bez trudu znalazła wszystkie punkty kontrolne i o godzinie 13:16 zameldowała się na mecie. Kasia przybyła do mety o godzinie 13:45.

P.6. Ile czasu zajęło zawodniczkom przebiegnięcie całej trasy biegu? Która z nich osiągnęła wynik lepszy od średniego czasu biegu wynoszącego 31 min 18 s?

P.7. Oblicz średnią wartość prędkości Julki na całej trasie. Załóż, że pokonana przez nią droga jest o 15% dłuższa niż najkrótsza możliwa do wyznaczenia trasa. Potrzebne dane odczytaj z mapy.

Rozwiązanie

P.1. Z mapy odczytujemy, że pierwszy odcinek trasy ma długość $s_1 = 300$ m. Czasy pokonania tego odcinka przez poszczególne zawodniczki (odczytany z wykresu) wynoszą:

czas Kasi: $t_K = 4$ min = 240 s,

czas Julki: $t_J = 2$ min = 120 s,

czas Magdy: $t_M = 1$ min 20 s = 80 s.

Prędkość średnią wyznaczamy ze wzoru:

$$v_{sr} = \frac{s_1}{t}$$

Po podstawieniu do wzoru czasów poszczególnych zawodniczek (droga jest ta sama) otrzymujemy odpowiednio prędkości średnie:

Kasi: $v_{srK} = 1,25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, Julki: $v_{srJ} = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, Magdy: $v_{srM} = 3,75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Odpowiedź: Kasia, Julka i Magda pokonały pierwszy odcinek trasy w czasie odpowiednio: 4 min, 2 min i 1 min 20 s, z prędkościami średnimi odpowiednio: $1,25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i $3,75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

P.2. Równanie ruchu prostoliniowego ma postać:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$$

Wszystkie zawodniczki rozpoczynały bieg z tego samego miejsca, które przyjęliśmy za początek w układzie współrzędnych obrazującym wykresy ruchu zawodniczek, dlatego możemy przyjąć, że $\vec{r}_0 = 0$.

Odczytujemy z wykresu, że zawodniczki startowały w jednominutowych odstępach czasu, dlatego dla drugiej Julki $t \rightarrow t - 60$ s, a dla trzeciej Magdy $t \rightarrow t - 120$ s. Znamy też prędkości średnie zawodniczek wyznaczone w zadaniu P.1. Po uwzględnieniu tych danych równania ruchu poszczególnych zawodniczek przyjmują postać:

równanie ruchu Kasi: $x_K(t) = 1,25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$,

równanie ruchu Julki: $x_J(t) = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot (t - 60 \text{ s})$,

równanie ruchu Magdy: $x_M(t) = 3,75 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot (t - 120 \text{ s})$.

Odpowiedź: Równania ruchu Kasi, Julki i Magdy mają odpowiednio postać: $x_K(t) = 1,25t$, $x_J(t) = 2,5(t - 60)$, $x_M(t) = 3,75(t - 120)$, gdzie wielkości występujące w równaniach są wyrażone w jednostkach układu SI.

P.3. Julka dogoni Kasię, kiedy $x_K = x_J$. Możemy zatem zapisać:

$$1,25 \cdot t = 2,5 \cdot (t - 60) \Rightarrow t = 120 \text{ s}$$

Magda dogoniłaby Julkę, gdyby $x_M = x_J$, czyli: $3,75 \cdot (t - 120) = 2,5 \cdot (t - 60) \Rightarrow t = 240 \text{ s}$

Odległość od miejsca startu: $x_M = x_J = 3,75 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot (240 \text{ s} - 120 \text{ s}) = 450 \text{ m}$

Odpowiedź: Julka dogoni Kasię po 2 min, a Magda dogoniłaby Julkę po 4 min w odległości 450 m od miejsca startu.

P.4. Przeszyczenie $\vec{r}_{13}$ między punktami 1 i 3 zaznaczonymi na mapie jest przeciwprostokątną trójkąta 123. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$|\vec{r}_{13}| = \sqrt{|1-2|^2 + |2-3|^2}$$

Długości potrzebnych odcinków odczytujemy z mapy:

$$|1-2| = 4 \text{ cm} \rightarrow 400 \text{ m}, \quad |2-3| = 2,8 \text{ cm} \rightarrow 280 \text{ m}$$

Stąd $|\vec{r}_{13}| = 488 \text{ m}$.

Magda wyruszyła na trasę o 13:02, a przy pierwszym punkcie kontrolnym była 80 s później. Przy punkcie 3 była o 13:12. Oznacza to, że pokonanie drogi między punktami kontrolnymi 1 i 3 zajęło jej 520 s.

Wartość jej wektora prędkości średniej wynosi więc: $|\vec{v}_{13}| = \frac{488 \text{ m}}{520 \text{ s}} = 0,94 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Odpowiedź: Przeszyczenie Magdy między punktami kontrolnymi 1 i 3 wynosiło 488 m, a wartość wektora jej prędkości średniej to $0,94 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

P.5. Magda zrezygnowała z biegu i wróciła do miejsca startu, więc jej przeszczenie było równe zeru.

P.6. Znamy czasy startu Kasi oraz zakończenia biegu na mecie przez obie zawodniczki. Z wykresu odczytujemy, że Julka wystartowała minutę po Kasi. Czasy trwania biegu to: Kasi – od 13:00 do 13:45, czyli 45 minut, Julki – od 13:01 do 13:16, czyli 15 minut.

Odpowiedź: Kasia była na trasie 45 min, a Julka 15 min i miała czas lepszy od średniego.

P.7. Najkrótsza możliwa trasa to odcinki łączące poszczególne punkty kontrolne. Z mapy odczytujemy, że odcinki te wynoszą:

$$|S-1| = 300 \text{ m}, |1-2| = 400 \text{ m}, |2-3| = 280 \text{ m}, |3-4| = 320 \text{ m}, |4-5| = 380 \text{ m}, |5-M| = 210 \text{ m}$$

Po ich zsumowaniu otrzymujemy długość najkrótszej trasy: $s = 1890 \text{ m}$.

Wiemy, że droga pokonana przez Julkę była o 15% dłuższa niż trasa mierzona po prostych, czyli: $s_J = s + 15\%s = 2173,5 \text{ m}$.

Średnia wartość prędkości Julki wynosiła: $v_J = \frac{s_J}{t_J}$,
gdzie czas t_J to czas biegu Julki (obliczony w zadaniu P.6).

Po podstawieniu danych otrzymujemy: $v_J = 2,42 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Odpowiedź: Średnia wartość prędkości Julki na całej trasie wynosiła $2,42 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Zadanie 1. Piłeczki tenisowe

Z lufy wyrzutni do piłek tenisowych wylatuje pionowo w górę piłka z prędkością $v_0 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Załóż, że piłka rozpoczęła ruch pół metra nad poziomem kortu. Przyspieszenie ziemskie $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Jako początek układu współrzędnych przyjmij poziom kortu.

1.1. Oblicz maksymalną wysokość, na jaką wzniesie się piłka.

1.2. Oblicz całkowity czas lotu piłki.

1.3. Za pierwszą piłką w odstępie czasu $t_0 = 0,3 \text{ s}$ wylatuje pionowo w górę druga piłka poruszająca się z taką samą prędkością v_0 jak pierwsza. Jeżeli oś y skierujemy do góry, a początkiem układu współrzędnych będzie kort tenisowy, to równanie opisujące położenie pierwszej piłki ma postać: $y_1 = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$, a drugiej: $y_2 = y_0 + v_0 (t - t_0) - \frac{1}{2} g (t - t_0)^2$.

Wyznacz z tych równań czas oraz miejsce spotkania obu piłek tenisowych.

1.4. Sporządź wykres zależności położenia od czasu $y(t)$ dla obu piłek tenisowych w jednym układzie współrzędnych. Zaznacz na wykresie punkt o współrzędnych odpowiadających miejscu i czasowi spotkania piłek.

1.5. Oblicz prędkości piłek w chwili spotkania. Zinterpretuj otrzymane wyniki.

1.6. Wyznacz prędkość względną piłek do chwili zderzenia. Skorzystaj z zależności $v_{\text{wzg}} = v_1 - v_2$. Ustal, jakim ruchem względem siebie poruszają się piłki tenisowe.

Zadanie 2. Pościg policyjny

Motocyklista porusza się ruchem jednostajnym z prędkością $v_1 = 144 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ i tym samym, przekracza dozwoloną prędkość. Nie zdaje sobie sprawy z tego, że wyprzedza nieoznakowany radiowóz, jadący ze stałą prędkością $v_2 = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. W chwili wyprzedzenia go przez motocykl kierowca wozu policyjnego włącza „koguta” i rozpoczyna pościg za piratem drogowym, jadąc ze średnim przyspieszeniem $a = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

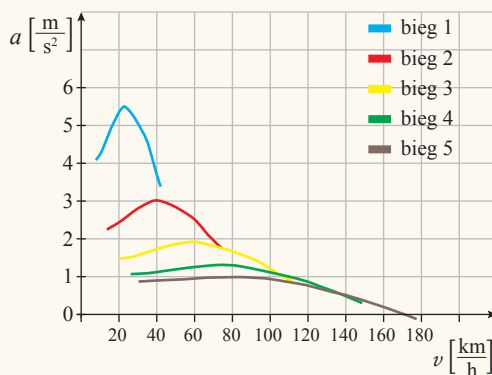
2.1. Po jakim czasie patrol dogoni pirata drogowego?

2.2. Oblicz prędkość samochodu policyjnego w chwili zrównania się z motocyklem.

2.3. Oblicz drogę przebytą przez samochód policyjny od chwili rozpoczęcia pościgu do chwili dogonienia motocykla.

Informacje do zadań 2.4 i 2.5

Ścigany motocyklista nie zatrzymał się również na znak patrolu policyjnego stojącego przy drodze. Policjanci wsiedli do samochodu i włączyli się w pościg za piratem drogowym. Kierowca samochodu policyjnego zmieniał kolejno biegi. Możliwe do osiągnięcia przyspieszenia samochodu na poszczególnych biegach przedstawiają wykresy na rysunku. Załóż, że przyspieszenie zmienia się liniowo w czasie, a kierowca zmienia bieg na wyższy po osiągnięciu maksymalnego przyspieszenia.



2.4. Przeanalizuj wykres i porównaj czasy zwiększenia prędkości pojazdu od $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ do $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ na 2 i 4 biegu.

2.5. Z wykresu wynika, że kierowca włączył 3. bieg przy prędkości $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a jazdę na tym biegu zakończył przy prędkości $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Oblicz drogę, jaką w tym czasie przejechał.

Zadanie 3. Wyznaczanie przyspieszenia grawitacyjnego

Uczniowie sfilmowali aparatem fotograficznym spadającą kulkę na tle taśmy mierniczej z podziałką co 0,1 cm. Odtworzyli na komputerze film nagrany kamerą, która rejestrowała 30 klatek na sekundę. Na podstawie kolejnych klatek filmu odczytali drogę s pokonaną przez kulkę w danym czasie t . Uzyskane wyniki uczniowie zebrali w tabeli.

t [s]	0	0,033	0,067	0,100	0,133	0,167	0,200	0,233
s [cm]	0	0,5	2,0	4,5	8,5	13,5	19,5	27,5

3.1. Sporządź wykres $s(t)$ z uwzględnieniem niepewności pomiarowych.

3.2. Wyprowadź zależność matematyczną pozwalającą obliczyć wartość przyspieszenia grawitacyjnego w sytuacji, której dotyczą opisane pomiary.

3.3. Sporządź wykres $s(t^2)$ wraz z niepewnościami.

3.4. Na podstawie wykresu sporządzonego w zadaniu 3.3 wyznacz wartość przyspieszenia grawitacyjnego wraz z niepewnością pomiarową.

3.5. Porównaj wyznaczoną wartość przyspieszenia grawitacyjnego z wartością odczytaną z tablic fizycznych. Czy uzyskany w doświadczeniu wynik z błędem pomiarowym mieści się w wartości tablicowej?



3. Ruch krzywoliniowy

Najważniejsze informacje

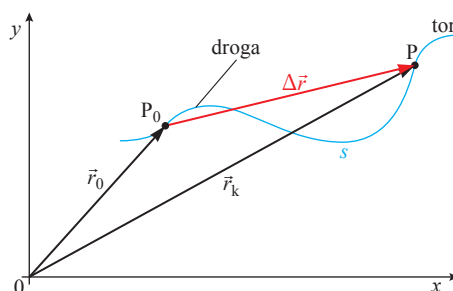
■ Wektor wodzący

Przy opisie ruchów krzywoliniowych, podobnie jak w przypadku ruchów prostoliniowych, posługujemy się wektorem położenia i wektorem przemieszczenia w wybranym układzie współrzędnych.

$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ – wektor położenia początkowego

$\vec{r}_k = \vec{r}(t_k)$ – wektor położenia końcowego

$\Delta\vec{r} = \vec{r}_k - \vec{r}_0$ – wektor przemieszczenia



Wektor wodzący to wektor łączący punkt materialny z początkiem układu współrzędnych.

■ Ruch w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach

Rzut poziomy to ruch ciała wyrzuconego poziomo z prędkością początkową o wartości v_0 . Jest to ruch złożony z ruchu jednostajnego w kierunku osi x z prędkością v_0 i ruchu jednostajnie przyspieszonego bez prędkości początkowej, tzn. spadku swobodnego, w kierunku osi y .

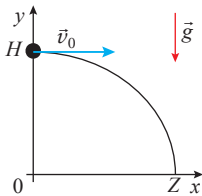
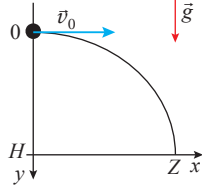
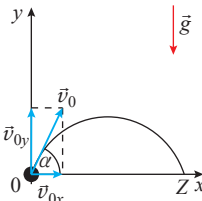
Rzut ukośny to ruch ciała wyrzuconego pod pewnym kątem do poziomu z prędkością v_0 . Jest to ruch złożony z ruchu jednostajnego w kierunku osi x z prędkością v_{0x} i ruchu jednostajnie zmiennego w kierunku osi y z prędkością początkową v_{0y} . Prędkości v_{0x} i v_{0y} są składowymi prędkości v_0 .

Do opisu rzutu poziomego i rzutu ukośnego stosujemy równania wektora położenia i wektora prędkości:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t$$

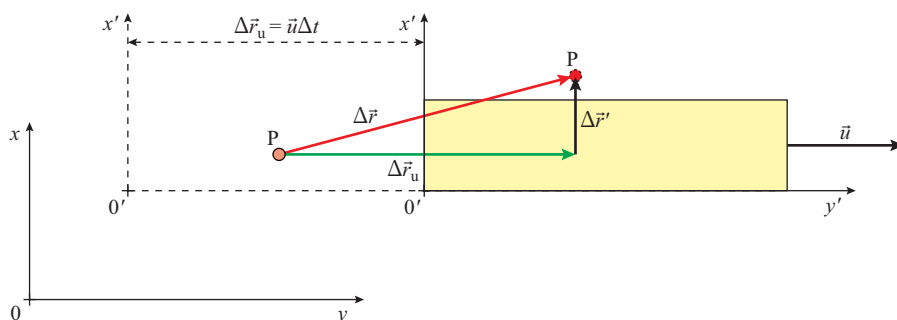
Tabela 3. Charakterystyka rzutów poziomego i ukośnego

Rzut	Schematyczne przedstawienie rzutu	Równanie położenia	Równanie prędkości	Czas trwania rzutu	Zasięg rzutu
poziomy	oś y skierowana do góry 	oś x $x = v_0 t$	oś x $v_x = v_0$	dla $y = 0$ $H = \frac{1}{2} g t^2$ stąd $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$	$x = Z$ $Z = v_0 t$ $Z = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}$
		oś y $y = H - \frac{1}{2} g t^2$	oś y $v_y = -g t$		
	oś y skierowana w dół 	oś x $x = v_0 t$	oś x $v_x = v_0$	dla $y = H$ $H = \frac{1}{2} g t^2$ stąd $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$	$x = Z$ $Z = v_0 t$ $Z = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}$
		oś y $y = \frac{1}{2} g t^2$	oś y $v_y = g t$		
ukośny		oś x $x = v_{0x} t$	oś x $v_x = v_{0x}$ $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$	przyjmujemy $y = 0$ i otrzymujemy $t = \frac{2v_{0y}}{g}$ $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$	$x = Z$ $Z = v_{0x} t$ $Z = \frac{2v_{0x} v_{0y}}{g}$ $Z = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$
		oś y $y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$	oś y $v_y = v_{0y} - g t$ $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$		

Prędkość w różnych układach odniesienia

Jeżeli punkt materialny P przemieszcza się o $\Delta \vec{r}'$ w swoim układzie odniesienia $O'x'y'$ i jednocześnie układ $O'x'y'$ przemieszcza się o $\Delta \vec{r}_u$ względem układu Oxy , to przemieszczenie $\Delta \vec{r}$ punktu P względem układu Oxy jest sumą wektorową przemieszczeń $\Delta \vec{r}_u$ i $\Delta \vec{r}'$:

$$\Delta \vec{r} = \Delta \vec{r}_u + \Delta \vec{r}'$$



Prędkość $\vec{v}$ punktu materialnego względem nieruchomego układu odniesienia $0xy$ jest sumą wektorową prędkości: $\vec{u}$ – układu ruchomego względem nieruchomego i $\vec{v}'$ – punktu materialnego względem układu ruchomego $0'x'y'$:

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}'$$

■ Ruch po okręgu

Kąt wyrażony w mierze łukowej φ to iloraz długości łuku l i jego promienia R :

$$\varphi = \frac{l}{R}$$

Jednostką kąta w mierze łukowej jest radian.

Kąt pełny to $\varphi = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi$, stąd $1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57,3^\circ$.

Prędkość kątowna średnia ω_{sr} to iloraz kąta $\Delta\varphi$ zakreślonego przez promień wodzący (wyrażonego w radianach) i czasu Δt , w którym ten kąt został zakreślony:

$$\omega_{\text{sr}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Chwilowa prędkość kątowna ω_{ch} to iloraz kąta $\Delta\varphi$ zakreślonego przez promień wodzący (wyrażonego w radianach) i czasu Δt , w którym ten kąt został zakreślony, gdy czas trwania ruchu jest bliski zera:

$$\omega_{\text{ch}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \quad \text{gdy } \Delta t \rightarrow 0$$

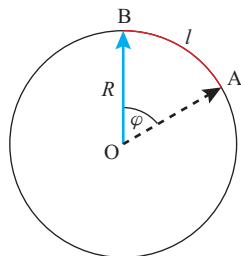
Przyspieszenie kątowe ε to iloraz zmiany prędkości kątownej $\Delta\omega$ i czasu Δt , w którym ta zmiana nastąpiła:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

■ Ruch jednostajny po okręgu

Czas jednego pełnego obrotu (okres) otrzymamy, dzieląc czas danej liczby obrotów przez liczbę tych obrotów:

$$T = \frac{t}{n} [\text{s}]$$



Częstotliwość to liczba obrotów wykonanych w określonym czasie. Otrzymamy ją, dzieląc liczbę obrotów przez czas tych obrotów:

$$f = \frac{n}{t} \left[\frac{1}{s} = \text{Hz} \right]$$

Związek między okresem a częstotliwością wyraża się wzorem:

$$f = \frac{1}{T}$$

W ruchu jednostajnym po okręgu chwilowa prędkość kątowna jest stała:

$$\omega = \text{const}$$

Średnia prędkość kątowna jest równa chwilowej prędkości kątownej:

$$\omega_{\text{sr}} = \omega_{\text{ch}} = \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Uwzględniając okres T trwania jednego pełnego obiegu ciała po okręgu lub częstotliwość f ruchu tego ciała, **prędkość kątowną** możemy wyrazić w następujący sposób:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

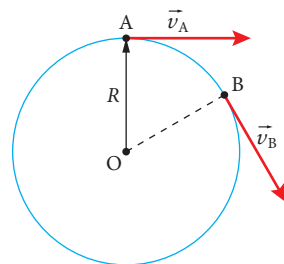
■ Prędkość liniowa w ruchu jednostajnym po okręgu

Wektor prędkości liniowej (wektory $\vec{v}_A$ i $\vec{v}_B$ na rysunku) w ruchu jednostajnym po okręgu jest styczny do tego okręgu w jego każdym punkcie, a wartość prędkości liniowej jest stała:

$$v = \text{const}$$

Związek między prędkością liniową i kątowną to:

$$v = \omega R$$



gdzie R jest promieniem okręgu, po którym porusza się ciało.

■ Przyspieszenie w ruchu jednostajnym po okręgu

Przyspieszenie definiujemy jako iloraz **zmiany** wektora prędkości $\Delta\vec{v}$ i czasu, w którym ta zmiana nastąpiła: $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$.

Przyspieszenie $\vec{a}$ ma taki sam kierunek i zwrot jak zmiana prędkości $\Delta\vec{v}$.

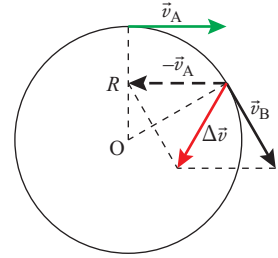
Wyznaczanie przyspieszenia dośrodkowego

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

Dla czasu $\Delta t \rightarrow 0$ (dążącego do zera) otrzymujemy przyspieszenie chwilowe, którego kierunek pokrywa się z promieniem okręgu, a zwrot wektora jest skierowany do środka okręgu.

Wartość przyspieszenia dośrodkowego wyraża wzór:

$$a_d = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = 4\pi^2 f^2 R$$



■ Ruch jednostajnie zmienny po okręgu

W ruchu jednostajnie zmiennym po okręgu **przyspieszenie kątowe** ε jest stałe:

$$\varepsilon = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \text{const}$$

Dla ruchu jednostajnie przyspieszonego:

$$\alpha = \alpha_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t,$$

dla ruchu jednostajnie opóźnionego:

$$\alpha = \alpha_0 + \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad \omega = \omega_0 - \varepsilon t,$$

gdzie:

α – kąt, o jaki obróci się ciało,

α_0 – kąt początkowy,

ω – końcowa prędkość kątowa,

ω_0 – początkowa prędkość kątowa,

t – czas ruchu.

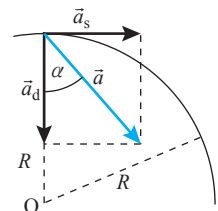
W ruchu jednostajnie zmiennym po okręgu prędkość liniowa zmienia kierunek i wartość.

Przyspieszenie całkowite jest sumą wektorów przyspieszenia dośrodkowego i przyspieszenia stycznego do okręgu:

$$\vec{a} = \vec{a}_d + \vec{a}_s$$

Wartość przyspieszenia obliczymy z twierdzenia Pitagorasa, ponieważ wektory $\vec{a}_s$ i $\vec{a}_d$ są do siebie prostopadłe:

$$|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}_d|^2 + |\vec{a}_s|^2}$$



3.1. Ruch krzywoliniowy

Podręcznik
rozd. 3.1

■ Przykład 1.

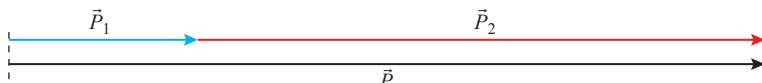
Dwa wektory są skierowane wzdłuż dowolnych kierunków, a ich wartości są odpowiednio równe: $P_1 = 250 \text{ cm}$ i $P_2 = 750 \text{ cm}$. Ich wypadkowa może mieć wartość:

- A.** $P = 0 \text{ cm}$, **B.** $P = 100 \text{ cm}$, **C.** $P = 800 \text{ cm}$, **D.** $P = 1100 \text{ cm}$.

Rozwiązanie

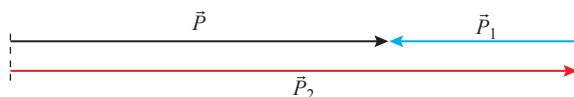
Ponieważ wektory mogą mieć dowolne kierunki, najpierw obliczamy najdłuższy i najkrótszy możliwy wektor wypadkowy. Wyznaczamy w ten sposób przedział, w jakim zawiera się długość wektora wypadkowego. Najdłuższy wektor wypadkowy jest wtedy, gdy wektory mają ten sam kierunek i zwrot – ma on wówczas długość:

$$P = P_1 + P_2 = 250 \text{ cm} + 750 \text{ cm} = 1000 \text{ cm}$$



Najkrótszy wektor wypadkowy jest wtedy, gdy wektory mają ten sam kierunek, ale przeciwne zwroty – ma on wówczas długość:

$$P = |P_1 - P_2| = |250 \text{ cm} - 750 \text{ cm}| = 500 \text{ cm}$$



Czyli wektor wypadkowy może mieć długość od 500 cm do 1000 cm.

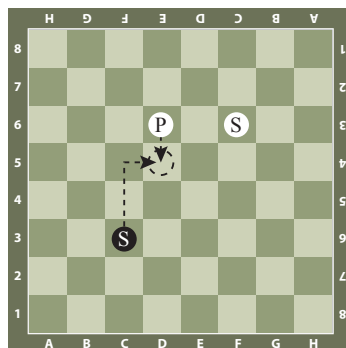
Porównujemy ten przedział wartości z wartościami wektorów wypadkowych w punktach A–D i zauważamy, że tylko $P = 800 \text{ cm}$ mieści się w tym przedziale długości.

Odpowiedź: Wypadkowy wektor może mieć długość 800 cm.

■ Przykład 2.

Na rysunku przedstawiono szachownicę, na której ustawiono: czarnego skoczka – S, białego skoczka – S i białego pionka – P.

- Określ położenie czarnego skoczka i białego pionka na polu szachowym.
- Podaj współrzędne wektorów położenia czarnego skoczka (r_{cx} , r_{cy}) i białego pionka (r_{bx} , r_{by}). Oblicz długość tych wektorów.

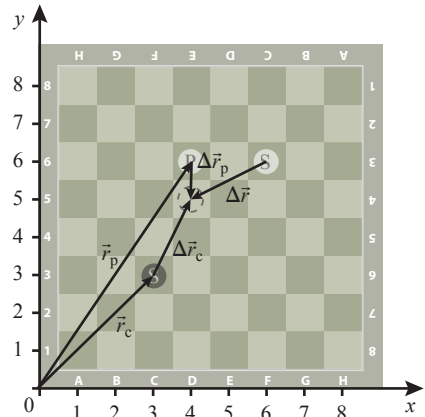


- c) Pionek wykonał ruch, który pokazuje strzałka. Potem czarny skoczek wykonał ruch, w którym zbił pionka. Określ współrzędne wektorów przemieszczenia figur szachowych w opisanych ruchach i oblicz ich długości.
- d) Skoczek porusza się, zakreślając literę L – dwa pola w jednym kierunku (poziomym lub pionowym) i jedno w bok. Przy jakich współrzędnych wektora przemieszczenia biały skoczek zbijе w kolejnym ruchu czarnego skoczka?

Rozwiązanie

Przyjmujemy układ współrzędnych Oxy , którego początek znajduje się w lewym dolnym rogu szachownicy. Współrzędnymi pola szachowego nazywamy współrzędne środka tego pola.

- a) Aby opisać położenie wskazanych figur, odczytujemy z układu współrzędnych współrzędne punktów odpowiadających polom 3C (czarny skoczek) i 6D (biały pionek). Otrzymujemy odpowiednio współrzędne punktów: pole 3C (3, 3) i pole 6D (4, 6).



Odpowiedź: Współrzędne położenia białego pionka to (4, 6), a czarnego skoczka to (3, 3).

- b) Współrzędne wektora położenia są takie same jak współrzędne położenia końca wektora:

$$\text{białego pionka: } \vec{r}_p = [4, 6], \quad \text{czarnego skoczka: } \vec{r}_c = [3, 3]$$

Długość wektora położenia dla:

$$\text{białego pionka: } |\vec{r}_p| = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}, \quad \text{czarnego skoczka: } |\vec{r}_c| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

Odpowiedź: Współrzędne wektora położenia białego pionka to [4, 6], czarnego skoczka [3, 3], a ich długości wynoszą odpowiednio $2\sqrt{13}$ i $3\sqrt{2}$.

- c) Biały pionek zmienił położenie z pola (4, 6) na pole (4, 5), czyli o wektor o współrzędnych:

$$\Delta \vec{r}_p = [4 - 4, 5 - 6] = [0, -1], \quad \text{długości } |\Delta \vec{r}_p| = \sqrt{(-1)^2} = 1$$

Czarny skoczek, zbijając białego pionka, zmienił swoje położenie z pola o współrzędnych (3, 3) na pole (4, 5), czyli o wektor o współrzędnych:

$$\Delta \vec{r}_c = [4 - 3, 5 - 3] = [1, 2], \quad \text{długości } |\Delta \vec{r}_c| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Odpowiedź: Biały pionek przemieścił się o wektor [0, -1] o długości 1, a czarny skoczek o wektor [1, 2] o długości $\sqrt{5}$.

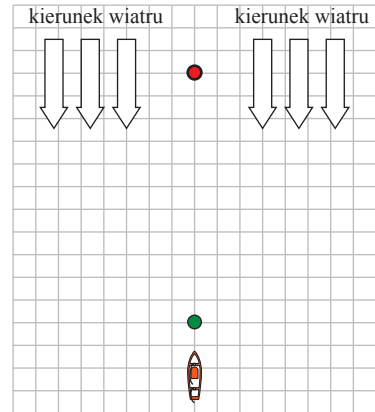
- d) Aby zbić czarnego skoczka, biały skoczek musi przemieścić się z pola (6, 6) na pole (4, 5). Oznacza to, że współrzędne wektora przemieszczenia białego skoczka powinny wynosić:

$$\Delta \vec{r} = [4 - 6, 5 - 6] = [-2, -1]$$

Odpowiedź: Biały skoczek powinien przemieścić się o wektor [-2, -1].

■ Przykład 3.

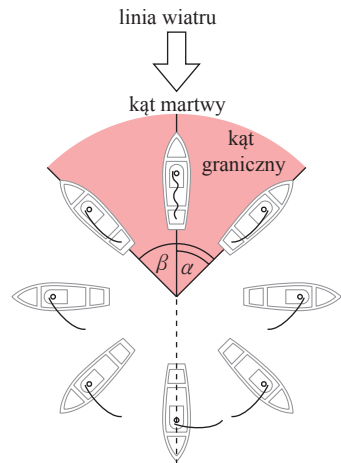
Jachty startujące w regatach mają do pokonania odcinek pomiędzy boją zieloną (start) i czerwoną (meta), pokazany schematycznie na rysunku. Długość boku jednej kratki na schemacie odpowiada 100 m. Obydwa punkty nawigacyjne leżą w linii wiatru, dlatego załogi startujące w regatach muszą halsować i wykonywać zwroty przez sztag. Kąt graniczny jachtu w opisanych warunkach wynosi $\alpha = 44^\circ$.



- Wyznacz trasę jachtu umożliwiającą pokonanie tego odcinka regat w jak najkrótszym czasie przy uwzględnieniu kąta granicznego jachtu w opisanych warunkach.
- Oblicz długości poszczególnych halsów wykonanych przez jacht, długość całej przepletniętej przez niego trasy oraz przemieszczenie całkowite.
- Jacht, który zwyciężył w regatach, dopłynął do mety w czasie $t = 8 \text{ min } 38 \text{ s}$. Oblicz wartość wektora prędkości średniej jachtu oraz średnią wartość prędkości (szybkość jachtu).

Informacje z zakresu żeglarstwa. Halsowanie to płynięcie zakosami pod wiatr. Podczas halsowania wykonuje się zwroty przez sztag – manewry polegające na przejściu dziobem statku przez linię wiatru. Odcinek pokonany przez jacht między zwrotami nazywamy halsem.

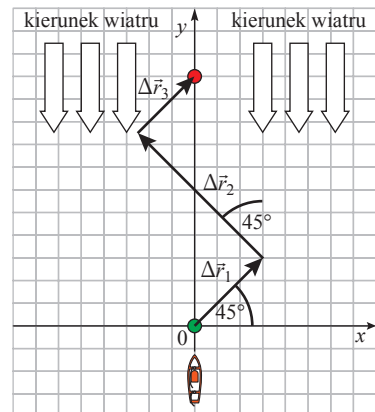
Kąt graniczny (kąt α na rysunku) to kąt między osią biegnącą wzdłuż jachtu a linią wiatru, przy którym żagle przestają pracować, a w konsekwencji jacht przestaje płynąć. Kąt ten jest różny w zależności od siły wiatru oraz konstrukcji jachtu i ożaglowania. Po pomnożeniu kąta granicznego przez dwa otrzymujemy kąt martwy (kąt β na rysunku), w którego obrębie żagle nie pracują. Powierzchnia znajdująca się w obrębie kąta martwego jest nazywana polem martwym.



Rozwiązanie

- Aby jacht pokonał trasę w jak najkrótszym czasie, musi halsować na granicy kąta granicznego. Skoro kąt graniczny jachtu to 44° , jacht powinien przecinać linię wiatru pod kątem około 45° .

Na schematycznym rysunku zaznaczamy układ współrzędnych, którego oś y pokrywa się z linią wiatru, a początek odpowiada miejscu umieszczenia zielonej boi. Następnie rysujemy kolejne halsy przykładowej trasy jachtu. Halsy oznaczamy jako wektory – odpowiednio: $\Delta \vec{r}_1$, $\Delta \vec{r}_2$ i $\Delta \vec{r}_3$.



- b) Pierwsza część trasy przebiega od punktu o współrzędnych $[0, 0]$ do miejsca pierwszego zwrotu o współrzędnych $[300, 300]$.

Wektor przemieszczenia ma więc współrzędne $\Delta \vec{r}_1 = [300, 300]$, a jego długość wynosi:

$$\Delta r_1 = \sqrt{300^2 + 300^2} \text{ m} = 300\sqrt{2} \text{ m} \approx 424 \text{ m}$$

Druga część trasy prowadzi między punktem pierwszego zwrotu o współrzędnych $[300, 300]$ a punktem drugiego zwrotu o współrzędnych $[-250, 850]$.

Wektor przemieszczenia ma współrzędne $\Delta \vec{r}_2 = [-250 - 300, 850 - 300] = [-550, 550]$, a jego długość wynosi:

$$\Delta r_2 = \sqrt{(-550)^2 + 550^2} \text{ m} = 550\sqrt{2} \text{ m} \approx 778 \text{ m}$$

Ostatni odcinek trasy prowadzi od punktu $[-250, 850]$ do czerwonej boi, która jest w punkcie $[0, 1100]$, stąd wektor przemieszczenia $\Delta \vec{r}_3 = [0 - (-250), 1100 - 850] = [250, 250]$, a jego długość jest równa:

$$\Delta r_3 = \sqrt{250^2 + 250^2} \text{ m} = 250\sqrt{2} \text{ m} \approx 354 \text{ m}$$

Droga s pokonana przez jacht jest sumą przemieszczeń i wynosi: $s = 1556 \text{ m}$.

Całkowite przemieszczenie to odległość między punktem początkowym a punktem końcowym. W omawianym przypadku to 11 krtek, z których każda ma 100 m, stąd: $\Delta r = 1100 \text{ m}$.

Odpowiedź: Kolejne halsy jachtu wynoszą: 424 m, 778 m i 354 m, pokonana droga to 1556 m, a jego przemieszczenie całkowite jest równe $\Delta r = 1100 \text{ m}$.

- c) Wartość wektora prędkości średniej jachtu obliczymy następująco:

$$[\vec{v}_{\text{sr}}] = \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \frac{1100 \text{ m}}{518 \text{ s}} \approx 2,12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Natomiast średnia wartość prędkości jest równa:

$$v_{\text{sr}} = \frac{s}{\Delta t} = \frac{1556 \text{ m}}{518 \text{ s}} \approx 3,00 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Odpowiedź: Wartość wektora prędkości średniej jachtu wynosi około $2,12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, natomiast średnia wartość prędkości to około $3,00 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

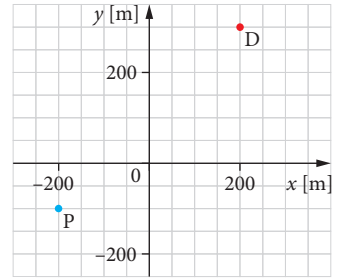
Pytania i zadania

- 3.1.1. Suma długości dwóch wektorów wynosi $|\vec{a}| + |\vec{b}| = 10 \text{ cm}$, a różnica $|\vec{a}| - |\vec{b}| = 4 \text{ cm}$. Jaką długość będzie miał wektor $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, jeśli wiadomo, że wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są ułożone względem siebie pod kątem prostym?

P1

- **3.1.2.** Rysunek przedstawia fragment pola golfowego.

- P1**
- a) Zapisz współrzędne wektorów położenia piłki golfowej P i dołka D oraz oblicz długości tych wektorów.
 - b) Oblicz odległość od piłki do dołka.



- **3.1.3.** W układzie współrzędnych dodaj dwa wektory: $\vec{a} = [3, 2]$ i $\vec{b} = [3, -2]$. Pierwszy wektor ma początek w punkcie $P_0 = (0, 0)$. Oblicz długość otrzymanego wektora.

- P1**

- • **3.1.4.** W układzie współrzędnych dodaj trzy wektory: $\vec{a} = [3, 3]$, $\vec{b} = [3, -1]$ i $\vec{c} = [1, -2]$. Początek pierwszego wektora znajduje się w punkcie $P_0 = (0, 3)$. Oblicz długość otrzymanego wektora.

- P1**

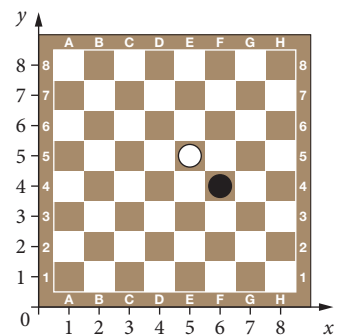
- • **3.1.5.** Dane są dwa wektory: $\vec{a} = [2, 2]$ i $\vec{b} = [-2, 2]$. W układzie współrzędnych znajdź sumę $\vec{a} + \vec{b}$ i różnicę $\vec{a} - \vec{b}$ tych wektorów. Oblicz długości powstałych wektorów, jeśli wiadomo, że obydwa mają początek w punkcie o współrzędnych $P_0 = (-5, 0)$.

- P1**

- • **3.1.6.** Na rysunku przedstawiono planszę do gry w warcaby, na której znajdują się dwa pionki.

- P2**

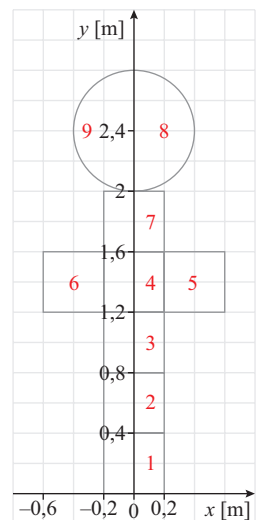
- a) Określ położenie białego i czarnego pionka na planszy.
- b) Podaj współrzędne wektorów położenia białego pionka (r_{bx}, r_{by}) i czarnego (r_{cx}, r_{cy}). Oblicz długości tych wektorów.
- c) Pionek czarny zbił pionka białego i znalazł się w polu 6D. Określ współrzędną położenia końcowego pionka czarnego i wartość jego przemieszczenia.



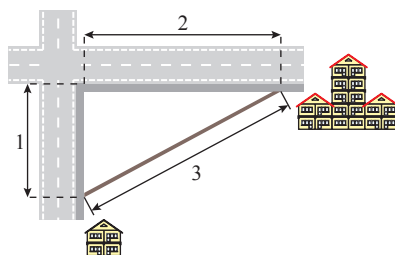
- • **3.1.7.** Dziewczynki grające w klasy rzucają kamykiem do pól narysowanych na asfalcie (rysunek przedstawia ponumerowane pola w układzie współrzędnych), a następnie, skacząc, pokonują kolejne pola. W powrotnej drodze zabierają kamyk z pola, w którym się on znalazł po ich rzucie.

- P2**

- a) Odczytaj z rysunku współrzędne wektora położenia kamyka znajdującego się pośrodku pola 5 oraz oblicz długość wektora położenia tego kamyka.
- b) Oblicz drogę pokonaną przez dziewczynkę w drodze powrotnej od pola 5 do początku gry, czyli punktu o współrzędnych $(0, 0)$. Przyjmij, że za każdym razem przeskakiwała dokładnie ze środka jednego pola na środek następnego oprócz skoku na punkt $(0, 0)$.
- c) Oblicz wartość przemieszczenia dziewczynki w trakcie jej ruchu opisanego w punkcie b).



- ● **3.1.8.** Uczeń wyruszył pieszo z domu do szkoły ustaloną trasą (patrz rysunek). Odcinek drogi (1) o długości $s_1 = 1,5$ km przebył w czasie $t_1 = 18$ min, a odcinek (2) $s_2 = 2,6$ km w czasie $t_2 = 42$ min. Po 4 h pobytu w szkole wracał do domu „na skróty”, co zajęło mu $t_3 = 45$ min. Oblicz wartość wektora prędkości średniej i średnią wartość prędkości ucznia na całej trasie dom $\rightarrow$ szkoła $\rightarrow$ dom. Wyniki podaj w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

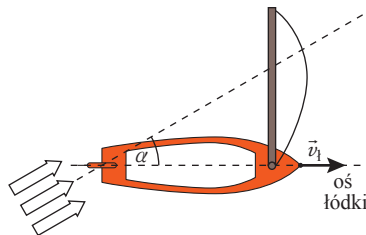


- ● **3.1.9.** Chłopiec pojechał na skuterze do pobliskiego miasteczka. Cała droga wynosiła $s = 9$ km. Pierwszy prostoliniowy odcinek trasy, stanowiący 0,4 całej drogi, pokonał z prędkością $v_1 = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Następnie skręcił pod kątem 90° i pozostały prostoliniowy odcinek drogi przejechał z prędkością $v_2 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz wartość wektora prędkości średniej i średnią wartość prędkości skutera na całej drodze.

- ● **3.1.10.** Kierowca quada wybrał się na wycieczkę. Pierwszy odcinek drogi $s_1 = 30$ km pokonał z prędkością $v_1 = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, następnie skręcił w drogę biegnącą prostopadle do pierwszej i poruszał się nią z prędkością $v_2 = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Po przebyciu $s_2 = 40$ km zatrzymał się.

- a) Narysuj tor ruchu quada i wektor jego przemieszczenia.
b) Oblicz wartość przemieszczenia i wartość wektora prędkości średniej pojazdu.
c) Oblicz średnią wartość prędkości quada na całej trasie.

- **3.1.11.** Na łódce klasy Finn żagiel ustawiono tak, że jego bom tworzy z osią łódki kąt prosty. Wiatr wiejący od rufy z prędkością $v = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ tworzy z osią łódki kąt $\alpha = 30^\circ$. Przy założeniu, że siły oporu powodują zmniejszenie prędkości łódki w porównaniu do prędkości wiatru o 20%, oblicz prędkość łódki v_l równoległą do jej osi.



- **3.1.12.** Samolot pasażerski podczas startu porusza się ze stałą prędkością $v = 290 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ pod kątem $\alpha = 10^\circ$ do poziomu. Oblicz prędkość wznoszenia się samolotu. W jakiej odległości od lotniska znajduje się samolot po $t = 10$ min? Na jakiej jest wtedy wysokości?

- **3.1.13.** Wiatr pozorny to wiatr bezpośrednio działający na żagle – wypadkowa wiatru rzeczywistego i wiatru własnego. Wiatr własny jest związany z poruszaniem się jachtu i wieje w kierunku przeciwnym do jego ruchu. Wiatr rzeczywisty wieje z prędkością $v_w = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ z kierunku północnego. Jacht porusza się w kierunku wschodnim z prędkością $v_j = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Wyznacz wiatr pozorny: podaj jego wartość, kierunek i zwrot.

- **3.1.14.** Łyżwiarz zakreślił na lodzie 3 okręgi o promieniu $R = 2$ m. Przy poruszaniu się łyżwiarza ze stałą prędkością czas jednego okrążenia wyniósł $t = 6,56$ s.
- a) Oblicz drogę przebytą przez łyżwiarza oraz średnią wartość jego prędkości.
b) Ile wynosi wartość prędkości średniej łyżwiarza?

3.2. Rzut poziomy i ukośny

Podręcznik
rozdz. 3.2

Uwaga. O ile nie podano inaczej, we wszystkich zadaniach przyjmij $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

■ Przykład 1.

Kamień rzucono poziomo z wysokiego brzegu. Współrzędne x i y położenia kamienia opisano równaniami: $x = 20t$ i $y = 5t^2$. Wielkości są podane w jednostkach układu SI. Początek układu współrzędnych wybrano w punkcie, z którego został rzucony kamień ($x_0 = 0$, $y_0 = 0$). Oś x jest zgodna z wektorem prędkości początkowej kamienia $\vec{v}_0$, a oś y – zgodna z wektorem przyspieszenia ziemskiego $\vec{g}$.

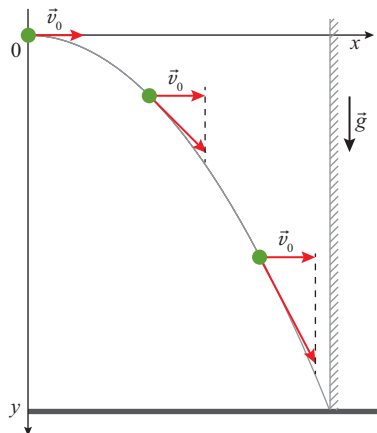
- Naszczuj tor ruchu kamienia i wektor prędkości w kilku punktach toru.
- Przy znanych współrzędnych położenia kamienia wyprowadź zależność $y(x)$. Wykaż, że torem kamienia jest parabola.
- Jaki kąt tworzy wektor prędkości wypadkowej kamienia z kierunkiem osi x po czasie lotu $t = 2$ s?

Rozwiązanie

- Tor kamienia jest krzywoliniowy, a wektor prędkości w każdej chwili jest do niego styczny. Osie układu współrzędnych zostały tak wybrane, aby oś x była zgodna z wektorem prędkości początkowej kamienia $\vec{v}_0$, a oś y była zgodna z wektorem przyspieszenia ziemskiego $\vec{g}$.
- Rozpoczynamy od poszukania zależności $y(x)$.
Współrzędne kamienia to:

$$x = 20t \quad (1)$$

$$y = 5t^2 \quad (2)$$



co oznacza, że ruch odbywa się w dwóch wymiarach:

wzdłuż osi x – ruch jednostajny z prędkością początkową v_0 : $x = v_0 t$,

wzdłuż osi y – ruch jednostajnie przyspieszony z przyspieszeniem ziemskim g : $y = \frac{1}{2} g t^2$.

Z równania (1) wyznaczamy czas t i wstawiamy otrzymane wyrażenie do równania (2):

$$x = 20t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{20}$$

$$y = 5t^2 = 5 \frac{x^2}{400} = \frac{1}{80} x^2$$

Równanie $y = \frac{1}{80} x^2$ porównujemy ze wzorem na równanie paraboli $y = ax^2$. Stwierdzamy, że otrzymana zależność jest równaniem paraboli, gdzie $a = \frac{1}{80}$.

Odpowiedź: Zależność $y(x)$ dla kamienia ma postać $y = \frac{1}{80} x^2$. Jest to równanie paraboli.

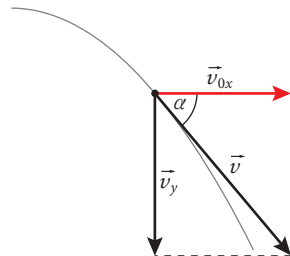
- c) Z równania $x = 20t$ odczytujemy, że prędkość wzdłuż osi x wynosi $v_{0x} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i jest stała. Z równania $y = 5t^2$ odczytujemy, że $0,5 \cdot g = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, więc $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. W kierunku pionowym ciało porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym, zatem aby obliczyć prędkość wzdłuż osi y , zastosujemy wzór: $v_y = g \cdot t = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2 \text{ s} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Rysujemy fragment toru ciała i zaznaczamy prędkości składowe: $\vec{v}_{0x}$ i $\vec{v}_y$ oraz wektor wypadkowy $\vec{v}$.

Ponieważ przyprostokątne w tym trójkącie prostokątnym mają takie same długości, więc kąt $\alpha = 45^\circ$.

Możemy też skorzystać z funkcji trygonometrycznej tangens:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_{0x}} = \frac{20 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{20 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1, \text{ czyli wartość kąta } \alpha = 45^\circ.$$



Odpowiedź: Wektor prędkości wypadkowej kamienia z kierunkiem osi x po czasie lotu $t = 2 \text{ s}$ tworzy kąt 45° .

■ Przykład 2.

Podczas treningu tenisista doskonalił zagrywkę – uderzał w piłkę rakietą tenisową poziomo na wysokości głowy $H = 1,8 \text{ m}$ nad ziemią. Przy prędkości początkowej $v_0 = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ skierowanej poziomo piłka uderzyła w ścianę znajdującą się w odległości $l = 12 \text{ m}$ od tenisisty.

- Oblicz czas lotu piłki do chwili uderzenia w ścianę oraz jej prędkość w kierunku poziomym i pionowym w chwili uderzenia.
- Na jakiej wysokości nad ziemią piłka uderzyła w ścianę?
- Jaką prędkość w kierunku poziomym zawodnik powinien nadać piłce, aby nie uderzyła ona bezpośrednio w ścianę?

Rozwiązanie

- a) Aby obliczyć czas trwania lotu piłki, korzystamy ze wzoru na ruch jednostajny w kierunku osi x : $x = v_0 t$, gdzie $x = l$. Po podstawieniu do wzoru, wyznaczeniu t i wykonaniu obliczeń otrzymujemy:

$$t = \frac{l}{v_0} \Rightarrow t = 0,48 \text{ s}$$

Prędkość w kierunku poziomym jest stała, ponieważ ruch w kierunku osi x jest ruchem jednostajnym:

$$v_x = v_0$$

$$v_x = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Prędkość w kierunku pionowym zmienia się tak jak w spadku swobodnym:

$$v_y = gt$$

$$v_y = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,48 \text{ s} = 4,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Odpowiedź: Piłka uderzyła w ścianę po $0,48 \text{ s}$. Uzyskała prędkości $v_x = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i $v_y = 4,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

- b)** Drogę piłki w kierunku pionowym obliczamy tak jak w przypadku spadku swobodnego, ze wzoru:

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

Ponieważ czas ruchu w kierunku poziomym i pionowym jest taki sam, wstawiamy wzór na czas wyznaczony w punkcie a): $t = \frac{l}{v_0}$. Stąd otrzymujemy:

$$y = \frac{gl^2}{2v_0^2}$$

Podstawiamy wartości liczbowe:

$$y = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (12 \text{ m})^2}{2 \cdot (25 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2} = 1,152 \text{ m}$$

Szukaną wysokość nad ziemią obliczamy, odejmując drogę przebytą przez piłkę od wysokości, na której piłka została uderzona:

$$h = H - y$$

Zatem:

$$h = 1,8 \text{ m} - 1,152 \text{ m} = 0,648 \text{ m}$$

Odpowiedź: Piłka uderzy w ścianę na wysokości 0,648 m nad ziemią.

- c)** Z warunków zadania wiadomo, że aby piłka nie uderzyła w ścianę, jej zasięg musi być mniejszy niż odległość od miejsca uderzenia piłki rakietą do ściany bądź jej równy. Korzystamy więc ze wzoru na zasięg rzutu poziomego:

$$Z = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

i zapisujemy warunek:

$$Z \leq l \Rightarrow v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}} \leq l$$

Aby ustalić wartość prędkości, po której nadaniu piłka nie uderzy w ścianę, wyznaczamy prędkość z powyższej nierówności. Po przekształceniach otrzymujemy:

$$v_0 \leq \sqrt{\frac{gl^2}{2H}}$$

Podstawiamy dane liczbowe:

$$v_0 \leq \sqrt{\frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (12 \text{ m})^2}{2 \cdot 1,8 \text{ m}}} \Rightarrow v_0 \leq 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Odpowiedź: Piłka nie uderzy w ścianę, jeżeli tenisista nada jej prędkość nie większą niż $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

■ Przykład 3.

Kopiąc piłkę leżącą na murawie boiska, piłkarz nadaje jej prędkość początkową $v_0 = 28 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ pod kątem $\alpha = 30^\circ$ do poziomu. Przyjmij, że piłkarz nie podkręcił piłki i pomini opory ruchu.

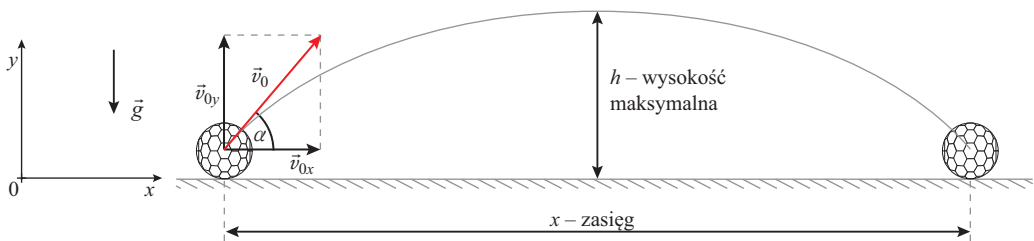
- Oblicz maksymalną wysokość, na jaką wznosi się piłka podczas ruchu.
- Oblicz odległość od miejsca kopnięcia do miejsca upadku piłki.
- Jaki kąt powinien tworzyć wektor prędkości początkowej, nadany piłce przez zawodnika, aby zasięg ruchu piłki był maksymalny?

Rozwiązanie

Rozkładamy wektor prędkości początkowej $\vec{v}_0$ na składowe:

$\vec{v}_{0x}$ – składowa pozioma prędkości,

$\vec{v}_{0y}$ – składowa pionowa prędkości (patrz rysunek).



Wzdłuż osi x piłka porusza się ruchem jednostajnym z prędkością $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$.

Wzdłuż osi y porusza się natomiast ruchem jednostajnie zmiennym (w pierwszej fazie jednostajnie opóźnionym, w drugiej jednostajnie przyspieszonym) z prędkością początkową $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$ i przyspieszeniem $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

- Z warunków początkowych wynika, że ruch piłki wzdłuż osi y opisują dwa równania:

$$y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} - \text{równanie położenia}$$

$$v_y = v_{0y} - gt - \text{równanie prędkości}$$

Piłka osiągnie maksymalną wysokość $y = h$ dla $v_y = 0$. Po wprowadzeniu tych wartości oraz $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$ do równań otrzymujemy:

$$h = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} \quad (1)$$

$$0 = v_0 \sin \alpha - gt \quad (2)$$

Z równania (2) wyznaczamy czas wznoszenia się piłki:

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

i podstawiamy do równania (1):

$$h = v_0 \sin \alpha \frac{v_0 \sin \alpha}{g} - \frac{g \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2}{2}$$

Ostatecznie wzór na maksymalną wysokość w rzucie ukośnym przyjmie postać:

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

Po wstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$h = \frac{(28 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 \sin^2 30^\circ}{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 9,8 \text{ m}$$

Odpowiedź: Piłka wzniesie się maksymalnie na wysokość 9,8 m.

- b)** Szukana odległość od miejsca kopnięcia do miejsca upadku piłki to zasięg rzutu ukośnego. Jest to droga, jaką piłka przebyła w kierunku poziomym ruchem jednostajnym z prędkością v_{0x} w czasie całego lotu:

$$t = t_w + t_s$$

gdzie: t_w – czas wznoszenia, t_s – czas spadania.

Ponieważ $t_w = t_s$, to czas lotu piłki obliczamy ze wzoru $t = 2 \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$ (czas wznoszenia się piłki został wyznaczony w punkcie a).

Droga w ruchu jednostajnym to zasięg lotu piłki, zatem:

$$x = v_{0x} t = v_0 \cos \alpha \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

Aby uprościć wzór, skorzystamy z tożsamości trygonometrycznej $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$. Ostatecznie wzór na zasięg przyjmuje postać:

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Po wstawieniu danych liczbowych otrzymujemy zasięg lotu piłki:

$$x = \frac{(28 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 \sin(2 \cdot 30^\circ)}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 67,9 \text{ m}$$

Odpowiedź: Piłka upadnie na boisko w odległości 67,9 m od miejsca, w którym ją kopnięto.

- c)** Chcemy wiedzieć, przy jakim kącie α zasięg piłki będzie maksymalny. Przeanalizujemy więc wzór na zasięg:

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Funkcja sinus przyjmuje maksymalną wartość:

$$\sin 2\alpha = 1 \quad \text{dla} \quad 2\alpha = 90^\circ$$

Wynika z tego, że wyrażenie na zasięg osiąga maksymalną wartość dla kąta 45° .

Odpowiedź: Piłka osiągnie maksymalny zasięg dla kąta 45° .

■ Przykład 4.

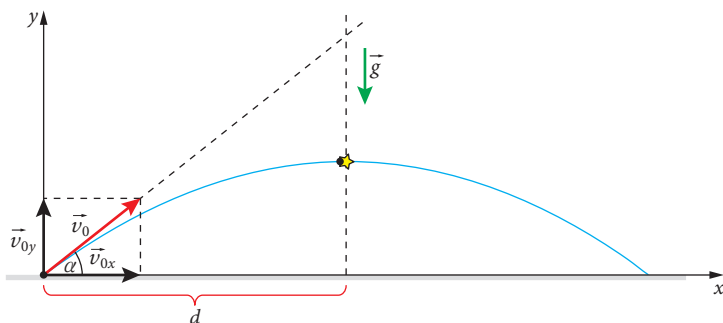
Strzelanie do rzutków to konkurencja sportowa polegająca na strzelaniu z broni palnej (śrutowej) w gliniany obiekt wyrzucany z automatycznej wyrzutni pod różnymi kątami i w różnych płaszczyznach. Jeżeli strzał jest celny, rzutka rozpada się w powietrzu.

Z wyrzutni pionowo w górę wystrzelono rzutkę, która po osiągnięciu maksymalnej wysokości $H = 45$ m zaczęła spadać swobodnie.

- a) Pod jakim kątem do poziomu należy ustawić lufę strzelby, aby pocisk wystrzelony z prędkością początkową $v_0 = 300 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ trafił w spadający obiekt? Linia pionowa, wzdłuż której spada rzutka, znajduje się w odległości $d = 45$ m od punktu, z którego wystrzelono pocisk. Przyjmij, że pocisk został wystrzelony w chwili osiągnięcia przez rzutkę maksymalnej wysokości.
- b) Z jaką prędkością pionową wystrzelono rzutkę?

Rozwiązanie

- a) Sporządzamy rysunek obrazujący sytuację opisaną w zadaniu.



Zapisujemy równania ruchu w kierunku pionowym i poziomym dla pocisku i dla rzutki:

$$\begin{cases} y_1 = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \\ y_2 = H - \frac{gt^2}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = v_0 \cos \alpha \cdot t \\ x_2 = d \end{cases}$$

Zderzenie ciał nastąpi, gdy współrzędne będą równe: $y_1 = y_2$, $x_1 = x_2$.

$$y_1 = y_2$$

$$v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = H - \frac{gt^2}{2}$$

$$v_0 \sin \alpha \cdot t = H$$

$$x_1 = x_2$$

$$v_0 \cos \alpha \cdot t = d$$

$$\begin{cases} t = \frac{d}{v_0 \cos \alpha} \\ t = \frac{H}{v_0 \sin \alpha} \end{cases} \rightarrow \frac{d}{v_0 \cos \alpha} = \frac{H}{v_0 \sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{d} \quad \operatorname{tg} \alpha = 1 \quad \alpha = 45^\circ$$

Odpowiedź: Aby rzutka została trafiona, pocisk należy wystrzelić pod kątem 45° .

b) Prędkość końcowa rzutki na wysokości maksymalnej wynosi zero.

$$\begin{cases} H = v_{0rz} t - \frac{gt^2}{2} \\ 0 = v_{0rz} - gt \end{cases}$$

Z układu równań otrzymujemy:

$$v_{0rz} = \sqrt{2Hg} \quad v_{0rz} = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Odpowiedź: Aby rzutka osiągnęła maksymalną wysokość $H = 45 \text{ m}$, należy ją wyrzucić w górę z prędkością początkową $v_{0rz} = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Pytania i zadania

• • **3.2.1.** Z wieży wystrzelono poziomo pocisk, którego współrzędne x i y są opisane równaniami:
P1 $x = 40t$ i $y = 5t^2$.

- a)** Oblicz, po jakim czasie od wystrzelenia pocisku jego prędkość pozioma v_{0x} będzie równa prędkości w kierunku pionowym v_y .
b) Oblicz współrzędną x i współrzędną y pocisku po tym czasie.

• • **3.2.2.** Dziecko wyrzuciło piłkę znad głowy, z wysokości $H = 1,25 \text{ m}$, w kierunku poziomym.
P1 Piłka uderzyła o podłogę pod kątem $\alpha = 45^\circ$ do poziomu. Oblicz prędkość początkową piłki oraz jej prędkość w chwili uderzenia o podłogę.

• • **3.2.3.** Kamień rzucony poziomo z wysokiego brzegu po czasie $t = 0,5 \text{ s}$ osiągnął prędkość
P1 $n = 1,5$ raza większą od prędkości początkowej. Z jaką prędkością rzucono kamień?

• • **3.2.4.** Chłopiec wyrzucił kulę znad głowy z wysokości $H = 1,8 \text{ m}$ nad ziemią. Przy prędkości początkowej $v_0 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ skierowanej poziomo kulka uderzyła w ścianę znajdującą się w odległości $l = 3 \text{ m}$ od chłopca.

- a)** Oblicz czas lotu kulki do chwili uderzenia w ścianę oraz wartość jej prędkości v w chwili uderzenia.
b) Na jakiej wysokości od powierzchni ziemi kulka uderzyła w ścianę?
c) Z jaką prędkością chłopiec powinien wyrzucić kulę poziomo, aby nie uderzyła ona bezpośrednio w ścianę?

• **3.2.5.** Podczas strzelania do tarczy umieszczonej w odległości $l = 10 \text{ m}$ od lufy pistoletu pneumatycznego pocisk trafił w odległości $d = 1 \text{ cm}$ poniżej środka tarczy. Oblicz prędkość pocisku w chwili opuszczania lufy. Załóż, że lufa pistoletu w tym momencie była ustawiona poziomo, a strzelec celował w środek tarczy.
P2

- • **3.2.6.** Z karabinka sportowego strzelano w kierunku deski sosnowej. Sprawdzano, czy pocisk przebije deskę ustawioną w odległości $l = 60$ m od lufy. Pocisk został wystrzelony z prędkością $v_0 = 350 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ w kierunku poziomym.



- a) Ile czasu trwał lot pocisku?
b) O ile milimetrów opadł pocisk w trakcie lotu?

- **3.2.7.** Kamień rzucony poziomo na Ziemi z pewnej wysokości z prędkością v_0 uzyskał zasięg $Z = 4$ m. Oblicz, ile razy większy niż na Ziemi byłby zasięg takiego rzutu na Księżycu, a ile razy na Marsie. Przyspieszenia grawitacyjne na Ziemi, Księżycu i Marsie wynoszą odpowiednio: $g_Z = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $g_K = 1,62 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $g_M = 3,69 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

- • **3.2.8.** Z wieży o wysokości $H = 45$ m wystrzelono z procy kamień z prędkością $v_0 = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ w kierunku poziomym. Oblicz jego prędkość w chwili uderzenia o ziemię. Ustal kierunek, jaki wektor prędkości tworzy z poziomem tuż przed uderzeniem kamienia w ziemię.

- • • **3.2.9.** Na boisku do siatkówki o długości $l = 18$ m siatkę zawieszono na wysokości $h = 2,43$ m. Piłka została zaserwowana na wysokości $H = 3,23$ m, a uderzenie siatkarza nadało jej prędkość poziomą. Po uderzeniu piłka leciała wzdłuż wewnętrznej krawędzi linii bocznej boiska. W obliczeniach pominiń rozmiary piłki.

- a) Szczególnie trudny w odbiorze jest serwis, który przechodzi tuż nad siatką. Jaką prędkość należałoby nadać piłce serwowanej na podanej wysokości, aby wykonać taki serwis? Wynik wyraż w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
b) W jakiej odległości od siatki upadnie piłka zaserwowana z prędkością obliczoną w punkcie a), jeżeli nie zostanie odebrana? Czy będzie to piłka autowa?

- • **3.2.10.** Golfista uderzył w piłeczkę kijem i nadał jej prędkość $v_0 = 200 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ pod kątem $\alpha = 30^\circ$ do poziomu. Po jakim czasie piłeczka osiągnęła maksymalną wysokość? Oblicz tę wysokość oraz zasięg rzutu piłeczki. Pomiń opory ruchu.

- • **3.2.11.** Tenista stołowy odbił piłeczkę tuż przy brzegu stołu z prędkością początkową $v_0 = 5,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ pod pewnym kątem do poziomu. Oblicz kąt między wektorem prędkości początkowej v_0 a blatem stołu, jeśli zasięg lotu piłeczki jest równy długości stołu $d = 2,72$ m.

- • **3.2.12.** Podczas treningu tenisista odbija piłeczkę od pionowej ściany. W odległości $l = 8$ m od ściany nadaje piłce prędkość początkową $v_0 = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ pod kątem $\alpha = 45^\circ$ do poziomu, po czym piłka uderza w ścianę. Oblicz kąt, jaki wektor prędkości tworzy ze ścianą, oraz prędkość piłki w chwili, gdy uderza ona o ścianę.

● ● ● **3.2.13.** Wylot wyrzutni do piłek tenisowych jest ustawiony tuż nad ziemią pod kątem $\alpha = 60^\circ$ do poziomu. Oblicz prędkość, z jaką wyrzucane są piłki, oraz czas ich lotu, jeśli padają na kort w odległości $x = 15$ m od wyrzutni.

P3

● ● ● **3.2.14.** Rzutka ratunkowa to długa lina obciążona na jednym końcu ciężarkiem połączonym z pływakiem, którą rzuca się w kierunku osoby tonącej. Kandydaci na żeglarza jachtowego ćwiczą umiejętność jej stosowania na lądzie, rzucając rzutką do środka koła ratunkowego o średnicy wewnętrznej $d = 0,5$ m. Odległość od linii wyrzutu do środka koła wynosi $l = 21$ m. Rzuty wykonuje się w sposób dowolny.

P3

- Wykonując odpowiednie obliczenia, sprawdź, czy rzutka rzucona przez żeglarza w kierunku koła z prędkością $v_0 = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ z wysokości $H = 0,9$ m w kierunku poziomym wpadnie do jego środka.
- Co się stanie, gdy żeglarz wyrzuci rzutkę z taką samą prędkością początkową i z tej samej wysokości jak w punkcie a), ale pod kątem $\alpha = 30^\circ$ do poziomu?



● ● ● **3.2.15.** Pocisk wystrzelono z prędkością początkową pod kątem $\alpha = 30^\circ$ do poziomu. Linia pionowa, wzdłuż której wznosi się i spada rzutka, znajduje się w odległości $d = 100$ m od punktu, z którego strzelano. Z jakiej wysokości rzutka powinna spadać (jaką powinna osiągnąć maksymalną wysokość), aby trafił ją pocisk wystrzelony w chwili, gdy znajdowała się w najwyższym punkcie? Przyjmij, że pocisk i rzutkę wystrzelono z tej samej wysokości nad ziemią.

P4

● ● ● **3.2.16.** Z wieży o wysokości $H = 12,8$ m oddano strzał w kierunku poziomym z prędkością $v_1 = 14 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ w kierunku rzutki wystrzelonej z punktu położonego u podnóża wieży z prędkością v_2 pod kątem α . Pocisk i rzutka poruszają się w tej samej płaszczyźnie i rozpoczęły ruch w tej samej chwili.

P4

- Ułóż równania położenia rzutki i pocisku. Wymień warunki, jakie muszą spełniać współrzędne położenia, aby pocisk trafił w rzutkę.
- Powyżej jakiej wartości kąta α rzutka może zostać trafiona przez pocisk?
- Sprawdź, czy rzutka zostanie trafiona, jeżeli wystrzeli się ją pod kątem $\alpha = 45^\circ$. Jeżeli tak, oblicz prędkość, z jaką należałoby wystrzelić rzutkę.

3.3. Prędkość w różnych układach odniesienia

Podręcznik
rozdz. 3.3

■ Przykład 1.

Chłopiec siedzi na tarasie widokowym promu płynącego prostoliniowo przez jezioro z prędkością $u = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i rzuca piłki w stronę kolegów. Pierwszą piłkę wyrzuca poziomo w kierunku ruchu promu, a drugą również poziomo przeciwnie do jego ruchu. Wartości prędkości obydwu piłek względem promu są takie same i wynoszą $v' = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Oblicz prędkości obu piłek względem jeziora.

Rozwiązanie

Rozwiązanie zadania wymaga składania prędkości ciała i układu odniesienia:

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}'$$

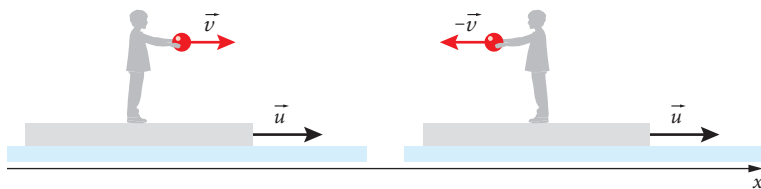
gdzie:

$\vec{u}$ – prędkość ruchomego układu odniesienia (promu) względem nieruchomego układu odniesienia (jeziora),

$\vec{v}'$ – prędkość ciała względem ruchomego układu odniesienia (promu),

$\vec{v}$ – prędkość ciała względem nieruchomego układu odniesienia (jeziora).

Pamiętajmy, że wyznaczanie wymaga dodawania wektorów prędkości, a nie ich wartości. W treści zadania podane są wartości prędkości, zatem musimy przyjąć jakiś układ współrzędnych. Możemy ustalić, że zwrot osi układu współrzędnych będzie zgodny ze zwrotem wektora prędkości promu.



Możemy więc zapisać równania dla piłek rzuconych zgodnie ze zwrotem prędkości promu i przeciwnie do niego:

$$\vec{v}_1 = \vec{u} + \vec{v}'$$

$$\vec{v}_2 = \vec{u} + (-\vec{v}')$$

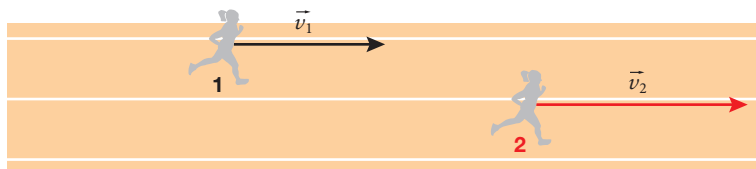
Po podstawieniu danych liczbowych otrzymamy:

$$v_1 = 17 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad v_2 = 7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Odpowiedź: Gdy piłka została rzucona w stronę, w którą porusza się prom, to względem jeziora jej prędkość wynosiła $17 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a gdy została rzucona w stronę przeciwną – jej prędkość względem wody miała wartość $7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

■ Przykład 2.

Na sąsiednich torach prostoliniowego odcinka bieżni dwie zawodniczki wystartowały równocześnie i biegą w tę samą stronę – pierwsza z prędkością $v_1 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, druga z prędkością $v_2 = 7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ względem bieżni. Oblicz, z jaką prędkością zawodniczki poruszają się względem siebie. Z jaką prędkością zbliżałyby się do siebie zawodniczki, gdyby biegły z naprzeciwka z prędkościami o tych samych wartościach?



Rozwiązanie

Na początek ustalmy, że wektory przyjmują wartości dodatnie, gdy są zwrócone w stronę, w którą biegą zawodniczki w pierwszej części zadania. Zatem oś układu współrzędnych dla sytuacji pokazanej na rysunku w treści zadania jest zwrócona w prawo.

Aby odpowiedzieć na pierwsze pytanie, należy związać nieruchomy układ odniesienia z jedną z zawodniczek. Przyjmiemy, że będzie to zawodniczka pierwsza, która względem bieżni ma prędkość $v_1 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

W tej sytuacji z punktu widzenia zawodniczki pierwszej: zawodniczka jest nieruchoma, bieżnia „ucieka” do tyłu z prędkością $-v_1$, po bieżni porusza się zawodniczka druga z szukaną prędkością v_{12} .

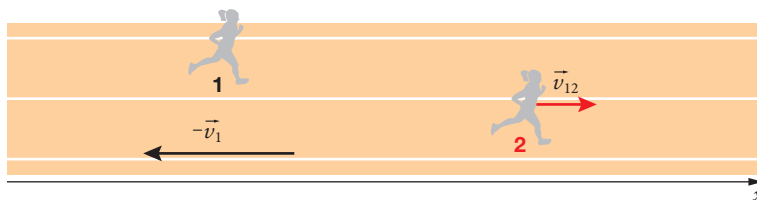
Dla układu związanego z pierwszą zawodniczką możemy zapisać:

$$\vec{v}_{12} = -\vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymamy

$$v_{12} = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 7 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Oznacza to, że zawodniczka pierwsza widzi przed sobą oddalającą się zawodniczkę drugą, która porusza się w stronę przeciwną do „uciekającej” do tyłu bieżni.



Zwróćmy uwagę, że nieco inaczej sytuacja wygląda z punktu widzenia drugiej zawodniczki.

Jeśli zwiążemy z nią nieruchomy układ odniesienia, to prędkość zawodniczki pierwszej względem niej będzie równa:

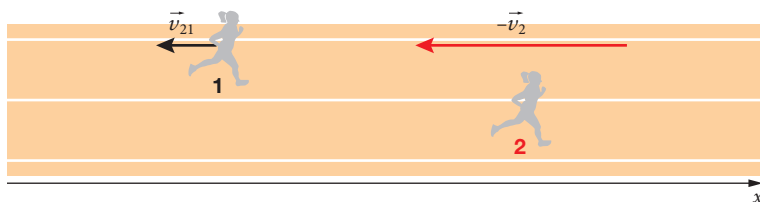
$$\vec{v}_{21} = -\vec{v}_2 + \vec{v}_1$$

gdzie $-v_2$ to prędkość „uciekającej” do tyłu bieżni, v_1 – prędkość pierwszej zawodniczki.

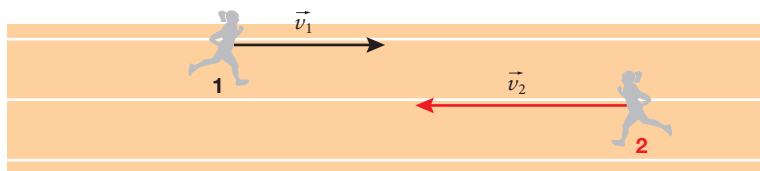
Zatem

$$v_{21} = -7 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Znak minus przy wyniku końcowym oznacza, że z punktu widzenia zawodniczki drugiej pierwsza zawodniczka porusza się w tę samą stronę co „uciekająca” bieżnia.



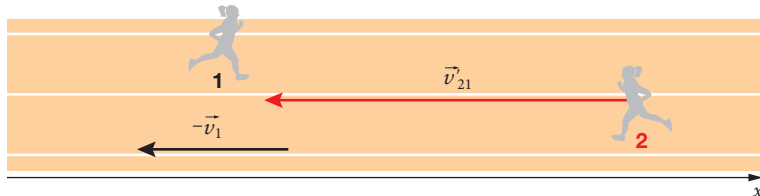
Rozpatrzmy sytuację, gdy zawodniczki będą ku sobie.



Aby odpowiedzieć na drugie pytanie postawione w treści zadania, znowu należy wybrać układ odniesienia związany z jedną z biegaczek. W zależności od wyboru zawodniczki oraz zwrotu osi układu współrzędnych wyniki będą się różnić znakiem. Przyjmijmy układ odniesienia związany z zawodniczką pierwszą i zwrot osi układu współrzędnych zwrócony w prawo.

W takiej sytuacji zawodniczka pierwsza jest nieruchoma, bieżnia „ucieka” do tyłu i w tę samą stronę co bieżnia porusza się druga zawodniczka.

$$\vec{v}'_{21} = -\vec{v}_1 + (-\vec{v}_2), \quad \vec{v}'_{21} = -12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Odpowiedź: Gdy zawodniczki będą w tę samą stronę, prędkość jednej względem drugiej wynosi $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Gdy będą ku sobie, wartość prędkości zawodniczek względem siebie to $12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. W zależności od wyboru zwrotu osi układu współrzędnych oraz tego, z którą z zawodniczek związany zostanie układ odniesienia, prędkości zawodniczek względem siebie różnią się znakiem (zwrotem wektora).

■ Przykład 3.

Człowiek stojący na poboczu jezdni obserwuje platformę, która jedzie ze stałą prędkością $v_1 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. W poprzek platformy przeciągana jest skrzynia ze stałą prędkością $v_2 = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (rys. a).

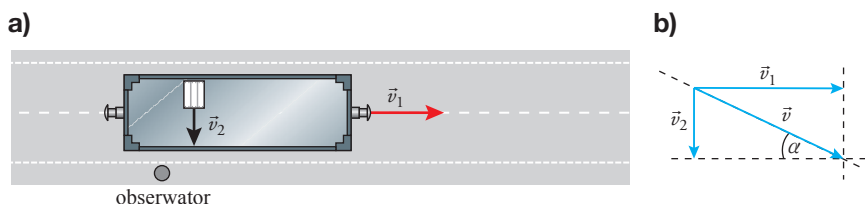
- Oblicz prędkość ruchu skrzyni z punktu widzenia człowieka na poboczu jezdni (obserwatora).
- Oblicz kąt utworzony przez kierunek ruchu skrzyni i pobocze jezdni, po której jedzie platforma.

Rozwiązanie

- Stosujemy prawo składania prędkości: $\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}'$. Zidentyfikujmy wektory prędkości:

$$\vec{u} = \vec{v}_1, \quad \vec{v}' = \vec{v}_2$$

$\vec{v}$ – prędkość skrzyni względem pobocza



Po naszkicowaniu wektorów prędkości otrzymujemy trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne to prędkości $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$, a przeciwprostokątna to szukana prędkość $\vec{v}$ (rys. b). Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla tego trójkąta:

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \Rightarrow v = 5,02 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Odpowiedź: Prędkość skrzyni względem obserwatora jest równa $5,02 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

- Chcąc ustalić kąt, jaki kierunek ruchu skrzyni tworzy z linią pobocza, definiujemy jedną z funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α , np. funkcję tangens:

$$\text{tg} \alpha = \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow \text{tg} \alpha = 0,1$$

Z tablic matematycznych odczytujemy, że wartości tej funkcji równej 0,1 odpowiada kąt $\alpha \approx 5,71^\circ$.

Odpowiedź: Kierunek ruchu skrzyni tworzy z poboczem jezdni kąt około $5,71^\circ$.

■ Przykład 4.

Stara płyta gramofonowa o promieniu $R = 10 \text{ cm}$ wykonuje jeden obrót w czasie $T = 2 \text{ s}$. Wyobraź sobie, że wzdłuż promienia płyty ze stałą prędkością $v = 4 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ względem niej porusza się żuk. Naszkicuj tor ruchu żuka w czasie $t = 2,5 \text{ s}$ względem obserwatora stojącego obok gramofonu.



Rozwiązanie

Wybieramy przedziały czasu $\Delta t = 0,25$ s (można wybrać krótsze) i na średnicy płyty „odmierzamy” drogi żuka Δs w tych przedziałach czasu: $\Delta s = v\Delta t$. Po podstawieniu danych:

$$\Delta s = 4 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot 0,25 \text{ s} = 1 \text{ cm}$$

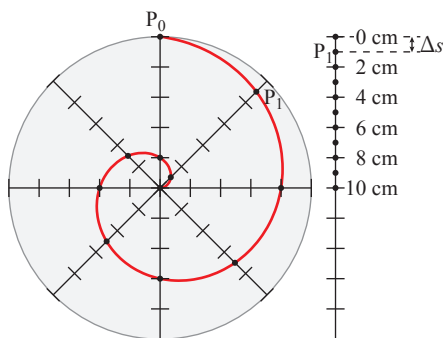
Następnie obliczamy kąt, o jaki tarcza gramofonu obróci się w tym czasie, tj. $\Delta t = 0,25$ s. Korzystamy z proporcji:

$$T - 2\pi \text{ [rad]}$$

$$\Delta t - x \text{ [rad]}$$

Kąt ma wartość $x = \frac{\pi}{4}$ [rad].

Rysujemy schematycznie płytę gramofonową, czyli koło, na którym zaznaczymy średnice odległe względem siebie o $\frac{\pi}{4}$ rad. Dla ułatwienia na średnicach odmierzymy „podziałkę” w skali, w której jedna jednostka odpowiada 2 cm na płycie. Obie-
ramy punkt P_0 na jednej z zaznaczonych średnic na krawędzi okręgu odpowiadający położeniu żuka w chwili $t_0 = 0$, a następnie punkt P_1 obrazujący położenie owada po czasie $\Delta t = 0,25$ s, gdy żuk przemieścił się o 1 cm, a płyta obróciła się o $\frac{\pi}{4}$ rad. Kolejne punkty zaznaczamy, postępując analogicznie. Punkty łączymy linią ciągłą (nie łamaną). Jest to tor ruchu żuka względem obserwatora na zewnątrz płyty.



Obserwator stojący obok gramofonu zakreślił tor ruchu żuka jako spiralę, zwaną spiralą Archimedesusa. W tym czasie żuk przejdzie względem płyty po prostej, od jej brzegu do środka.

Pytania i zadania**P1**

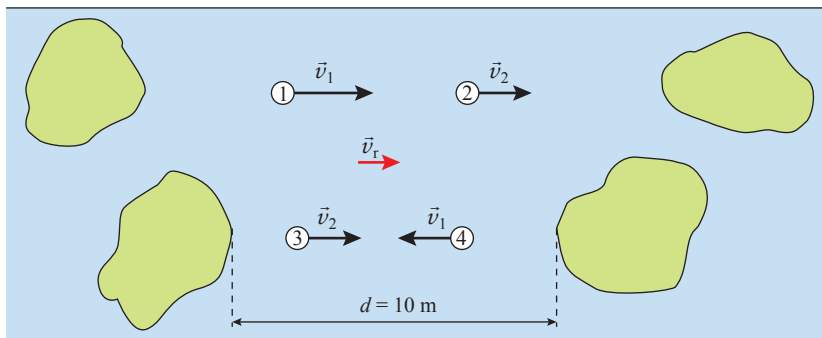
- 3.3.1.** Ruchomy chodnik na lotnisku porusza się z prędkością $v_{\text{ch}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Pasażer idzie po nim z prędkością $v_p = 1,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz prędkość pasażera względem osoby siedzącej na krześle przy ścianie budynku lotniska w dwóch sytuacjach.

- Pasażer idzie w tę samą stronę, w którą przesuwa się taśma chodnika.
- Pasażer zawrócił i porusza się w stronę przeciwną.

**P2**

- 3.3.2.** Na prostym odcinku toru kolarskiego zawodnik pierwszy jedzie z prędkością $v_1 = 30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a za nim zawodnik drugi z prędkością $v_2 = 36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Z jaką prędkością zawodnik drugi przybliża się do zawodnika pierwszego? Z jaką prędkością zbliżaliby się do siebie, gdyby jechali naprzeciw siebie?

- ● **3.3.3.** Na rzece znajduje się kilka wysepek, na których gniazdują kaczki. Ptaki pływają między wyspami. Kaczki 1. i 4. płyną względem wody z prędkością o wartości $v_1 = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a kaczki 2. i 3. – z prędkością o wartości $v_2 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (patrz rysunek). Woda w rzece płynie z prędkością $v_r = 0,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



- Oblicz prędkość każdej z kaczek względem brzegu.
- Oblicz prędkość, z jaką poruszają się względem siebie kaczki 1. i 2. oraz 3. i 4.
- Kaczki 3. i 4. w tej samej chwili opuściły swoje wysepki. Ustal, po jakim czasie się spotkają, jeżeli odległość między ich wysepkami wynosi $d = 10 \text{ m}$.

- **3.3.4.** Podczas wyścigu kolarskiego grupa zawodników jedzie z prędkością $v_1 = 45 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

- Jeden z zawodników podjął próbę ucieczki i oddał się od reszty kolarzy z prędkością $v_2 = 15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Oblicz jego prędkość względem widza stojącego na poboczu jezdni.
- Wóz transmisyjny porusza się z prędkością $v_3 = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Oblicz, z jaką prędkością zbliża się on do peletonu, kiedy wóz i peleton jadą naprzeciwko siebie.

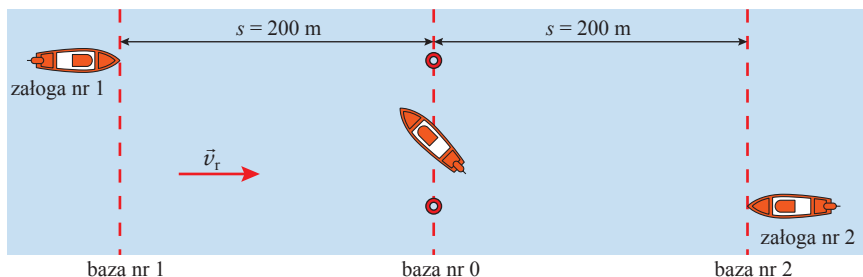


- ● **3.3.5.** Ciężarówka o długości $l = 15 \text{ m}$ jedzie wyznaczonym pasem ruchu, gdy wyprzedza ją motocykl. W czasie manewru wyprzedzania motocykl przejechał względem pojazdu stojącego na poboczu drogę $s_m = 60 \text{ m}$. Jaką drogę przejechała w tym samym czasie ciężarówka?

- ● **3.3.6.** Podczas gry w paintball jeden z graczy ucieka z prędkością $v_1 = 10,8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Gracz z drużyny przeciwnej goni go z prędkością $v_2 = 12,6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Gdy odległość między nimi wynosi $d = 20 \text{ m}$, drugi gracz strzela. Sprężone powietrze wyrzuca poziomo kulkę wypełnioną farbą z prędkością $v_3 = 95 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ względem drugiego gracza. Po jakim czasie od tego momentu pierwszy gracz zostanie wyeliminowany z gry, jeżeli kulka z farbą go trafi? Załóż, że obaj gracze biegli po prostej jeden za drugim.

- • **3.3.7.** Podczas treningu Wodnego Pogotowia Ratunkowego przygotowano na rzece dwie bazy dla załóg łodzi motorowych i bazę nr 0 (patrz rysunek).

Załogi motorówek mają dopłynąć do koła ratunkowego, zabrać je na pokład i wrócić do swojej bazy. Po sygnale dźwiękowym z zacumowanej łódki w bazie nr 0 wrzucono do wody dwa koła ratunkowe. W tej samej chwili ruszyły łodzie. Obie mają poruszać się z prędkością $v_m = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ względem wody. Prędkość wody w rzece $v_r = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



- Ustal na podstawie obliczeń, który zespół dotrze do koła ratunkowego jako pierwszy, a który jako pierwszy powróci do swojej bazy. Pomiń czas zawracania łodzi.
 - Sprawdź, wykonując odpowiednie obliczenia, czy wynik zawodów się zmieni, jeśli koła ratunkowe zostaną przywiązane do łodzi zakotwiczonej w bazie nr 0.
- • • **3.3.8.** Samochód osobowy wyprzedza z przyspieszeniem $a_s = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ autobus o długości $l = 8 \text{ m}$, który również rozpędza się z przyspieszeniem $a_a = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. W chwili, gdy przody pojazdów zrównały się ze sobą, prędkość samochodu wynosiła $v_{ks} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
 - Jaka była prędkość samochodu v_{0s} , gdy jego przód i tył autobusu znajdowały się w jednej linii, jeśli wiadomo, że prędkość autobusu w tym momencie wynosiła $v_{0a} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$?
 - Ile czasu minęło od momentu, w którym przód samochodu osobowego zrównał się z tyłem autobusu, do chwili, gdy przody obu pojazdów się zrównały?
 - Sporządź w jednym układzie współrzędnych wykresy prędkości od czasu samochodu i autobusu. Zinterpretuj otrzymane wyniki.

Uwaga. Zadanie ma dwa rozwiązania.

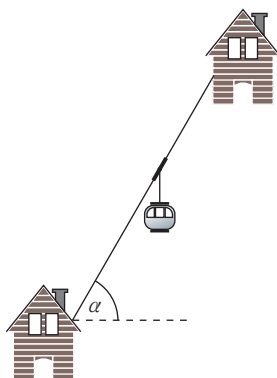
- • • **3.3.9.** Dwa samochody: osobowy o długości $l_1 = 2 \text{ m}$ i ciężarowy o długości $l_2 = 10 \text{ m}$, poruszają się po równoległych pasach ruchu. Gdy jadą w tę samą stronę, pierwszy co $t_1 = 2 \text{ s}$ oddala się od drugiego o $s_1 = 20 \text{ m}$, natomiast gdy z prędkościami o takich samych wartościach nadjeżdżają z naprzeciwka, co $t_2 = 3 \text{ s}$ zbliżają się do siebie o $s_2 = 150 \text{ m}$. Ustal, jakie wartości wskazują prędkościomierze obu pojazdów i jak długo trwają manewry wyprzedzania i mijania.

P3

- **3.3.10.** Dwa oddalające się od siebie odrzutowe samoloty pozostawiają smugi na niebie. Pierwsza powstaje za Boeingiem 747 lecącym z prędkością $v_1 = 900 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ w kierunku południowym, druga – za dronem wojskowym lecącym z prędkością $v_2 = 2300 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ w kierunku zachodnim. Ustal, w jakim kierunku i z jaką prędkością będzie się poruszał Boeing względem drona. Przyjmij, że obydwa samoloty znajdują się blisko siebie i lecą na tej samej wysokości.

- ● **3.3.11.** Gondola górskiej kolejki linowej wjeżdża z dolnej stacji na szczyt góry. Lina holująca tworzy z poziomem kąt $\alpha = 60^\circ$. W maszynowni linie nadawana jest prędkość $v = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Przejazd na szczyt trwa $t = 5 \text{ min}$. Oblicz prędkość, z jaką gondola wznosi się w kierunku pionowym oraz różnicę wysokości między dolną a górną stacją kolejki.

P3



- **3.3.12.** Po obfitych deszczach rwący nurt w korycie afrykańskiej rzeki o szerokości $d = 36 \text{ m}$ niesie wodę z prędkością $v_1 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Antylopa gnu przeprawia się na drugi brzeg. Jej prędkość względem wody wynosi $v_2 = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i jest prostopadła do brzegu.

P3

- a) Ustal, w jakim kierunku względem brzegu płynie antylopa, i oblicz jej prędkość względem brzegu.
- b) W chwili, gdy antylopa rozpoczęła przeprawę, z miejsca po przeciwnej stronie rzeki wzdłuż linii brzegu rusza krokodyl. Oblicz prędkość drapieżnika i drogę, jaką musi pokonać, aby zaatakować antylopę wychodzącą z wody.

- ● **3.3.13.** Prom Kazimierz Dolny–Janowiec pływa wzdłuż liny rozciągniętej między przystaniami po przeciwnych brzegach Wisły. Lina jest prostopadła do linii brzegowej. Pod jakim kątem względem brzegu rzeki należy skierować dziób promu, aby płynąć w kierunku wyznaczonym przez linę? Prędkość wody w Wiśle przy średnim stanie wody wynosi $v_1 = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a prom pływa z prędkością $v_2 = 27 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ (około 15 węzłów) względem wody.

P3



- ● **3.3.14.** W czasie ulewy było bezwietrznie. Pasażer autobusu jadącego po prostej drodze ze stałą prędkością $v = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ obserwował, jak krople deszczu pozostawiają na bocznej szybie ślad, który tworzy z pionem kąt $\alpha = 60^\circ$. Oblicz prędkość kropli deszczu na bocznej szybie względem pasażera, gdy autobus zatrzymał się na przystanku.

P3

- **3.3.15.** Podróżując samochodem jako pasażer, przyglądasz się ruchowi pojazdu jadącego po równoległym pasie ruchu i wyprzedzającego twój samochód. Pojazd ten następnie hamuje i zostaje w tyle, a po pewnym czasie znowu cię wyprzedza. Naskicuj tor tego pojazdu względem siebie oraz względem obserwatora stojącego nieruchomo na poboczu drogi. Omów różnicę między narysowanymi torami ruchu.

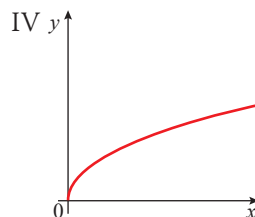
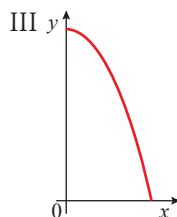
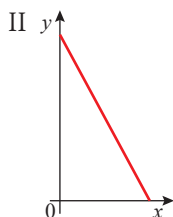
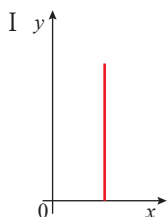
P4

- **3.3.16.** W pociągu jadącym ze stałą prędkością chłopiec rzucił piłkę pionowo do góry. Naskicuj tory lotu tej piłki:

P4

- a) widziany przez obserwatora w pociągu,
- b) widziany przez obserwatora stojącego na peronie, względem którego pociąg porusza się ze stałą prędkością.

- P4** • **3.3.17.** W pociągu jadącym ze stałą prędkością chłopiec upuścił piłkę. Na którym rysunku przedstawiono tor ruchu piłki widziany przez obserwatora znajdującego się w wagonie, a na którym – widziany przez obserwatora stojącego na łące, obok przejeżdżającego pociągu? Uzasadnij swój wybór.



- P4** • **3.3.18.** Ruch ciała to zmiana jego położenia względem wybranego układu odniesienia. Wiedział już o tym Galileusz, który podał przykłady względności torów w dziele „Dialog o dwóch najważniejszych układach świata – ptolemeuszowym i kopernikowskim”. Mapa ilustruje tor ruchu Marsa na tle gwiazd w latach 2009–2010.



Wyjaśnij, dlaczego na niebie oglądanym z Ziemi planeta ta zakresła skomplikowany tor z charakterystycznymi „pętlami”. Jaki układ odniesienia należałoby przyjąć, aby ten tor nie tworzył „pętli”?

- P4** • **3.3.19.** Płyta gramofonowa o promieniu $R = 8$ cm wykonuje jeden obrót w czasie $T = 4$ s. Wzdłuż jej średnicy porusza się mrówka z prędkością $v = 4 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ względem płyty. Naskicuj jej tor ruchu względem obserwatora stojącego obok gramofonu w ciągu $t = 4$ s, tzn. w czasie pokonywania przez owada całej średnicy płyty.
- P4** • **3.3.20.** Płyta gramofonowa o średnicy $d = 20$ cm wykonuje jeden obrót w czasie $T = 2$ s. Nad nią ruchem jednostajnym prostoliniowym z prędkością $v = 10 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ przelatuje mucha. Leci ona w płaszczyźnie poziomej, równoległe do tarczy, wzdłuż jej średnicy. Nakreśl tor ruchu muchy względem punktu obranego na krawędzi płyty.

3.4. Ruch po okręgu

Podręcznik
rozdz. 3.4

■ Przykład 1.

W pralce można włączyć kilka trybów wirowania. Wykonano dwa prania. W pierwszym, aby ubrania nie były pogniecione, ustawiono niezbyt intensywne wirowanie na $n_1 = 600$ obrotów w ciągu $t = 1$ min. W drugim praniu wirowanie ustawiono na $n_2 = 1500$ obrotów w ciągu minuty. Oblicz czas jednego obrotu bębna pralki i częstotliwość jego obrotów przy wolnym i szybkim wirowaniu.

Rozwiązanie

Czas jednego obrotu bębna pralki to okres T . Korzystamy więc ze związku:

$$T = \frac{t}{n}$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy dla wolnego wirowania:

$$T_1 = \frac{1 \text{ min}}{600} = \frac{60 \text{ s}}{600} = 0,1 \text{ s}$$

Częstotliwość f w ruchu po okręgu to liczba okrążeń wykonanych przez ciało w jednostce czasu, a w sytuacji opisanej w zadaniu jest to ilość obrotów wykonanych przez bęben w jednostce czasu.

Częstotliwość jest równa odwrotności okresu:

$$f_1 = \frac{1}{T_1} = 10 \text{ Hz}$$

Podobnie możemy obliczyć okres i częstotliwość dla szybkiego wirowania.

Zwróć uwagę, że częstotliwość można obliczyć od razu bez wcześniejszego liczenia okresu, korzystając ze wzoru:

$$f_2 = \frac{n_2}{t}$$

Po podstawieniu danych liczbowych dla szybkiego wirowania otrzymujemy:

$$T_2 = \frac{1 \text{ min}}{1500} = \frac{60 \text{ s}}{1500} = 0,04 \text{ s}$$

$$f_2 = \frac{1500}{1 \text{ min}} = \frac{1500}{60 \text{ s}} = 25 \frac{1}{\text{s}} = 25 \text{ Hz}$$

Odpowiedź: Przy wolnych obrotach bęben pralki wykonuje jeden obrót w czasie $T_1 = 0,1$ s, a częstotliwość obrotów to $f_1 = 10$ Hz. Natomiast przy szybkim wirowaniu okres wynosi $T_2 = 0,04$ s, a częstotliwość obrotów wynosi $f_2 = 25$ Hz.

■ Przykład 2.

Kółka kosiarki mają średnicę 21 cm. Po włączeniu napędu kosiarka porusza się z prędkością $v = 4,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Oblicz częstotliwość obrotów kółek.

Rozwiązanie

Dane zawarte w treści zadania należy wyrazić w jednostkach układu SI:

$$\text{średnica kółka } d = 21 \text{ cm} = 0,21 \text{ m}$$

$$\text{prędkość } v = 4,5 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 1,25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Kosiarka w swoim ruchu postępowym porusza się z taką samą prędkością, z jaką poruszają się punkty na obwodzie jej kół. Wyrażamy tę prędkość wzorem:

$$v = 2\pi fr$$

Średnica koła jest równa dwóm promieniom:

$$d = 2r, \quad \text{czyli} \quad r = \frac{d}{2}$$

więc:

$$v = 2\pi \frac{d}{2} f = \pi f d$$

Po przekształceniu wzoru otrzymujemy wzór na częstotliwość:

$$f = \frac{v}{\pi d}$$

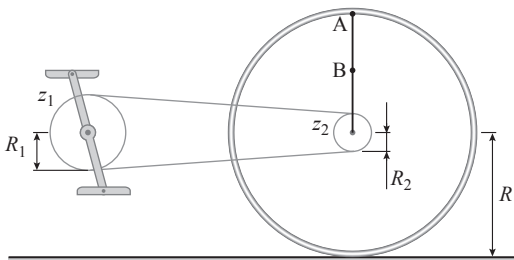
Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$f = \frac{1,25 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{\pi \cdot 0,21 \text{ m}} \approx 1,9 \text{ Hz}$$

Odpowiedź: Koło kosiarki obraca się z częstotliwością około 1,9 Hz.

■ Przykład 3.

Przerzutka w rowerze jest ustawiona tak, aby przednia tarcza zębata (przy pedałach) miała $z_1 = 42$ zęby i promień $R_1 = 8,5$ cm, a tylna – dwa razy mniej zębów niż przednia (odległość między zębami w przedniej i tylnej tarczy jest taka sama i wynosi $d = \frac{1}{2}$ cala). Promień koła roweru $R = 0,33$ m. Rowerzysta jedzie ruchem jednostajnym prostoliniowym z prędkością $v = 6,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



- Oblicz prędkość kątową tylnego koła roweru.
- Oblicz prędkość liniową, z jaką porusza się ogniwo łańcucha rowerowego.
- Wyznacz częstotliwość, z jaką rowerzysta pedałuje.

Rozwiązanie

Najpierw wyznaczamy prędkości liniowe obu tarcz zębatach roweru.

Prędkość liniowa punktów na obwodzie przedniej tarczy zębatej jest równa:

$$v_1 = \omega_1 R_1 = \frac{2\pi R_1}{T_1} = \frac{z_1 d}{T_1}$$

gdzie: $z_1 d$ – obwód koła o promieniu R_1 , T_1 – okres obrotu przedniej tarczy zębatej.

Prędkość liniowa punktów na obwodzie tylnej tarczy zębatej jest równa:

$$v_2 = \omega_2 R_2 = \frac{2\pi R_2}{T_2} = \frac{z_2 d}{T_2}$$

gdzie: $z_2 d$ – obwód koła o promieniu R_2 , T_2 – okres obrotu tylnej tarczy zębatej.

Tarcze zębate w rowerze połączone są ze sobą łańcuchem, którego ogniwa w każdym punkcie mają taką samą prędkość liniową. Wynika z tego, że: $v_1 = v_2$.

Otrzymujemy zależności dla tarcz zębatach w rowerze:

$$v_1 = v_2 \Rightarrow \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{z_2}{z_1} \quad (1)$$

a) Obliczamy prędkość kątową tylnego koła roweru:

$$\omega_t = \frac{v}{R} \quad \omega_t = \frac{6,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,33 \text{ m}} = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Odpowiedź: Prędkość kątowa tylnego koła roweru wynosi $20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

b) Tylna tarcza zębata ma taką samą prędkość kątową jak tylne koło roweru, więc wartość prędkości liniowej łańcucha obliczamy ze wzoru: $v_1 = \omega_t R_2$.

Z równania (1) wyznaczamy: $R_2 = R_1 \frac{z_2}{z_1}$, czyli $R_2 = 0,085 \text{ m} \cdot \frac{21}{42} = 0,0425 \text{ m}$.

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$v_1 = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 0,0425 \text{ m} = 0,85 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Odpowiedź: Prędkość liniowa ogniwa łańcucha rowerowego to $0,85 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

c) Częstotliwość obliczamy po przekształceniu wzoru:

$$\omega_1 = 2\pi f_1 \Rightarrow f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$$

Korzystamy z zależności (1) i wyznaczamy ω_1 , której nie mamy we wzorze na częstotliwość:

$$\omega_1 = \omega_2 \frac{R_2}{R_1} = \omega_t \frac{R_2}{R_1}$$

Promień R_2 obliczyliśmy w punkcie b), więc po podstawieniu danych i wykonaniu obliczeń:

$$\omega_1 = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Obliczamy teraz częstotliwość:

$$f_1 \approx 1,6 \text{ Hz}$$

Odpowiedź: Rowerzysta pedałuje z częstotliwością około 1,6 Hz.

■ Przykład 4.

Promień korby przy studni jest $n = 3$ razy większy od promienia drewnianego wałka, na który jest nawijany łańcuch podczas wyciągania wody. Ile wynosi prędkość liniowa końca korby, jeżeli w czasie $t = 15$ s wiadro z wodą zostało uniesione ruchem jednostajnym z dna studni na wysokość $h = 10$ m?

Rozwiązanie

Aby znaleźć prędkość liniową końca korby, obliczymy prędkość kątową drewnianego wałka, ponieważ jest ona taka sama jak prędkość kątowna końca korby. Gdy będziemy znać prędkość kątową końca korby, wyznaczmy jej prędkość liniową z zależności:

$$v = \omega \cdot r_k$$

gdzie r_k jest promieniem okręgu, po którym porusza się koniec korby.

Zgodnie z treścią zadania:

$$r_k = n \cdot r_w$$

gdzie r_w jest promieniem drewnianego wałka.

Aby obliczyć prędkość kątową drewnianego wałka, skorzystamy z informacji o ruchu wiadra, ponieważ prędkość wiadra to prędkość łańcucha, czyli też prędkość liniowa punktów na obrzeżu wałka, gdzie nawijany jest łańcuch. Prędkość liniowa i kątowna wałka spełniają zależność:

$$v_w = \omega \cdot r_w$$

Prędkość wiadra wynosi $v_w = \frac{h}{t}$, więc otrzymujemy:

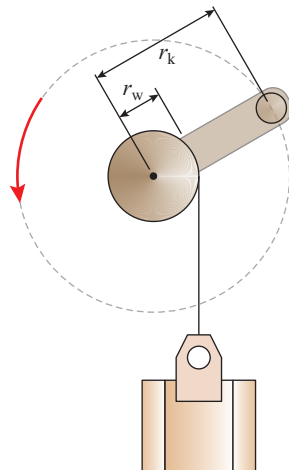
$$v_w = \omega \cdot r_w \Rightarrow \omega = \frac{v_w}{r_w} = \frac{h}{t \cdot r_w}$$

Obliczamy teraz prędkość liniową korby:

$$v = \omega \cdot r_k = \frac{h}{t \cdot r_w} \cdot n \cdot r_w = \frac{hn}{t}$$

Po podstawieniu danych liczbowych i wykonaniu obliczeń otrzymujemy: $v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Odpowiedź: Prędkość liniowa końca korby wynosi $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



■ Przykład 5.

Bęben pralki automatycznej obraca się ze stałą prędkością kątową i wykonuje $n_0 = 850$ obrotów na minutę. Po wyłączeniu silnika bęben zatrzymał się po $t = 21$ s. Ile obrotów wykonał do chwili całkowitego zatrzymania?

Rozwiązanie

Wprowadzamy dodatkowe oznaczenie $t_0 = 60$ s (czas wykonania n_0 obrotów).

Obliczamy początkową prędkość kątową i opóźnienie kątowe:

$$\omega_0 = \frac{2\pi n_0}{t_0} \quad \varepsilon = \frac{\omega_0}{t} = \frac{2\pi n_0}{t_0 \cdot t}$$

Podstawiamy te wartości do wzoru na kąt, o jaki obraca się bęben pralki w ruchu obrotowym jednostajnie opóźnionym:

$$\alpha = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

Otrzymujemy:

$$\alpha = \frac{\pi n_0 t}{t_0}$$

Liczbę obrotów otrzymamy, dzieląc miarę zakreślonego kąta przez wartość kąta pełnego:

$$N = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{n_0 t}{2t_0} = 150$$

Odpowiedź: Bęben pralki automatycznej od chwili wyłączenia silnika do całkowitego zatrzymania wykonał $N = 150$ obrotów.

Pytania i zadania

- P1

3.4.1. Ostrze kosiarki do trawy wykonuje $n = 2880$ obrotów na minutę. Oblicz częstotliwość obrotów kosiarki oraz czas jednego obrotu.
- P1

3.4.2. Podczas treningu na gokarcie zawodnik w czasie $t = 5$ min wykonał $n = 15$ okrążeń. Oblicz czas jednego okrążenia.
- 3.4.3.** Promień wodzący ciężarka poruszającego się po okręgu zakreśla kąt $\Delta\varphi = 150^\circ$ w czasie $\Delta t = 0,5$ s. Oblicz średnią prędkość kątową ciężarka.
- 3.4.4.** Ciało porusza się ze stałą prędkością kątową $\omega = 0,5\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Jaki kąt zakreśli jego promień wodzący w czasie $\Delta t = 20$ s?
- 3.4.5.** Samochód wykonał pełne okrążenie ronda w czasie $\Delta t = 20$ s. Oblicz prędkość kątową pojazdu.
- 3.4.6.** Krzesółko karuzeli porusza się po okręgu ze stałą prędkością kątową $\omega = 0,08\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. W jakim czasie krzesółko karuzeli zatoczy jeden pełny okrąg?
- 3.4.7.** Gdy płonąca kula zatacza okręgi ze stałą prędkością kątową $\omega = 200 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, nasze oko widzi ognisty okrąg. Oblicz częstotliwość w ruchu po okręgu dla płonącej kuli.
- P2

3.4.8. Oblicz częstotliwość obrotów kół samochodu jadącego z prędkością $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, którego koła mają średnicę 720 mm.
- P2

3.4.9. Koło pasowe maszyny rolniczej ma promień $r = 20$ cm i napędza pas transmisyjny, który uzyskuje $v = 21,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz czas jednego obrotu koła pasowego.

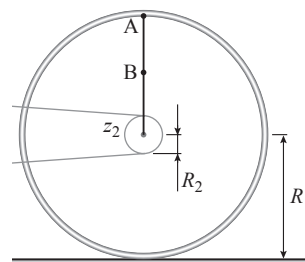
- P2** ● **3.4.10.** Minutowa wskazówka zegara ściennego jest dwa razy dłuższa od godzinowej: $l_1 = 2l_2$. Oblicz stosunek prędkości liniowych końców wskazówek minutowej i godzinowej oraz stosunek ich prędkości kątowych. Okres obrotu wskazówki minutowej $T_1 = 60$ min, a wskazówki godzinowej $T_2 = 12$ h.
- P2** ● **3.4.11.** Na obwodzie platformy karuzeli o promieniu $R = 2$ m rozmieszczone są równomierne krzeselka dla dzieci. Krzeselko poruszające się ruchem jednostajnym po okręgu wykonuje $n = 12$ obrotów w ciągu $t = 1$ min. Oblicz:
- częstotliwość i okres obrotu karuzeli,
 - prędkość kątową i liniową dzieci siedzących na krzesłkach,
 - zmianę prędkości kątowej karuzeli, gdy liczba jej obrotów zwiększy się o $\Delta n = 6$ w ciągu $t = 1$ min.
- P3** ● **3.4.12.** W rowerze przednia tarcza zębata (przy pedałach) ma $z_1 = 32$ zęby, a tylna $z_2 = 16$ zębów. Ile obrotów na sekundę wykona tylna tarcza zębata, jeżeli podczas jednostajnego pedałowania przednia tarcza wykona $n_1 = 144$ obroty w ciągu $t = 1$ min?
- P3** ● **3.4.13.** Rowerzysta zastosował takie przełożenie zębatek, aby przednia tarcza zębata miała $z_1 = 32$ zęby, a tylna $z_2 = 22$ zęby. Oblicz prędkość, z jaką poruszał się rowerzysta, jeżeli pedałował jednostajnie w tempie $f_1 = 3$ obroty na sekundę. Promień tylnego koła roweru $R = 0,33$ m.
- P4** ● ● **3.4.14.** Wciągarka linowa zamontowana w samochodzie terenowym ma bęben o średnicy $d = 63$ mm. Po zaczepieniu liny i uruchomieniu urządzenia nawinięto na bęben $l = 5$ m liny w czasie $t = 1,4$ min. Oblicz prędkość kątową bębna wciągarki. Przyjmij, że lina jest nawijana na jedną warstwę.
- P5** ● **3.4.15.** Po uruchomieniu karuzeli prędkość kątowa krzesłek wzrasta w czasie $\Delta t = 30$ s do $\omega = 5 \frac{\text{rad}}{\text{min}}$. Oblicz przyspieszenie kątowe krzesłek.
- P5** ● **3.4.16.** Bęben pralki w czasie $\Delta t = 5$ s zwiększa częstotliwość obrotów z $f_1 = 200$ obrotów na minutę do $f_2 = 1000$ obrotów na minutę. Oblicz przyspieszenie kątowe bębna.
- P5** ● ● **3.4.17.** W czasie $\Delta t = 15$ s prędkość rowerzysty maleje z $v_1 = 42,4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ do $v_2 = 28,0 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Oblicz opóźnienie kątowe kół roweru, jeśli ich średnica wynosi $d = 700$ mm.
- P5** ● ● **3.4.18.** Gdy podczas prób testowych samochód przyspieszał, jego koła o promieniu $r = 37,5$ cm obracały się z przyspieszeniem kątowym $\varepsilon = 0,6 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$.
- Oblicz, o ile $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ wzrosła prędkość pojazdu w czasie $t = 100$ s.
 - Ile obrotów wykonały koła samochodu w tym czasie, jeżeli prędkość początkowa pojazdu wynosiła zero?

3.5. Przyspieszenie dośrodkowe

Podręcznik
rozdz. 3.5

■ Przykład 1.

Rowerzysta jedzie ruchem jednostajnym prostoliniowym z prędkością $v = 6,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Do szprych koła przymocowane są światełka odblaskowe. Pierwsze znajduje się przy oponie w punkcie A (patrz rysunek) w odległości od środka koła równej w przybliżeniu jego promieniowi $R = 0,33 \text{ m}$, a drugie w punkcie B w odległości dwa razy mniejszej od środka koła. Oblicz przyspieszenie dośrodkowe światełka odblaskowego w punktach A i B względem roweru. Porównaj na wzorach przyspieszenia dośrodkowe (względem roweru) w punktach A i B.



Rozwiązanie

Korzystamy ze wzoru na przyspieszenie dośrodkowe:

$$a_d = \frac{v^2}{R}$$

Przyspieszenie dośrodkowe światełka w punkcie A znajdującego się przy oponie wynosi:

$$a_{dA} = \frac{(6,6 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{0,33 \text{ m}} = 132 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Jeżeli chcemy obliczyć przyspieszenie światełka umieszczonego w punkcie B, należy obliczyć jego prędkość liniową w tym punkcie. Porusza się ono po okręgu o promieniu $r = 0,5R$, ale prędkości kątowe światełek w punktach A i B są takie same:

$$\begin{aligned}\omega_A &= \omega_B \\ \omega_A &= \frac{v_A}{R}, \quad \omega_B = \frac{v_B}{r} \\ \frac{v_A}{R} &= \frac{v_B}{\frac{1}{2}R}\end{aligned}$$

Wynika stąd, że:

$$v_B = \frac{1}{2}v_A$$

Zatem przyspieszenie dośrodkowe w punkcie B wynosi:

$$a_{dB} = \frac{(0,5v_A)^2}{0,5R} = \frac{(0,5 \cdot 6,6 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{0,5 \cdot 0,33 \text{ m}} = 66 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Możemy porównać przyspieszenia dośrodkowe światełek w punktach A i B:

$$\frac{a_{dA}}{a_{dB}} = \frac{\frac{v_A^2}{R}}{\frac{v_B^2}{\frac{1}{2}R}} = \frac{v_A^2}{2(\frac{1}{2}v_A)^2} = 2$$

Odpowiedź: Przyspieszenie dośrodkowe światełka umieszczonego w punkcie A wynosi $132 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, a przyspieszenie światełka w punkcie B to $66 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

■ Przykład 2.

Rowerzysta zwiększył prędkość jazdy od $v = 6,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ do $v_f = 13,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ w ciągu $\Delta t = 10 \text{ s}$. Oblicz wartość przyspieszenia kąowego koła roweru o promieniu $R = 0,33 \text{ m}$.

Rozwiązanie

Przyspieszenie kąowe obliczamy ze wzoru: $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$, gdzie zmiana prędkości kąowej:

$$\Delta\omega = \omega_f - \omega = \frac{v_f}{R} - \frac{v}{R} = \frac{\Delta v}{R}$$

Otrzymujemy zależność:

$$\varepsilon = \frac{\Delta v}{R \Delta t}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy:

$$\varepsilon = \frac{13,2 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 6,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,33 \text{ m} \cdot 10 \text{ s}} = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Odpowiedź: Przyspieszenie kąowe koła roweru wynosi $2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$.

■ Przykład 3.

Motocykl z prędkością $v_0 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ wjeżdża na tor kołowy o promieniu $R = 200 \text{ m}$ i dalej porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym. W czasie $t = 10 \text{ s}$ pokonuje drogę $s = 140 \text{ m}$. Oblicz przyspieszenie styczne, dośrodkowe i całkowite motocykla po 10 sekundach ruchu na torze kołowym.

Rozwiązanie

Przyspieszenie styczne do toru ruchu występuje, gdy wzrasta wartość prędkości w ruchu postępowym. Wyznamy je ze wzoru na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym: $s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$.

$$a_s = \frac{2s - 2v_0 t}{t^2}$$

$$a_s = \frac{2 \cdot 140 \text{ m} - 2 \cdot 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10 \text{ s}}{(10 \text{ s})^2} = 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Obliczamy prędkość motocykla po 10 sekundach:

$$v = v_0 + a_s \cdot t$$

$$v = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ s} = 22 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

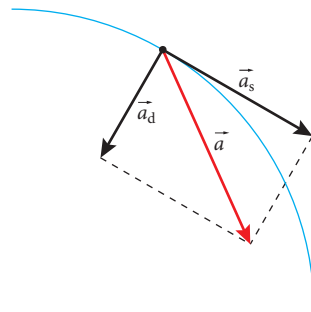
Przyspieszenie dośrodkowe wynosi:

$$a_d = \frac{v^2}{R}$$

$$a_d = \frac{(22 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{200 \text{ m}} = 2,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Wektory przyspieszenia stycznego i dośrodkowego są prostopadłe do siebie, zatem szukane przyspieszenie wypadkowe $\vec{a}$ możemy wyznaczyć, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

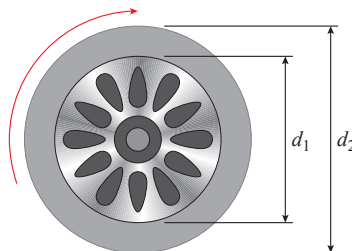
$$\begin{aligned} a^2 &= a_s^2 + a_d^2 \\ a &= \sqrt{a_s^2 + a_d^2} \\ a &= \sqrt{\left(1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2 + \left(2,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2} = 2,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$



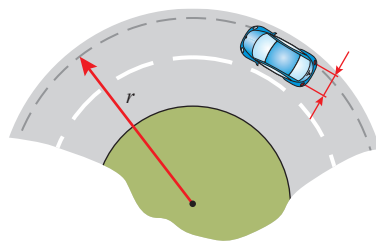
Odpowiedź: Gdy motocykl przyspieszał na torze kołowym, po 10 sekundach ruchu jego przyspieszenie styczne wynosiło $a_s = 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, przyspieszenie dośrodkowe $a_d = 2,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, a przyspieszenie całkowite $a = 2,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Pytania i zadania

- P1** 3.5.1. Promień koła samochodu osobowego wynosi $R = 31,7$ cm. Oblicz przyspieszenie dośrodkowe punktu znajdującego się na powierzchni opony względem pojazdu przy prędkości pojazdu $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.
- P1** 3.5.2. Podczas jazdy ze stałą prędkością koło roweru o średnicy $d = 70$ cm w ciągu $t = 2$ min obróciło się $n = 200$ razy. Oblicz przyspieszenie dośrodkowe punktu znajdującego się na brzegu koła względem roweru.
- P1** 3.5.3. Samochód przejeżdżał przez zakręt o promieniu $R = 18$ m z przyspieszeniem dośrodkowym $a_d = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Oblicz, z jaką prędkością pojazd pokonywał zakręt.
- P1** 3.5.4. Ramię karuzeli zatacza okrąg 15 razy w czasie jednej minuty. Przyspieszenie dośrodkowe osoby siedzącej w krzeselku na końcu ramienia ma wartość $a_d = 12,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Oblicz długość ramienia karuzeli.
- P1** 3.5.5. Na montażownicy – urządzeniu do montażu i demontażu opon samochodowych – zamontowano felgę o średnicy $d_1 = 40,6$ cm, na którą nałożono następnie oponę o średnicy zewnętrznej $d_2 = 62,6$ cm. O ile różnią się przyspieszenia dośrodkowe punktów na brzegu felgi i na brzegu opony, kiedy pod koniec montażu opona wraz z felgą obraca się ze stałą prędkością kątową $\omega = \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$?
- P1** 3.5.6. Piłeczka przywiązana do nierozciągliwego sznurka krąży po okręgu o promieniu R z częstotliwością f . Jak powinna się zmienić częstotliwość ruchu piłeczki, by po skróceniu sznurka do $\frac{R}{3}$ przyspieszenie dośrodkowe nie zmieniło wartości?



- ● **3.5.7.** Samochód osobowy pokonuje rondo ze stałą prędkością. Zewnętrzne koło porusza się po okręgu o promieniu $r = 30$ m i ma przyspieszenie dośrodkowe $a_z = 11,33 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Oblicz średni rozstaw kół samochodu. Załóż, że przyspieszenie dośrodkowe koła poruszającego się po wewnętrznej $a_w = 10,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



- ● **3.5.8.** Wyprowadź wzór, który pozwoli obliczyć przyspieszenie dośrodkowe na powierzchni Ziemi na dowolnej szerokości geograficznej φ . Oblicz przyspieszenie dośrodkowe na szerokości geograficznej miejscowości, w której mieszkasz. Pomiń spłaszczenie Ziemi na biegunie. Przyjmij, że promień równikowy Ziemi wynosi $R = 6378$ km.

- ● **3.5.9.** Kulka zawieszona na nitce zatacza w poziomie okręgi o promieniu $R = 0,8$ m. Podczas ruchu przyspieszenie dośrodkowe kulki ma wartość $a_d = 0,512 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Jaki kąt zatoczy kulka w czasie $t = 5$ s trwania ruchu?

- ● **3.5.10.** Samochód jadący z prędkością $54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ zaczyna przyspieszać. Jaką prędkość uzyska samochód po $\Delta t = 5$ s jazdy, jeśli jego koła o promieniu $R = 0,45$ m obracały się z przyspieszeniem kątowym $\varepsilon = 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$?

- ● **3.5.11.** Rowerzysta rozpoczął jazdę po torze kołowym o promieniu $r = 200$ m ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem liniowym $a = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Po jakim czasie od początku ruchu jego przyspieszenie dośrodkowe będzie równe przyspieszeniu liniowemu? Prędkość początkowa rowerzysty wynosiła zero.

- ● ● **3.5.12.** Po pokonaniu ruchem jednostajnie przyspieszonym drogi $s = 100$ m po okręgu o promieniu $R = 200$ m motocyklista osiągnął prędkość $v = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz przyspieszenie styczne, dośrodkowe i całkowite motocyklisty po upływie $t_1 = 15$ s od początku ruchu.

- ● ● **3.5.13.** Rowerzystka przed dalszą jazdą wykonuje przegląd roweru. Ustawiła go na ziemi siodełkiem do dołu, a następnie zakręciła kołem, wprawiając koło o promieniu $R = 25$ cm w ruch obrotowy jednostajnie przyspieszony z przyspieszeniem stycznym $a_s = 0,25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Po jakim czasie od początku ruchu przyspieszenie dośrodkowe punktów leżących na obwodzie koła będzie dwa razy większe od przyspieszenia stycznego?



Klasyka fizyki B. Mendel i J. Mendel

3.1. Trzy kamienie rzucono z wieży o wysokości h . Dwa z nich poziomo, przy czym pierwszemu nadano prędkość początkową $2v_0$, a drugiemu prędkość początkową v_0 . Trzeci spadł swobodnie z wieży (tzn. jego prędkość początkowa była równa zero). Który z kamieni spadł najkrócej?

3.2. Ze śmigłowca lecącego poziomo nad wodą na wysokości $h = 400$ m z prędkością $v_1 = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ wypada niewielki przedmiot. Po wodzie płynie motorówka z prędkością $v_2 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Jej kierunek ruchu pokrywa się dokładnie z kierunkiem lotu śmigłowca. Motorówka i śmigłowiec zbliżają się do siebie. W jakiej odległości od śmigłowca, licząc po powierzchni wody, powinna znajdować się motorówka w momencie wypadnięcia przedmiotu, aby ten wpadł do motorówki?

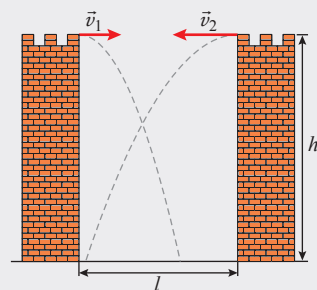
3.3. Kamień rzucony poziomo z pewnej wysokości upadł na ziemię w odległości $l = 10$ m po czasie $\Delta t = 1$ s od chwili wyrzucenia. Odległość liczono w poziomie od punktu wyrzucenia. Oblicz, z jaką prędkością początkową v_0 rzucono kamień.

3.4. Kamień rzucono poziomo z pewnej wysokości z prędkością początkową $v_0 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Po jakim czasie od chwili wyrzucenia kamienia kierunek jego prędkości chwilowej będzie tworzył z poziomem kąt $\alpha = 45^\circ$?

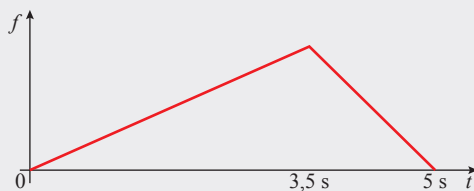
3.5. Dwa kamyki rzucono ukośnie z jednego miejsca pod różnymi kątami α_1 i α_2 do poziomu. Jaki był stosunek ich prędkości początkowych v_1 i v_2 , jeżeli kamyki upadły w tym samym miejscu?

3.6. Z dwóch wież o jednakowej wysokości $h = 100$ m oddległych o $l = 50$ m wyrzucono poziomo jednocześnie dwa przedmioty (patrz rysunek obok) z prędkościami $v_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i $v_2 = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

- Po jakim czasie zderzą się te przedmioty?
- Na jakiej wysokości dojdzie do zderzenia?

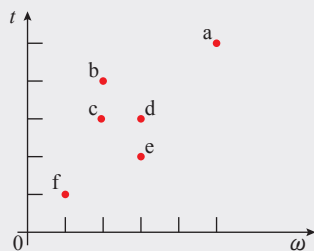


3.7. Wirnik pralki obracał się ze stałym przyspieszeniem kątowym przez $t_1 = 3,5$ s, po czym odcięto zasilanie. Po czasie $t_2 = 1,5$ s wirnik się zatrzymał. Całkowita liczba obrotów wirnika wynosiła $n = 200$. Oblicz maksymalną częstotliwość obrotów wirnika.



3.8. Ziemia porusza się wokół Słońca po orbicie w przybliżeniu kołowej o promieniu $R = 149\,000\,000$ km. Z jaką prędkością porusza się Ziemia względem Słońca?

3.9. Na rysunku pokazano wykres w postaci 6 punktów będących wynikiem pomiaru prędkości kątowej i czasu trwania ruchu jednostajnego po okręgu różnych obiektów. Które obiekty obróciły się o taki sam kąt? Uzasadnij odpowiedź.



3.10. Mała ołowiana kulka jest zawieszona na nici o długości $l = 5$ m. Kulkę odchyłono o kąt $\alpha = 90^\circ$ i puszczono. Oblicz przyspieszenie dośrodkowe kulki w chwili, gdy nitka jest ułożona pionowo.

3.11. Do końca nieważkiego pręta jest doczepiona stalowa kulka. Pręt z kulką może się obracać wokół poziomej osi przechodzącej przez jego wolny koniec. Pręt odchyłono tak, że kulka znalazła się w swoim najwyższym położeniu, i puszczono. Z jakim przyspieszeniem będzie poruszać się kulka w swoim najniższym położeniu?

Zadania maturalne

■ Przykład. Rowerzysta

Rowerzysta przejeżdżał ze stałą prędkością $v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ przez wypukły most o promieniu krzywizny $R = 100 \text{ m}$. Koła jego roweru mają promień $r = 33 \text{ cm}$, a przerzutki w tylnym kole to pięć kół zębatach, w tym najmniejsze o promieniu $r_1 = 4 \text{ cm}$ i większe o promieniu $r_2 = 6 \text{ cm}$.

P.1. W najwyższym punkcie mostu rowerzyście wypadł z ręki bidon. Narysuj wektor prędkości, jaką miał w tym momencie bidon względem roweru i względem ziemi oraz ustal wartości tych prędkości.

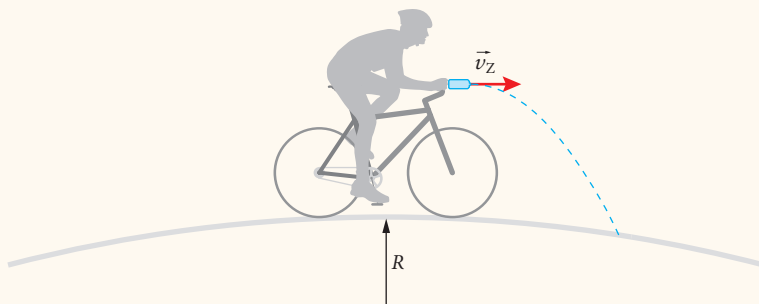
P.2. Narysuj tor ruchu bidonu względem ziemi od momentu, gdy wypuścił go z ręki rowerzysta. Pomiń opór powietrza.

P.3. Podczas jazdy po płaskim terenie łańcuch napędzał najmniejsze koło zębate tylnej przerzutki. Gdy rowerzysta wjeżdżał na górę mostu, łańcuch obracał większe koło zębate tej przerzutki. Rowerzysta nie zmieniał zębataki przedniej przerzutki przy pedałach, której promień $r_0 = 8 \text{ cm}$. Oblicz częstotliwość, z jaką rowerzysta kręcił pedałami w obu przypadkach.

P.4. Porównaj przyspieszenie dośrodkowe rowerzysty jadącego po wypukłym moście z przyspieszeniem dośrodkowym kamyka w bieżniku opony roweru. Przyjmij odległość od środka krzywizny mostu do środka ciężkości rowerzysty równą promieniowi mostu $R = 100 \text{ m}$.

Rozwiązanie:

P.1. Dopóki rowerzysta trzyma bidon, przedmiot ten ma cały czas taką samą prędkość jak rower. W momencie, gdy zostaje wypuszczony z ręki, jego prędkość względem roweru wynosi $\vec{v}_r = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Względem ziemi natomiast ma kierunek styczny do toru ruchu roweru, a w najwyższym punkcie toru – kierunek poziomy. Wartość prędkości bidonu względem ziemi wynosi $\vec{v}_z = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



P.2. Bidon względem ziemi ma nadaną prędkość o kierunku poziomym, jednocześnie siła grawitacji nadaje mu przyspieszenie $\vec{g}$, skierowane w dół. Jeśli pominiemy opór powietrza, to możemy stwierdzić, że mamy do czynienia z rzutem poziomym. Torem ruchu bidonu względem ziemi jest więc parabola.

P.3. Prędkość rowerzysty i prędkość liniowa na powierzchni opony roweru wynosi $v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Wszystkie koła zębate osadzone na osi tylnego koła mają taką samą prędkość kątową:

$$\omega = \frac{v}{r}$$

$$\omega = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,33 \text{ m}} = 30 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Gdy łańcuch obraca małe koło zębate o promieniu $r_1 = 4 \text{ cm}$, prędkość liniowa na jego obwodzie jest równa:

$$v_1 = \omega \cdot r_1$$

$$v_1 = 30 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 0,04 \text{ m} = 1,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Taką samą prędkość liniową ma łańcuch i koło zębate przedniej przerzutki. Zatem zębatka przedniej przerzutki oraz pedały obracają się z prędkością kątową:

$$\omega_0 = \frac{v_1}{r_0}$$

$$\omega_0 = \frac{1,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,08 \text{ m}} = 15 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Zatem częstotliwość, z jaką obracają się pedały, jest równa:

$$f_1 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

$$f_1 = \frac{15 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{2 \cdot 3,14} \approx 2,39 \text{ Hz}$$

Przeprowadzamy taką samą analizę, gdy łańcuch obraca większe koło zębate o promieniu $r_2 = 6 \text{ cm}$.

$$v_2 = \omega \cdot r_2$$

$$v_2 = 30 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 0,06 \text{ m} = 1,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Koło zębate będące na tej samej osi co pedały ma prędkość kątową:

$$\omega_0 = \frac{v_2}{r_0}$$

$$\omega_0 = \frac{1,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,08 \text{ m}} = 22,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Pedały roweru obracają się z taką samą częstotliwością jak to koło zębate:

$$f_2 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

$$f_2 = \frac{22,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{2 \cdot 3,14} \approx 3,58 \text{ Hz}$$

Odpowiedź: Gdy rowerzysta jedzie po płaskim terenie, pedałuje z częstotliwością $f_1 = 2,39 \text{ Hz}$, a gdy wjeżdża pod górę – z częstotliwością $f_2 = 3,58 \text{ Hz}$.

P.4. Przyspieszenie dośrodkowe rowerzysty wynosi: $a_{\text{dR}} = \frac{v^2}{R}$, natomiast przyspieszenie dośrodkowe kamyka, który utkwiał w bieżniku opony jest równe $a_{\text{dK}} = \frac{v^2}{r}$.

Iloraz tych dwóch wielkości wynosi:

$$\frac{a_{\text{dR}}}{a_{\text{dK}}} = \frac{\frac{v^2}{R}}{\frac{v^2}{r}} = \frac{r}{R} = \frac{0,33 \text{ m}}{100 \text{ m}} \approx \frac{1}{300}$$

Odpowiedź: Przyspieszenie dośrodkowe rowerzysty jest 300 razy mniejsze od przyspieszenia dośrodkowego kamyka, który utkwiał w oponie roweru.

Zadanie 1. Lot samolotem

Pilot samolotu pasażerskiego otrzymał plan lotów na następny dzień: Skopje–Rzym, Rzym–Kopenhaga, Kopenhaga–Moskwa, Moskwa–Donieck. Synoptycy przewidują, że w czasie każdego z tych lotów będzie wiał zachodni wiatr, z prędkością $v_1 = 80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Wczuj się w rolę pierwszego pilota. Załóż, że prędkość przelotowa samolotu $v_2 = 800 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

1.1. Wykonaj działania na wektorach i ustal graficznie kierunek, w którym powinna być skierowana oś kadłuba samolotu podczas każdego z lotów, jeżeli samolot poruszał się po linii prostej między miastami odpowiednio wzdłuż południka lub równoleżnika.

1.2. Oblicz azymut dla przypadków z zadania 1.1.

1.3. Oblicz prędkość samolotu względem ziemi podczas każdego z lotów, jeżeli samolot poruszał się w opisany wyżej sposób.

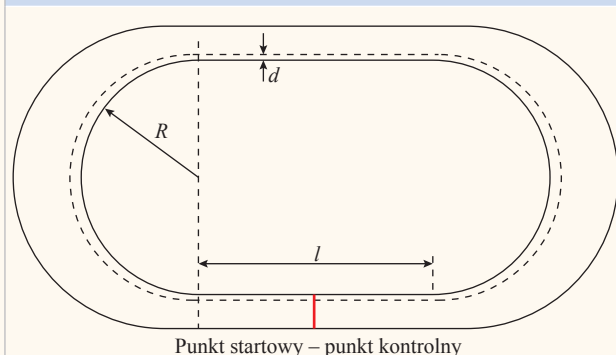
1.4. Oblicz czas lotu na trasie Kopenhaga–Moskwa, jeżeli samolot poruszał się między miastami po linii prostej. Odległość między miastami odczytaj z mapy.



Zadanie 2. Tor żużlowy

Tor żużlowy w Toruniu ma długość $s = 325$ m. Długość prostych wynosi $l = 62$ m, promień łuków $R = 31$ m. Długość toru s mierzona jest w odległości $d = 1$ m od wewnętrznej krawędzi toru. Zawodnik trenuje, jeżdżąc przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Zakręt przy wewnętrznej krawędzi toru można pokonać z prędkością nie większą niż $v = 57,6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Wybrane dane techniczne toru żużlowego w Toruniu



Długość toru (mierzona w odległości $d = 1$ m od wewnętrznej krawędzi):
 $s = 325$ m

Długość prostych: $l = 62$ m

Promień łuków: $R = 31$ m

2.1. Ile czasu potrzeba po sygnale startu, aby zawodnik ruchem jednostajnie przyspieszonym wszedł w pierwszy zakręt z prędkością v ?

2.2. Po wyjściu z zakrętu z prędkością v motocyklista w ciągu $t = 2$ s osiąga prędkość $v_1 = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Oblicz drogę, jaką przebędzie w tym czasie.

2.3. Jak długo motocyklista zwalnia od prędkości v_1 , aby wejść w drugi zakręt z prędkością v ?

2.4. Po pokonaniu drugiego zakrętu motocyklista ma prędkość $v_0 = 0,5v$. Na trzeciej prostej porusza się ze stałym przyspieszeniem $a = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Oblicz prędkość w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, w chwili, gdy motocykl wchodzi w trzeci zakręt. Czy to jest bezpieczna prędkość?

Zadanie 4. Zawody balonowe

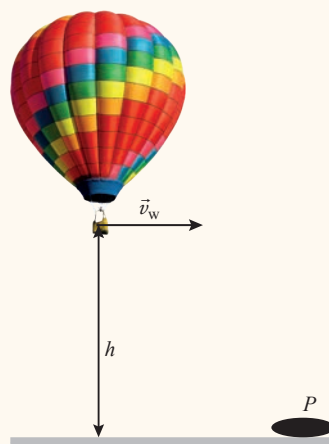
Podczas zawodów balon wzniósł się nad lotniskiem z pionową prędkością $v_b = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. W czasie lotu wiał boczny wiatr (w kierunku poziomym), który znosił balon. Gdy balon osiągnął wysokość $h = 300$ m nad ziemią, znajdował się dokładnie nad punktem kontrolnym oddalonym od miejsca startu o $s = 500$ m. Dalej leciał na tej samej wysokości z prędkością poziomą równą prędkości wiatru.

4.1. Oblicz kąt między prędkością balonu względem ziemi a kierunkiem poziomym w trakcie wznoszenia.

4.2. Oblicz wartość prędkości balonu względem sędziego stojącego na lotnisku. Podaj ją w $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

4.3. Oblicz najkrótszy czas, w jakim załoga balonu może dotrzeć nad punkt kontrolny.

4.4. Następnie załoga ma zrzucić worek z piaskiem tak, aby wylądował w wyznaczonym punkcie. Balon leci w stronę punktu zrzutu. W jakiej odległości, liczonej wzdłuż linii poziomej od punktu zrzutu, należy wypuścić worek, aby trafił w cel. Naskicuj tor ruchu worka.





4. Ruch i siły

Najważniejsze informacje

■ Oddziaływania

Wszystkie oddziaływania w przyrodzie zostały podzielone na cztery grupy tzw. oddziaływań fundamentalnych. Są to: **oddziaływanie grawitacyjne**, **oddziaływanie elektromagnetyczne**, **oddziaływanie jądrowe silne**, **oddziaływanie jądrowe słabe**. Wszystkie inne oddziaływania, np. oddziaływania międzycząsteczkowe, są pochodnymi oddziaływań fundamentalnych.

■ Siła

Miarą oddziaływań między ciałami jest siła. Jest to wielkość wektorowa.

Jednostką siły jest niuton: $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Siłę, która zastępuje działanie kilku sił działających na ciało, nazywamy siłą wypadkową $\vec{F}_w$.

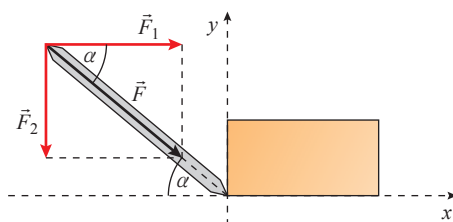
Siła wypadkowa jest sumą wektorową poszczególnych sił działających na ciało:

$$\vec{F}_w = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n$$

■ Rozkład siły na składowe

Siła $\vec{F}$ (patrz rysunek) została rozłożona na dwie siły składowe: $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, których wartości wynoszą odpowiednio:

$$F_1 = F \cos \alpha \quad \text{ i } \quad F_2 = F \sin \alpha$$



Więcej o działaniach na wektorach w dodatku matematycznym na stronie 301.

■ Zasady dynamiki Newtona

Skutki działania sił zostały ujęte przez Izaaka Newtona w trzy podstawowe zasady, nazywane zasadami dynamiki.

Pierwsza zasada dynamiki (zasada bezwładności)

Jeżeli na ciało nie działa żadna siła lub działające na nie siły się równoważą, to istnieje taki układ odniesienia, w którym ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Układ spełniający warunki opisane w pierwszej zasadzie dynamiki nazywamy **układem inercyjnym**.

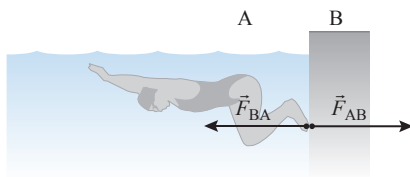
Druga zasada dynamiki

Przyspieszenie $\vec{a}$, jakiego doznaje ciało o masie m w inercyjnym układzie odniesienia, jest wprost proporcjonalne do wypadkowej siły $\vec{F}$ działającej na to ciało:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Trzecia zasada dynamiki (wzajemność oddziaływań)

Siłę $\vec{F}_{AB}$ wywieranej przez ciało A na ciało B zawsze towarzyszy siła $\vec{F}_{BA}$ wywierana przez ciało B na ciało A. Siły te mają równe wartości, ten sam kierunek, ale przeciwny zwrot $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$ (patrz rysunek).



Siły te się nie równoważą, ponieważ są przyłożone do dwóch różnych ciał.

■ Siła tarcia

Oporu ruchu występują wtedy, gdy ciała poruszają się w ośrodkach materialnych. Na przykład na spadający balon działa siła oporu powietrza, a na poruszającą się łódź – opór wody. Jednym z oporów ruchu jest siła tarcia. Gdy powierzchnie stykających się ciał przesuwamy względem siebie lub gdy usiłujemy je przesunąć względem siebie, występuje tzw. **tarcie posuwiste (poślizgowe)**.

Siła tarcia statycznego F_T

Siła ta występuje między dwiema powierzchniami, które usiłujemy wprowadzić w ruch względem siebie. Gdy siła F , którą działamy, przekroczy maksymalną wartość siły tarcia statycznego, rozpoczyna się ruch.

Wartość maksymalnej siły tarcia statycznego $F_{T\max}$ zależy od nacisku ciała F_N na powierzchnię, po której usiłujemy go przesunąć, oraz rodzaju powierzchni:

$$F_{T\max} = f_s \cdot F_N$$

gdzie f_s to współczynnik tarcia statycznego (maksymalny), który zależy od rodzaju stykających się powierzchni (wartości współczynników tarcia statycznego dla wybranych powierzchni znajdują się w tabeli na s. 305).

Siła tarcia kinetycznego $F_{T\text{kin}}$

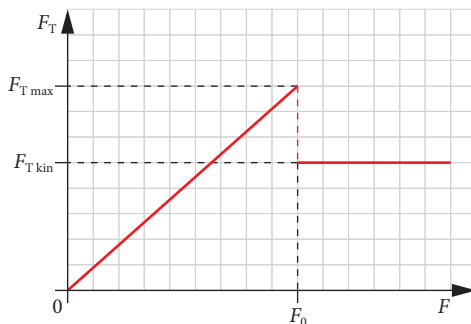
Siła ta występuje między powierzchniami będącymi w ruchu względem siebie. Jej wartość jest wprost proporcjonalna do siły dociskającej ciało do podłoża F_N . Zależy również od rodzaju powierzchni trących:

$$F_{T\text{kin}} = f_k \cdot F_N$$

gdzie f_k to współczynnik tarcia kinetycznego (wartości współczynników tarcia kinetycznego dla wybranych powierzchni znajdują się w tabeli na s. 305).

Współczynnik tarcia kinetycznego f_k jest mniejszy od współczynnika tarcia statycznego f_s lub mu równy:

$$f_k \leq f_s$$



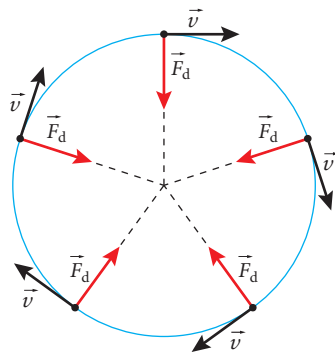
dlatego trudniej wprowadzić ciało w ruch, niż je w tym ruchu utrzymać.

Uwaga. Współczynnik tarcia oznacza się również symbolem μ .

Kolejnym rodzajem oporów ruchu są opory toczenia nazywane również **tarciem tocznym**. Występują podczas toczenia jednego ciała po drugim. Opory toczenia są zwykle znacznie mniejsze niż tarcie poślizgowe.

■ Siła dośrodkowa

Jeżeli na ciało działa siła wypadkowa o kierunku prostopadłym do wektora jego prędkości, to skutkiem działania tej siły jest zmiana kierunku wektora prędkości i w konsekwencji – zakrzywienie toru ruchu ciała. Jeśli prędkość ciała ma stałą wartość, to pod wpływem siły działającej prostopadle do kierunku ruchu ciało porusza się po okręgu. Siłę prostopadłą do kierunku ruchu nazywamy **siłą dośrodkową**.



Zgodnie z drugą zasadą dynamiki w ruchu po okręgu siła dośrodkowa nadaje ciału o masie m przyspieszenie – tzw. **przyspieszenie dośrodkowe**, którego kierunek i zwrot są zgodne z kierunkiem i zwrotem siły dośrodkowej.

$$F_d = ma_d = m \frac{v^2}{R}$$

gdzie v jest prędkością liniową styczną do okręgu:

$$v = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi Rf = \omega R$$

■ Nieinercjalny układ odniesienia

Jeżeli układ odniesienia, w którym rozważamy ruch ciała, porusza się z przyspieszeniem względem układu inercjalnego, to układ taki nazywamy nieinercjalnym, np. układ obracający się ze stałą prędkością kątową.

■ Siła bezwładności (pozorna)

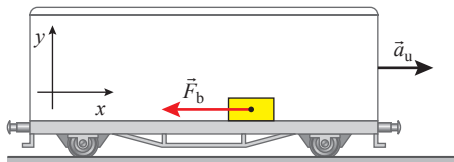
Jest to siła działająca na ciało w nieinercjalnym układzie odniesienia skierowana przeciwnie do przyspieszenia tego układu:

$$\vec{F}_b = -m\vec{a}_u$$

gdzie:

m – masa ciała,

$\vec{a}_u$ – przyspieszenie, z jakim porusza się nieinercjalny układ odniesienia.



- ▶ Przykładem siły bezwładności jest siła, która działa na ciało poruszające się po okręgu, gdy ruch rozpatrujemy w układzie związanym z tym ciałem. Jest to siła odśrodkowa związana z przyspieszeniem układu (przyspieszeniem dośrodkowym) $|\vec{a}_u| = |\vec{a}_d|$ i przeciwnie do niego skierowana. Wartość tej siły jest równa wartości siły dośrodkowej:

$$|\vec{F}_{od}| = |\vec{F}_d| = m \frac{v^2}{R}$$

- ▶ W układzie odniesienia poruszającym się z przyspieszeniem (układzie nieinercjalnym) pojawiają się stany **niedociążenia**, **przeciążenia** i **nieważkości**.

Pierwsza zasada dynamiki w układach nieinercjalnych

Jeżeli suma wektorów sił rzeczywistych $\vec{F}$ i sił bezwładności $\vec{F}_b$ działających na ciało w nieinercjalnym układzie odniesienia jest równa zeru, to ciało pozostaje w tym układzie w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

$$\vec{F} + \vec{F}_b = 0$$

Druga zasada dynamiki w układach nieinercjalnych

Jeżeli suma wektorów sił rzeczywistych $\vec{F}$ i sił bezwładności $\vec{F}_b$ działających na ciało o masie m w nieinercjalnym układzie odniesienia jest różna od zera, to ciało uzyskuje w tym układzie przyspieszenie $\vec{a}$.

$$\vec{F} + \vec{F}_b = m\vec{a}$$

■ Siła Coriolisa

Jest to siła pozorna działająca na ciała poruszające się prostoliniowo względem układu obracającego się (układu nieinercjalnego), np. Ziemi, gdzie na półkuli północnej tor ciała poruszającego się od równika na północ odchyła się w kierunku wschodnim, a poruszającego się w stronę równika – w kierunku zachodnim.

Siła Coriolisa jest zdefiniowana następująco:

$$\vec{F}_C = 2m(\vec{v} \times \vec{\omega})$$

gdzie:

m – masa ciała,

$\vec{v}$ – prędkość liniowa ciała,

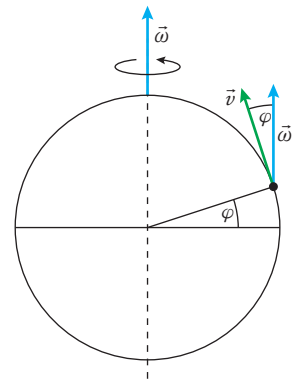
$\vec{\omega}$ – prędkość kątowa obracającego się układu.

Wartość siły Coriolisa obliczamy ze wzoru:

$$F_C = 2mv\omega \sin\varphi,$$

gdzie:

φ – kąt pomiędzy wektorami prędkości liniowej $\vec{v}$ ciała a prędkości kątowej $\vec{\omega}$ układu odniesienia.

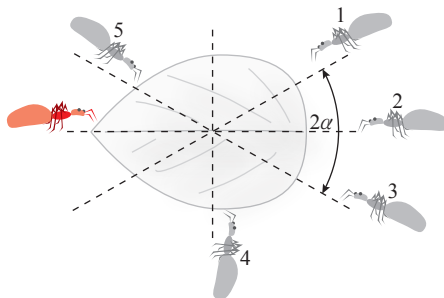


4.1. Oddziaływania. Dodawanie sił i rozkładanie ich na składowe

■ Przykład 1.

Mrówki ciągną liść w sposób pokazany na rysunku. Każda z nich działa na liść siłą $F = 0,01$ N.

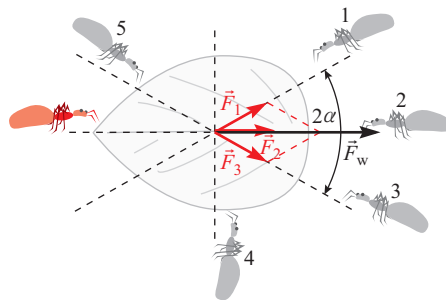
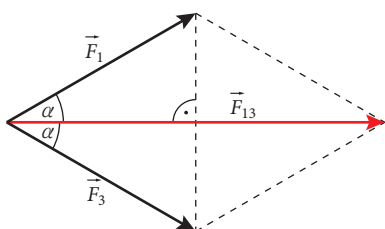
- Narysuj i oblicz wartość siły wypadkowej działającej na liść ciągnięty przez mrówki o numerach 1, 2, 3. Kąt między kierunkiem siły $\vec{F}_1$, którą działa na liść mrówka 1, a kierunkiem działania siły $\vec{F}_3$, którą mrówka 3 działa na liść, wynosi $2\alpha = 60^\circ$.
- Oblicz wartość i określ kierunek siły, którą czerwona mrówka powinna ciągnąć liść, aby zrównoważyć siły mrówek 1, 2 i 3.
- Wyznacz graficznie siłę wypadkową działającą na liść, gdy ciągną go mrówki o numerach 1, 2, 3, 4 i 5, oraz oblicz jej wartość. Podaj kąt, jaki tworzy wektor tej siły wypadkowej z kierunkiem siły $\vec{F}_2$.



Podręcznik
rozdz. 4.1 i 4.2

Rozwiązanie

- Rysujemy siły, którymi mrówki o numerach 1, 2, 3 ciągną liść. Siły $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ przesuwamy wzdłuż kierunków, na których one leżą, do wspólnego punktu w środku liścia, a następnie składamy siły: $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_3$ metodą równoległoboku.



Siła wypadkowa $\vec{F}_{w13}$ jest równa dłuższej przekątnej równoległoboku. Długość połowy tej przekątnej jest równa przyprostokątnej trójkąta prostokątnego. Możemy zatem skorzystać z funkcji trygonometrycznej cosinus:

$$\cos \alpha = \frac{\frac{1}{2}|\vec{F}_{w13}|}{|\vec{F}_1|} = \frac{\frac{1}{2}F_{w13}}{F_1}$$

Po przekształceniu otrzymujemy: $F_{w13} = 2F_1 \cos \alpha$.

Zauważamy, że siła $\vec{F}_2$ ma taki sam kierunek i taki sam zwrot jak siła $\vec{F}_{w13}$. Wypadkowa tych sił to suma algebraiczna ich wartości:

$$F_{w123} = F_2 + 2F_1 \cos \alpha$$

Ponieważ wszystkie trzy siły mają tę samą wartość $F = 0,01$ N, możemy zapisać:

$$F_{w123} = F(1 + 2 \cos \alpha)$$

$$F_{w123} = 0,027 \text{ N}$$

Odpowiedź: Wypadkowa sił $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ ma wartość równą $F_{w123} = 0,027$ N.

- b) Aby liść pozostał nieruchomy, mrówka czerwona musi działać siłą $\vec{F}_c$, która zrównoważy działanie sił $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, a więc obliczoną w punkcie a) siłą wypadkową $\vec{F}_{w123}$. Wiemy, że siły się równoważą, gdy ich suma jest równa zero, zatem:

$$\vec{F}_c + \vec{F}_{w123} = 0$$

Siła $\vec{F}_c$ ma taki sam kierunek jak siła $\vec{F}_{w123}$, taką samą wartość jak ta siła: $F_c = F_{w123} = 0,027$ N, ten sam punkt przyłożenia i przeciwny zwrot.

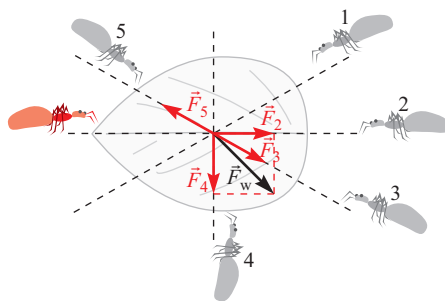
Odpowiedź: Siła, z jaką mrówka czerwona działa na liść, ma wartość $F_c = 0,027$ N.

- c) Rysujemy siły: $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$, $\vec{F}_5$. Mają one te same wartości $F = 0,01$ N, ten sam punkt przyłożenia (środek liścia), ale różne kierunki.

Zauważamy, że siły $\vec{F}_3$ i $\vec{F}_5$, którymi działają mrówki 3 i 5, równoważą się. Wypadkową sił pochodzących od mrówek 2 i 4 można obliczyć, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$F_{w24} = \sqrt{F_2^2 + F_4^2} = F\sqrt{2}$$

$$F_{w24} = 0,014 \text{ N}$$

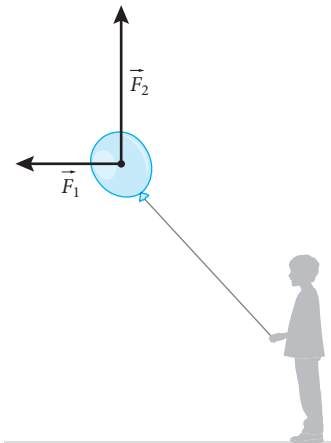


Z rysunku odczytujemy, że wektor siły wypadkowej $\vec{F}_{w24}$, będący przekątną kwadratu, tworzy z boki kwadratu (siłą $\vec{F}_2$) kąt $\beta = 45^\circ$.

Odpowiedź: Wypadkowa sił: $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$, $\vec{F}_5$ ma wartość równą $F_{w24} = 0,014$ N. Siła ta tworzy kąt $\beta = 45^\circ$ z kierunkiem, wzdłuż którego działa siła $\vec{F}_2$.

■ Przykład 2.

Dziecko trzyma na nici balonik wypełniony helem. Na rysunku zaznaczono dwie siły działające na balonik: siłę $F_1 = 10 \text{ mN}$, pochodzącą od wiejącego poziomo wiatru, oraz siłę unoszącą balonik $F_2 = 15 \text{ mN}$, będącą różnicą siły wyporu i siły ciężkości balonika z helem.

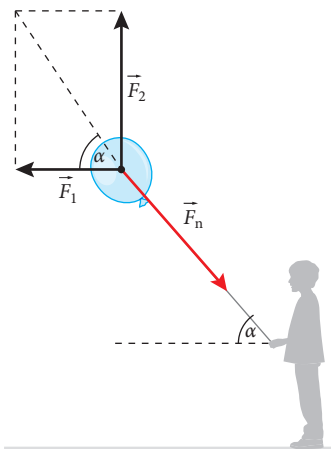


- Przerysuj rysunek do zeszytu i dorysuj siłę naciągu nici jeśli balonik pozostaje nieruchomy. Zachowaj skalę długości wektorów.
- Oblicz wartość siły naciągu nici F_n oraz kąt, jaki tworzy ona z poziomem.

Rozwiązanie

- Balonik pozostaje w spoczynku, zatem suma działających na niego sił: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_n = 0$.

Siły $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ dodajemy metodą równoległoboku. Długość wektora siły wypadkowej odpowiada długości przekątnej prostokąta. Siła naciągu nici $\vec{F}_n$ ma taką samą wartość jak wypadkowa sił $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, kierunek zgodny z jej kierunkiem, a zwrot przeciwny.



Odpowiedź: Kierunek siły $\vec{F}_n$ wyznacza napięta nić, siła ta jest zwrócona w stronę ręki dziecka, a wartość siły jest równa wartości wypadkowej sił $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$.

- Wartość siły wypadkowej obliczamy za pomocą twierdzenia Pitagorasa:

$$F_{w12} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

Siła naciągu nici $\vec{F}_n$ ma taką samą wartość jak wypadkowa $\vec{F}_{w12}$, zatem:

$$F_n = \sqrt{(10 \text{ mN})^2 + (15 \text{ mN})^2} = 18 \text{ mN}$$

Kąt między nicią i poziomem obliczamy z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych:

$$\frac{F_2}{F_1} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{15 \text{ mN}}{10 \text{ mN}} = 1,5 \quad \alpha = 56^\circ$$

lub

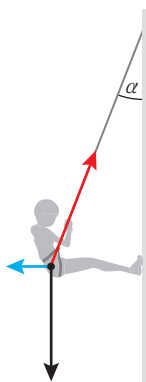
$$\frac{F_2}{F_n} = \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{15 \text{ mN}}{18 \text{ mN}} = 0,83 \quad \alpha = 56^\circ$$

Odpowiedź: Wartość siły naciągu nici $F_n = 18 \text{ mN}$, a kąt nachylenia nici do poziomu $\alpha = 56^\circ$.

■ Przykład 3.

Podczas treningu na ścianie wspinaczkowej dziewczyna masie $m = 54 \text{ kg}$ wisiała nieruchomo w uprzęży, opierając stopy o ściankę w ten sposób, że nogi były ułożone prostopadle do ścianki, a lina wpięta do uprzęży odchyłała się od pionu o kąt $\alpha = 14^\circ$. Nazwij siły działające na dziewczynę, przedstawione na rysunku, i oblicz siłę działającą na dziewczynę poziomo. Przyjmij $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



Rozwiązanie

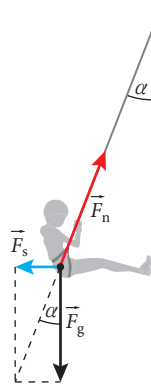
Na dziewczynę działają siły: ciężkości (grawitacji) $\vec{F}_g$, naciągu liny $\vec{F}_n$ i siła z jaką ścianka działa na stopy dziewczyny $\vec{F}_s$.

Siłą działającą na dziewczynę poziomo jest siła $\vec{F}_s$.

Skoro dziewczyna wisiała na ścianie nieruchomo to znaczy, że siły $\vec{F}_g$, $\vec{F}_n$ i $\vec{F}_s$ się równoważyły. Siły $\vec{F}_g$ i $\vec{F}_s$ stanowiły boki równoległoboku (prostokąta), którego przekątna miała długość i kierunek odpowiadające sile $\vec{F}_n$.

Aby obliczyć wartość siły $\vec{F}_s$, korzystamy z funkcji trygonometrycznej tangens:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_s}{F_g}$$



Z tablic trygonometrycznych odczytujemy wartość tej funkcji dla kąta $\alpha = 14^\circ$:

$$\operatorname{tg} 14^\circ = 0,25$$

Zatem:

$$F_s = mg \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

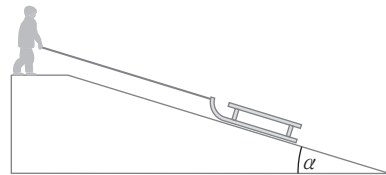
$$F_s = 54 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,25$$

$$F_s = 135 \text{ N}$$

Odpowiedź: Ścianka wspinaczkowa działa na stopy dziewczyny siłą $F_s = 135 \text{ N}$.

■ Przykład 4.

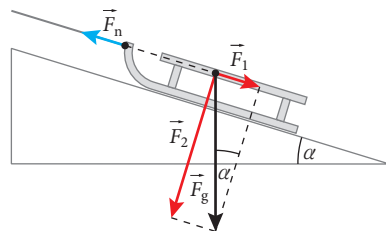
Na szczycie oblodzonego stoku saneczkowego stoi chłopiec, trzymając w ręku linkę, której drugi koniec jest przymocowany do sanek o masie $m = 5,2 \text{ kg}$. Stok saneczkowy to równia pochyła o kącie nachylenia do poziomu $\alpha = 17^\circ$.



Oblicz siłę naprężenia linki, gdy sanki pozostają nieruchome na stoku, i łączną siłę nacisku płóz sanek na lód ($\sin 17^\circ = 0,29$; $\cos 17^\circ = 0,96$). Przyjmij, że linka jest równoległa do stoku, a przyspieszenie ziemskie $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Rozwiązanie

Siłą, którą równoważy naprężenie linki $\vec{F}_n$, jest równoległa do stoku składowa $\vec{F}_1$ siły ciężkości. Siłą nacisku jest prostopadła do stoku składowa $\vec{F}_2$ siły ciężkości. Zatem, aby znaleźć te siły, należy siłę ciężkości rozłożyć na składowe $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$.



Korzystamy z funkcji trygonometrycznej sinus i wyznaczamy siłę F_1 :

$$\sin \alpha = \frac{F_1}{F_g}$$

$$F_1 = mg \sin \alpha$$

$$F_1 = 5,2 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,29 = 15,08 \text{ N}$$

Z definicji funkcji trygonometrycznej cosinus wyznaczamy siłę F_2 :

$$\cos \alpha = \frac{F_2}{F_g}$$

$$F_2 = mg \cos \alpha$$

$$F_2 = 5,2 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,96 = 49,92 \text{ N}$$

Odpowiedź: Sanki pozostaną nieruchome na stoku, gdy siła naprężenia linki $\vec{F}_n$ będzie równoważyć siłę $\vec{F}_1$, zatem wartość siły $F_n = 15,08 \text{ N}$. Siła nacisku płóz na lód jest równa $F_2 = 49,92 \text{ N}$.

Pytania i zadania

- **4.1.1.** Które spośród poniżej wymienionych oddziaływań nazywamy oddziaływaniami fundamentalnymi?

a) międzycząsteczkowe b) elektromagnetyczne	c) grawitacyjne d) elektrostatyczne
--	--

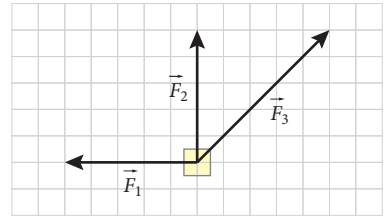
- **4.1.2.** Wszystkie ciała we Wszechświecie podlegają oddziaływaniom. Które spośród wymienionych cząstek w atomie (A, B, C, D) podlegają oddziaływaniom jądrowym silnym, a które elektrostatycznym? Wstaw w tabeli znak $\times$ w odpowiednich miejscach.

	A	B	C	D
Oddziaływania jądrowe silne				
Oddziaływania elektrostatyczne				

A. elektron i proton **B.** elektrony **C.** neutrony **D.** proton i neutron

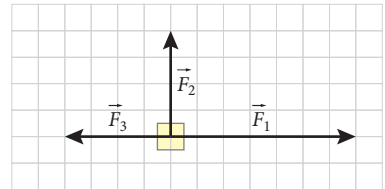
- **4.1.3.** Na rysunku przedstawiono ciało, na które działają siły o wartościach: $F_1 = 5 \text{ N}$, $F_2 = 5 \text{ N}$, $F_3 = 5\sqrt{2}$. Oblicz wartość siły wypadkowej oraz określ jej kierunek. Wszystkie siły leżą w jednej płaszczyźnie.

P1



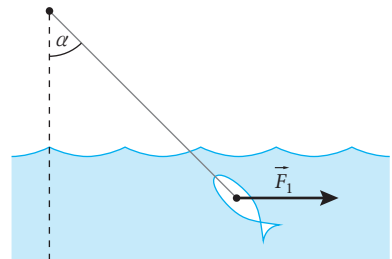
- **4.1.4.** Na klocek działają siły o wartościach: $F_1 = 7 \text{ N}$, $F_2 = 4 \text{ N}$, $F_3 = 4 \text{ N}$, tak jak pokazano na rysunku. Jaką dodatkową siłę należy przyłożyć do klocka, aby wypadkowa wszystkich sił była równa zero. Podaj jej wartość oraz kąt, jaki tworzy ona z kierunkiem działania siły $\vec{F}_1$. Wszystkie siły leżą w jednej płaszczyźnie.

P1



- **4.1.5.** Wędkarz zarzucił do rzeki przynętę na szczupaka w postaci gumowej ryбки. Rybka była nieruchoma w wodzie, gdy żyłka wędkarza tworzyła z pionem kąt $\alpha = 45^\circ$. Na rysunku zaznaczono siłę $F_1 = 0,3 \text{ N}$, z jaką prąd rzeki działał na przynętę. Przyjmij, że siła wyporu działająca na rybkę wynosi $F_w = 0,15 \text{ N}$. Przyjmij $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

P2

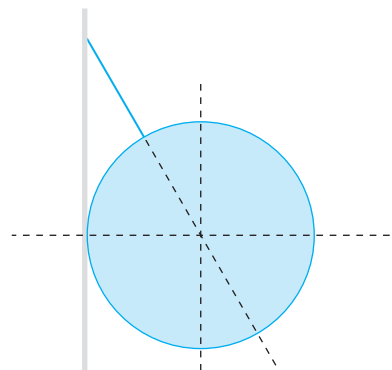


- Narysuj brakujące siły działające na rybkę i je nazwij.
- Oblicz wartości pozostałych sił oraz masę rybki.

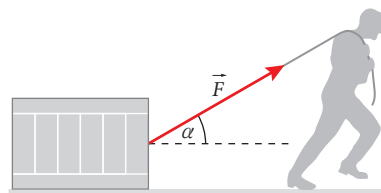
- **4.1.6.** Po zakończeniu treningu sportowiec zawiesił na gładkiej ścianie piłkę uszatą o masie $m = 1,5 \text{ kg}$, średnicy $d = 30 \text{ cm}$ i długości uchwytu-ucha $l = 15 \text{ cm}$. Przyjmij, że na piłkę nie działa siła tarcia.

P3

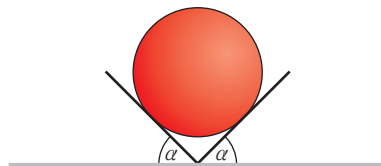
- Na rysunku zaznaczono kierunki wzdluz, których działają siły. Przerysuj rysunek do zeszytu, narysuj wszystkie siły działające na piłkę i je nazwij.
- Oblicz miarę kąta, jaki tworzy uchwyt piłki ze ścianą.
- Wyznacz siłę z jaką ściana działa na piłkę.



- • **4.1.7.** Człowiek ciągnie skrzynię o masie 120 kg z siłą $F = 760$ N za pomocą liny, która tworzy z poziomem kąt $\alpha = 30^\circ$. Rozłóż siłę F na składowe: równoległą i prostopadłą do podłoża i oblicz siłę nacisku skrzyni na podłoże. Przyjmij $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



- **4.1.8.** Kule do gry w kręgle umieszczono w poziomej rynience. Narysuj siły wywierane przez kulę o masie $m = 7,255$ kg na ścianki rynienki nachylone do poziomu pod kątem $\alpha = 45^\circ$. Oblicz wartości tych sił.



- **4.1.9.** Obraz o ciężarze $F_g = 400$ N zawieszono na ścianie w sposób pokazany na rysunku. Użyto linki wytrzymałej siłą naprężenia $F_n = 350$ N, przy czym linka tworzy z krawędzią obrazu kąt $\alpha = 30^\circ$.



- a) Czy linka tak zawieszonego na ścianie obrazu utrzyma jego ciężar?
b) Ile wyniosłaby siła naprężenia linki, jeśli tworzyłaby z górną krawędzią obrazu w obu jego rogach kąt $\beta = 45^\circ$.

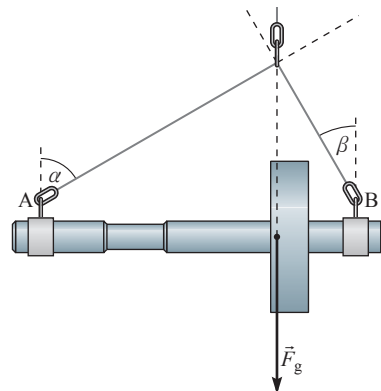
- • **4.1.10.** *Slackline* to sport polegający na wykonywaniu trików podczas przechodzenia po wąskiej taśmie rozpiętej pomiędzy dwoma punktami na wysokości od kilkunastu centymetrów do kilkuset metrów nad ziemią. Taśmę polipropylenową o długości $l = 6$ m rozpięto między dwoma słupami, przymocowując jej końce do haków. Siła napinająca taśmę miała wartość $F = 1,3$ kN.



- a) Narysuj siły działające na taśmę oraz siły działające na haki w chwili, gdy nastolatek o masie $m = 68$ kg stoi na środku liny. Zachowaj odpowiednią skalę.
b) Pod wpływem ciężaru nastolatka taśma wydłużyła się o $\Delta l = 10$ cm. Oblicz, o ile zwiększyła się wartość siły napinającej taśmę.

- • **4.1.11.** Ładunek o masie $m = 300$ kg jest podnoszony za pomocą wciągarki. Kąty, jakie liny wciągarki tworzą z pionem, wynoszą odpowiednio: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$.

- a) Rozłóż siłę ciężkości ładunku na siły składowe.
b) Oblicz wartości sił działających na haki A i B przy podnoszeniu ładunku ruchem jednostajnym.



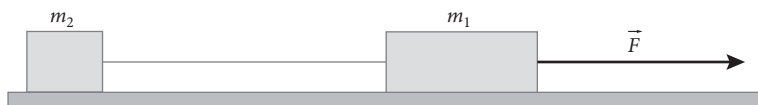
4.2. Zasady dynamiki Newtona

Podręcznik
rozdz. 4.3 i 4.4

■ Przykład 1.

Dwa klocki o masach $m_1 = 4 \text{ kg}$ i $m_2 = 2 \text{ kg}$ umieszczono na gładkim stole i połączono nitką, której maksymalne napięcie wynosi $F_{n \max} = 13 \text{ N}$. Siły oporu pomijamy.

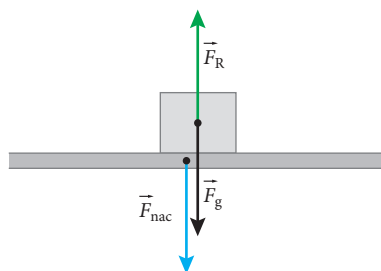
- Narysuj siły działające na klocek m_2 w sytuacji, gdy spoczywa on na stole, oraz oblicz siłę, z jaką ten klocek naciska na stół.
- Oblicz przyspieszenie, z jakim poruszają się klocki, jeśli do pierwszego z nich przyłożono siłę $F = 9 \text{ N}$ (patrz rysunek).
- Z jaką maksymalną siłą można ciągnąć pierwszy klocek, aby nic się nie zerwało?



Rozwiązanie

- Na klocek działają siła ciężkości $\vec{F}_g$ oraz pochodząca od stołu siła reakcji podłoża $\vec{F}_R$. Siły te równoważą się, dlatego klocek pozostaje nieruchomy: $F_R = F_g$.

Zwróćmy uwagę na przyczynę występowania sił w tym przykładzie. Na klocek działa siła ciężkości $\vec{F}_g$. Konsekwencją tego jest nacisk klocka na podłoże (stół) siłą $\vec{F}_{\text{nac}}$. Siła $\vec{F}_{\text{nac}}$ jest co prawda równa co do wartości sile $\vec{F}_g$, ale **jest przyłożona do innego ciała**. Zgodnie z III zasadą dynamiki, skoro klocek działa na stół, to stół działa na klocek siłą reakcji podłoża $\vec{F}_R$. Siły $\vec{F}_{\text{nac}}$ i $\vec{F}_R$ mają ten sam kierunek, przeciwne zwroty, te same wartości i różne punkty przyłożenia, a więc **nie równoważą się**.



Co do wartości wszystkie siły wymienione w tym przykładzie są sobie równe: $F_g = F_{\text{nac}} = F_R$, ale tylko siły F_g i F_R są przyłożone do tego samego ciała, a ponieważ mają przeciwne zwroty, równoważą się.

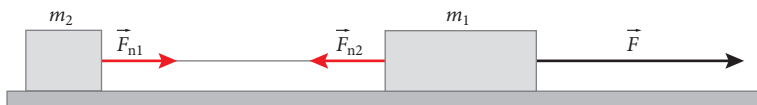
Wartość siły nacisku obliczymy zatem następująco:

$$F_{\text{nac}} = F_g = mg = 2 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 20 \text{ N}$$

Odpowiedź: Klocek naciska na stół siłą równą co do wartości sile ciężkości $F_{\text{nac}} = 20 \text{ N}$.

- Układ klocków jest wprowadzany w ruch dlatego, że klocek o masie m_1 jest ciągnięty siłą F . Na poruszające się klocki działają także siły napięcia nici: F_{n1} i F_{n2} (patrz rysunek na następnej stronie).

Zgodnie z III zasadą dynamiki są one sobie równe co do wartości $F_{n1} = F_{n2}$.



Zapisujemy II zasadę dynamiki dla każdego klocka:

$$\begin{cases} F - F_{n1} = m_1 a \\ F_{n2} = m_2 a \end{cases}$$

Skoro $F_{n1} = F_{n2}$, możemy z układu równań obliczyć przyspieszenie:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy:

$$a = \frac{9 \text{ N}}{2 \text{ kg} + 4 \text{ kg}} = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Odpowiedź: Układ klocków porusza się z przyspieszeniem $a = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

- c) Aby obliczyć maksymalną siłę, z jaką można ciągnąć klocki bez zerwania łączącej je nici, należy do układu równań zamiast sił F_{n1} i F_{n2} wstawić wartość siły naprężenia nici $F_{n \max}$ i przekształcić układ tak, aby wyeliminować przyspieszenie a .

$$\begin{cases} F_{\max} - F_{n \max} = m_1 a \\ F_{n \max} = m_2 a \end{cases}$$

Z układu równań obliczamy siłę maksymalną:

$$F_{\max} = F_{n \max} \left(\frac{m_1}{m_2} + 1 \right)$$

Po podstawieniu danych, otrzymujemy:

$$F_{\max} = 13 \text{ N} \left(\frac{4 \text{ kg}}{2 \text{ kg}} + 1 \right) = 39 \text{ N}$$

Odpowiedź: Maksymalna siła, z jaką możemy ciągnąć klocek m_1 , aby nie zerwała się łącząca klocki nie zerwała, wynosi $F_{\max} = 39 \text{ N}$.

■ Przykład 2.

Gdy wciągarka podnosi pionowo w górę element budowlany ruchem jednostajnym, naprężenie liny wynosi $F_{n1} = 5 \text{ kN}$. Przy wciąganiu tego samego elementu ruchem jednostajnie przyspieszonym wartość naprężenia jest równa $F_{n2} = 5,25 \text{ kN}$.

- Oblicz przyspieszenie elementu budowlanego, gdy działała na niego siła F_{n2} .
- Oblicz czas transportu tego elementu na wysokość $h = 6 \text{ m}$ ruchem przyspieszonym.
- Ile wynosiłaby wartość siły naciągu liny, gdyby ładunek był opuszczany pionowo z przyspieszeniem $a = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$?

Rozwiązanie

a) Na element budowlany działają dwie siły: grawitacji i naciągu liny $\vec{F}_n$.

- Gdy element budowlany jest podnoszony ruchem jednostajnym, to zgodnie z I zasadą dynamiki Newtona wypadkowa działających sił jest równa zero, a więc siły F_{n1} i F_g są sobie co do wartości równe: $F_{n1} = F_g$.

Zatem możemy wyznaczyć masę elementu budowlanego z zależności:

$$F_{n1} = mg \Rightarrow m = \frac{F_{n1}}{g}$$

- Gdy ten sam ładunek wciągany jest w górę z przyspieszeniem $\vec{a}$, to wypadkowa działających sił również skierowana jest do góry, więc $F_{n2} > F_g$ (patrz rysunek).

Zgodnie z II zasadą dynamiki zapiszemy:

$$a = \frac{F_{n2} - F_g}{m}$$

$$a = \frac{F_{n2} - F_g}{\frac{F_{n1}}{g}} = \frac{F_{n2}}{F_{n1}} g - g = g \left(\frac{F_{n2}}{F_{n1}} - 1 \right)$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$a = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \left(\frac{5,25 \text{ kN}}{5 \text{ kN}} - 1 \right) = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Możemy oczywiście wykonać obliczenia etapami, czyli najpierw obliczyć masę elementu:

$$m = \frac{F_{n1}}{g} = \frac{5000 \text{ N}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 500 \text{ kg}$$

i wstawić dane liczbowe do wzoru:

$$a = \frac{F_{n2} - F_g}{m}$$

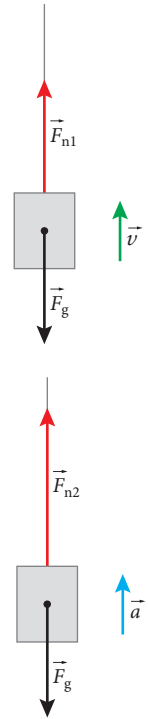
$$a = \frac{F_{n2} - F_g}{m} = \frac{5250 \text{ N} - 5000 \text{ N}}{500 \text{ kg}} = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Odpowiedź: Przyspieszenie, z jakim jest wciągany ładunek, wynosi $a = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

b) Ze wzoru na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym: $h = \frac{at^2}{2}$, obliczamy czas transportu elementu budowlanego:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6 \text{ m}}{0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 4,9 \text{ s}$$

Odpowiedź: Czas transportu ładunku na wysokość 6 m trwał około 4,9 s.



- c) Możemy zapisać II zasadę dynamiki dla elementu budowlanego opuszczanego z przyspieszeniem $a = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$:

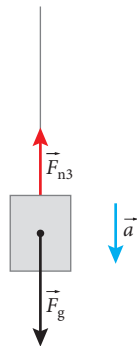
$$F_g - F_{n3} = ma, \text{ gdzie } F_g = F_{n1}$$

Z powyższych zależności wyznaczamy siłę naciągu liny:

$$F_{n3} = F_{n1} - ma$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy

$$F_{n3} = 5000 \text{ N} - 500 \text{ kg} \cdot 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 4750 \text{ N}$$



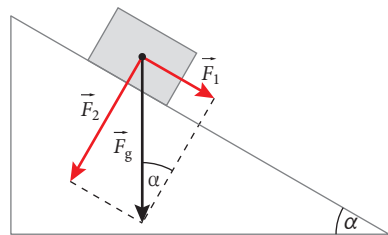
Odpowiedź: Przy opuszczaniu ładunku z przyspieszeniem $0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ wartość siły naciągu liny wciągarki wynosi 4750 N (jest ona mniejsza niż siła ciężkości działająca na ładunek).

■ Przykład 3.

Na górze równi pochyłej o kącie nachylenia $\alpha = 30^\circ$ do poziomu ustawiono klocek, któremu nadano prędkość początkową $v_0 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz prędkość klocka oraz czas jego ruchu po przebyciu drogi $s = 4 \text{ m}$ wzdłuż równi pochyłej. Pomiń opór ruchu.

Rozwiązanie

Sytuacja opisana w zadaniu to ruch przyspieszony z prędkością początkową. Aby poznać przyspieszenie klocka, musimy najpierw wyznaczyć siłę działającą wzdłuż równi, powodującą jego przyspieszenie. W tym celu rozkładamy siłę ciężkości na dwie składowe, podobnie jak zrobiliśmy to w przykładzie 4. na s. 138.



Siłą, która nadaje przyspieszenie klockowi, jest siła F_1 .

Wyznamy ją za pomocą funkcji trygonometrycznej sinus:

$$\sin \alpha = \frac{F_1}{F_g}$$

więc

$$F_1 = mg \sin \alpha$$

Zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona klocek o masie m porusza się z przyspieszeniem:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_1}{m}$$

$$a = \frac{mg \sin \alpha}{m} = g \sin \alpha$$

Ponieważ znamy już przyspieszenie klocka na równi pochyłej, możemy obliczyć prędkość końcową oraz czas trwania ruchu.

Zapisujemy wzory na prędkość i drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v = v_0 + a t$$

Z drugiego równania wyznaczamy czas:

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

i wstawiamy do równania pierwszego. Otrzymujemy:

$$s = v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2} a \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

Z powyższego wzoru wyznaczamy prędkość końcową:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2as} = \sqrt{v_0^2 + 2sg \sin \alpha}$$

Podstawiamy wartości liczbowe wraz z jednostkami:

$$v = \sqrt{\left(3 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 2 \cdot 4 \text{ m} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin 30^\circ} = \sqrt{49 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Następnie obliczamy czas trwania ruchu:

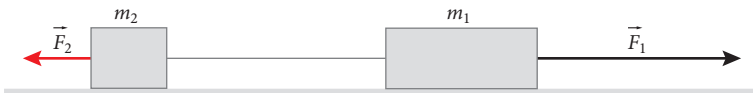
$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{v - v_0}{g \sin \alpha} \quad t = \frac{(7 - 3) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0,8 \text{ s}$$

Odpowiedź: Prędkość klocka po pokonaniu 4 m wyniosła $7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a czas trwania tego ruchu $t = 0,8 \text{ s}$.

Pytania i zadania

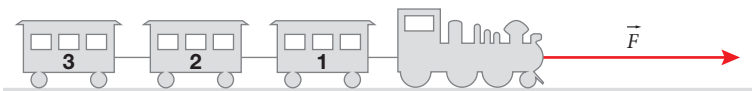
- • **4.2.1.** Dwa klocki o masach: $m_1 = 600 \text{ g}$, $m_2 = 400 \text{ g}$ zostały połączone linką. Na klocki działają siły: $F_1 = 4,5 \text{ N}$ i $F_2 = 1,5 \text{ N}$. Oblicz przyspieszenie klocków i naprężenie linki między klockami.

P1



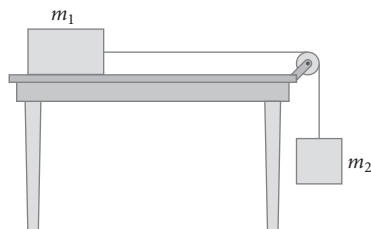
- • **4.2.2.** Dziecko ciągnie poziomo lokomotywę pociągu-zabawki siłą $F = 2,5 \text{ N}$. Trzy wagoniki są połączone między sobą i z lokomotywą za pomocą cienkiego sznurka. Oblicz siłę naprężenia sznurka działającą między lokomotywą a pierwszym wagonikiem oraz siły naprężenia działające między pierwszym a drugim oraz między drugim a trzecim wagonikiem. Porównaj te siły. Masa każdego wagonika to $m_w = 200 \text{ g}$, a masa lokomotywy $m_l = 400 \text{ g}$.

P1



- • **4.2.3.** Do kločka leżącego na stole jest przymocowana nić, którą przełożono przez bloczek, a na jej końcu zaczepiono ciężarek. Masa kločka wynosi $m_1 = 3,7$ kg, a masa ciężarka $m_2 = 0,3$ kg. Oblicz przyspieszenie układu klocek–ciężarek. Opory ruchu pomini. Przyspieszenie ziemskie przyjmij $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

P1



- • **4.2.4.** Na zdjęciu obok pokazano lewitujące ciało. W jaki sposób można uzyskać stan lewitacji?

P1

- • **4.2.5.** Na elektronicznej wadze kuchennej uczniowie postavili naczynie z wodą i odczytali wskazanie wagi. Następnie zanurzyli w wodzie metalową kulkę zawieszoną na nitce w taki sposób, że kulka nie dotknęła dna naczynia. Wnioski z obserwacji uczniowie zapisali w tabeli. Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń.

P1



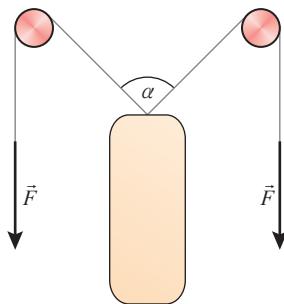
Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F, jeśli jest fałszywe. Wstaw obok każdego zdania znak $\times$ przy wybranej odpowiedzi.

	P	F
Wskazanie wagi po zanurzeniu kulki nie uległo zmianie, ponieważ kulka nie dotyka bezpośrednio dna naczynia.		
Woda i kulka działają na siebie siłami zgodnie z III zasadą dynamiki.		
Siła, jaką kulka działa na wodę, jest przyłożona do wody, a więc wskazanie wagi się zwiększyło.		
Siła, jaką woda działa na zanurzoną kulkę, to siła wyporu określona przez prawo Archimedesa.		
Na kulkę zanurzoną w wodzie działają siła ciężkości i siła wyporu, które się równoważą.		
Kulka pozostaje w spoczynku w wodzie, ponieważ suma działających na nią sił wynosi zero.		

- **4.2.6.** Za pomocą dźwigu budowlanego podniesiono pionowo z przyspieszeniem $a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ żelbetonowy strop o masie $m = 1500$ kg. Oblicz wartość siły naciągu liny dźwigu.

P2

- • **4.2.7.** Wypełniony kamieniami worek o masie $m = 40$ kg jest transportowany w sposób pokazany na rysunku obok. Na każdą z lin działa siła o wartości $F = 300$ N, a kąt między linami wynosi $\alpha = 90^\circ$. Oblicz przyspieszenie, z jakim podnoszony jest worek.



- • **4.2.8.** Rwanie to jedna z technik podnoszenia ciężarów. Zawodnik podnosi z przyspieszeniem a_1 nad głowę sztangę o masie M , przez kilka sekund utrzymuje ją w takiej pozycji i opuszcza ją z przyspieszeniem a_2 . Czy siła działająca na ręce zawodnika w poszczególnych fazach rwania jest mniejsza od ciężaru sztangi, równa mu czy większa od niego?



- • • **4.2.9.** Trzech chłopców, każdy o masie $M = 40$ kg, buduje domek na drzewie. Do transportu materiałów używają liny przerzuconej przez gałąź znajdującą się na wysokości $h = 3$ m. Tym sposobem wciągają na drzewo ładunki o masie $m = 20$ kg. Każdy z nich stosuje inną technikę. Jeden z chłopców, stojąc nieruchomo na ziemi, ciągnie za wolny koniec liny siłą F taką, że ładunek porusza się ruchem jednostajnym (rysunek a). Drugi chłopiec możliwie najwyżej chwytą koniec liny i zawisa na niej (rysunek b). Trzeci wspina się po linie z przyspieszeniem $a_0 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ względem liny (rysunek c). Oblicz przyspieszenie, z jakim wznosi się ładunek, oraz siłę naciągu liny w każdej sytuacji. Pomiń siłę tarcia liny o gałąź.



- • **4.2.10.** Gładka rynna o długości $s = 8$ m jest oparta o rampę i tworzy z poziomem kąt $\alpha = 30^\circ$. Od góry wrzucono do niej mały drewniany klocek, któremu nadano prędkość początkową $v_0 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz prędkość klocka na drugim końcu rynny oraz czas jego ruchu. Pomiń opór ruchu.
- • **4.2.11.** Saneczkarz biegł po poziomym odcinku góry, pchając przed sobą sanki, po czym na końcu poziomego odcinka wskoczył na nie i zjechał ze stoku o kącie nachylenia $\alpha = 30^\circ$ do poziomu. Po przebyciu drogi $s = 16$ m do podnóża góry saneczkarz osiągnął prędkość $v = 13 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ile wynosiła jego prędkość początkowa na górze stoku i ile czasu trwał zjazd?
- • **4.2.12.** U dołu gładkiej oblodzonej pochylni o kącie nachylenia $\alpha = 30^\circ$ do poziomu pchnięto w górę krążek metalowy, nadając mu prędkość $v_0 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz wysokość, na jakiej krążek się zatrzyma. Pomiń opory ruchu.
- **4.2.13.** Samochód o masie $m = 800$ kg jadący z prędkością $v_0 = 54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ rozpoczął hamowanie. Oblicz drogę przebytą przez samochód aż do zatrzymania, jeśli na samochód działała stała siła hamowania $F = 4000$ N.

4.3. Siła tarcia

Podręcznik
rozdz. 4.5

■ Przykład 1.

Kierowca jechał z prędkością $v_0 = 86,4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ po prostoliniowej drodze i rozpoczął hamowanie. Oblicz najmniejszą odległość, na jakiej kierowca może zatrzymać samochód. Współczynnik tarcia statycznego między oponami a nawierzchnią drogi wynosił $\mu_s = 0,60$.

Rozwiązanie

Dopóki koła samochodu się obracają, między oponami a nawierzchnią występuje tarcie statyczne (w miejscu styku z jezdnią opona nie przemieszcza się względem drogi). Przy maksymalnej wartości siły tarcia statycznego między oponami a jezdnią samochód się zatrzyma na najkrótszej drodze. Gdyby auto wpadło w poślizg (opony nie toczyłyby się, ale ślizgały po asfalcie), należałoby współczynnik tarcia statycznego zastąpić współczynnikiem tarcia kinetycznego, a droga hamowania byłaby dłuższa.

Uwaga: W zadaniu przyjęliśmy, że występuje tylko tarcie statyczne, pominięto tarcie toczne.

Zapiszmy równania dla ruchu jednostajnie opóźnionego:

$$s = v_0 t - \frac{at^2}{2}$$

$$v_k = v_0 - at$$

Wiemy, że samochód ma się zatrzymać, zatem $v_k = 0$.

Z rozwiązania tych równań otrzymujemy wzór na drogę w ruchu jednostajnie opóźnionym:

$$s = \frac{v_0^2}{2a}$$

W celu obliczenia wartości przyspieszenia a w ruchu jednostajnie opóźnionym stosujemy II zasadę dynamiki Newtona. Ruch jednostajnie opóźniony zachodzi pod wpływem siły tarcia.

Zatem:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F_T}{m}$$

Zwróćmy uwagę, że siła tarcia zależy od siły nacisku i współczynnika tarcia:

$$F_T = \mu_s F_N = \mu_s \cdot mg$$

Możemy zatem zapisać przyspieszenie następująco:

$$a = \frac{F_T}{m} = \frac{\mu_s mg}{m} = \mu_s g$$

Gdy wstawimy otrzymane wyrażenie do wzoru na drogę, otrzymamy:

$$s = \frac{v_0^2}{2\mu_s g}$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$s = \frac{(24 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2 \cdot 0,60 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 49 \text{ m}$$

Odpowiedź: Najkrótsza droga, na jakiej kierowca może zatrzymać samochód, wynosi $s = 49 \text{ m}$.

■ Przykład 2.

Na torze do curlingu zawodnicy popychają kamienie, aby umieścić je w tzw. domu. Z jaką prędkością zawodnik wypuścił kamień, który zatrzymał się po przebyciu bez rotacji prostoliniowego odcinka drogi $s = 33,75 \text{ m}$? Współczynnik tarcia kinetycznego kamienia o lód $\mu_k = 0,03$.

Rozwiązanie

Zapisujemy II zasadę dynamiki Newtona: $F = ma$.

Siłą, która powoduje, że ruch kamienia jest jednostajnie opóźniony, jest siła tarcia kinetycznego. Zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona:

$$F_T = ma, \quad F_T = \mu_k \cdot mg$$

Zatem:

$$ma = \mu_k \cdot mg \Rightarrow a = \mu_k g$$

Przyspieszenie wyznaczmy z układu równań opisujących ruch jednostajnie opóźniony:

$$\begin{cases} s = v_0 t - \frac{at^2}{2} \\ v = v_0 - at \end{cases}$$

Gdy ciało się zatrzymuje, jego prędkość końcowa v wynosi zero.

Rozwiązujemy powyższy układ równań i otrzymujemy:

$$s = \frac{v_0^2}{2a} \Rightarrow a = \frac{v_0^2}{2s}$$

$$a = \mu_k g$$

$$\frac{v_0^2}{2s} = \mu_k g \Rightarrow v_0^2 = 2s\mu_k g$$

$$v_0 = \sqrt{2s\mu_k g}$$

Podstawiamy dane liczbowe:

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot 33,75 \text{ m} \cdot 0,03 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \sqrt{19,86 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 4,46 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Odpowiedź: Kamień został wypuszczony z prędkością $v_0 = 4,46 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

■ Przykład 3.

Podczas wyprawy na biegun północny podróżnik ciągnie cały ekwipunek za sobą na saniach. Łączna masa sań wraz z ekwipunkiem wynosi $m = 148 \text{ kg}$. Lina uprząży, którą połączony jest podróżnik z saniami, tworzy z poziomem kąt $\alpha = 30^\circ$. Współczynnik tarcia kinetycznego sań o śnieg wynosi $\mu = 0,2$.



- Oblicz siłę, z jaką podróżnik ciągnie sanie, jeśli przemieszcza się on ruchem jednostajnym.
- Oblicz przyspieszenie, z jakim poruszałyby się sanie, gdyby podróżnik ciągnął je z siłą $F_1 = 300 \text{ N}$ w kierunku poziomym.

Rozwiązanie

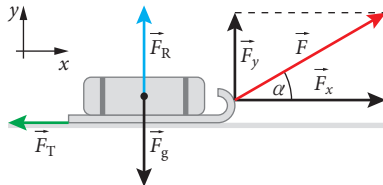
- Na sanie działają następujące siły: siła ciężkości $\vec{F}_g = m\vec{g}$, siła tarcia $\vec{F}_T$, siła reakcji podłoża $\vec{F}_R$, siła $\vec{F}$, z jaką lina uprząży działa na zaczep sań.

Siłę $\vec{F}$ rozkładamy na składowe:

$$\vec{F}_x = \vec{F} \cos \alpha - \text{równoległą do podłoża,}$$

$$\vec{F}_y = \vec{F} \sin \alpha - \text{prostopadłą do podłoża.}$$

Ponieważ sanie poruszają się ruchem jednostajnym, zgodnie z I zasadą dynamiki wypadkowa działających na nie sił wynosi zero: $\vec{F}_g + \vec{F}_T + \vec{F}_R + \vec{F} = 0$.



Dla składowych sił działających w kierunku pionowym zapisujemy:

$$F_R + F_y - F_g = 0, F_R + F \sin \alpha - mg = 0$$

I wyznaczamy wartość siły reakcji podłoża:

$$F_R = mg - F \sin \alpha$$

Zgodnie z III zasadą dynamiki wartość siły nacisku jest równa wartości siły reakcji podłoża, więc siłę tarcia można zapisać:

$$F_T = \mu F_N = \mu(mg - F \sin \alpha)$$

Zapisujemy I zasadę dynamiki dla sił działających w kierunku poziomym:

$$-F_T + F_x = 0$$

$$-\mu(mg - F \sin \alpha) + F \cos \alpha = 0$$

Z powyższego równania wyznaczamy siłę F :

$$F = \frac{\mu mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$$

Po wstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy:

$$F = \frac{0,2 \cdot 148 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + 0,2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{290,376 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,966} \approx 300 \text{ N}$$

Odpowiedź: Na sanie działa siła $F = 300 \text{ N}$.

b) Przyspieszenie obliczymy następująco:

$$a = \frac{F_w}{m} = \frac{F_1 - F_T}{m} = \frac{F_1 - \mu mg}{m} = \frac{F}{m} - \mu g$$

$$a = \frac{300 \text{ N}}{148 \text{ kg}} - 0,2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0,07 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Odpowiedź: Gdyby siła ciągnąca działała poziomo i wynosiła $F_1 = 300 \text{ N}$, to sanie poruszałyby się ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem $a = 0,07 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

■ Przykład 4.

Podczas remontu budynku do usuwania gruzu wykorzystano metalową rynną o długości $s = 4 \text{ m}$. Jeden z jej końców oparto o ziemię, a drugi – o ścianę budynku poniżej okna tak, że rynna tworzyła z poziomem kąt $\alpha = 30^\circ$. Oblicz prędkość bryłki gruzu u wylotu rynny. Przyjmij, że wartość współczynnika tarcia dla gruzu w rynnie $\mu = 0,2$.

Rozwiązanie

Na zsuwającą się bryłkę gruzu działają siły:

$\vec{F}_g$ – siła grawitacji,

$\vec{F}_S$ – siła sprężystości podłoża,

$\vec{F}_T$ – siła tarcia.

Wypadkowa tych sił nadaje bryłce gruzu przyspieszenie skierowane w dół rynny. Na podstawie drugiej zasady dynamiki, możemy zapisać:

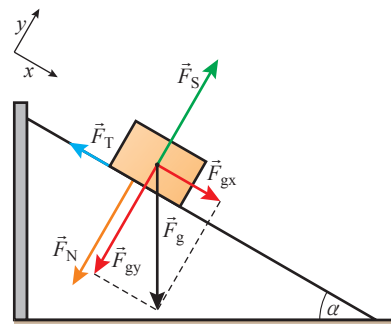
$$\vec{F}_g + \vec{F}_S + \vec{F}_T = m\vec{a}$$

W kierunku prostopadłym do rynny bryłka się nie porusza, więc zgodnie z pierwszą zasadą dynamiki możemy zapisać:

$$F_S = F_{gy}, \text{ gdzie } F_{gy} = mg \cos \alpha$$

Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki wartość siły nacisku F_N jest równa wartości siły sprężystości podłoża F_S :

$$F_N = F_S = mg \cos \alpha$$



Dla ruchu bryłki wzdłuż rynnny możemy drugą zasadę dynamiki zapisać następująco:

$$F_{gx} - F_T = ma$$

$$mgsin\alpha - mg\mu\cos\alpha = ma$$

Z powyższego równania wyznaczamy przyspieszenie, z jakim bryłka gruzu porusza się w rynnny:

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

Bryłka gruzu porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej, dlatego aby wyznaczyć prędkość bryłki u wylotu rynnny, rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} v = at \\ s = \frac{at^2}{2} \end{cases}$$

Prędkość bryłki gruzu wynosi:

$$v = \sqrt{2as}$$

Po uwzględnieniu, że

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

otrzymujemy:

$$v = \sqrt{2gs(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych mamy:

$$v = \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4 \text{ m} (\sin 30^\circ - 0,2 \cdot \cos 30^\circ)} \approx \sqrt{26 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \approx 5,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Odpowiedź: Prędkość bryłki gruzu u wylotu rynnny wynosi około $5,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Pytania i zadania

- P1

4.3.1. Oblicz drogę hamowania samochodu jadącego z prędkością $v = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, którego koła się zablokowały. Współczynnik tarcia opon na suchej jezdni wynosi $\mu = 0,7$.
- P1

4.3.2. Samochód jadący początkowo ze stałą prędkością zatrzymał się po przebyciu minimalnej drogi hamowania $s = 25 \text{ m}$. Oblicz prędkość, z jaką poruszał się samochód, jeśli współczynnik tarcia statycznego kół samochodu o jezdnię wynosi $\mu_s = 0,3$.
- P1

4.3.3. Kierowca jechał z prędkością $v = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, po czym wyhamował do zera na drodze minimalnej $s = 32 \text{ m}$. Oblicz współczynnik tarcia statycznego między oponami a nawierzchnią drogi.

- P1

• **4.3.4.** W samochodach używa się różnych opon: zimowych, letnich i wielosezonowych. Czym różnią się te opony? Przeanalizuj ich parametry pod względem przyczepności do podłoża i bezpieczeństwa drogowego. Ustal, które parametry opony nie wpływają na jej przyczepność. Skorzystaj z różnych źródeł informacji.
- P1

• **4.3.5.** Przy silnym wietrze na $\Delta S = 1 \text{ m}^2$ powierzchni działa siła $F = 160 \text{ N}$. Oblicz siłę napędową samochodu o masie $m = 2 \text{ t}$ jadącego ze stałą prędkością pod wiatr oraz przyspieszenie tego pojazdu, gdyby z tą samą siłą napędową jechał z wiatrem. Przyjmij stałą siłę wiatru, powierzchnię czołową pojazdu $S = 4 \text{ m}^2$, a dodatkowy opór $F_o = 16 \text{ kN}$.
- P2

• **4.3.6.** Skrzynka pchnięta po podłodze zatrzymała się po przebyciu drogi $s = 1,25 \text{ m}$. Jaką prędkość początkową nadano skrzynce, jeśli współczynnik tarcia skrzynki o podłogę wynosi $\mu = 0,09$. Przyjmij $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.
- P2

• **4.3.7.** Narciarz po zjechaniu ze stoku uzyskał prędkość $v_0 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, po czym jechał dalej po poziomej powierzchni, na której współczynnik tarcia nart o śnieg wynosi $\mu = 0,2$. Oblicz, ile czasu trwało hamowanie narciarza. Przyjmij $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.
- P3

• **4.3.8.** Skrzynia o masie $m = 30 \text{ kg}$ porusza się ruchem jednostajnym po poziomej powierzchni dzięki sile pchającej skrzynkę pod kątem $\alpha = 30^\circ$ do poziomu. Oblicz tę siłę, jeśli współczynnik tarcia skrzyni o podłogę $\mu = 0,4$.
- P3

• **4.3.9.** Do ciała o masie $m = 1 \text{ kg}$ przyłożono siłę $F = 5 \text{ N}$ działającą pod kątem $\alpha = 45^\circ$ do poziomu. Z jakim przyspieszeniem będzie poruszać się to ciało? Współczynnik tarcia ciała o podłogę $\mu = 0,1$.
- P3

• **4.3.10.** Grotołaz o masie $m = 70 \text{ kg}$ zamierza przedostać się do podziemnej jaskini pionowym szybem. Zsuwa się po linie z przyspieszeniem $a = 0,2 \text{ g}$. Oblicz wartość siły naciągu liny i wartość siły, jaką dłonie działają na linę. Przyjmij, że współczynnik tarcia kinetycznego dłoni o linę wynosi $\mu = 0,7$.
- P3

• • **4.3.11.** Ratownik GPR-u o masie $m_1 = 80 \text{ kg}$ ciągnie sanki z rannym turystą o łącznej masie $m_2 = 100 \text{ kg}$. Lina holownicza jest ustawiona równolegle do poziomego podłoża. Ratownik odpycha się kijkami, działając na podłogę poziomą siłą $F = 300 \text{ N}$. Oblicz przyspieszenie układu ratownik–sanki oraz siłę naciągu liny holowniczej, jeżeli współczynnik tarcia sanek i nart o śnieg $\mu = 0,05$.
- P4

• • **4.3.12.** W słoneczny zimowy dzień po dachu o kącie nachylenia $\alpha = 45^\circ$ zaczął zsuwać się kawałek lodu. Z jakim przyspieszeniem porusza się kawałek lodu i jaką prędkość osiągnie po czasie $t = 0,7 \text{ s}$? Współczynnik tarcia lodu o dach wynosi $\mu = 0,2$.
- P4

• • **4.3.13.** W słoneczny zimowy dzień po dachu o kącie nachylenia $\alpha = 45^\circ$ zaczął zsuwać się śnieg. Po jakim czasie osiągnie prędkość $v = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$? Jaką drogę pokona w tym czasie? Przyjmij współczynnik tarcia śniegu o dach $\mu = 0,2$.

● ● **4.3.14.** Osoba niepełnosprawna ruchowo wjechała na wózek na podjazd o kącie nachylenia $\alpha = 5^\circ$ i zablokowała koła. Oblicz minimalny współczynnik tarcia, przy którym wózek nie ześlizgnie się z podjazdu.

P4 ● ● **4.3.15.** Rozpędzony do prędkości $v_0 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ narciarz wjeżdża na stok nachylony pod kątem $\alpha = 30^\circ$. Współczynnik tarcia nart o śnieg wynosi $\mu = 0,2$. Oblicz wysokość, na jakiej narciarz zacznie się cofać.

P4 ● ● **4.3.16.** Kierowca samochodu o masie $m = 1000 \text{ kg}$ zatrzymał pojazd na drodze o nachyleniu do poziomu $\alpha = 15^\circ$, zapomniał zaciągnąć hamulec ręczny i pojazd zaczął zjeżdżać ze wznieślenia. Po $s = 20 \text{ m}$ jego prędkość wynosiła $v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz czas, w jakim samochód pokonał drogę s , i wartość sił oporu.

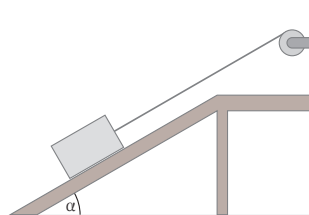
● ● **4.3.17.** Starożytni Egipcjanie podczas budowy piramid transportowali w górę kamienne bloki o masie $m = 10 \text{ t}$ po rampie o kącie nachylenia $\alpha = 20^\circ$. Oblicz siłę, jakiej należało użyć, by wciągać blok ruchem jednostajnym, jeśli liny, którymi ciągnięto, były równoległe do powierzchni rampy. Przyjmij współczynnik tarcia kamiennych bloków o powierzchnię rampy równy $\mu = 0,4$.

● ● **4.3.18.** Pochylnia magazynu jest nachylona pod kątem $\alpha = 30^\circ$ do poziomu. Palety z towarem transportuje się po niej za pomocą wciągarki. Oblicz siłę naciągu liny, jeśli paleta o masie $m = 100 \text{ kg}$ porusza się w dół równi z przyspieszeniem równy $a = 0,3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, a współczynnik tarcia wynosi $\mu = 0,5$.

● ● ● **4.3.19.** Chłopiec wbiega na wzgórze z przyspieszeniem $a = 0,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, ciągnąc sanki o masie $m = 5 \text{ kg}$. Sznurek tworzy z podłożem kąt $\beta = 45^\circ$, a powierzchnia wzniesienia jest nachylona do poziomu pod kątem $\alpha = 30^\circ$. Współczynnik tarcia sanek o śnieg wynosi $\mu = 0,1$. Oblicz wartość siły, jaką chłopiec ciągnie sanki.

● ● ● **4.3.20.** Rolkarz zaczyna zjeżdżać ze szczytu rampy o kącie nachylenia $\alpha = 30^\circ$ do poziomu. W tym samym momencie drugi rolnik wjeżdża na rampę z prędkością względną $v = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz prędkość względną rolnika po upływie $t = 0,5 \text{ s}$. Przyjmij, że na obu działa stała siła oporu $F_o = 165 \text{ N}$. Przyjmij $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Masa obu rolników jest taka sama i wynosi $m = 65 \text{ kg}$.

● ● ● **4.3.21.** Rowerzysta może zmieniać położenie swojego środka ciężkości, np. pochylając się i silniej naciskając kierownicę, jednocześnie wstając z siodełka, podnosząc kierownicę lub opierając łokcie na kierownicy. Jeżeli równocześnie zamierza jechać ze stałą prędkością, powinien mocniej lub słabiej naciskać na pedały. Wyjaśnij dlaczego.



- • • **4.3.22.** Uczniowie wyznacali współczynnik tarcia kinetycznego przy użyciu równi pochyłej i klocka. Długa deska ustawiona na podpórce stanowiła równię pochyłą. Uczniowie tak dobrali kąt nachylenia równi, aby ruch klocka był w przybliżeniu jednostajny, i wówczas mierzyli wysokość i długość podstawy równi. Pomiarzy powtórzyli kilkakrotnie. Wyniki zamieścili w tabeli 1. Współczynnik tarcia uczniowie wyznacali ze wzoru: $\mu_k = \frac{h}{L}$.

D

Tabela 1.

Nr pomiaru	Wysokość równi h [cm]	Długość podstawy równi L [cm]	Współczynnik tarcia $\mu_k = \frac{h}{L}$
1	26,5	80,0	
2	27,0	82,0	
3	25,5	77,5	
4	26,5	85,0	
5	26,0	83,5	
Średnia wartość współczynnika tarcia kinetycznego			

- Skorzystaj z definicji współczynnika tarcia kinetycznego i wykaż, że można go wyrazić za pomocą wzoru: $\mu_k = \frac{h}{L}$, gdzie h – wysokość równi, L – podstawa równi pochyłej.
- Uzupełnij w tabeli ostatnią kolumnę, obliczając współczynniki tarcia z dokładnością do trzech cyfr znaczących, a następnie średnią wartość współczynnika tarcia.
- Oblicz niepewność maksymalną (maksymalny błąd bezwzględny) wartości średniej i niepewność względną (błąd względny), a następnie zapisz wartość wyznaczonego współczynnika tarcia wraz z niepewnością pomiarową.

4.4. Siła dośrodkowa

Podręcznik
rozd. 4.6

■ Przykład 1.

Średnica wirnika jednej z największych elektrowni wiatrowych wynosi $d = 164$ m. Oblicz wartość siły dośrodkowej działającej na jego fragment o masie $m = 1$ kg znajdujący się na końcu łopaty, gdy wirnik wykonuje 15 obrotów na minutę.

Rozwiązanie

Wiemy, że wirnik wykonuje 15 obrotów na minutę, możemy zatem obliczyć częstotliwość jego obrotów. Skorzystajmy ze wzoru:

$$f = \frac{n}{t} = \frac{15}{1 \text{ min}} = \frac{15}{60 \text{ s}} = 0,25 \text{ Hz}$$

Wartość działającej siły dośrodkowej będziemy liczyć dla fragmentu łopaty, który się znajduje w odległości równej promieniowi wirnika, czyli połowie jego średnicy: $R = \frac{d}{2} = 82$ m. Wartość siły dośrodkowej obliczymy ze wzoru:

$$F_d = \frac{mv^2}{R}$$

Prędkość liniową danego fragmentu łopaty wyrażamy wzorem:

$$v = \omega R = 2\pi f R$$

zatem:

$$F_d = \frac{m(\omega R)^2}{R} = m\omega^2 R = m4\pi^2 f^2 R$$

Podstawiamy wartości liczbowe:

$$F_d = 1 \text{ kg} \cdot 4\pi^2 \cdot (0,25 \text{ Hz})^2 \cdot 82 \text{ m} = 202 \text{ N}$$

Odpowiedź: Na fragment łopaty znajdujący się na jej końcu działa siła dośrodkowa o wartości 202 N.

■ Przykład 2.

Samochód rajdowy wjeżdża w zakręt o promieniu $R = 150$ m z prędkością $v = 126 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Oblicz minimalną wartość współczynnika tarcia, przy którym samochód nie wpadnie w poślizg na zakręcie.



Rozwiązanie

Samochód na zakręcie utrzymuje siła tarcia, która odgrywa rolę siły dośrodkowej: $F_T = F_d$.

Po podstawieniu wyrażeń opisujących te siły otrzymujemy:

$$mg\mu_{\min} = \frac{mv^2}{R}$$

Z zapisanej równości wyznaczamy współczynnik tarcia:

$$\mu_{\min} = \frac{v^2}{gR}$$

Przed podstawieniem danych przeliczamy prędkość: $v = 126 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 35 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$\mu_{\min} = \frac{(35 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 150 \text{ m}} \approx 0,83$$

Odpowiedź: Aby samochód nie wpadł w poślizg na zakręcie, współczynnik tarcia powinien wynosić co najmniej 0,83.

■ Przykład 3.

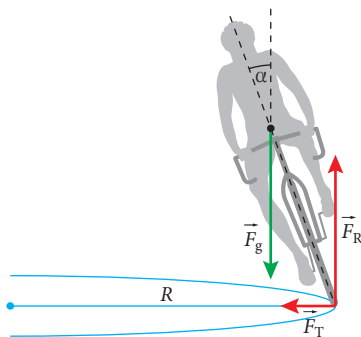
Rowerzysta podczas pokonywania na poziomym terenie zakrętu o promieniu $R = 10 \text{ m}$ odchyła się wraz z rowerem od pionu w stronę środka zataczanego okręgu o kąt $\alpha = 20^\circ$.

- Oblicz prędkość roweru na zakręcie.
- Czy rowerzysta może bezpiecznie przejechać ten zakręt z prędkością $v = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, jeśli maksymalny współczynnik tarcia statycznego kół o nawierzchnię wynosi $\mu_s = 0,4$?

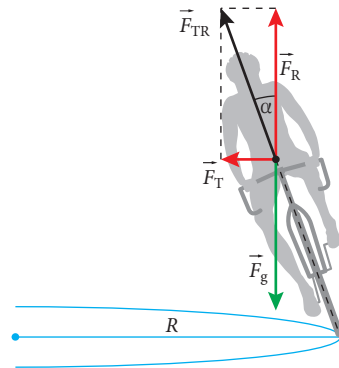
Przyjmij przyspieszenie ziemskie $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Rozwiązanie

- Na rowerzystę działają następujące siły: w kierunku pionowym – siła grawitacji $\vec{F}_g$ i siła reakcji podłoża $\vec{F}_R$. W kierunku poziomym wzdłuż promienia zataczanego okręgu siła tarcia statycznego $\vec{F}_T$ (patrz rysunek 1) – jest ona siłą dośrodkową: $\vec{F}_d = \vec{F}_T$.



Rysunek 1



Rysunek 2

Ciało rowerzysty wraz z rowerem powinno się tak odchylić, by wypadkowa $\vec{F}_{TR}$ sił działających na rowerzystę: reakcji podłoża $\vec{F}_R$ i tarcia statycznego $\vec{F}_T$, działała wzdłuż prostej nachylonej pod kątem α do pionu i przechodziła przez środek ciężkości rowerzysty (patrz rys. 2).

Zauważmy, że na podstawie rysunku 2. możemy obliczyć tangens kąta nachylenia jako iloraz siły tarcia i siły reakcji podłoża:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_T}{F_R}$$

Siła tarcia statycznego jest siłą dośrodkową: $F_T = F_d$.

Siła reakcji podłoża jest równa co do wartości sile ciężkości: $F_R = F_g$.

Zatem otrzymujemy:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_d}{F_g} = \frac{\frac{mv^2}{R}}{mg} = \frac{v^2}{gR}$$

Z powyższego równania wyznaczamy prędkość rowerzysty:

$$v = \sqrt{gR \cdot \operatorname{tg} \alpha}$$

Z tablic odczytujemy $\operatorname{tg} 20^\circ = 0,364$.

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy wynik:

$$v = \sqrt{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ m} \cdot 0,364} = 5,98 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Odpowiedź: Prędkość rowerzysty na zakręcie jest równa $5,98 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

- b)** Rowerzysta przejedzie bezpiecznie zakręt, gdy siła tarcia nie przekroczy maksymalnej wartości tarcia statycznego:

$$F_T \leq F_{T\max}$$

gdzie:

$$F_{T\max} = \mu_s \cdot mg$$

Pamiętamy, że siła tarcia statycznego jest siłą dośrodkową: $F_T = F_d$.

Zatem:

$$\frac{mv^2}{R} \leq \mu_s \cdot mg$$

Z powyższego wzoru wyznaczamy warunek na prędkość:

$$v \leq \sqrt{\mu_s \cdot g \cdot R}$$

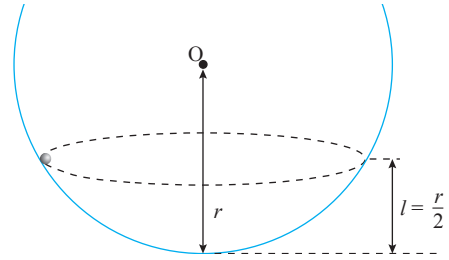
Podstawiamy dane liczbowe:

$$v \leq \sqrt{0,4 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ m}} \approx 6,26 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Odpowiedź: Dopuszczalna prędkość na zakręcie wynosi około $6,26 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Zatem rowerzysta jadący z prędkością $8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ może się wywrócić.

■ Przykład 4.

Do szklanego naczynia w kształcie kuli o promieniu $r = 20$ cm włożono metalową kulkę o masie $m = 10$ dag. Naczynie wprowadzono w ruch obrotowy tak, że kulka toczyła się po bocznej ścianie naczynia na wysokości $l = \frac{r}{2}$ nad dnem naczynia. Oblicz prędkość kątową kulki i nacisk, jaki wywiera na ścianę naczynia. Skorzystaj z dodatku matematycznego o podobieństwie trójkątów prostokątnych (s. 304).



Rozwiązanie

Na toczącą się w naczyniu kulkę działają:

$\vec{F}_g = m\vec{g}$ – siła grawitacji,

$\vec{F}_R$ – siła reakcji ścianki naczynia.

Wypadkowa tych sił odgrywa rolę siły dośrodkowej:

$$\vec{F}_g + \vec{F}_R = \vec{F}_d$$

Z podobieństwa trójkąta, którego boki tworzą siły $\vec{F}_R$, $\vec{F}_g$ i $\vec{F}_d$, do trójkąta o bokach R , l i r , możemy zapisać proporcję dla ich odpowiednich boków:

$$\frac{F_g}{F_d} = \frac{l}{R}$$

Po podstawieniu wyrażeń opisujących siły mamy:

$$\frac{mg}{\frac{mv^2}{R}} = \frac{\frac{1}{2}r}{R}$$

Po zastosowaniu związku: $v = \omega R$ wyznaczamy prędkość kątową:

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{r}}$$

Podstawiamy dane liczbowe i otrzymujemy:

$$\omega \approx 9,9 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Z trzeciej zasady dynamiki wynika, że siła reakcji ścianki naczynia działająca na kulkę jest równa co do wartości sile nacisku wywieranej przez kulkę na ścianki naczynia. Możemy ponownie skorzystać z podobieństwa tych samych trójkątów:

$$\frac{F_R}{F_g} = \frac{r}{l}$$

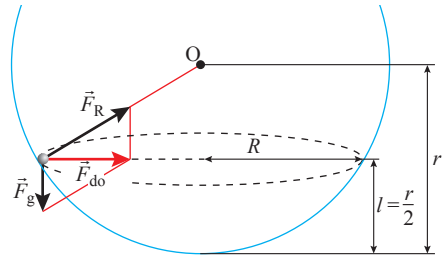
gdzie $l = \frac{r}{2}$, i otrzymujemy:

$$F_R = 2F_g = 2mg$$

Stąd po podstawieniu danych liczbowych mamy:

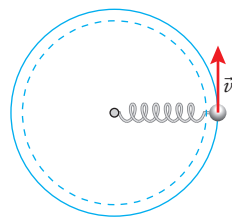
$$F_N = F_R = 2 \cdot 0,1 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1,96 \text{ N}$$

Odpowiedź: Prędkość kątową kulki $9,9 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, a nacisk kulki na ściankę naczynia to 1,96 N.



Pytania i zadania

- P1** 4.4.1. Stalowa kulka łożyska o masie $m = 50$ g toczy po okręgu się ze stałą prędkością $v = 6 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ wewnątrz rynienki o promieniu wewnętrznym $R = 12$ cm. Oblicz wartość siły dośrodkowej działającej na kulkę.
- P1** 4.4.2. Końcówka do ubijania piany miksera ręcznego ma średnicę $d = 48$ mm. Oblicz wartość siły dośrodkowej działającej na fragment o masie $m = 1$ g znajdujący się na jej brzegu, gdy ustawimy przełącznik miksera na 2500 obrotów na minutę.
- P1** 4.4.3. Dziewczyna o masie $m = 50$ kg siedzi w wesołym miasteczku wewnątrz karuzeli „beczki” o promieniu $R = 2$ m, opierając się o jej ścianę. Oblicz, przy jakiej częstotliwości obrotów beczki na plecy dziewczyny działa siła o wartości $F = 986$ N.
- P1** 4.4.4. Gdy krzesółko karuzeli łańcuchowej o masie 5 kg zatacza okręgi, wykonując 5 okrążeń na minutę, działa na nie siła dośrodkowa o wartości około $F_d = 5,5$ N. Oblicz promień, po którym porusza się krzesółko.
- P1** 4.4.5. Metalowa kula o masie $m = 7,26$ kg przymocowana do stalowej linki porusza się w płaszczyźnie poziomej po okręgu o promieniu $R = 0,8$ m. Oblicz, z jaką maksymalną prędkością kątową może się poruszać kula, jeśli siła zrywająca linkę ma wartość $F = 3,418$ kN.
- P1** 4.4.6. Kulka o masie $m = 0,2$ kg przymocowana do sprężyny, której drugi koniec jest zaczepiony do wbitego w poziomy blat gwoźdźcia, ślizga się bez tarcia po okręgu o promieniu $R = 50$ cm ze stałą prędkością $v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz współczynnik sprężystości sprężyny k , jeśli w wyniku ruchu kulki po okręgu sprężyna wydłużyła się o $x = 2$ cm.
- P2** 4.4.7. Podczas treningu rowerzysta wjeżdża w zakręt o promieniu $R = 15$ m. Oblicz, jaką dopuszczalną prędkość może mieć rowerzysta na zakręcie, jeżeli maksymalny współczynnik tarcia statycznego gumowych opon na betonowym torze wynosi $\mu_{\max} = 0,98$.
- P2** 4.4.8. Chłopiec stoi na wirującej tarczy w odległości $R = 2$ m od osi obrotu i stara się zachować pozycję pionową. Oblicz maksymalną częstotliwość obrotów tarczy, przy której chłopiec nie straci kontaktu z podłożem i zachowa równowagę. Maksymalny współczynnik tarcia statycznego obuwia względem podłoża wynosi $\mu = 0,8$.
- P2** 4.4.9. Dziecko obraca się na karuzeli tarczowej. W jakiej maksymalnej odległości od jej osi obrotu może położyć plecak, jeśli karuzela obraca się z częstotliwością $f = 0,5$ Hz, a współczynnik tarcia statycznego plecaka o powierzchnię podłogi karuzeli wynosi $\mu = 0,6$.



● ● **4.4.10.** Wzdłuż krawędzi placu manewrowego ustawiono przeszkodę z gumowych pachołków. Kierowca samochodu jadącego ze stałą prędkością $v = 54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ w miejscu odległym o $d = 20 \text{ m}$ od przeszkody musi podjąć decyzję, jak ją ominąć. Ma dwie możliwości: gwałtowne hamowanie na prostej drodze lub zjazd łukiem o promieniu R bez zmiany prędkości. Wykonaj odpowiednie obliczenia i ustal, w którym przypadku przeszkoda pozostanie nie naruszona. Przyjmij współczynnik tarcia $\mu = 0,7$.

● ● **4.4.11.** Łyżwiarz zakreśla na lodzie łuk o promieniu $R = 2 \text{ m}$, poruszając się z prędkością $v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz kąt, pod jakim łyżwiarz musi się odchylić od pionu, aby zachować równowagę.

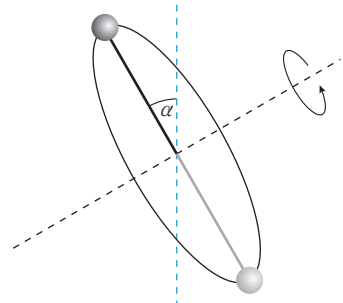
● ● **4.4.12.** Motocyklista, jadąc po poziomej nawierzchni, pokonuje zakręt z maksymalną bezpieczną prędkością $v = 68,4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ i pochyla się jednocześnie w stronę środka okręgu. Kąt odchylenia od pionu wyniósł $\alpha = 27^\circ$. Oblicz promień okręgu, po którym porusza się motocyklista na zakręcie oraz maksymalny współczynnik tarcia statycznego.

● ● **4.4.13.** Narciarz wodny o masie $m = 80 \text{ kg}$ jest holowany na poziomej linii holowniczej przez łódź motorową płynącą z prędkością $v = 58 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ i wchodzi w zakręt o promieniu $R = 16 \text{ m}$.

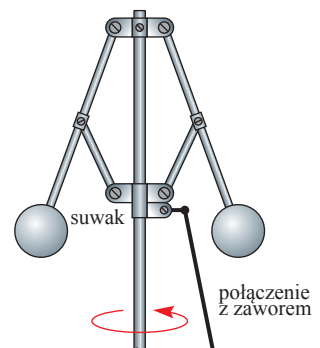
- Oblicz siłę naciągu liny na zakręcie.
- Oblicz naciąg liny holowniczej przy tej samej prędkości podczas zawodów z użyciem wyciągu linowego, gdy na zakręcie pętli lina tworzy z pionem kąt $\alpha = 60^\circ$, a zawodnik porusza się po okręgu o promieniu $r = 5 \text{ m}$.



● ● **4.4.14.** Podczas zawodów w rzucie młotem zawodniczki używają wolframowej kuli o masie $m = 4 \text{ kg}$ przymocowanej do stalowej liny. W pierwszej fazie rzutu kula zatacza okrąg o promieniu $R = 1,5 \text{ m}$ w płaszczyźnie tworzącej z pionem kąt $\alpha = 30^\circ$ (patrz rysunek). Oblicz naciąg liny w najniższym i najwyższym punkcie toru zataczanego przez kulę przy częstotliwości obrotów kuli $f = 1 \text{ Hz}$. Przyjmij, że ręka znajduje się w środku okręgu.

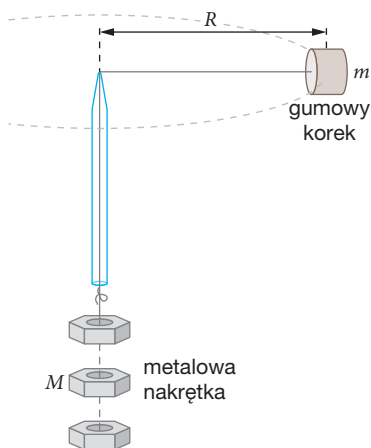


● ● **4.4.15.** Rysunek przedstawia budowę urządzenia regulującego dopływ pary w maszynach parowych – regulatora Watta. Po wprawieniu urządzenia w ruch obrotowy zamocowane na jego ramionach kule się unoszą. Oblicz kąt, jaki utworzą z pionem ramiona o długości $l = 12 \text{ cm}$, gdy urządzenie będzie się obracać ze stałą prędkością kątową $\omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

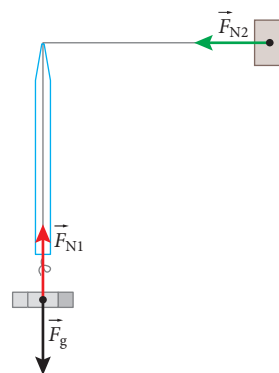


4.4.16. Uczniowie badali słuszność wzoru wyrażającego wartość siły dośrodkowej $F_d = \frac{mv^2}{R} = 4\pi^2 m R f^2$. Do doświadczenia użyli zestawu przedstawionego na rysunku 1., składającego się z kilku małych jednakowych metalowych nakrętek o znanej masie M , gumowego korka o masie m , żyłki wędkarskiej oraz tulejki z długopisu. Podczas doświadczenia uczniowie starali się, aby gumowy korek zataczał okręgi w płaszczyźnie poziomej o promieniu $R = 0,4$ m.

Na rysunku 2. pokazano siły działające między metalową nakrętką, a gumowym korkiem. Z III zasady dynamiki wynika, że siły naprężenia działające między ciałami są sobie równe $F_{N2} = F_{N1}$. Przy pewnej częstotliwości obrotów korka nakrętka pozostaje nieruchoma, a działające na nią siły się równoważą: $F_g = F_{N1}$. W tym stanie siła dośrodkowa działająca na korek jest równa co do wartości sile ciężkości $F_g = Mg$.



Rysunek 1



Rysunek 2

Uczniowie badali ruch jednostajny po okręgu przy stałym promieniu okręgu R i stałej masie m wirującego korka.

Tabela zawiera wyniki pomiarów i obliczenia niezbędne do zbadania zależności siły dośrodkowej od częstotliwości.

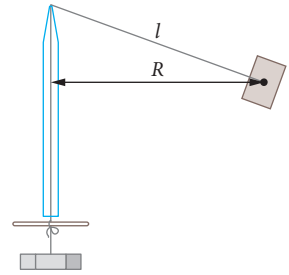
Liczba nakrętek o masie $M = 20$ g	Siła dośrodkowa F [N]	Promień okręgu R [m]	Masa gumowego korka m [kg]	Średni czas 20 okrążeń t [s]	$f = \frac{20}{t}$ [Hz]	f^2 [Hz ²]	$\frac{F}{f^2}$ [$\frac{N}{Hz^2}$]
1	0,20	0,4	0,02	25,32	0,76	0,5776	
2	0,40	0,4	0,02	17,85	1,14	1,2996	
3	0,60	0,4	0,02	14,60	1,37	1,8769	
4	0,80	0,4	0,02	12,66	1,62	2,6244	
5	1,00	0,4	0,02	11,29	1,75	3,0625	

- a) Uzupełnij w tabeli brakujące wpisy z dokładnością do trzech cyfr znaczących, następnie oblicz średnią wartość wyrażenia $\left(\frac{F}{f^2}\right)_{\text{śr}}$ i jej maksymalną niepewność pomiarową. Zapisz wynik pomiarów badanej zależności wraz z niepewnością pomiarową.
- b) Oblicz teoretyczną wartość wyrażenia $\frac{F}{f^2}$ korzystając ze wzoru $F = 4\pi^2 m R f^2$. Sprawdź, czy otrzymana doświadczalnie wartość tej samej zależności jest w granicach błędu zgodna z jej wartością teoretyczną, i ustal, czy wynik doświadczenia potwierdza teoretyczną zależność $\frac{F}{f^2}$.
- c) Ze wzoru $F = 4\pi^2 m R f^2$ wynika, że wartość siły dośrodkowej F jest wprost proporcjonalna do f^2 . Na podstawie danych zawartych w tabeli sporządź wykres zależności $F(f^2)$. Skorzystaj z arkusza kalkulacyjnego. Odczytaj z wykresu, czy słuszna jest zależność $F \sim f^2$.
- d) Na podstawie wykresu $F(f^2)$ wyznacz wartość $\frac{F}{f^2}$. Wynik porównaj z wartością teoretyczną $\frac{F}{f^2}$ obliczoną w podpunkcie b) i wyciągnij wnioski.

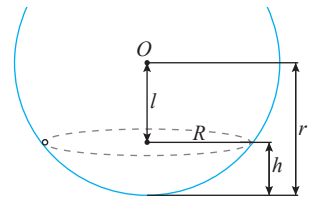
- • • 4.4.17. Gdy uczniowie wykonywali doświadczenie opisane w zadaniu 4.4.16, nie zawsze im się udawało doprowadzić do takiego stanu, aby ciało zataczało okręgi w płaszczyźnie poziomej. Łatwiej było wymusić zataczanie okręgu o mniejszym promieniu niż długość linki l , tak jak to ilustruje rysunek.

Uczniowie wykazali teoretycznie, że częstotliwość ruchu po okręgu zależy od parametrów układu następująco:

$f^2 = \frac{g}{4\pi^2 m} \cdot \frac{M}{l}$, czyli nie ma na nią wpływu kąt, jaki tworzy żyłka z kierunkiem poziomym. Wyznacz samodzielnie tę zależność.



- • 4.4.18. W naczyniu w kształcie kuli o promieniu $r = 10$ cm kulka o masie $m = 5$ g zatacza okręgi o promieniu $R = 8$ cm na stałej wysokości po bocznej ścianie. Oblicz prędkość kątową kulki i nacisk, jaki wywiera ona na ściankę naczynia.



4.5. Siły bezwładności

Podręcznik
rozd. 4.7

■ Przykład 1.

Do sufitu wewnątrz kontenera przyczepiono siłomierz obciążony ciężarkiem o masie $m = 50 \text{ g}$. Przyjmij $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Ustal, jakie będą wskazania siłomierza, gdy:

- kontener jest podnoszony przez dźwig ruchem jednostajnym,
- podnośnik rusza i kontener jedzie do góry z przyspieszeniem $a = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$,
- kontener jedzie do góry i hamuje z opóźnieniem o wartości $a = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$,
- kontener spada swobodnie w dół po zerwaniu lin mocujących.

Rozwiązanie

- a) Gdy kontener porusza się jednostajnie, stanowi inercjalny układ odniesienia. Siła sprężystości F_s pochodząca od odkształconej sprężyny siłomierza równoważy siłę grawitacji F_g . Wskazanie siłomierza to wartość siły sprężystości.

$$F_s = F_g \quad F_s = mg$$

$$F_s = 0,05 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 0,5 \text{ N}$$

Odpowiedź: Podczas ruchu jednostajnego siłomierz wskaże około 0,5 N.

- b) Gdy kontener porusza się z przyspieszeniem, stanowi nieinercjalny układ odniesienia. Zatem na ciężarek znajdujący się w kontenerze dodatkowo będzie działać pozorna siła bezwładności, która jest skierowana w przeciwną stronę niż wektor przyspieszenia kontenera.

Zgodnie z I zasadą dynamiki $\vec{F}_g + \vec{F}_b + \vec{F}_s = 0$. Wynika stąd następująca równość:

$$F_s = F_g + F_b$$

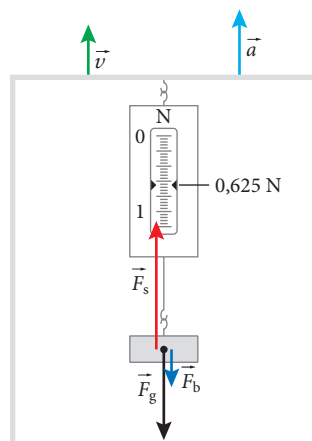
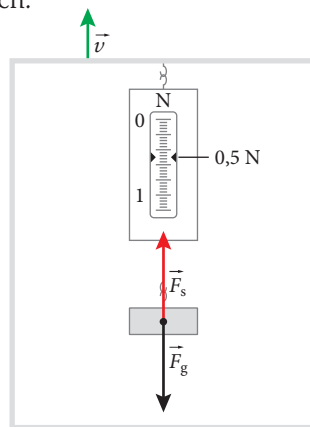
$$F_s = mg + ma = m(g + a)$$

Wartość siły sprężystości wynosi:

$$F_s = 0,05 \text{ kg} (10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) = 0,625 \text{ N}$$

Wskazanie siłomierza będzie takie samo, gdy kontener podczas jazdy w dół będzie zwalniać. W obu sytuacjach przyspieszenie kontenera jest skierowane do góry i wtedy ciężarek jest w stanie przeciążenia.

Odpowiedź: Gdy kontener będzie się poruszał z przyspieszeniem zwróconym do góry, siłomierz wskaże około 0,625 N.



- c) Gdy kontener jedzie do góry i hamuje, jego przyspieszenie jest skierowane w dół, zatem siła bezwładności działająca na ciężarek jest skierowana w górę. Działające na ciężarek siły się równoważą, więc:

$$F_s + F_b = F_g$$

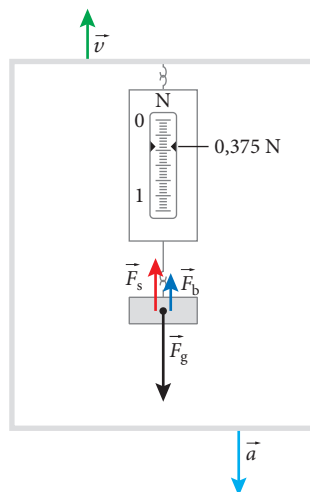
Siła sprężystości równa jest:

$$F_s = F_g - F_b$$

$$F_s = mg - ma = m(g - a)$$

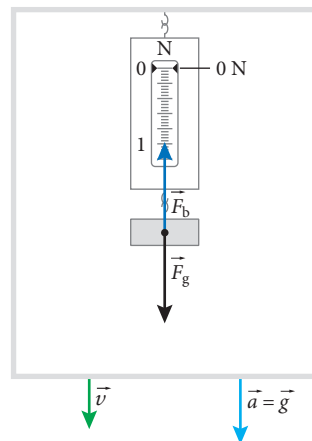
Zatem:

$$F_s = 0,05 \text{ kg} (10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) = 0,375 \text{ N}$$



Odpowiedź: Gdy kontener porusza się z przyspieszeniem zwróconym doł, siłomierz wskazuje około 0,375 N.

- d) Gdy kontener spada swobodnie, porusza się z przyspieszeniem nadawanym jedynie przez siłę grawitacji $\vec{a} = \vec{g}$. Na ciężarek znajdujący się w windzie stanowiącej nieinercjalny układ odniesienia działa siła bezwładności $\vec{F}_b = -m\vec{g}$, która równoważy działanie siły grawitacji. Ciężarek nie oddziałuje ze sprężyną. Zatem siła sprężystości $\vec{F}_s = 0$ i wskazanie siłomierza wynosi 0.



Odpowiedź: W trakcie spadku swobodnego siłomierz wskazuje 0.

■ Przykład 2.

Pociąg jedzie z prędkością $v = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. W jednym z wagonów na podłodze leży walizka. Oblicz minimalną drogę hamowania pociągu ruchem jednostajnie opóźnionym, przy której walizka nie przesunie się po podłodze. Przyjmij, że współczynnik tarcia statycznego walizki o podłogę $\mu = 0,1$.

Rozwiązanie

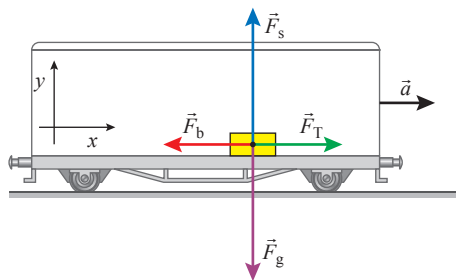
Rysujemy siły działające na walizkę w nieinercjalnym układzie odniesienia:

$\vec{F}_g$ – siła ciężkości,

$\vec{F}_s$ – siła sprężystości podłoża,

$\vec{F}_T$ – siła tarcia,

$\vec{F}_b$ – siła bezwładności.



Walizka ma pozostać w bezruchu, więc zgodnie z pierwszą zasadą dynamiki wypadkowa działających na nią sił powinna wynosić zero:

$$\vec{F}_g + \vec{F}_s + \vec{F}_T + \vec{F}_b = 0$$

Równowaga sił musi być spełniona zarówno w kierunku poziomym, jak i pionowym, dlatego:

$$F_s - F_g = 0 \quad (1)$$

$$F_T - F_b = 0 \quad (2)$$

gdzie:

$$F_T = mg\mu \quad \text{ i } \quad F_b = ma$$

Po podstawieniu tych zależności do równania (2) wyznaczamy przyspieszenie pociągu $a = \mu g$.

Ze wzorów na drogę i prędkość w ruchu jednostajnie opóźnionym po uwzględnieniu końcowej wartości prędkości $v_k = 0$ otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} s = \frac{(v - 0)t}{2} \\ 0 = v - at \end{cases}$$

z którego wyznaczamy wyrażenie na drogę hamowania pociągu:

$$s = \frac{v^2}{2a}, \quad \text{gdzie } a = \mu g$$

Ostatecznie:

$$s = \frac{v^2}{2\mu g}$$

Przed podstawieniem liczb przeliczamy dane na odpowiednie jednostki: $v = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy: $s = \frac{(20 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2 \cdot 0,1 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 204 \text{ m}$.

Odpowiedź: Walizka się nie poruszy, jeśli pociąg zatrzyma się na drodze nie krótszej niż 204 m.

■ Przykład 3.

Kolejka górska w parku rozrywki ma jedną pętlę o promieniu $R = 10 \text{ m}$, na której wagonik jadący po szynach po wewnętrznej części wykonuje obrót o 360° .

- Oblicz prędkość wagonika w najwyższym punkcie pętli, jeśli nacisk na szyny F_{N1} stanowi połowę ciężaru wagonika.
- Oblicz prędkość wagonika w najniższym punkcie toru, jeżeli nacisk na szyny F_{N2} jest 4,5 razy większy od ciężaru wagonika.
- Oblicz prędkość, z jaką wagonik powinien się poruszać w najwyższym punkcie pętli, aby pasażerowie odczuli stan nieważkości.



Rozwiązanie

Na rysunkach pokazano siły działające na jadący po szynach wagonik w nieinercjalnym układzie odniesienia.

- a) W najwyższym punkcie pętli siła odśrodkowa F_{od1} jest skierowana przeciwnie do siły ciężkości F_g wagonika i siły reakcji F_{R1} szyn. Siła reakcji jest równa co do wartości sile nacisku F_{N1} . Zapisujemy równanie dla sił działających na wagonik:

$$\vec{F}_{od1} + \vec{F}_g + \vec{F}_{R1} = 0$$

gdzie:

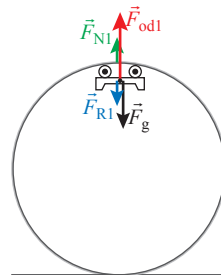
$$F_{R1} = F_{N1} = 0,5 F_g$$

W zapisie skalarnym:

$$F_{od1} - F_g - F_{R1} = 0 \quad (1)$$

Wiemy, że:

$$F_{od1} = \frac{mv_1^2}{R}, \text{ a } F_g = mg$$



Podstawiamy wzory na siły do zapisu skalarnego (1) i otrzymujemy:

$$\frac{mv_1^2}{R} = \frac{3}{2}mg$$

Z zależności tej wyznaczamy prędkość wagonika w najwyższym punkcie toru:

$$v_1 = \sqrt{\frac{3}{2}gR}$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$v_1 = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ m}} \approx 12,13 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Odpowiedź: W najwyższym punkcie pętli prędkość wagonika wynosi około $12,13 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

- b) Na dole pętli siła odśrodkowa działająca na wagonik F_{od2} jest skierowana zgodnie z siłą ciężkości F_g wagonika. Sumą tych sił jest siła F_{N2} , z jaką wagonik naciska na szyny. Siła reakcji F_{R2} jest zatem skierowana przeciwnie do niej i równa co do wartości sile nacisku F_{N2} .

Możemy zapisać:

$$\vec{F}_{od2} + \vec{F}_g + \vec{F}_{R2} = 0$$

gdzie:

$$F_{R2} = F_{N2}$$

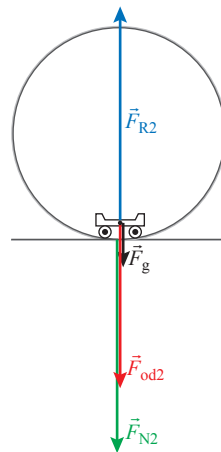
W zapisie skalarnym:

$$-F_{od2} - F_g + F_{R2} = 0$$

a zatem:

$$-\frac{mv_2^2}{R} - mg + 4,5mg = 0$$

gdzie v_2 jest prędkością wagonika w najniższym punkcie pętli.



Z równania wyznaczamy prędkość wagonika:

$$v_2 = \sqrt{3,5gR}$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$v_2 = \sqrt{3,5 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ m}} \approx 18,53 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Odpowiedź: Prędkość wagonika w najniższym punkcie pętli wynosi około $18,53 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

- c) Pasażerowie odczuwają stan nieważkości w najwyższym punkcie pętli, jeśli działająca na nich siła bezwładności będzie równa sile ciężkości:

$$\vec{F}_{\text{od}} + \vec{F}_g = 0$$

W zapisie skalarnym:

$$F_{\text{od}} - F_g = 0$$

a zatem:

$$\frac{mv_3^2}{R} = mg$$

gdzie v_3 jest prędkością wagonika w najwyższym punkcie pętli.

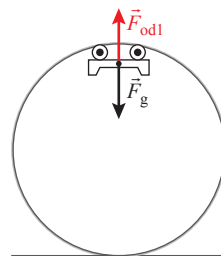
Z powyższego wzoru obliczamy prędkość:

$$v_3 = \sqrt{gR}$$

Po podstawieniu danych liczbowych i wykonaniu obliczeń otrzymujemy:

$$v_3 = \sqrt{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ m}} \approx 9,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Odpowiedź: Prędkość wagonika, przy której pasażerowie będą odczuwać stan nieważkości wynosi $9,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



■ Przykład 4.

Na krzeselku karuzeli łańcuchowej siedzi dziecko o masie 45 kg. Masa krzeselka wynosi $m_k = 5 \text{ kg}$, a maksymalna średnica toru jazdy karuzeli łańcuchowej to $d = 4,4 \text{ m}$. Oblicz siłę naciągu łańcucha karuzeli i kąt, o jaki odchyli się ona od pionu, jeśli wiadomo, że wykonuje 15 obrotów na minutę. Rozwiąż zadanie w nieinercyjnym układzie odniesienia.

Rozwiązanie

W nieinercyjnym układzie odniesienia dziecko jest nieruchome względem krzeselka, więc zgodnie z pierwszą zasadą dynamiki działające na nie siły się równoważą:

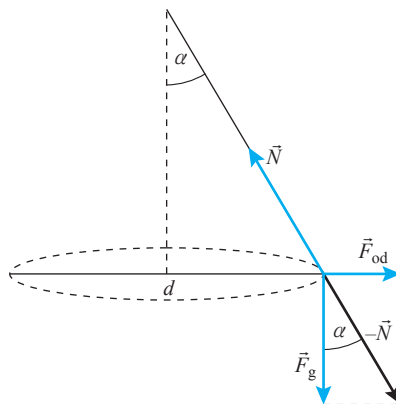
$$\vec{F}_g + \vec{F}_{\text{od}} + \vec{N} = 0$$

gdzie:

$\vec{F}_g$ – siła grawitacji,

$\vec{F}_{\text{od}}$ – siła odśrodkowa (bezwładności),

$\vec{N}$ – siła naciągu łańcucha.



Z rysunku ilustrującego siły działające na dziecko wynika następujący związek:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{\text{od}}}{F_g} \quad (1)$$

Siła odśrodkowa dana jest zależnością:

$$F_{\text{od}} = \frac{(m_d + m_k)v^2}{R}$$

gdzie $R = \frac{d}{2}$, a m_d i m_k to odpowiednio masa dziecka i krzeselka.

Siła grawitacji wynosi:

$$F_g = (m_d + m_k)g$$

Prędkość liniową karuzeli otrzymamy z zależności:

$$v = 2\pi fR$$

gdzie: $f = 15 \frac{\text{rad}}{\text{min}} = 0,25 \text{ Hz}$ to częstotliwość obrotów karuzeli, stąd siła odśrodkowa:

$$F_{\text{od}} = (m_d + m_k)4\pi^2 f^2 R$$

Ostatecznie po podstawieniu wzorów na siły do (1) otrzymujemy:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(m_d + m_k)4\pi^2 f^2 d}{2(m_d + m_k)g} = \frac{4\pi^2 f^2 d}{2g}$$

Po podstawieniu danych liczbowych mamy:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4 \cdot (3,14)^2 \cdot (0,25 \text{ Hz})^2 \cdot 4,4 \text{ m}}{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,55 \Rightarrow \alpha \approx 29^\circ$$

Siłę naciągu łańcucha możemy obliczyć z funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym:

$$N = \frac{F_g}{\cos \alpha}$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$N = \frac{50 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,87}$$

$$N = 564 \text{ N}$$

Odpowiedź: Siła naciągu łańcucha karuzeli wynosi około 564 N. Łańcuch karuzeli będzie odchylony od pionu o kąt 29° .

■ Przykład 5.

Na 30° szerokości geograficznej północnej płynie z południa na północ rzeka. Każdy metr sześcienny wody działa na prawy brzeg tej rzeki siłą $F = 0,1$ N. Oblicz szybkość wody w rzece.

Rozwiązanie

Korzystamy ze wzoru na wartość siły Coriolisa:

$$F_C = 2mv\omega \sin\varphi$$

gdzie masa wody: $m = dV$, a prędkość kątowna Ziemi: $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Po podstawieniu m i ω otrzymamy:

$$F_C = 2dVv \frac{2\pi}{T} \sin\varphi$$

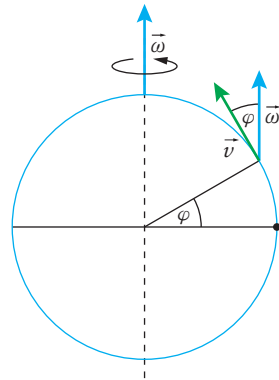
Z powyższego wzoru wyznaczamy prędkość liniową:

$$v = \frac{F_C}{2dV \frac{2\pi}{T} \sin\varphi} = \frac{F_C T}{4\pi dV \sin\varphi}$$

Podstawiamy dane liczbowe. Przyjmujemy: $T = 24$ h, $d = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $V = 1 \text{ m}^3$, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

$$v = \frac{0,1 \text{ N} \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}}{4 \cdot 3,14 \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 1 \text{ m}^3 \cdot \frac{1}{2}} \approx 1,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Odpowiedź: Prędkość wody w rzece wynosi $v = 1,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



Pytania i zadania

P1

- 4.5.1. Do sufitu windy przyczepiono siłomierz obciążony ciężarkiem o masie $m = 0,2$ kg. O ile zmieniają się wskazania siłomierza, jeśli winda jadąc do góry, będzie przyspieszać, a następnie hamować z przyspieszeniem $a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$?

P1

- 4.5.2. Mężczyzna o masie $m = 60$ kg stoi wewnątrz kabiny windy. Wykonaj odpowiednie obliczenia i ustal, z jakim przyspieszeniem porusza się winda, jeżeli mężczyzna działa na podłogę windy siłą o wartości $F = 500$ N.

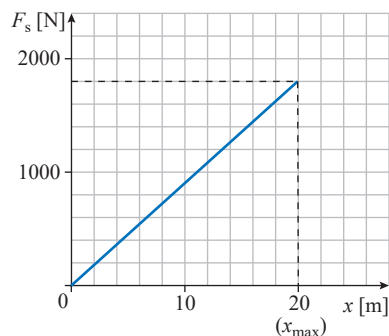
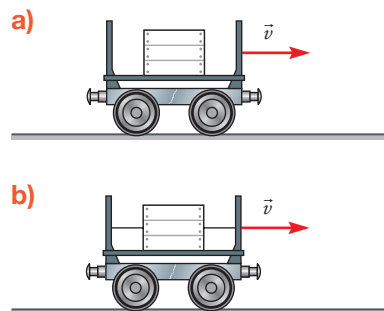
P1

- 4.5.3. Gdy winda rusza lub hamuje, naciąg liny transportującej kabinę jest o 20% większy lub 20% mniejszy niż wtedy, gdy porusza się ona ruchem jednostajnym lub stoi. Oblicz przyspieszenie windy podczas hamowania i ruszania.

P1

- 4.5.4. Samochód wyścigowy po sygnale startu w czasie $\Delta t = 10$ s osiąga prędkość $v = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Oblicz, z jaką siłą kierowca o masie $m = 60$ kg działałby na oparcie fotela, gdyby fotel był ustawiony w pozycji pionowej. Pomiń oddziaływania z innymi elementami samochodu.

- P2** 4.5.5. Podróżny wsiadł do autobusu i postawił torbę na podłodze. Oblicz minimalny czas, w którym autobus po ruszeniu z przystanku osiągnie prędkość $v = 54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a torba w tym czasie nie przesunie się po podłodze. Współczynnik tarcia statycznego torby o podłogę wynosi $\mu = 0,8$.
- P2** 4.5.6. Podczas gwałtownego przyspieszania samochodu ciężarowego przewożona skrzynia przesunęła się z przyspieszeniem $a = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ względem przyczepy. Oblicz przyspieszenie samochodu. Załóż współczynnik tarcia skrzyni o podłogę przyczepy $\mu = 0,7$.
- P2** 4.5.7. Ustal, wykonując odpowiednie obliczenia, czy skrzynia o masie $m = 100 \text{ kg}$ umieszczona na platformie (rysunek a) przesunie się na skutek gwałtownego hamowania trwającego $\Delta t = 2 \text{ s}$, w czasie którego pojazd zmniejszy prędkość z $v_1 = 102 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ do $v_2 = 54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Zgodnie z wymogami bezpieczeństwa skrzynię podczas transportu należy zabezpieczyć linami transportowymi (rysunek b). Ustal, która z lin mocujących przy tych samych warunkach hamowania zostanie napięta, i oblicz wartość siły napinającej. Współczynnik tarcia statycznego wynosi $\mu = 0,6$.
- 4.5.8. Francuski pociąg TGV osiąga prędkość $v_{\text{max}} = 350 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Przy prędkości $v = 270 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ zatrzymuje się po pokonaniu drogi $s = 3500 \text{ m}$. W jednym z wagonów na nitce przyczepionej do sufitu wisi kulka. Oblicz kąt odchylenia nitki od pionu podczas hamowania.
- 4.5.9. *Bungee jumping* polega na skakaniu z dużej wysokości na długiej elastycznej linie, wykonanej zwykle z około tysiąca gumowych włókien. Dźwig unosi skoczka na wysokość od 45 m do 90 m. Po dobraniu właściwego rodzaju gumy (zależy on od masy skoczka) i założeniu odpowiedniej uprząży śmiałek wykonuje skok. Podczas skoku od pewnego momentu lina oddziałuje na skoczka siłą sprężystości, której wartość jest wprost proporcjonalna do wydłużenia liny: $F_s = kx$, gdzie k jest współczynnikiem sprężystości i zależy od rodzaju użytej liny. Przeanalizuj skok na bungee z wysokości $h = 50 \text{ m}$ wykonany przez skoczka o masie $m = 70 \text{ kg}$, podczas którego użył on liny o długości początkowej $l_0 = 10 \text{ m}$. Wartość siły sprężystości, jaką lina oddziałuje na skoczka w zależności od jej wydłużenia, przedstawia wykres. W rozważaniach pominiemy opory ruchu.
- a) Ustal, na jakich wysokościach względem powierzchni ziemi skoczek odczuwa stan przeciążenia, niedociążenia i nieważkości.
- b) Oblicz maksymalne przeciążenie, jakiemu ulega skoczek.



•• **4.5.10.** Podczas akrobacji lotniczych samolot zatacza w pionie pętlę o promieniu $R = 400$ m. W najwyższym punkcie pilot naciska na siedzisko fotela siłą o wartości równej $0,4$ ciężaru pilota. Oblicz prędkość samolotu na szczycie pętli. Przy jakiej prędkości pilot odczułby stan nieważkości?

P3

•• **4.5.11.** Gdy wagonik rollercoastera przejeżdża przez najniższy punkt pętli z prędkością $79,2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, pasażer o masie $m = 60$ kg odczuwa przeciążenie $5,93$ razy większe niż w warunkach normalnych. Oblicz promień pętli rollercoastera.

P3

•• **4.5.12.** W skórzanym mieszk procy o długości $l = 50$ cm znajduje się kamień. Procę wprawiono w ruch w taki sposób, że kamień w mieszk zatoczył w pionie okrąg. Oblicz minimalną częstotliwość wirowania, przy której kamień nie wypadnie z mieszka, gdy znajduje się w najwyższym punkcie toru ruchu. Przyjmij, że proca wiruje jednostajnie.

P3

•• **4.5.13.** Dziecko o masie $m_d = 30$ kg buja się na huśtawce, której płaskie siedzisko o masie $m_s = 0,5$ kg zawieszone jest na dwóch linach o długości $l = 2$ m. Siedzisko zawraca, gdy lina tworzy z pionem kąt $\alpha = 60^\circ$, a gdy przechodzi przez najniższe położenie, ma prędkość $v = \sqrt{20} \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz naciąg jednej z lin, gdy dziecko znajduje się w najwyższym i w najniższym punkcie toru ruchu.

P3

• **4.5.14.** Autobus pokonuje zakręt o promieniu $R = 200$ m z prędkością $v = 40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Oblicz wartość siły odśrodkowej działającej na pasażera o masie $m = 75$ kg.

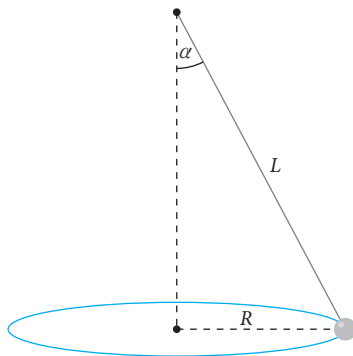
P3

• **4.5.15.** Karuzela twister to cztery fotele ustawione parami naprzeciwko siebie, zamontowane na wysięgnikach, których długość $R = 2$ m. Oblicz wartość siły, z jaką osoba o masie $m = 50$ kg naciska na ustawione pionowo oparcie fotela, podczas gdy karuzela wiruje z częstotliwością $f = 0,2$ Hz.

P3

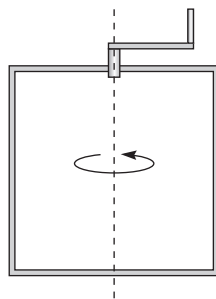
•• **4.5.16.** Wahadło zakresła stożek o długości ściany bocznej $L = 1,2$ m. Zamocowana na końcu linki kulka o masie $m = 200$ g porusza się po okręgu o promieniu $R = 0,6$ m. Oblicz czas jednego okrążenia wahadła i naciąg linki.

P4



•• **4.5.17.** Suszarka do sałaty to ażurowy koszyk o promieniu $R = 12$ cm, swobodnie obracający się wewnątrz większego naczynia. Suszarka napędzana jest za pomocą korby (patrz schematyczny rysunek). Oblicz najmniejszą częstotliwość, z jaką należy kręcić korbką, aby liście sałaty przylepione do bocznej ściany wirującego koszyka nie opadały. Wiemy, że współczynnik tarcia liści o plastik koszyka wynosi $\mu = 0,8$. Załóż, że koszyk ma pionowe ścianki boczne.

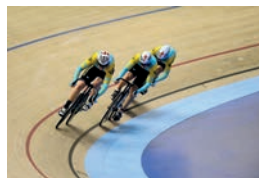
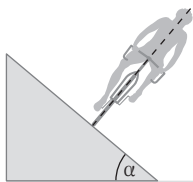
P4



● ● **4.5.18.** Na torze kolarskim, zwanym welodromem, nawierzchnia tworzy z poziomem kąt $\alpha = 40^\circ$, a promień toru wynosi $r = 30$ m. Zawodnik może bezpiecznie wejść w zakręt, gdy przyjmie pozycję taką, jak przedstawiono na rysunku.

P4

- a) Narysuj siły działające na zawodnika w nieinercyjnym układzie odniesienia i siły działające na podłoże.
b) Oblicz prędkość zawodnika jadącego po łuku welodromu. Pomiń tarcie.



● ● ● **4.5.19.** Dwóch strzelców wzięło udział w zawodach. Strzelali z tej samej odległości: pierwszy do tarczy znajdującej się na zachód od niego, drugi do tarczy znajdującej się na południe od niego. Obaj nie trafili w środek tarczy. Tłumaczyli się, że celowali precyzyjnie, a za zmianę trajektorii lotu pocisków odpowiedzialna jest siła Coriolisa. Przyjmij, że na pocisk działała tylko siła Coriolisa, i oblicz odchylenie każdego z pocisków. Przyjmij, że średnia prędkość pocisków $v = 500 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, czas lotu $t = 1$ s, a zawody odbywały się na $\varphi = 60^\circ$ szerokości geograficznej północnej. Ustal kierunek odchylenia każdego z pocisków.

P5

● ● ● **4.5.20.** Na szerokości geograficznej północnej $\varphi = 45^\circ$ z południa na północ, wzdłuż południka, jedzie skład kolejowy z prędkością $v = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. W układzie związanym z Ziemią ustal kierunek i zwrot sił bezwładności (siły odśrodkowej wynikającej z ruchu obrotowego Ziemi i siły Coriolisa) działających na wagon o masie $m = 10$ t i oblicz wartość siły, którą wagon wywiera na szyny kolejowe prostopadle do kierunku jazdy. Przyjmij, że wartość $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ uwzględnia tylko oddziaływanie grawitacyjne, i pomini siły bezwładności wynikające z ruchu pociągu wzdłuż południka.

P5

● ● ● **4.5.21.** Doświadczalnie wykazano, że ciało puszczone z najwyższego tarasu wieży Eiffla znajdującego się na wysokości $H_E = 273$ m spada na ziemię przesunięte o około $\Delta x_E = 6,5$ cm w pionie względem miejsca wyrzucenia. Wynik ten otrzymamy również ze wzoru:

$$\Delta x = \frac{2}{3} \omega \sqrt{\frac{2H^3}{g}} \cos \varphi$$

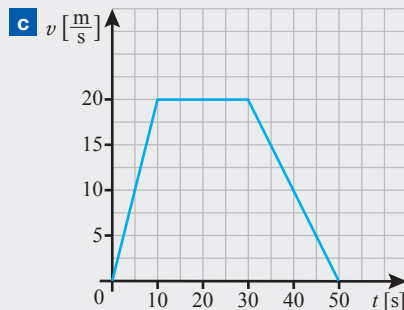
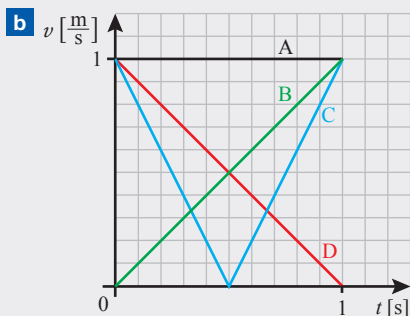
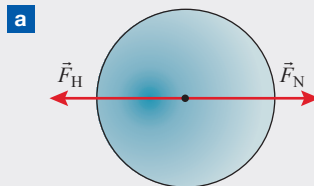
Oblicz wartość przesunięcia ciała w czasie lotu w przypadku ciała puszczonego swobodnie z tarasu widokowego Pałacu Kultury i Nauki z wysokości $H_P = 114$ m. Naszkicuj tor ruchu tego ciała względem Ziemi (nieinercyjny układ odniesienia) i tor ruchu tego ciała względem obserwatora w kosmosie, niezwiązanego z ruchem obrotowym Ziemi (inercyjny układ odniesienia).

P5



Klasyka fizyki B. Mendel i J. Mendel

4.1. Na kulę działają siła napędowa $\vec{F}_N$ i siła oporów ruchu $\vec{F}_H$, jak na rysunku a), przy czym $F_N = F_H$. Na rysunku b) przedstawiono cztery wykresy zależności prędkości od czasu. Który z wykresów – A, B, C czy D – odpowiada ruchowi tej kuli?



4.2. Pewna metalowa kula o masie $m = 4$ kg toczy się ruchem zmiennym – wykres zależności prędkości przemieszczania się kuli od czasu przedstawiono na rysunku c). Narysuj zależność wartości siły działającej na kulę od czasu.

4.3. Pociąg towarowy o masie $m = 600$ t zaczął hamować tak, że zatrzymał się po upływie czasu $\Delta t = 1$ min od rozpoczęcia hamowania. Średnia siła oporu ruchu podczas hamowania pociągu $F = 2 \cdot 10^5$ N.

Z jaką prędkością jechał pociąg, zanim zaczął hamować?

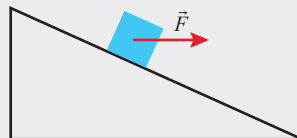
4.4. Ciężarek o masie $m = 0,5$ kg, będący w spoczynku, pod działaniem stałej siły został podniesiony w ciągu $t = 5$ s na wysokość $h = 2,5$ m.

Jaką siłą działano na ten ciężarek?

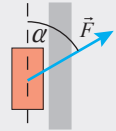
4.5. Na prostoliniowym odcinku toru kolejowego elektrowóz ciągnący siłą $F = 150$ kN pociąg towarowy o masie całkowitej $m = 800$ t zwiększył prędkość z $v_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ do $v_2 = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, przejeżdżając w tym czasie drogę $s = 1000$ m.

Jaką wartość miała średnia siła oporu ruchu pociągu?

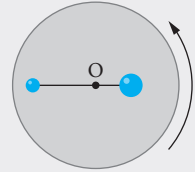
4.6. Z równi o kącie nachylenia $\alpha = 30^\circ$ zsuwa się klocek sześcienny o masie $m = 5$ kg, który dodatkowo ściągany jest siłą $F = 30$ N działającą poziomo, jak pokazano na rysunku obok. Z jakim przyspieszeniem klocek zsuwa się z równi? Pomiń opory ruchu.



4.7. Działając siłą $\vec{F}$ na cegłę o masie m , można ją przesuwając po pionowej ścianie tak, jak to przedstawiono na rysunku obok. Z jakim przyspieszeniem $\vec{a}$ będzie poruszać się cegła, jeżeli kąt między siłą $\vec{F}$ a pionem jest równy α , natomiast współczynnik tarcia cegły o ścianę wynosi μ ?



4.8. Na poziomej tarczy obracającej się jednostajnie z częstotliwością $f = 0,2$ Hz umieszczono dwie kulki z tego samego materiału połączone nierozciągliwą nitką. Odległość między środkami kulek wynosi $l = 10$ cm. Masy kulek wynoszą: $m_1 = 3$ g i $m_2 = 7$ g. W jakiej odległości od środka tarczy znajduje się środek większej kulki, jeżeli układ jest w równowadze?



4.9. Na samochód o masie $m = 1000$ kg, jadący po poziomej drodze, działa siła tarcia $\vec{T}$ o wartości równej $0,1$ jego ciężarowi. Jaką wartość musi mieć siła napędowa samochodu, aby mógł się on poruszać z przyspieszeniem o wartości $a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$? Przyjmij wartość przyspieszenia ziemskiego $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

a) 1000 N

b) 1500 N

c) 3000 N

d) 9800 N

4.10. Na równi pochyłej o kącie nachylenia $\alpha = 30^\circ$ umieszczono ciężarek o masie $m = 1$ kg. Współczynnik tarcia ciężarka o równię wynosi $\mu = 0,2$. Jaką siłą skierowaną prostopadłe do powierzchni równi należy dociskać ciężarek, aby się nie zsuwał?

4.11. Skrzynia pokonuje siłę tarcia i zaczyna zsuwać się z równi pochyłej, gdy kąt nachylenia równi do poziomu przekracza $\alpha = 30^\circ$. Jaką drogę s przebędzie do zatrzymania się skrzynia poruszająca się w górę po tej równi, jeżeli nadano jej prędkość początkową $v_0 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$?

4.12. Kulka uwiązana na nici została wprawiona w ruch obrotowy w płaszczyźnie pionowej. Jaką masę ma kulka, jeżeli różnica między maksymalnym i minimalnym napięciem nici wynosi $\Delta F = 5$ N?

4.13. Samochód osobowy wjechał z prędkością $v = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ na wypukły most o stałym promieniu krzywizny R . Jaką wartość ma R , jeżeli na szczycie mostu nacisk samochodu na most zmniejszył się dwukrotnie w stosunku do nacisku samochodu na prostej drodze?

4.14. Podnośnik może podnosić ciężar o masie $m_1 = 150$ kg z przyspieszeniem a , które nie powoduje jeszcze zerwania się liny. Z takim samym przyspieszeniem co do wartości bezwzględnej można opuszczać ciężar o masie $m_2 = 650$ kg. Jaką maksymalną masę można podnosić lub opuszczać za pomocą tego podnośnika ze stałą prędkością?

4.15. Dwa ciężarki o jednakowych masach $m = 250$ g umieszczono na szalkach przywiązanych do końców linki przewieszanej przez nieruchomy blok. Na jedną z szalek położono dodatkowe obciążenie, wskutek czego każda z nich przebyła drogę $h = 160$ cm w czasie $\Delta t = 4$ s. Oblicz masę dodatkowego obciążenia. Ciężar bloku, szalek i linki można pominąć.



Zadania maturalne

■ Przykład. Tarcie statyczne

W poniższej tabeli przedstawiono wyniki pomiaru siły maksymalnego tarcia statycznego F_{Tmax} pudełka z odważnikami o powierzchnię stołu w zależności od siły nacisku F_N pudełka na powierzchnię stołu. Niepewność tego pomiaru wynosiła za każdym razem $\Delta F = 0,1$ N.

F_N [N]	0,4	0,9	1,4	1,9	2,4	2,9	3,4
F_{Tmax} [N]	0,1	0,3	0,4	0,6	0,7	0,9	1,0

P.1. Narysuj wykres zależności $F_{Tmax}(F_N)$. Przy jego sporządzaniu uwzględnij niepewności pomiarowe i je zaznacz.

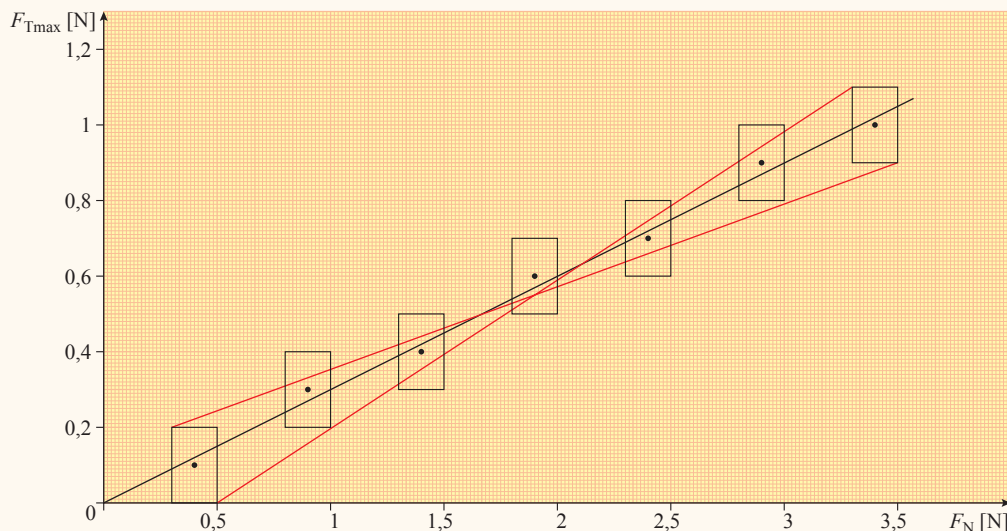
P.2. Na podstawie wykresu wyznacz wartość współczynnika tarcia statycznego μ_s oraz maksymalną niepewność pomiarową dla tego współczynnika.

P.3. Oblicz masę pudełka, jeśli użyte do pomiarów odważniki miały masę 50 g każdy.

P.4. Na podstawie wiedzy na temat tarcia sporządź w tym samym układzie współrzędnych co wykres $F_{Tmax}(F_N)$ przykładowy wykres zależności siły tarcia kinetycznego pudełka o powierzchnię stołu od siły nacisku pudełka na powierzchnię.

Rozwiązanie

P.1. W tabeli zapisano siedem wyników pomiarów siły F_N i F_{Tmax} , co odpowiada takiej samej liczbie punktów na wykresie $F_{Tmax}(F_N)$. Współrzędne punktów odczytane z tabeli: (0,4; 0,1), (0,9; 0,3), (1,4; 0,4), (1,9; 0,6), (2,4; 0,7), (2,9; 0,9) i (3,4; 1,0), nanosimy na układ współrzędnych. Dodatkowo dla każdego punktu zaznaczamy niepewności $\pm 0,1$ N dla obu sił (prostokąty wokół punktów). Na końcu dopasowujemy prostą do punktów pomiarowych, czyli rysujemy prostą przechodzącą przez wszystkie prostokąty jak najbliżej punktów pomiarowych (prostą najlepszego dopasowania), i otrzymujemy wykres przedstawiony na rysunku poniżej.



P.2. Współczynnik tarcia statycznego μ_s jest współczynnikiem kierunkowym prostej narysowanej w zadaniu P.1. Aby go wyznaczyć, zaznaczamy na prostej, możliwie daleko od siebie, dwa punkty, których współrzędne łatwo odczytać z wykresu. Wybraliśmy punkty o współrzędnych A(3,5 N; 1,05 N) i B(0,5 N; 0,15), stąd współczynnik tarcia statycznego:

$$\mu_s = \frac{1,05 - 0,15}{3,5 - 0,5} = 0,30$$

Maksymalną niepewność pomiarową dla obliczonego wyżej współczynnika tarcia statycznego wyznaczamy, rysując dwie proste przechodzące przez wszystkie prostokąty o największym i najmniejszym nachyleniu do osi x (patrz wykres). Obliczamy współczynniki tarcia statycznego dla narysowanych prostych:

najmniejsze nachylenie: $\mu_{s\min} = 0,23$; największe nachylenie: $\mu_{s\max} = 0,39$.

Odpowiedź: Współczynnik tarcia statycznego wynosi $0,30 \pm 0,08$.

P.3. Korzystamy z podanych w tablicy wartości siły nacisku. Ponieważ $F_N = F_g = mg$, gdzie m to masa naciskającego na podłoże ciała, otrzymujemy:

$$m = \frac{F_N}{g}$$

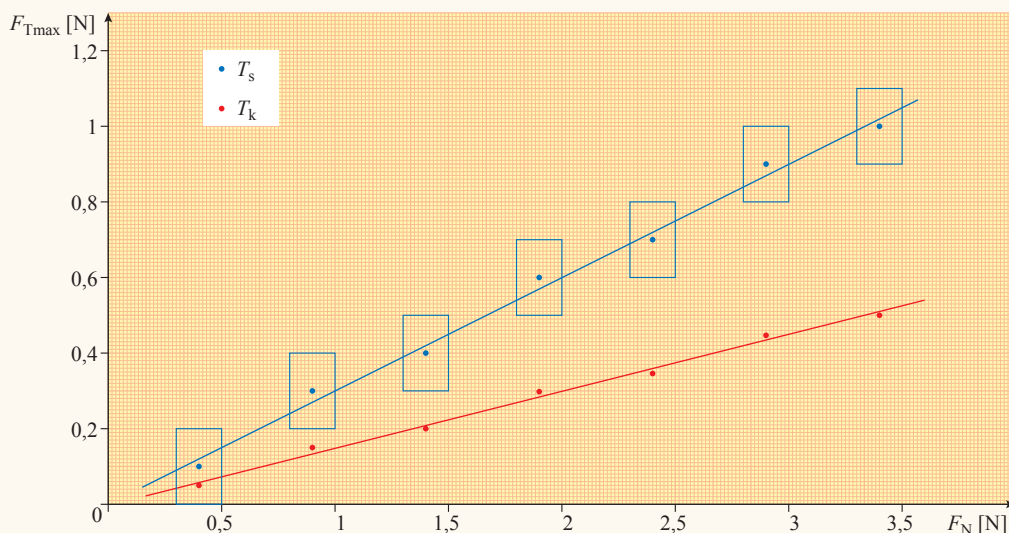
W pierwszym pomiarze $F_N = 0,4$ N, czyli, jeżeli przyjmiemy $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, masa ciała wynosi:

$$m = 0,04 \text{ kg} = 40 \text{ g}$$

Każdy odważnik ma masę 50 g, co oznacza, że pierwszy pomiar był wykonany dla pustego pudełka, ponieważ $m < 50$ g.

Odpowiedź: Masa pojemnika wynosi 40 g.

P.4. Wiemy, że współczynnik tarcia kinetycznego jest mniejszy niż współczynnik tarcia statycznego. Oznacza to, że dla tej samej siły nacisku F_N siła tarcia między podłożem a pudełkiem jest mniejsza. Wykres przebiega w takim wypadku poniżej narysowanego wykresu (patrz rysunek).



Zadanie 1. Wózek spacerowy

Kobieta nie zauważyła, że wózek spacerowy ma zablokowane koła, próbowała nim ruszyć i przez chwilę pchała go ze stałą prędkością. Przyjmij, że masa wózka wraz z dzieckiem wynosi 20 kg, rączka wózka tworzy z poziomem kąt 60° , a współczynnik tarcia kółek o podłoże jest równy 0,2.

1.1. Narysuj wektory wszystkich sił działających na wózek. Rozważ dwie sytuacje: 1. wózek jest pchany siłą skierowaną poziomo (rys. a) i 2. wózek jest pchany siłą skierowaną wzdłuż rączki (rys. b). Zachowaj proporcje długości wektorów.

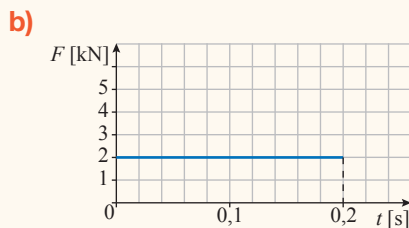
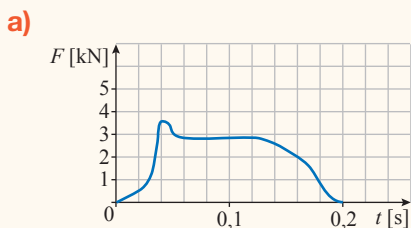
1.2. Oblicz wartość siły tarcia działającej łącznie na wszystkie koła wózka w przypadku przedstawionym na rysunku a).

1.3. Oblicz wartość siły tarcia działającej łącznie na wszystkie koła wózka w przypadku przedstawionym na rysunku b), gdy kobieta pcha wózek.



Zadanie 2. Skok wzwyż

Skok wzwyż metodą *flop* pierwszy raz zademonstrował zawodnik ze Stanów Zjednoczonych Dick Fosbury podczas igrzysk olimpijskich w Meksyku w 1968 r. Metodę udoskonalono dzięki nowoczesnej technice elektronicznej, która pozwala śledzić wiele parametrów skoku. Rysunek a) przedstawia oscylogram zależności siły reakcji podłoża od czasu podczas odbicia skoczka.



2.1. Jakie siły działają między stopami skoczka a podłożem w chwili jego odbicia w kierunku pionowym? Dzięki jakiej sile skoczek odbija się od podłoża? Uzasadnij odpowiedź, opierając się na prawach dynamiki.

2.2. Oblicz prędkość pionową w chwili oderwania skoczka od podłoża. Skorzystaj z wykresu na rysunku b), który przedstawia zależność średniej siły oddziaływania skoczka z podłożem od czasu. Przyjmij, że masa skoczka to 84 kg.

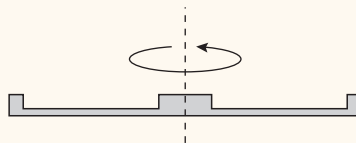
2.3. Oblicz zmianę wysokości środka masy skoczka przy odbiciu z prędkością $4,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

2.4. Jaką wysokość osiągnie zawodnik, jeżeli jego środek masy znajduje się na wysokości 1,05 m.

2.5. Oszacowany wynik porównaj z obecnym rekordem świata.

Zadanie 3. Tarcza

W tarczy wykonano wyżłobienie o promieniach wewnętrznym 10 cm i zewnętrznym 50 cm (patrz rysunek). Wewnątrz tarczy umieszczono metalowy krążek o masie 0,1 kg. W rozważaniach potraktuj krążek jak punkt materialny.

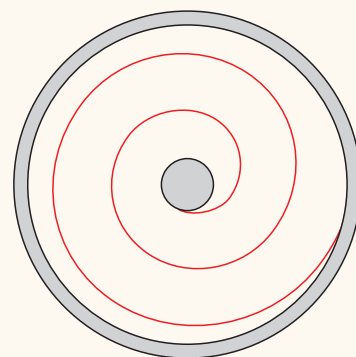


3.1. Oblicz prędkość kątową tarczy, przy której krążek przesunie się ze środka tarczy na jej brzeg. Współczynnik tarcia to 0,16.

3.2. Wyznacz zależność siły dośrodkowej działającej na krążek od promienia okręgu przy stałej prędkości kątowej ω , a następnie sporządź wykres zależności $F_d(R)$ dla $R \in \langle 10 \text{ cm}, 50 \text{ cm} \rangle$, kiedy prędkość kątowa wynosi $5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

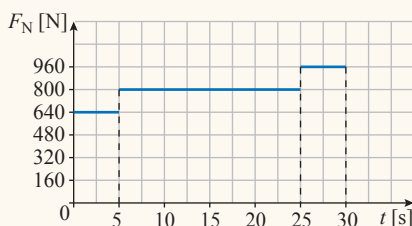
3.3. Osoba obserwująca z boku krążek przesuwający się ruchem jednostajnym wzdłuż promienia z wnętrza na brzeg tarczy widzi, że jego torem jest linia spiralna, tzw. spirala Archimedeusza (patrz rysunek). Wyjaśnij, jak powstaje taki kształt toru ruchu.

3.4. Krążek przylega do brzegu tarczy i porusza się po okręgu ze stałą prędkością kątową $5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. W pewnej chwili fragment ścianki przed krążkiem się odrywa, więc krążek wydostaje się na zewnątrz przez powstały otwór. Dalej ślizga się po poziomym stole i po przebyciu 10 cm się zatrzymuje. Oblicz czas ruchu krążka po powierzchni stołu.



Zadanie 4. Wieżowiec

Shanghai World Financial Center w chińskim mieście Szanghaj jest jednym z najwyższych budynków na Ziemi. Ma 101 pięter i wysokość 492 m. Turysta o masie 80 kg wsiada do windy na osiemdziesiątym piętrze (304 m nad ziemią) i staje na wadze. Gdy winda rusza, człowiek obserwuje wskazania wagi (patrz wykres).



4.1. W układzie odniesienia związanym z windą narysuj siły działające na pasażera w 2., 10. i 26. sekundzie ruchu windy. Zachowaj proporcje długości wektorów sił.

4.2. Oblicz przyspieszenie windy podczas ruszania i hamowania.

4.3. Oblicz prędkość, z jaką porusza się winda między 5. a 25. sekundą ruchu.

4.4. Oblicz wysokość, na jakiej znajdzie się turysta, gdy winda się zatrzyma.

5. Energia i pęd

Najważniejsze informacje

Praca

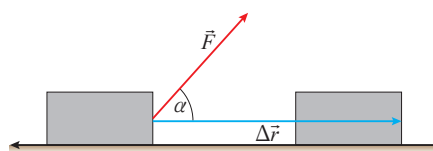
Praca to iloczyn skalarny wektora siły $\vec{F}$ działającej na ciało i wektora przemieszczenia $\Delta\vec{r}$:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F\Delta r \cos\angle(\vec{F}, \Delta\vec{r})$$

gdzie $\angle(\vec{F}, \Delta\vec{r}) = \alpha$ (patrz rysunek).

W zależności od kąta między wektorem siły a wektorem przemieszczenia wartość pracy:

- ▶ jest maksymalna, gdy $\alpha = 0^\circ$,
- ▶ wynosi zero, gdy $\alpha = 90^\circ$,
- ▶ jest ujemna, gdy $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$, np. $\cos 180^\circ = -1$.



Moc

Moc jest to iloraz pracy W i czasu Δt , w jakim ta praca została wykonana:

$$P = \frac{W}{\Delta t}$$

Z powyższego wzoru można otrzymać wzór na moc chwilową w postaci:

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\vec{F} \cdot \Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

gdzie $\vec{v}$ to prędkość ciała, na które działa siła $\vec{F}$.

Energia

- ▶ Ciało o masie m poruszające się z prędkością v ma **energię kinetyczną** wyrażoną wzorem:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

- ▶ Ciało o masie m znajdujące się na wysokości h względem przyjętego poziomu odniesienia ma **energię potencjalną grawitacji** wyrażoną wzorem:

$$E_p = mgh$$

gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim.

- ▶ Rozciągnięta sprężyna (gumka) gromadzi pewną energię, nazywaną **energią potencjalną sprężystości**, która jest wyrażona wzorem:

$$E_{ps} = \frac{1}{2} kx^2$$

gdzie:

k – współczynnik sprężystości, charakterystyczny dla danej sprężyny,

x – wydłużenie sprężyny.

■ Związek między energią a pracą

Zmiana energii wynikająca z wykonania pracy jest równa tej pracy:

$$\Delta E = W$$

- ▶ Jeżeli ciało dzięki działaniu zewnętrznej siły zwiększa prędkość od v_0 do v , to praca W wykonana przez tę siłę jest równa przyrostowi energii kinetycznej:

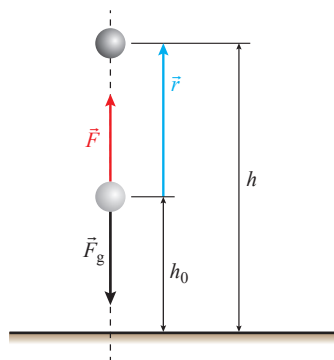
$$W = \Delta E_k, \quad \Delta E_k = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

gdzie m to masa ciała zwiększającego swoją prędkość.

- ▶ Jeżeli dzięki działaniu zewnętrznej siły ciało zwiększa swoją wysokość od h_0 do h ruchem jednostajnym, to praca wykonana przez tę siłę, która równoważy siłę grawitacji, jest równa przyrostowi energii potencjalnej grawitacji:

$$W = \Delta E_p, \quad \Delta E_p = mgh - mgh_0$$

gdzie m to masa podnoszonego ciała.



■ Energia mechaniczna

Energia mechaniczna to energia będąca sumą energii kinetycznej E_k i potencjalnej E_p ciała (układu ciał):

$$E_{\text{mech}} = E_k + E_p$$

Jeżeli siła zewnętrzna wykonuje pracę nad ciałem (układem ciał), to praca ta jest równa przyrostowi energii mechanicznej ciała (układu ciał):

$$W = \Delta E_{\text{mech}} = \Delta E_k + \Delta E_p$$

gdzie: ΔE_k – zmiana energii kinetycznej ciała, ΔE_p – zmiana energii potencjalnej ciała.

► Energię związaną z odkształceniem ciała sprężystego nazywamy **energią sprężystości**.

Energia potencjalna sprężystości wyraża się wzorem:

$$E_{\text{ps}} = \frac{1}{2} k x^2$$

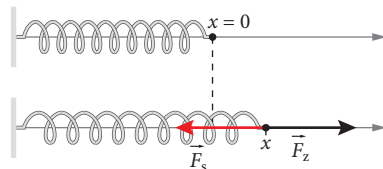
gdzie k – współczynnik sprężystości, x – odkształcenie ciała.

Aby wydłużyć albo ścisnąć ciało sprężyste, np. gumę lub sprężynę, należy działać na nie pewną siłą. Siła ta zależy od właściwości sprężystych danego ciała.

Siła potrzebna do rozciągnięcia sprężyny jest proporcjonalna do jej wydłużenia:

$$F = kx$$

Na rozciągniętą sprężynę działają dwie siły, które się równoważą: siła rozciągająca $\vec{F}_z$ i siła sprężystości pochodząca od sprężyny $\vec{F}_s$.



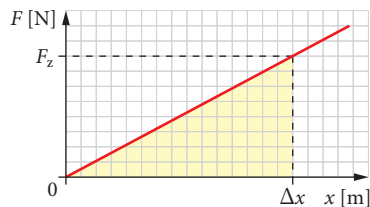
$$|\vec{F}_z| = |\vec{F}_s| = kx$$

Jeśli dzięki działaniu zewnętrznej siły $\vec{F}_z$ sprężyna wydłuży się o Δx , to praca wykonana przez tę siłę jest równa przyrostowi energii potencjalnej sprężystości.

$$\vec{F}_z \cdot \Delta x = W = \Delta E_{\text{ps}}$$

Pole figury pod wykresem ma wartość pracy wykonanej przez siłę F_z .

$$W = \frac{1}{2} F \Delta x = \frac{1}{2} k (\Delta x)^2 = \Delta E_{\text{ps}}$$



■ Zasada zachowania energii

Jeżeli nad ciałem (układem ciał) żadna siła zewnętrzna nie wykonuje pracy $W = \Delta E_{\text{mech}} = 0$, to całkowita energia mechaniczna tego ciała (układu ciał) jest stała:

$$W = \Delta E_{\text{mech}} = 0 \Rightarrow E_{\text{mech}} = \text{const}$$

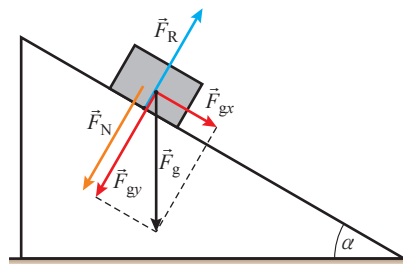
Powyższą zasadę można zastosować m.in. w odniesieniu do:

► **spadku swobodnego ciała:**

siła grawitacji jest wówczas siłą wewnętrzną układu ciało–Ziemia, która nie zmienia energii układu, czyli $W = 0$; energia kinetyczna rośnie, a potencjalna maleje o tę samą wartość.

► zsuwania się ciała z równi:

siła reakcji podłoża jest wówczas siłą zewnętrzną układu ciało–Ziemia, ale ponieważ jest prostopadła do przesunięcia, to jej praca wynosi zero i energia układu zostaje zachowana; energia kinetyczna rośnie, a potencjalna maleje o tę samą wartość.



■ Sprawność

Sprawność to stosunek uzyskanej energii użytecznej do energii całkowitej:

$$\eta = \frac{E_u}{E_c}$$

Sprawność procesu fizycznego można również zdefiniować jako:

$$\eta = \frac{W_u}{W} \quad \text{lub} \quad \eta = \frac{P_u}{P}$$

gdzie: W_u – praca użyteczna, W – praca włożona, P_u – moc użyteczna, P – moc dostarczona.

■ Pęd ciała

Pęd ciała to iloczyn masy ciała m i prędkości $\vec{v}$:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Zmiana pędu $\Delta\vec{p}$ ciała jest równa iloczynowi przyłożonej siły $\vec{F}$ i czasu jej działania Δt :

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$$

Wzór ten jest **uogólnioną postacią drugiej zasady dynamiki**.

■ Zasada zachowania pędu

► dla pojedynczego ciała

Jeżeli na ciało nie działa żadna siła lub działające na nie siły się równoważą, to pęd ciała jest stały:

$$\Delta\vec{p} = \text{const}$$

Stąd:

$$\vec{p}_p = \vec{p}_k$$

gdzie: $\vec{p}_p$ – początkowy pęd ciała, $\vec{p}_k$ – końcowy pęd ciała.

► dla układu ciał

Jeżeli na układ ciał nie działa żadna siła lub działające siły się równoważą, to całkowity pęd układu pozostaje stały:

$$\Delta \vec{p} = \text{const}$$

czyli suma pędów początkowych układu ciał jest równa sumie pędów końcowych układu ciał:

$$\vec{p}_{p1} + \vec{p}_{p2} + \dots + \vec{p}_{pn} = \vec{p}_{k1} + \vec{p}_{k2} + \dots + \vec{p}_{kn}$$

■ Odrzut

Ze zjawiskiem odrzutu mamy do czynienia, gdy na skutek wzajemnego oddziaływania dwa spoczywające ciała zaczynają poruszać się w przeciwnie strony (np. rakietą i gazy spalinowe, kula i karabin podczas wystrzału).

Z zasady zachowania pędu, możemy wyznaczyć siłę odrzutu dla ciała zmieniającego masę, czyli np. działającego silnika raketowego:

$$\vec{F} = -\frac{\Delta m}{\Delta t} \vec{u}$$

gdzie:

Δm – zmiana masy rakiety; jest równa masie paliwa wyrzuconego w czasie Δt ,

Δt – czas działania silników rakiety,

$\vec{u}$ – prędkość gazów spalinowych względem rakiety.

■ Zderzenia niesprężyste i sprężyste

► Jeżeli podczas zderzenia ciała się odkształcają i po zderzeniu poruszają się razem, to mamy do czynienia ze **zderzeniem niesprężystym**. Energia kinetyczna nie zostaje zachowana – część energii kinetycznej ciał sprzed zderzenia (E_{k1} i E_{k2}) zamienia się po zderzeniu w ich energię wewnętrzną ΔE_w :

$$E_{k01} + E_{k02} = E_k + \Delta E_w \Rightarrow \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) v_{wsp}^2}{2} + \Delta E_w$$

gdzie: E_k – energia kinetyczna ciał po zderzeniu; m_1, m_2 – masy zderzających się ciał; $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ – prędkości ciał przed zderzeniem; $\vec{v}_{wsp}$ – wspólna prędkość ciał po zderzeniu.

Zasadę zachowania pędu można w tym wypadku zapisać następująco:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p} \Rightarrow m_1 \vec{v}_{01} + m_2 \vec{v}_{02} = (m_1 + m_2) \vec{v}_{wsp}$$

gdzie: $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ – pędy ciał przed zderzeniem; $\vec{p}$ – pęd ciał po zderzeniu.

Po przekształceniu poprzedniego wzoru otrzymujemy wzór na wspólną prędkość ciał po zderzeniu:

$$\vec{v}_{\text{wsp}} = \frac{m_1 \vec{v}_{01} + m_2 \vec{v}_{02}}{m_1 + m_2}$$

- Jeżeli podczas zderzenia ciała się nie odkształcają, a suma energii kinetycznych ciał przed zderzeniem i po nim jest taka sama, to mamy do czynienia ze **zderzeniem sprężystym**. Po takim zderzeniu ciała poruszają się osobno. Zachowana jest wówczas energia kinetyczna układu ciał, zarówno przed zderzeniem, jak i po nim:

$$E_{k01} + E_{k02} = E_{k1} + E_{k2} \Rightarrow \frac{m_1 v_{01}^2}{2} + \frac{m_2 v_{02}^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$$

gdzie: E_{k1}, E_{k2} – energia kinetyczna ciał po zderzeniu; v_1, v_2 – prędkość ciał po zderzeniu.

Zasadę zachowania pędu możemy w tym przypadku zapisać następująco:

$$\vec{p}_{01} + \vec{p}_{02} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Rightarrow m_1 \vec{v}_{01} + m_2 \vec{v}_{02} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

gdzie: m_1, m_2 – masy zderzających się ciał; $\vec{v}_{01}, \vec{v}_{02}$ – prędkości ciał przed zderzeniem; $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ – pędy ciał po zderzeniu.

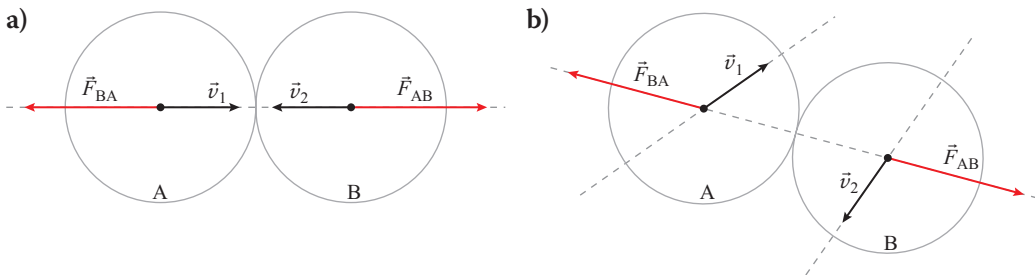
Prędkości ciał po zderzeniu można wyznaczyć ze wzorów:

$$\vec{v}_1 = 2\vec{v}_{\text{wsp}} - \vec{v}_{01}, \vec{v}_2 = 2\vec{v}_{\text{wsp}} - \vec{v}_{02}$$

gdzie $\vec{v}_{\text{wsp}}$ to prędkość wspólna tych samych ciał, gdyby zderzyły się niesprężysto.

■ Rodzaje zderzeń sprężystych kul

Rozróżniamy dwa rodzaje zderzeń sprężystych kul: **centralne** (rys. a) i **niecentralne** (rys. b). W zderzeniach centralnych wektory prędkości kul przed zderzeniem i po nim leżą na prostej przechodzącej przez środki mas kul. W zderzeniach niecentralnych wektory prędkości kul nie leżą na tej prostej.

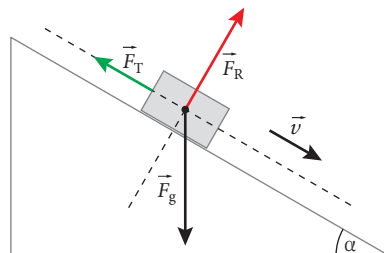


5.1. Praca i moc jako wielkości fizyczne

Podręcznik
rozdz. 5.1

■ Przykład 1.

Stalowy klocek o masie $m = 30$ dag sunie ze stałą prędkością w dół równi pochyłej o kącie nachylenia do poziomu $\alpha = 30^\circ$. Oblicz pracę wykonaną przez siłę grawitacji $\vec{F}_g$, siłę reakcji podłoża $\vec{F}_R$ i siłę tarcia kinetycznego $\vec{F}_T$, jeśli stalowy klocek pokona na równi drogę $s = 0,8$ m. Przyjmij przyspieszenie ziemskie $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



Rozwiązanie

Wskazówka. Skorzystaj z tożsamości trygonometrycznej $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$.

Korzystamy z wzoru na pracę $W = F \Delta r \cos \angle(\vec{F}, \Delta \vec{r})$.

Siła reakcji podłoża jest prostopadła do kierunku ruchu: $\angle(\vec{F}, \Delta \vec{r}) = 90^\circ$, a więc $\cos 90^\circ = 0$, czyli $W_{\vec{F}_R} = 0$.

Siła ciężkości jest skierowana pod kątem β do kierunku przemieszczenia, zatem:

$$W_{\vec{F}_g} = m \cdot g \cdot s \cdot \cos \beta = m \cdot g \cdot s \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha$$

Podstawiamy dane liczbowe:

$$W_{\vec{F}_g} = 0,3 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,8 \text{ m} \cdot \frac{1}{2} = 1,2 \text{ J}$$

Zwróćmy uwagę, że wyrażenie $m \cdot g \cdot \cos \beta$ jest równe wartości składowej siły ciężkości F_{gx} równoległej do równi.

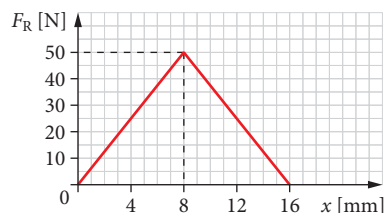
Siła tarcia jest zwrócona przeciwnie do kierunku ruchu: $\angle(\vec{F}, \Delta \vec{r}) = 180^\circ$, a więc $\cos 180^\circ = -1$. Ponadto wiemy, że klocek zsuwa się jednostajnie, co oznacza, że siła tarcia jest równa co do wartości składowej F_{gx} siły ciężkości równoległej do równi. A więc:

$$W_{\vec{F}_T} = F_{gx} \cdot s \cdot \cos 180^\circ = m \cdot g \cdot s \cdot \cos \beta \cdot \cos 180^\circ = m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha \cdot (-1) = -1,2 \text{ J}$$

Odpowiedź: Siła grawitacji wykonała pracę 1,2 J, siła reakcji podłoża nie wykonała żadnej pracy, a praca wykonana przez siłę tarcia to -1,2 J.

■ Przykład 2.

Gdy piłka uderza w parkiet boiska, odkształca się w wyniku działania siły reakcji podłoża. Siła ta zależy od wgniecenia piłki, tak jak przedstawiono na wykresie $F_R(x)$. Skorzystaj z wykresu i oblicz pracę wykonaną przez siłę reakcji podłoża od momentu, gdy piłka zaczyna się odkształcać, do momentu, gdy piłka wraca do pierwotnego kształtu.



Rozwiązanie

W sytuacji opisanej w zadaniu siła nie jest stała. Nie można zatem skorzystać ze wzoru na pracę. Jednak z wykresu wiemy, w jaki sposób siła się zmieniała. W tym przypadku należy wyznaczyć pole figury pod wykresem $F_R(x)$, które jest liczbowo równe pracy wykonanej przez siłę reakcji podłoża.

$$W = \frac{1}{2} F_R \cdot \Delta x \quad W = \frac{1}{2} \cdot 50 \text{ N} \cdot 0,016 \text{ m} = 0,4 \text{ J}$$

Odpowiedź: Podczas odkształcania piłki siła reakcji podłoża wykonała pracę 0,4 J.

■ Przykład 3.

Sanki dziecięce mają sztywną rączkę, która tworzy z poziomem kąt $\alpha = 60^\circ$. Masa sanek z dzieckiem $m = 20 \text{ kg}$. Przyspieszenie ziemskie $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



- a) Jaką pracę wykonamy, gdy będziemy pchać jednostajnie sanki po poziomej drodze o długości $s = 200 \text{ m}$, jeżeli współczynnik tarcia między sankami a śniegiem $\mu = 0,1$? Załóż, że przyłożona siła działa wzdłuż rączki.
- b) Oblicz pracę, jaką wykonamy, jeżeli – zamiast pchać – pociągniemy sanki po tej samej drodze ruchem jednostajnym. Porównaj wyniki z punktów a) i b).

Rozwiązanie

- a) Ponieważ sanki poruszają się ruchem jednostajnym prostoliniowym, wypadkowa działających sił wynosi zero (zarówno w kierunku osi x , jak i y):

$$\text{oś } x: F_{1x} - F_{1T} = 0 \quad (1) \quad \text{oś } y: F_{1R} - F_g - F_{1y} = 0 \quad (2)$$

gdzie, zgodnie z rysunkiem: $F_{1x} = F_1 \cos \alpha$; $F_{1y} = F_1 \sin \alpha$; $F_{1T} = \mu F_{1R}$; $F_g = mg$.

Aby obliczyć pracę podczas pchania sanek, korzystamy ze wzoru:

$$W_1 = F_1 s \cos \alpha$$

Wartość siły F_1 wyznaczamy, podstawiając (2) do (1). Otrzymujemy:

$$F_1 \cos \alpha = \mu(mg + F_1 \sin \alpha) \Rightarrow F_1 = \frac{\mu mg}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}$$

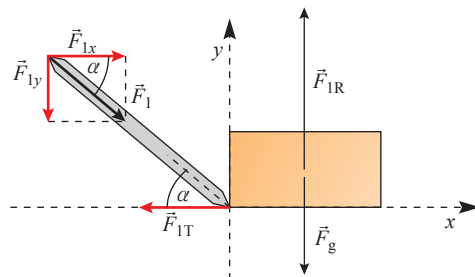
Po podstawieniu danych liczbowych:

$$F_1 = \frac{0,1 \cdot 20 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\cos 60^\circ - 0,1 \cdot \sin 60^\circ} = 48,4 \text{ N}$$

Obliczamy pracę:

$$W_1 = F_1 \cdot s \cos \alpha$$

$$W_1 = 48,4 \text{ N} \cdot 200 \text{ m} \cdot \frac{1}{2} = 4840 \text{ J}$$



Odpowiedź: Pchając sanki, wykonamy pracę 4840 J.

- b) Wiemy, że sanki poruszają się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Oznacza to, że wypadkowa działających sił wynosi zero (zarówno w kierunku osi x , jak i y):

$$\text{oś } x: -F_{2x} + F_{2T} = 0 \quad (1)$$

$$\text{oś } y: F_{2R} - F_g + F_{2y} = 0 \quad (2)$$

gdzie zgodnie z rysunkiem: $F_{2x} = F_2 \cos \alpha$; $F_{2y} = F_2 \sin \alpha$; $F_{2T} = \mu F_{2R}$; $F_g = mg$.

Aby obliczyć pracę podczas ciągnięcia sanek, korzystamy ze wzoru:

$$W_2 = F_2 s \cos \alpha$$

Wartość siły F_2 wyznaczamy, podstawiając (2) do (1). Otrzymujemy:

$$F_2 \cos \alpha = \mu (mg - F_2 \sin \alpha)$$

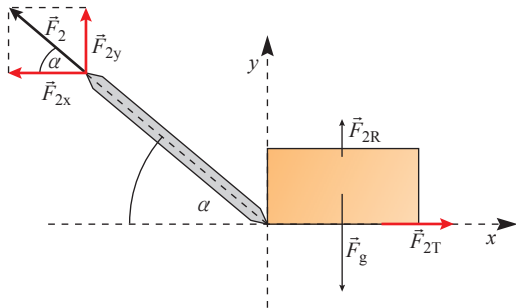
$$F_2 = \frac{\mu mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$$

Po podstawieniu danych liczbowych:

$$F_2 = \frac{0,1 \cdot 20 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\cos 60^\circ + 0,1 \cdot \sin 60^\circ} = 34,1 \text{ N}$$

Obliczamy pracę:

$$W_2 = F_2 s \cos \alpha = 34,1 \text{ N} \cdot 200 \text{ m} \cdot \frac{1}{2} = 3410 \text{ J}$$



Odpowiedź: Pchając sanki, wykonamy pracę 4840 J, ciągnąc – pracę 3410 J. Mniejszą pracę wykonamy, jeśli będziemy ciągnąć sanki.

■ Przykład 4.

Skuter jadący ze stałą prędkością $v = 54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ pokonuje prostoliniowy odcinek drogi $s = 200 \text{ m}$ i wykonuje w tym czasie pracę $W = 40 \text{ kJ}$. Oblicz moc skutera.

Rozwiązanie

Za ruch skutera odpowiada siła $\vec{F}$ skierowana zgodnie z przemieszczeniem pojazdu, która równoważy siłę oporów $\vec{F}_{\text{op}}$.

Praca wykonana przez siłę wynosi:

$$W = F \cdot s$$

Stąd wyznaczamy nieznaną wartość tej siły:

$$F = \frac{W}{s}$$

Moc skutera obliczamy ze wzoru:

$$P = F \cdot v = \frac{W \cdot v}{s}$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy:

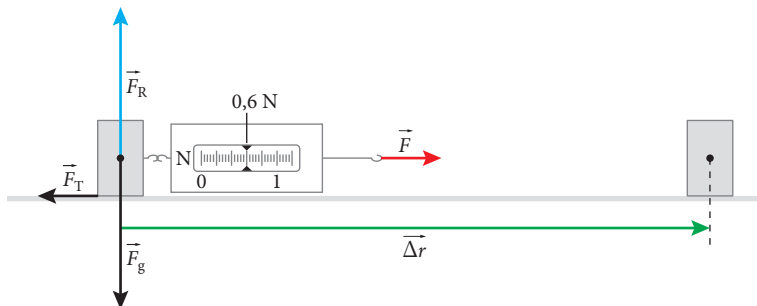
$$P = \frac{40 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{200 \text{ m}} = 3 \text{ kW}$$

Odpowiedź: Skuter ma moc 3 kW.

Pytania i zadania

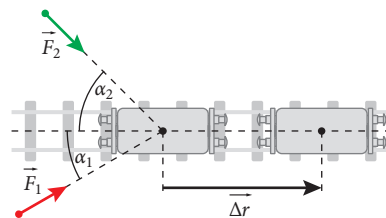
P1

5.1.1. Za pośrednictwem siłomierza ciągniemy drewniany klocek o masie $m = 20$ dag po poziomym blacie stołu ze stałą siłą $\vec{F}$ równoległą do podłoża. Gdy ruch klocka jest jednostajny, siłomierz wskazuje 0,6 N. Oblicz pracę wykonaną przez: siłę $\vec{F}$, siłę grawitacji $\vec{F}_g$, siłę reakcji podłoża $\vec{F}_R$ i siłę tarcia kinetycznego $\vec{F}_T$, gdy drewniany klocek przesunięto po powierzchni stołu $\Delta r = 30$ cm.



P1

5.1.2. Mały górniczy wagonik toczy się po poziomych torach, pchany przez dwóch robotników idących poboczem. Działają oni na wagonik siłami $F_1 = F_2 = 400$ N poziomo do podłoża. Pierwszy robotnik działa siłą, której kierunek tworzy z linią torów kąt $\alpha_1 = 30^\circ$, a drugi – kąt $\alpha_2 = 45^\circ$. Oblicz pracę wykonaną przez każdego z robotników na prostoliniowym odcinku $s = 100$ m.



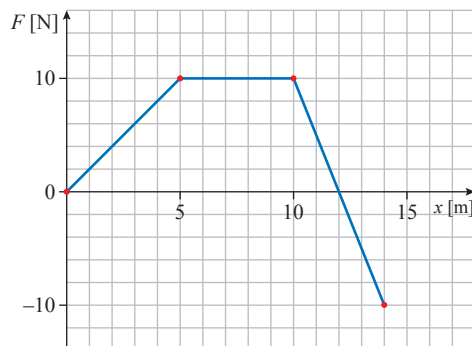
P1

5.1.3. W związku z uszkodzeniem silnika załoga holowała jacht kanałem o długości $s = 3$ km, który łączy dwa jeziora na Pojezierzu Mazurskim. Łódź o masie $m = 1300$ kg ciągnięto z siłą $F = 14$ kN za pomocą liny, tworzącej z brzegiem kąt $\alpha = 30^\circ$. Jaką pracę wykonali żeglarze na odcinku o długości s ?

P2

5.1.4. Ciało porusza się po poziomej powierzchni pod wpływem siły F równoległej do kierunku przemieszczania się ciała. Zależność siły działającej od współrzędnej położenia ciała przedstawiono na wykresie.

- Oblicz pracę wykonaną przez siłę F podczas przemieszczania się ciała z położenia $x_0 = 0$ do $x_1 = 12$ m.
- Oblicz pracę wykonaną przez siłę F podczas przemieszczania się ciała z położenia $x_0 = 0$ do $x_2 = 14$ m.



- 5.1.5.** Krzesiło karuzeli łańcuchowej zatacza okręgi o promieniu R . Oblicz pracę wykonaną przez siłę dośrodkową.

- **5.1.6.** W przestrzeni kosmicznej (bez oporów ruchu i wpływu grawitacji) przemieszczono dwa kontenery o masie $m = 25$ kg każdy na odległość $s = 5$ m: pierwszy – ruchem jednostajnym, a drugi – z przyspieszeniem $a = 0,25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Oblicz pracę wykonaną w obu przypadkach.
- **5.1.7.** Jaką pracę należy wykonać, aby po poziomej betonowej powierzchni magazynu przesunąć ruchem jednostajnym skrzynię o masie $m = 180$ kg na odległość $s = 3$ m. Współczynnik tarcia kinetycznego między skrzynią a podłożem to $\mu = 0,2$. Przyjmij przyspieszenie ziemskie $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.
- **5.1.8.** Sanki wraz z dzieckiem ciągniemy za sznurek po poziomej zaśnieżonej drodze. Sznurek tworzy z poziomem kąt $\alpha = 45^\circ$, współczynnik tarcia między sankami a śniegiem $\mu = 0,08$, a masa sanek wraz z dzieckiem $m = 32$ kg.

P3

 a) Z jaką siłą musimy ciągnąć sanki, aby ruch był jednostajny?
 b) Oblicz pracę wykonaną na drodze $s = 300$ m.
- **5.1.9.** Skrzynka o masie $m = 50$ kg jest pchana po odcinku drogi $s = 50$ m ruchem jednostajnym. Kierunek działania siły tworzy z kierunkiem poziomym kąt $\alpha = 60^\circ$. Współczynnik tarcia między skrzynką a podłożem $\mu = 0,3$.

P3

 a) Z jaką siłą należy pchać skrzynię, aby poruszała się ruchem jednostajnym?
 b) Oblicz pracę wykonaną na drodze s .
- **5.1.10.** Na górze pochylni o kącie nachylenia $\alpha = 35^\circ$ i długości $s = 5$ m jest zamontowana elektryczna wciągarka. Jaką pracę wykona, gdy ruchem jednostajnym przetransportuje z gruntu na poziom magazynu paletę z materiałami budowlanymi o masie $m = 250$ kg? Współczynnik tarcia kinetycznego dla stykających się powierzchni wynosi $\mu = 0,4$. Przyjmij przyspieszenie ziemskie $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

P3
- **5.1.11.** Z wysokości $h = 100$ m w czasie $t = 5,5$ s spadł odłamek skalny o masie $m = 30$ kg. Załóż, że jego ruch był jednostajnie przyspieszony, i oblicz pracę wykonaną przez siłę oporu powietrza. Przyjmij, że lina wciągarki jest równoległa do podłoża, a $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.
- **5.1.12.** Żeglarze przepłynęli kanał o długości $s = 3$ km jachtem silnikowym o mocy $P = 3,5$ KM ze stałą prędkością $v = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz pracę wykonaną przez silnik na tym odcinku trasy.

P4
- **5.1.13.** Astronauta przebywający poza stacją kosmiczną włączył na $t = 3$ s silnik w plecaku odrzutowym. W tym czasie jego prędkość wzrosła od zera do $v = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz moc plecaka odrzutowego, jeśli całkowita masa astronauty i sprzętu to $m = 100$ kg. Pomiń ubytek masy w wyniku spalania paliwa.
- **5.1.14.** Samochód o masie $m = 900$ kg rusza z miejsca. Przez $t = 5$ s działa na niego stała wypadkowa siła $F = 2$ kN. Oblicz średnią moc pojazdu i moc chwilową na końcu piątej sekundy ruchu. Pomiń opory ruchu.
- **5.1.15.** Samochód jedzie ze stałą prędkością po poziomym odcinku trasy, a następnie z taką samą prędkością wjeżdża na wzniesienie o kącie nachylenia $\alpha = 15^\circ$. Siły oporu stanowią $\eta = 5\%$ ciężaru pojazdu. Porównaj moc auta, gdy pokonuje wzniesienie, z jego mocą na poziomym odcinku.

5.2. Pojęcie energii. Energia potencjalna grawitacji. Energia kinetyczna

Podręcznik
rozd. 5.2 i 5.3

■ Przykład 1.

Gdy człowiek o masie $m = 87$ kg ruchem jednostajnym wchodzi schodami z parteru na trzecie piętro, siła reakcji podłoża wykonuje pracę $W = 7170$ J. Środek ciężkości ciała człowieka znajduje się na wysokości $h_0 = 90$ cm od podłogi. Oblicz różnicę wysokości między podłogą parteru i trzeciego piętra.

Rozwiązanie

Kiedy człowiek odpycha się od stopni schodów, działa na niego siła nacisku. Zgodnie z III zasadą dynamiki na stopy działa siła reakcji podłoża. Praca wykonana przez tę siłę powoduje przyrost energii potencjalnej grawitacji ciała człowieka $W = \Delta E_p$.

Ponieważ mamy określić **różnicę** wysokości, nie ma znaczenia, czy energię potencjalną będziemy określać względem podłogi czy względem środka ciężkości człowieka – przyrost energii w obu przypadkach będzie taki sam.

$$W = E_{p2} - E_{p1} = mg\Delta h$$

Różnica poziomów między parterem i czwartym piętrem jest zatem równa:

$$\Delta h = \frac{W}{mg}$$

$$\Delta h = \frac{7170 \text{ J}}{87 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 8,4 \text{ m}$$

Odpowiedź: Różnica poziomów między parterem i trzecim piętrem wynosi 8,4 m.

■ Przykład 2.

Pocisk o masie $m = 2$ g przelatuje poziomo na wylot przez drewniany słup. Jego prędkość tuż przed słupem to $v_1 = 900 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a po wylocie $v_2 = 300 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Na pocisk poruszający się w drewnie działa średnia siła oporu $F_{op} = 3,6$ kN. Oblicz średnicę słupa.

Rozwiązanie

Gdy pocisk przelatuje przez słup o średnicy d , siła oporu $\vec{F}_{op}$ wykonuje pracę, której skutkiem jest utrata części energii kinetycznej przez pocisk ΔE_k :

$$W_{F_{op}} = \Delta E_k$$

Siła oporu jest skierowana w przeciwną stronę w stosunku do przemieszczenia pocisku, zatem:

$$W_{F_{op}} = F_{op} \cdot d \cdot \cos 180^\circ = -F_{op} \cdot d$$

Zmiana energii kinetycznej pocisku jest równa:

$$\Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

zatem

$$-F_{\text{op}} \cdot d = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2}$$

Grubość słupa wyrazimy:

$$d = \frac{m(v_1^2 - v_2^2)}{2F_{\text{op}}}$$

Podstawiamy dane liczbowe:

$$d = \frac{0,002 \text{ kg} \left[\left(900 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \left(300 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right]}{2 \cdot 3,6 \cdot 10^3 \text{ N}} = 0,2 \text{ m} = 20 \text{ cm}$$

Odpowiedź: Pocisk przeleciał przez słup o grubości 20 cm.

■ Przykład 3.

Śmigłowiec o masie $m = 4500 \text{ kg}$ wznosił się pionowo z ziemi do góry ruchem jednostajnie przyspieszonym i po czasie $t = 2 \text{ min}$ uzyskał wysokość $h = 420 \text{ m}$. Jaką pracę wykonały łopaty śmigła, aby wytworzyć siłę nośną w tym czasie? Przyjmij, że podczas wznoszenia działały tylko siła ciężkości i siła nośna.

Rozwiązanie

Praca wykonana przez siłę nośną jest równa zmianie energii mechanicznej.

$$W_{F_n} = \Delta E_m$$

Zwróćmy uwagę, że helikopter wznosił się ruchem przyspieszonym, zatem zwiększała się zarówno jego energia kinetyczna, jak i potencjalna:

$$\Delta E_m = \Delta E_k + \Delta E_p$$

Ponieważ $v_0 = 0$ i $h_0 = 0$, możemy zapisać:

$$W_{F_n} = \frac{mv^2}{2} + mgh$$

Aby poznać prędkość końcową v , skorzystamy ze wzoru na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym i z definicji przyspieszenia:

$$s = h = \frac{at^2}{2}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - 0}{t}$$

Otrzymujemy wyrażenie na drogę w postaci: $h = \frac{vt}{2}$, z którego wyznaczamy prędkość:

$$v = \frac{2h}{t}$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy $v = 7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Podstawiamy dane liczbowe do wzoru na pracę wykonaną przez siłę nośną:

$$W_{Fn} = \frac{mv^2}{2} + mgh$$

$$W_{Fn} = \frac{4500 \text{ kg} \cdot (7 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2} + 4500 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 420 \text{ m} = 110\,250 \text{ J} + 18\,540\,900 \text{ J} = 18\,651\,150 \text{ J}$$

Odpowiedź: Aby wytworzyć siłę nośną, łopaty śmigła wykonały pracę ok. 19 MJ.

■ Przykład 4.

Za pomocą pompy strażackiej można wyrzucać strumień wody z prędkością $v = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, z wydajnością $q = 100 \frac{\text{dm}^3}{\text{s}}$. Oblicz moc pompy. Gęstość wody $d = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Rozwiązanie

Wydajnością nazywamy objętość wody wyrzucaną przez pompę w ciągu jednej sekundy (wymiar $[q] = \frac{\text{dm}^3}{\text{s}}$).

Wydajność jest więc zdefiniowana za pomocą wzoru:

$$q = \frac{V}{t}$$

gdzie V to objętość wody wyrzucanej w czasie t .

Aby obliczyć moc pompy, trzeba obliczyć pracę W wykonywaną przez nią w pewnym czasie t . Możemy przyjąć, że praca W zostaje zamieniona na energię kinetyczną wody E_k . Jeśli pompa działa przez czas t , to objętość dostarczonej wody wynosi $V = qt$ (co wynika ze wzoru na wydajność). Masa wyrzuconej w tym czasie wody jest równa:

$$m = dV = dq t$$

Jej energia kinetyczna:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{dq t v^2}{2}$$

Pompa ma więc moc:

$$P = \frac{E_k}{t} = \frac{dq v^2}{2}$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymamy:

$$P = 0,5 \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 100 \frac{\text{dm}^3}{\text{s}} \cdot (20 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 = 0,5 \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 100 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \cdot 400 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 20\,000 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^3}$$

$$P = 20\,000 \text{ W}$$

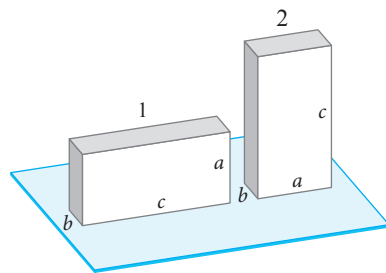
Odpowiedź: Moc pompy wynosi $P = 20 \text{ kW}$.

Pytania i zadania

- P1** • **5.2.1.** Oblicz masę dziecka, które wbiegło ruchem jednostajnym z parteru na drugie piętro. Siła reakcji działająca na buty dziecka wykonała w tym czasie pracę $W = 1648$ J. Różnica poziomów między parterem i drugim piętrzem wynosi $\Delta h = 5,6$ m.

- P1** • **5.2.2.** Turysta podniósł z ziemi plecak o masie $m = 8,5$ kg i wniósł go na wzniesienie o wysokości $h = 15$ m. U podnóża wzniesienia środek ciężkości plecaka znajdował się na wysokości $h_0 = 0,5$ m nad ziemią, a na ramionach turysty stojącego na wzniesieniu środek ciężkości plecaka był na wysokości $1,5$ m nad ziemią. Oblicz, jaką minimalną pracę wykonał turysta przy wnoszeniu plecaka.

- P1** • **5.2.3.** Dziecko bawi się klockiem o masie $m = 100$ g w postaci prostopadłościanu o wymiarach $a = 8$ cm, $b = 4$ cm, $c = 16$ cm. Jak zmieni się energia potencjalna klocka, jeżeli z położenia 1 zostanie postawiony do położenia 2?



- **5.2.4.** Wkopany w ziemię drewniany słup podtrzymujący przewody linii energetycznej ma wysokość $h = 7$ m nad gruntem, a jego średnica wynosi $l = 20$ cm. Słup postanowiono wymienić. Do górnego końca słupa przymocowano linę dźwigu, a jego dolny koniec został odpiłowany tuż nad ziemią. Oblicz pracę, jaką wykonuje siła naciągu liny, aby położyć na ziemi odcięty fragment słupa o masie $m = 900$ kg. Przyjmij, że słup był kładziony jednostajnie.

- P2** • **5.2.5.** Pocisk o masie $m = 30$ g, lecący poziomo z prędkością $v = 400 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, trafił w deskę i ugrzązł w niej po przebyciu drogi $s = 10$ cm. Oblicz średnią siłę oporu przy przechodzeniu pocisku przez deskę.

- **5.2.6.** Podczas rzutów osobistych do kosza koszykarz nadaje piłkę o masie $m = 0,6$ kg prędkość około $v = 7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Pomiń pracę związaną z uniesieniem piłki w trakcie rzutu.

a) Oblicz pracę wykonaną przez zawodnika podczas rzutu.

Informacja do punktów b–d. Fred Newman 29–30 września 1990 roku ustanowił rekord Guinnessa w liczbie rzutów osobistych wykonanych w ciągu 24 godzin. Rzucił do kosza $n_0 = 22\,049$ razy, z czego celnie wykonał $n_c = 20\,371$ rzutów.

b) Oblicz pracę, jaką wykonał Fred Newman przy oddawaniu wszystkich rzutów.

c) Oblicz całkowitą moc włożoną w oddanie wszystkich rzutów.

d) Jaka część pracy została wykorzystana na rzuty celne?

- P3** • **5.2.7.** Śmigłowiec Sokół o masie 3850 kg leciał poziomo na pewnej wysokości z prędkością $v_1 = 216 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Następnie zwiększył wysokość o $\Delta h = 1000$ m i jednocześnie zmniejszył prędkość do $v_2 = 180 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jaką pracę wykonało śmigło wytwarzające siłę nośną?

- • **5.2.8.** Samochód o masie $m = 800 \text{ kg}$ ruszył z miejsca ruchem jednostajnie przyspieszonym i osiągnął prędkość $v = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ w czasie $t = 10 \text{ s}$. Załóż, że praca wykonana przez silnik powoduje tylko przyrost energii kinetycznej.
 - a) Jaką pracę wykonał silnik przy rozpędzaniu pojazdu od prędkości $v_0 = 0$ do prędkości $\frac{v}{2}$?
 - b) Jaką pracę wykonał silnik w następnej fazie ruchu, rozpędzając pojazd od prędkości $\frac{v}{2}$ do prędkości końcowej v ?
 - c) Oblicz stosunek pracy wykonanej przez silnik samochodu w poszczególnych przedziałach prędkości oraz stosunek drogi przebytej przez ten pojazd w tych przedziałach prędkości. Zinterpretuj otrzymane wyniki.

- • **5.2.9.** Pracownik supermarketu popchnął wózek, który po przejechaniu drogi $s = 0,5 \text{ m}$ zatrzymał się pod działaniem sił oporu ruchu, które stanowiły 40% jego ciężaru. Oblicz prędkość nadaną wózkowi przez pracownika.

- • **5.2.10.** Hokeista uderza kijem w krążek i nadaje mu prędkość $v = 11 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Jaką drogę przebędzie krążek do chwili zatrzymania, jeśli jego współczynnik tarcia o lód $\mu = 0,12$?

- • **5.2.11.** Po poziomej drodze jedzie z wyłączonym silnikiem samochód o masie $m = 1 \text{ t}$. Od chwili włączenia silnika jego prędkość wzrosła z $v_1 = 36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ do $v_2 = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ i pokonał w tym czasie $s = 150 \text{ m}$. Oblicz moc silnika samochodu, jeżeli opory ruchu wyniosły 25% siły ciężkości.



P4

- • **5.2.12.** Z jaką prędkością pompa strażacka o mocy $P = 18 \text{ kW}$ wyrzuca strumień wody, jeżeli pracuje z wydajnością $q = 120 \frac{\text{dm}^3}{\text{s}}$. Gęstość wody $d = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

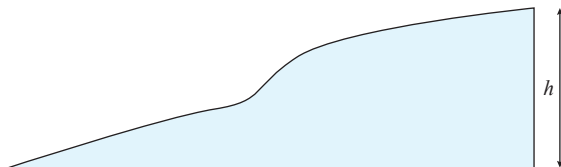
- • **5.2.13.** Ze studni o głębokości $h = 50 \text{ m}$ wodę wydobywa pompa o mocy $P = 1,5 \text{ kW}$. Oblicz, ile litrów wody pompa wynosi na powierzchnię ziemi w ciągu 1 minuty. Gęstość wody $d = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

5.3. Zasada zachowania energii

Podręcznik
rozdz. 5.3

■ Przykład 1.

Ciało podniesiono z poziomu ziemi na szczyt wzniesienia na wysokość $h = 6$ m i lekko popchnięto. Dalej ciało zsuwało się bez tarcia. Oblicz jego prędkość po zsunięciu się ze wzniesienia o kształcie pokazanym na rysunku poniżej. Przyspieszenie ziemskie $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



Rozwiązanie

Aby podnieść ciało o masie m ruchem jednostajnym, musimy działać stałą siłą $F = mg$ równą ciężarowi ciała, ale skierowaną do góry.

Przy podnoszeniu ciała na wysokość h wykonana zostanie praca:

$$W = F \cdot h = mgh$$

Na szczycie wzniesienia ciało ma energię potencjalną (względem jego podstawy) równą wykonanej pracy:

$$E_p = mgh$$

Przy zsuwaniu się ciała ze wzniesienia jego energia potencjalna maleje do zera, wzrasta natomiast energia kinetyczna.

Zgodnie z zasadą zachowania energii mechanicznej energia kinetyczna ciała na dole wzniesienia wynosi:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

i jest równa energii potencjalnej ciała na jego szczycie, czyli:

$$mgh = \frac{mv^2}{2}$$

Z tej zależności wyznaczamy prędkość ciała u podnóża wzniesienia:

$$v = \sqrt{2gh}$$

Uwaga. Kształt wzniesienia nie ma wpływu na wynik zadania (prędkość końcową ciała), znaczenie ma tylko jego wysokość.

Wstawiamy dane liczbowe i otrzymujemy:

$$v = 10,85 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Odpowiedź: Prędkość końcowa ciała wynosi $v = 10,85 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

■ Przykład 2.

Dźwig unosi z ziemi i transportuje pionowo w górę ruchem jednostajnie przyspieszonym kontener o masie $m = 1500 \text{ kg}$ na wysokość $h = 18 \text{ m}$. Podczas transportu na kontener działa siła naciągu liny o wartości $F_n = 20\,000 \text{ N}$. Oblicz pracę, jaką wykona dźwig.

Rozwiązanie

Na kontener działa siła wypadkowa, która nadaje przyspieszenie transportowanemu ciału:

$$F = F_n - F_g = ma$$

Przyspieszenie kontenera jest więc równe:

$$a = \frac{F_n - mg}{m}$$

$$a = \frac{F_n - mg}{m} = \frac{F_n}{m} - g$$

Wykonana przez dźwig praca powoduje przyrost energii potencjalnej kontenera i przyrost jego energii kinetycznej:

$$W = \Delta E_p + \Delta E_k$$

$$W = mgh + \frac{mv^2}{2}$$

Prędkość, jaką będzie miał kontener na wysokości h , obliczymy ze wzoru $v = at$.

Wysokość:

$$h = \frac{at^2}{2}$$

jest drogą, jaką pokonuje kontener ruchem jednostajnie przyspieszonym. Stąd czas ruchu:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}}$$

Wzór na prędkość przyjmuje postać:

$$v = a \cdot \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{2ha}$$

Po podstawieniu go do wzoru na pracę otrzymujemy:

$$W = mgh + mah = mh(g + a)$$

$$W = mh(g + a) = mh\left(g + \frac{F_n}{m} - g\right) = hF_n$$

Podstawiamy dane liczbowe:

$$W = 18 \text{ m} \cdot 20\,000 \text{ N} = 360\,000 \text{ J} = 360 \text{ kJ}$$

Odpowiedź: Podczas transportu kontenera ruchem jednostajnie przyspieszonym dźwig wykonał pracę 360 kJ.

■ Przykład 3.

Betonowa pochylnia o kącie nachylenia $\alpha = 20^\circ$ i długości $s = 6$ m jest śliska po deszczu. Skrzynka o masie 20 kg ustawiona na szczycie pochylni zaczyna zsuwać się w dół. Oblicz prędkość skrzyni na samym dole, jeżeli współczynnik tarcia wynosi $\mu = 0,04$.

Rozwiązanie

Przyjmijmy, że poziom odniesienia dla energii potencjalnej skrzyni, na którym ma ona wartość zero, znajduje się na dole pochylni.

Na szczycie pochylni energia mechaniczna skrzyni jest równa energii potencjalnej. W trakcie zsuwania się skrzynia traci energię potencjalną i zyskuje energię kinetyczną. Praca wykonana przez siłę tarcia kinetycznego powoduje, że skrzynia traci część energii mechanicznej. Zapiszmy zasadę zachowania energii mechanicznej dla sytuacji przedstawionej w zadaniu:

$$E_p = E_k + W_T$$

Praca siły tarcia wynosi:

$$W_T = F_T \cdot s$$

Zatem możemy zapisać:

$$mgh - F_T \cdot s = \frac{1}{2}mv^2$$

Siłę tarcia wyrazimy wzorem:

$$F_T = \mu mg \cos \alpha$$

Podstawiamy go do wcześniejszego wyrażenia:

$$mgh - \mu mg \cos \alpha \cdot s = \frac{1}{2}mv^2$$

Po przekształceniu tego wzoru otrzymujemy:

$$v^2 = 2g(h - \mu s \cos \alpha)$$

gdzie: $h = s \cdot \sin \alpha$.

Zatem prędkość skrzynki wynosi:

$$v = \sqrt{2gs(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}$$

Po podstawieniu danych liczbowych mamy:

$$v = \sqrt{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 6 \text{ m} \cdot (\sin 20^\circ - 0,04 \cos 20^\circ)} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Odpowiedź: Skrzynka na dole pochylni osiągnęła prędkość $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

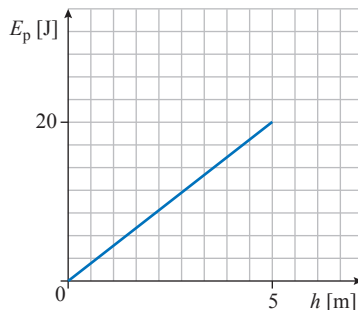
Pytania i zadania

- 5.3.1.** Niezabezpieczona deska snowboardowa zaczęła zjeżdżać po oblodzonym stoku o wysokości $h = 26$ m. Jaką prędkość osiągnie deska u podnóża góry? Pomiń opory ruchu.
- 5.3.2.** Piłkę rzucono pionowo w górę z prędkością $v_0 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Na jakiej wysokości względem miejsca wyrzucenia energia potencjalna piłki zrówna się z jej energią kinetyczną? Przyspieszenie ziemskie $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Pomiń opory ruchu.

- • • **5.3.3.** Jaką prędkość pionową w dół nadał zawodnik piłce tenisowej, uderzając w nią z góry rakieta na wysokości $h_1 = 70$ cm, jeśli po odbiciu od kortu piłka wzniosła się na wysokość $h_2 = 1,5$ m? Pomiń straty energii w trakcie odbicia piłki od podłoża. Przyjmij $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Pomiń opory ruchu.

- • • **5.3.4.** Małą metalową kulkę o masie $m = 10$ g, zaczepioną na nici o długości $l = 40$ cm, odchyłono od pionu o kąt $\alpha = 60^\circ$. Oblicz maksymalną prędkość kulki w czasie przechodzenia przez najniższe położenie oraz jej energię kinetyczną w tym położeniu. Przyjmij $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

- **5.3.5.** Na wykresie przedstawiono zależność energii potencjalnej od wysokości piłki rzuconej pionowo w górę z prędkością początkową $v_0 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Przyjmij $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Pomiń opory ruchu.



- Na podstawie danych z wykresu oblicz masę piłki.
- Sporządź wykres zależności energii kinetycznej i energii całkowitej piłki od wysokości.
- Na jakiej wysokości energia kinetyczna będzie równa energii potencjalnej?
- Na jakiej wysokości energia kinetyczna będzie cztery razy większa od energii potencjalnej?

- • • **5.3.6.** Kamyk o masie $m = 0,2$ kg oderwany od urwiska skalnego spada swobodnie na ziemię z wysokości $h = 20$ m. Podczas spadania jego energia kinetyczna rośnie, a energia potencjalna maleje względem powierzchni ziemi. Pomiń opory ruchu. Przyjmij $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

- Zapisz formułę matematyczną (wzór) opisującą zależność energii kinetycznej i energii potencjalnej spadającego ciała od czasu.
- Za pomocą arkusza kalkulacyjnego sporządź w jednym układzie współrzędnych wykresy ilustrujące zależność energii potencjalnej i kinetycznej od czasu spadania. Przyjmij przedział czasu (0 s – 2 s).
- Wykaż, że całkowita energia mechaniczna spadającego kamienia jest stała i nie zależy od czasu.

- • **5.3.7.** Dźwig unosi materiał budowlany o masie $m = 500$ kg na wysokość $h = 10$ m. Przyspieszenie ziemskie $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

P2

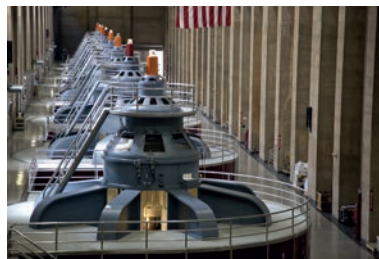
- Jaką pracę wykona dźwig, unosząc ten materiał ruchem jednostajnym?
- Jaką pracę wykona dźwig podczas podnoszenia tego materiału na tę samą wysokość ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem $a = 0,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$?
- Z jaką siłą dźwig unosi materiał budowlany w obydwu przypadkach?

- • **5.3.8.** Helikopter o masie $m = 500$ kg wznosi się z ziemi pionowo do góry ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem $a = 0,08 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Jaką pracę wykona siła nośna działająca na śmigło w czasie $t = 1,5$ min? Pomiń siłę oporu podczas wznoszenia.

P2

- • **5.3.9.** Zawodniczka pchnęła kulą o masie $m = 4 \text{ kg}$ z prędkością $v_0 = 14 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ pod pewnym kątem do poziomu z wysokości $h = 1 \text{ m}$ nad ziemią.
 - a) Z jaką prędkością kula uderzy o podłogę?
 - b) Podczas uderzenia o podłogę 60% energii kuli zmienia się w jej energię wewnętrzną. Oblicz przyrost energii wewnętrznej kuli tuż po uderzeniu w podłogę.
- • **5.3.10.** Na górze równi pochyłej o długości $s = 1 \text{ m}$ i kącie nachylenia $\alpha = 30^\circ$ ustawiono pudełko zapałek i puszczono je swobodnie. U podnóża równi pudełko uzyskało prędkość $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz współczynnik tarcia kinetycznego pudełka o powierzchnię równi. Rozwiąż zadanie, korzystając z zasady zachowania energii. Przyjmij $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

P3
- • **5.3.11.** Podczas zabaw ludowych czasami organizowany jest konkurs „słup szczęścia”, który polega na wspinaniu się na wysoki słup pokryty śliską substancją w celu zdobycia umieszczonej na jego wierzchołku nagrody. Podczas jednej z prób zawodnik o masie $m = 70 \text{ kg}$ zsunął się ze słupa z wysokości $h = 3,5 \text{ m}$. Przyjmij, że praca sił tarcia stanowiła 25% energii potencjalnej zawodnika.
 - a) Jaka prędkość osiągnął zawodnik u podnóża słupa?
 - b) Oblicz średnią wartość siły tarcia działającej na zsuwającego się ze słupa zawodnika.
- • **5.3.12.** Z szybu o głębokości $h = 300 \text{ m}$ jest wypompowywana woda. Oblicz moc silnika pompy, jeżeli w ciągu $t = 1 \text{ min}$ wypompowuje ona wodę o objętości $V = 5 \text{ m}^3$. Sprawność pompy $\eta = 90\%$. Gęstość wody $d = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.
- • **5.3.13.** Turbina hydroelektrowni ma moc $P = 70 \text{ MW}$. Oblicz zużycie wody w metrach sześciennych w ciągu $t = 1 \text{ h}$, jeżeli sprawność turbiny $\eta = 80\%$. Dzięki tamie poziom wody podniósł się na wysokość $h = 60 \text{ m}$. Gęstość wody $d = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, przyspieszenie ziemskie $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

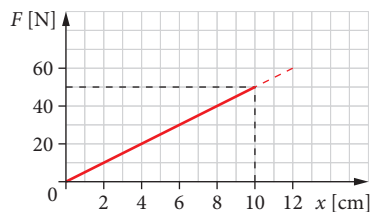


5.4. Energia potencjalna sprężystości

Podręcznik
rozdz. 5.4

■ Przykład 1.

Sprężynę rozciągnięto o 10 cm. Zależność siły działającej na sprężynę od jej wydłużenia $F(x)$ przedstawiono na wykresie.



- Na podstawie wykresu wyznacz współczynnik sprężystości sprężyny k .
- Oblicz pracę potrzebną do rozciągnięcia luźnej sprężyny o $\Delta x_1 = 2$ cm (od 0 do 2 cm)
- Jaką pracę należy wykonać, aby rozciągnąć sprężynę od 10 cm do 12 cm. Zinterpretuj otrzymane wyniki.

Rozwiązanie

- Współczynnik sprężystości sprężyny k możemy wyznaczyć ze wzoru:

$$F = kx \rightarrow k = \frac{F}{x}$$

Z wykresu odczytujemy wartość siły F dla wybranego wydłużenia x , np. dla $x = 8$ cm = 0,08 m wartość siły wynosi $F = 40$ N.

Wstawiamy wartości liczbowe i otrzymujemy:

$$k = \frac{40 \text{ N}}{0,08 \text{ m}} = 500 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Odpowiedź: Współczynnik sprężystości wynosi $k = 500 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

- Praca wykonana przez siłę zewnętrzną równoważącą siłę sprężystości jest równa przyrostowi energii potencjalnej sprężystości:

$$W = \Delta E_{\text{ps}}$$

Ponieważ energia potencjalna luźnej, nienapiętej sprężyny jest zerowa, zatem $\Delta E_{\text{ps}} = E_{\text{ps}}$.

Możemy zatem zapisać:

$$W = E_{\text{ps}} = \frac{1}{2} k \Delta x_1^2$$

Podstawiamy wartości liczbowe:

$$W_1 = \frac{1}{2} \cdot 500 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0,02 \text{ m})^2 = 0,1 \text{ J}$$

Pracę możemy również obliczyć z wykresu – jako pole trójkąta prostokątnego $P_{\Delta} = \frac{1}{2} ah$.

$$W_1 = \frac{1}{2} \Delta x_1 \cdot F_1 = \frac{1}{2} \cdot 0,02 \text{ m} \cdot 10 \text{ N} = 0,1 \text{ J}$$

Odpowiedź: Praca potrzebna do rozciągnięcia luźnej sprężyny o $\Delta x_1 = 2$ cm wynosi $W_1 = 0,1$ J.

- c) Pracę przy wydłużaniu już rozciągniętej sprężyny o dodatkową wartość $\Delta x_2 = 2$ cm obliczymy ze wzoru:

$$W = \Delta E_{ps} = E_{ps12} - E_{ps10}$$

Początkową energię potencjalną sprężyny rozciągniętej o 10 cm wyraża wzór:

$$E_{ps10} = \frac{1}{2} k x_{10}^2,$$

a energię końcową sprężyny rozciągniętej o dodatkowe 2 cm:

$$E_{ps12} = \frac{1}{2} k (x_{10} + \Delta x_2)^2$$

Zatem praca jako różnica energii potencjalnych wynosi:

$$W_2 = \frac{1}{2} k [(x_{10} + \Delta x_2)^2 - x_{10}^2]$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$W_2 = \frac{1}{2} \cdot 500 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot [(0,1 + 0,02)^2 - 0,1^2] \text{ m}^2 = 1,1 \text{ J}$$

Pracę możemy również obliczyć na podstawie wykresu jako pole trapezu:

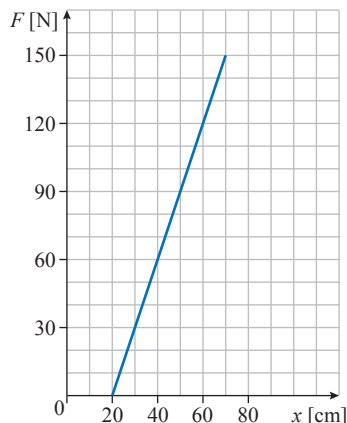
$$P_{\text{trapezu}} = \frac{1}{2} (a + b) h, \quad \text{zatem} \quad W_2 = \frac{1}{2} (50 \text{ N} + 60 \text{ N}) \cdot 0,02 \text{ m} = 1,1 \text{ J}$$

Odpowiedź: Praca potrzebna do rozciągnięcia sprężyny od 10 do 12 cm wynosi $W_2 = 1,1 \text{ J}$.

■ Przykład 2.

Łucznik, przygotowując się do oddania strzału, napina cięciwę łuku. Wykres przedstawia zależność $F(x)$ między siłą, z jaką napinana jest cięciwa łuku, a naciąganiem x mierzonym wzdłuż strzały, wyrażającym jej przesunięcie.

- a) Jaką pracę wykonają mięśnie zawodnika przy naciągu cięciwy łuku do $x = 50$ cm?
- b) Jaka prędkość zostanie nadana strzale o długości $l = 70$ cm i masie $m = 35$ g przy maksymalnym naciągu cięciwy łuku takim, że x jest równe długości strzały? Zakładamy, że na energię kinetyczną strzały zamienia się 80% energii włożonej przez łucznika, a następnie zgmagazynowanej w napiętym łuku.



Rozwiązanie

- a) Praca włożona przy naciąganiu cięciwy łuku zostaje zgmagazynowana w postaci energii potencjalnej. Wobec tego pracę możemy obliczyć z wykresu jako pole trójkąta o podstawie $x = 30$ cm i wysokości $F = 90$ N.

$$W = \frac{1}{2} \cdot 0,3 \text{ m} \cdot 90 \text{ N} = 13,5 \text{ J}$$

Odpowiedź: Praca potrzebna do naciągnięcia cięciwy wynosi 13,5 J.

- b) Na energię kinetyczną strzały zamienia się 80% energii włożonej przez łucznika, a następnie zmagazynowanej w napiętym łuku, zatem:

$$E_k = 0,8E_{ps}$$

$$\frac{mv^2}{2} = 0,8 \frac{kx^2}{2}$$

Zwróćmy uwagę, że siła sprężystości nie działa na drodze równej całej długości strzały – przy nienapężonym łuku między cięciwą a majdanem (środkową częścią łuku, gdzie opiera się strzała) jest pewien odstęp. W naszym przypadku jest to 20 cm, co można odczytać z wykresu. Zatem:

$$x = l - 0,2 \text{ m}$$

Podstawiamy x do wcześniejszego równania i wyznaczamy prędkość strzały:

$$v = (l - 0,2 \text{ m}) \sqrt{0,8 \frac{k}{m}}$$

Współczynnik sprężystości $k = \frac{F}{x}$ wyznaczymy na podstawie wykresu. Dla wybranej pary wartości, np.: $\Delta x_1 = 20 \text{ cm}$, $\Delta F_1 = 60 \text{ N}$, mamy:

$$k = \frac{\Delta F_1}{\Delta x_1} = \frac{60 \text{ N}}{0,2 \text{ m}} = 300 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Do wzoru na prędkość strzały wstawiamy wartości liczbowe:

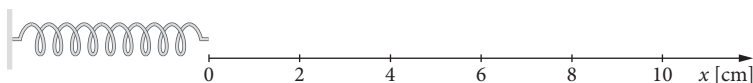
$$v = (0,7 \text{ m} - 0,2 \text{ m}) \sqrt{0,8 \frac{300 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{0,035 \text{ kg}}} = 41,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Odpowiedź: Prędkość strzały wyniesie $41,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Pytania i zadania

- • 5.4.1. Rozciągnięcie luźnej sprężyny o $\Delta x_1 = 2 \text{ cm}$ wymaga wykonania pracy $W_1 = 0,04 \text{ J}$.

P1



- Jaki jest współczynnik sprężystości tej sprężyny?
- Jaką energię potencjalną posiada sprężyna rozciągnięta o $\Delta x_2 = 4 \text{ cm}$, a jaką po rozciągnięciu również z położenia równowagi o $\Delta x_3 = 8 \text{ cm}$.
- Oblicz, jaką pracę trzeba wykonać, aby zwiększyć wydłużenie sprężyny z $\Delta x_4 = 3 \text{ cm}$ do $\Delta x_5 = 7 \text{ cm}$.

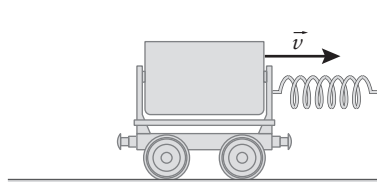
- 5.4.2. Sprężynę o współczynniku sprężystości $k = 25 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ rozciągnięto o $x = 72 \text{ cm}$. Oblicz siłę potrzebną do rozciągnięcia sprężyny oraz jej energię potencjalną sprężystości.

P1

- • **5.4.3.** Jaką pracę należy wykonać, aby ścisnąć sprężynę o $\Delta x = 10$ cm, jeżeli wiemy, że sprężyna ta rozciąga się o $\Delta l = 5$ cm po zawieszeniu na jej końcu ciężarka o masie $m = 50$ g?
- • **5.4.4.** Gumową taśmę poddano testom mechanicznym, m.in. rozciąganiu. Wyniki pomiarów wydłużenia taśmy w zależności od przyłożonej siły zawarto w tabeli. Pomiarów siły dokonano z dokładnością ± 2 N, a pomiarów wydłużenia taśmy z dokładnością ± 2 cm.

Siła F [N]	0	12	30	36	50	80	100
Wydłużenie x [cm]	0	10	26	30	41	66	82

- a) Na podstawie wyników pomiarów sporządź wykres zależności $F(x)$. Zaznacz punkty pomiarowe wraz z niepewnościami pomiarowymi. Narysuj prostą najlepszego dopasowania do punktów pomiarowych.
- b) Na podstawie wykresu oblicz średnią wartość współczynnika sprężystości taśmy gumowej.
- • **5.4.5.** Oblicz pracę wykonaną przez łucznika przy naciąganiu cięciwy, podczas którego strzała przesunęła się o $x = 75$ cm względem łuku. Współczynnik sprężystości cięciwy jest równy $k = 240 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Jaką prędkość łuk nada strzale o masie $m = 37$ g przy założeniu, że 85% energii potencjalnej sprężystości łuku zamienia się w energię kinetyczną strzały. Przyjmij, że łuk zachowuje się jak sprężyna o stałym współczynniku sprężystości k .
- P2**
- • **5.4.6.** Wagonik o masie $m = 0,2$ kg z przymocowaną sprężyną buforową poruszał się z prędkością $v = 1,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Po uderzeniu w przeszkodę zatrzymał się po przebyciu drogi $x = 6$ cm. Oblicz współczynnik sprężystości sprężyny buforowej.



- • **5.4.7.** Dziecko o masie $m = 30$ kg bawi się na trampolinie rozpiętej na wysokości $d = 1$ m nad ziemią. Kiedy dziecko leży spokojnie, to ugięcie trampoliny wynosi $x = 10$ cm. W czasie podskoku trampolina ugina się o $x_1 = 0,5$ m. Czy podczas tych akrobacji dziecko będzie bezpieczne, jeżeli siatka zabezpieczająca wokół trampoliny ma wysokość 2,8 m? Przyjmij, że trampolina zachowuje się jak sprężyna o stałym współczynniku sprężystości k .

5.5. Pęd ciała. Zasada zachowania pędu

Podręcznik
rozdz. 5.5

■ Przykład 1.

Chłopiec o masie $m_1 = 53$ kg ćwiczy jazdę na deskorolce o masie $m_2 = 2$ kg.

- Chłopiec wskakuje od tyłu z prędkością $v_1 = 1,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ względem ziemi na stojącą swobodnie deskorolkę. Oblicz, z jaką prędkością zaczną poruszać się deskorolka z chłopcem.
- Chłopiec wskakuje z kierunku prostopadłego do ruchu deskorolki na deskorolkę poruszającą się z prędkością $v_2 = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz o ile zmniejszy się prędkość deskorolki z chłopcem.
- Chłopiec jechał na deskorolce po poziomej powierzchni z prędkością $v_3 = 0,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a następnie zeskoczył z deskorolki do tyłu z prędkością $v_4 = 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ względem ziemi. Oblicz prędkość deskorolki po zeskoku.

Rozwiązanie

- Chłopiec i deskorolka stanowią układ dla którego stosujemy zasadę zachowania pędu: suma pędów początkowych ciał jest równa sumie pędów końcowych:

$$\vec{p}_{\text{pch}} + \vec{p}_{\text{pdes}} = \vec{p}_{\text{kch}} + \vec{p}_{\text{kdes}}$$

Całkowity pęd początkowy to pęd chłopca $\vec{p}_{\text{pch}} = m_1 \vec{v}_1$, ponieważ początkowy pęd nieruchomej deskorolki $\vec{p}_{\text{des}} = 0$.

Całkowity pęd końcowy to pęd deskorolki z chłopcem:

$$\vec{p}_k = (m_1 + m_2) \vec{v}_k$$

Ostatecznie zasada zachowania pędu dla sytuacji opisanej w punkcie a) przyjmuje postać:

$$m_1 \vec{v}_1 = (m_1 + m_2) \vec{v}_k$$

Ponieważ ruch odbywa się wzdłuż prostej, a prędkości chłopca przed skokiem i chłopca na deskorolce po skoku są zwrócone w tę samą stronę, możemy równanie zapisać w postaci:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_k$$

Wyznaczamy v_k i obliczamy wartość:

$$v_k = \frac{m_1 v_1}{(m_1 + m_2)}$$

$$v_k = \frac{53 \text{ kg} \cdot 1,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(53 + 2) \text{ kg}} = 1,73 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Odpowiedź: Po wskoczeniu na deskorolkę chłopiec i deskorolka poruszały się z tą samą prędkością $v_k = 1,73 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

- b)** Przeprowadzamy podobne rozważania jak w punkcie a): stosujemy zasadę zachowania pędu dla układu ciał chłopiec–deskorolka.

Całkowity pęd początkowy to pęd deskorolki $\vec{p}_{\text{des}} = m_2 \vec{v}_2$.

Chłopiec wskakuje na deskorolkę prostopadłe do kierunku ruchu, zatem na kierunek ruchu jego skok nie ma wpływu. Po wskoczeniu zmienia się natomiast masa poruszającego się układu. Zatem całkowity pęd końcowy jest równy:

$$\vec{p}_k = (m_1 + m_2) \vec{v}_k$$

Możemy zapisać zasadę zachowania pędu:

$$m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_k \Rightarrow v_k = \frac{m_2 v_2}{(m_1 + m_2)}$$

$$v_k = \frac{2 \text{ kg} \cdot 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(53 + 2) \text{ kg}} = 0,09 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Pytanie postawione w zadaniu dotyczy zmiany prędkości deskorolki, zatem:

$$\Delta v = v_2 - v_k$$

$$\Delta v = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 0,09 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2,41 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Odpowiedź: Prędkość deskorolki po wskoczeniu chłopca zmniejszyła się o $2,41 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

- c)** Całkowity pęd początkowy to pęd chłopca na deskorolce:

$$\vec{p}_p = (m_1 + m_2) \vec{v}_3$$

Całkowity pęd końcowy układu to suma pędu chłopca i pędu deskorolki:

$$\vec{p}_k = \vec{p}_{\text{kch}} + \vec{p}_{\text{kdes}}$$

zatem:

$$(m_1 + m_2) \vec{v}_3 = m_1 \vec{v}_4 + m_2 \vec{v}_{\text{kdes}}$$

Zwróćmy uwagę, że chłopiec porusza się w przeciwną stronę niż deskorolka, więc gdy zapisujemy równanie w postaci niewektorowej, musimy wstawić wartość prędkości chłopca ze znakiem minus:

$$(m_1 + m_2) v_3 = -m_1 v_4 + m_2 v_{\text{kdes}}$$

Przekształcamy równanie tak, aby wyznaczyć prędkość końcową deskorolki:

$$v_{\text{kdes}} = \frac{(m_1 + m_2) v_3 + m_1 v_4}{m_2}$$

Po wstawieniu wartości liczbowych otrzymamy:

$$v_{\text{kdes}} = \frac{(53 \text{ kg} + 2 \text{ kg}) \cdot 0,6 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 53 \text{ kg} \cdot 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ kg}} = 27,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Odpowiedź: Deskorolka po zeskoku chłopca uzyskała prędkość $27,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

■ Przykład 2.

Falkonet to historyczna broń palna, rodzaj małego działu ładowanego od przodu. Działo tego typu o masie $M = 300 \text{ kg}$ ustawiono na twardym, równym podłożu. Lufa falkonetu tworzy z poziomem kąt $\alpha = 30^\circ$. Z działła wystrzelono pocisk o masie $m = 5 \text{ kg}$ z prędkością $v_p = 85 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Przyjmij $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



- Oblicz średnią siłę działającą na pocisk w lufie o długości $l = 80 \text{ cm}$, zakładając że ruch pocisku w lufie jest jednostajnie przyspieszony.
- Oblicz prędkość odrzutu falkonetu tuż po wystrzale. Podaj kierunek, zwrot i wartość tej prędkości.
- Oblicz, jak daleko zostanie odrzucone działo, jeżeli siła oporu ruchu stanowi 20% jego ciężaru.

Rozwiązanie

- W celu obliczenia średniej siły stosujemy wzór na uogólnioną postać II zasady dynamiki:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

Prędkość początkowa pocisku wynosi zero, więc:

$$\Delta p = mv_p - 0 = mv_p$$

Długość lufy jest równa drodze przebytej przez pocisk ruchem jednostajnie przyspieszonym, którą możemy wyrazić wzorem: $l = \frac{1}{2} v_p t$, z którego wyznaczamy czas:

$$t = \frac{2l}{v_p}$$

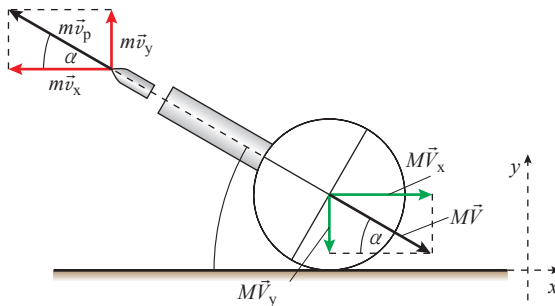
Po uwzględnieniu tych uwag otrzymujemy wzór na siłę: $F = \frac{mv_p}{\frac{2l}{v_p}} = \frac{mv_p^2}{2l}$

Podstawiamy wartości liczbowe:

$$F = \frac{5 \text{ kg} \cdot (85 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2 \cdot 0,8 \text{ m}} = 22\,578 \text{ N} = 22,58 \text{ kN}$$

Odpowiedź: Średnia siła działająca na pocisk w lufie wynosi 22,58 kN.

- Zgodnie z prawem zachowania pędu całkowity pęd układu pocisk–działo przed wystrzałem jest równy pędowi całkowitemu układu tych ciał po wystrzale: $\vec{p}_{0,p} + \vec{p}_{0,dz} = \vec{p}_{k,p} + \vec{p}_{k,dz}$. Początkowo działo i pocisk pozostawały w spoczynku, więc całkowity pęd początkowy układu wynosi zero: $0 = \vec{p}_{k,p} + \vec{p}_{k,dz}$, co jest równoważne wyrażeniu: $\vec{p}_{k,p} = -\vec{p}_{k,dz}$.



Wektory pędów $\vec{p}_{k,p}$ i $\vec{p}_{k,dz}$ rozkładamy na składowe wzdłuż osi x i osi y . Prawo zachowania pędu jest spełnione zarówno w kierunku osi x : $\vec{p}_{x,k,p} + \vec{p}_{x,k,dz} = 0$, jak i w kierunku osi y : $\vec{p}_{y,k,p} + \vec{p}_{y,k,dz} = 0$, co po uwzględnieniu wzorów na pęd daje układ równań:

$$\begin{cases} mv_x = MV_x & (1) \\ mv_y = MV_y & (2) \end{cases}$$

Z pierwszego równania otrzymujemy: $V_x = \frac{mv_p \cos \alpha}{M}$.

Po podstawieniu danych liczbowych: $V_x = \frac{5 \text{ kg} \cdot 85 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \cos 30^\circ}{300 \text{ kg}} = 1,23 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Ponieważ wynik jest dodatni, zwrot wektora $\vec{V}_x$ jest zgodny z przedstawionym na rysunku.

Odpowiedź: Wartość prędkości odrzutu falkonetu tuż po wystrzale to $1,23 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Wektor prędkości jest skierowany poziomo, a jego zwrot jest zgodny ze zwrotem osi x .

c) Po wystrzale na toczący się do tyłu falkonet działa siła oporu $\vec{F}_o$, która nadaje mu opóźnienie $\vec{a}$. Działo porusza się więc ruchem jednostajnie opóźnionym, a przebyta przez nie droga wyrażona jest wzorem:

$$s = \frac{v_0^2}{2a}$$

gdzie:

$$a = \frac{F_o}{M} = 0,2 \cdot g$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy:

$$s = \frac{(1,23 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2 \cdot 0,2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0,38 \text{ m}$$

Odpowiedź: Działo zostanie odrzucone na odległość 0,38 m.

■ Przykład 3.

Strumień wody poruszający się z prędkością $v = 60 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ uderza prostopadle w ścianę i spływa po niej. Gęstość wody wynosi $d = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, pole przekroju poprzecznego strumienia wody $S = 8 \text{ cm}^2$. Oblicz ciśnienie wywierane na ścianę przez ten strumień.

Rozwiązanie

Poruszająca się woda ma pewien pęd. Po dotarciu do ściany pęd wody znika. Rezultatem zmiany pędu w pewnym czasie jest siła wywierana na ścianę. Obliczmy zmianę pędu pewnej niewielkiej masy wody zawartej w „kawałku” strumienia o długości Δl . Objętość tego „kawałka” wynosi:

$$\Delta V = S \Delta l$$

a jego masa:

$$\Delta m = d \Delta V = d S \Delta l$$

Pęd tej masy wody jest równy $\Delta p = \Delta mv$. Obliczmy czas, w jakim ten „kawałek” strumienia wody w całości zderzył się ze ścianą. Jest to czas, który upłynie od momentu zetknięcia się czoła „kawałka” ze ścianą do chwili, gdy do ściany dobiegnie koniec „kawałka”. Ponieważ „kawałek” porusza się ruchem jednostajnym, to czas ten wynosi:

$$\Delta t = \frac{\Delta l}{v}$$

Do obliczenia ciśnienia wywieranego na ścianę przez strumień wykorzystamy uogólnioną drugą zasadę dynamiki Newtona:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

Podstawiamy za Δp i Δt wyrażenia wyprowadzone powyżej:

$$F = \frac{dSv\Delta l}{\frac{\Delta l}{v}} = dSv^2$$

Wyznaczoną w ten sposób siłę podstawiamy do wzoru na ciśnienie i mamy:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{dSv^2}{S} = dv^2$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$p = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 3600 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 3\,600\,000 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{\text{m}}{\text{m}^3} = 3,6 \text{ MPa}$$

Odpowiedź: Na ścianę wywierane jest ciśnienie 3,6 MPa.

■ Przykład 4.

Masa startowa wielostopniowej rakiety wynosi $m_r = 110 \text{ t}$. Pierwszy człon rakiety zawiera paliwo, którego masa stanowi 70% masy rakiety. Paliwo to zostaje zużyte w ciągu $\Delta t_1 = 110 \text{ s}$ pracy silnika. Prędkość gazów spalinowych wynosi $v_{g1} = 3,5 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Przyjmij $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

- Oblicz siłę ciągu rakiety i jej przyspieszenie w chwili startu.
- Oblicz średnie przyspieszenie rakiety w ciągu pierwszych $t_2 = 20 \text{ s}$ lotu przy założeniu, że w tym przedziale czasu przyspieszenie zmienia się liniowo. Jaką prędkość osiągnie rakietę po 20 s lotu?
- Oblicz prędkość gazów spalinowych wyrzucanych przez trzeci człon rakiety, jeśli siła ciągu wynosi $F_{c3} = 315 \text{ kN}$, a tempo spalania paliwa $\frac{\Delta m_3}{\Delta t_2} = 70 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$.

Rozwiązanie

- a) Korzystamy ze wzoru na siłę ciągu podczas pierwszego etapu lotu:

$$F_{c1} = v_{g1} \cdot \frac{\Delta m_1}{\Delta t_1}$$

Aby obliczyć tempo spalania paliwa musimy znać masę paliwa i czas jego spalania.

Czas spalania podano w treści zadania: $\Delta t = 110 \text{ s}$, a masa paliwa to 70% masy rakiety:

$$\Delta m_1 = 0,7m_r \rightarrow \Delta m_1 = 0,7 \cdot 110 \text{ t} = 77 \text{ t}$$

Prędkość spalania paliwa wynosi:

$$\frac{\Delta m_1}{\Delta t_1} = \frac{77\,000\text{ kg}}{110\text{ s}} = 700 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Obliczamy siłę ciągu:

$$F_{c1} = v_{g1} \cdot \frac{\Delta m_1}{\Delta t_1} = 3,5 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 700 \frac{\text{kg}}{\text{s}} = 2450 \cdot 10^3 \text{ N} = 2450 \text{ kN}$$

Teraz obliczamy wartość przyspieszenia rakiety względem Ziemi dla $t_0 = 0$. W chwili startu na raketę działa siła wypadkowa równa różnicy siły ciągu i siły grawitacji. Korzystamy z II zasady dynamiki Newtona i otrzymujemy wzór:

$$a_0 = \frac{F_w}{m_r} = \frac{F_{c1} - m_r g}{m_r} = \frac{F_{c1}}{m_r} - g$$

Wstawiamy wartości liczbowe

$$a_0 = \frac{2450 \cdot 10^3 \text{ N}}{110 \cdot 10^3 \text{ kg}} - 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 22,27 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 12,46 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Odpowiedź: W chwili startu siła ciągu rakiety wynosi $F_{c1} = 2450 \text{ kN}$, a jej przyspieszenie jest równe $a_0 = 12,46 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

- b)** Po czasie $t_2 = 20 \text{ s}$ siła ciągu rakiety pozostaje stała, maleje natomiast masa rakiety, ponieważ ubywa paliwa. Masę po czasie t_2 obliczymy, odejmując od masy rakiety zużyte paliwo w ciągu $t_2 = 20 \text{ s}$.

$$m_{t2} = m_r - \frac{\Delta m_1}{\Delta t_1} t_2$$

Stosujemy wzór na II zasadę dynamiki Newtona:

$$a_{t2} = \frac{F_w}{m_{t2}} = \frac{F_{c1} - m_{t2} g}{m_{t2}} = \frac{F_{c1}}{m_{t2}} - g$$

$$a_{t2} = \frac{F_{c1}}{m_r - \frac{\Delta m_1}{\Delta t_1} t_2} - g$$

Wstawiamy wartości liczbowe:

$$a_{t2} = \frac{2450 \cdot 10^3 \text{ N}}{110 \cdot 10^3 \text{ kg} - 700 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot 20 \text{ s}} - 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 15,71 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Gdy przyspieszenie rośnie liniowo, jego średnia wartość jest średnią arytmetyczną:

$$a_s = \frac{a_0 + a_{t2}}{2}$$

Po podstawieniu danych otrzymamy:

$$a_s = \frac{12,46 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 15,71 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} = 14,09 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Znamy średnie przyspieszenie, obliczamy więc prędkość rakiety:

$$v_{t2} = a_s t_2 = 14,09 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 20 \text{ s} = 281,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Odpowiedź: Średnie przyspieszenie rakiety w przedziale czasu $0 \text{ s} - 20 \text{ s}$ wynosi $14,09 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, a prędkość po 20 s ruchu to $v_{t2} = 281,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

- c) Korzystamy ze wzoru na siłę ciągu rakiety i po przekształceniu wyznaczamy prędkość gazów spalinowych:

$$v_{g3} = \frac{F_{c3}}{\frac{\Delta m_3}{\Delta t_3}}$$

$$v_{g3} = \frac{315\,000\text{ N}}{70\frac{\text{kg}}{\text{s}}} = 4,5 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

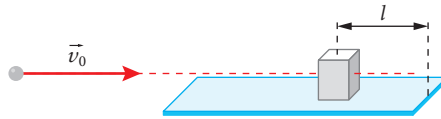
Odpowiedź: Prędkość gazów spalinowych wyrzucanych przez trzeci człon rakiety wynosi $v_{g3} = 4,5 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Pytania i zadania

- P1** ●● **5.5.1.** Żeglarz o masie $m_z = 75\text{ kg}$ wskoczył z prędkością $v_z = 3,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ z pomostu do nieruchomej łódki wzdłuż jej osi. Jaką prędkość uzyska łódka z żeglarzem po tym skoku, jeśli masa łódki to 20 kg ?
- P1** ●● **5.5.2.** Chłopiec o masie $m_1 = 50\text{ kg}$, jadący na deskorolce o masie $m_2 = 2,5\text{ kg}$ po poziomej powierzchni z prędkością $v_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, odrzucił poziomo do tyłu piłkę lekarską o masie $m_3 = 5\text{ kg}$, nadając jej prędkość $v_2 = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ względem ziemi. Oblicz prędkość chłopca i deskorolki po odrzuceniu piłki.
- P1** ●● **5.5.3.** Po zrzućeniu żagli i wyłączeniu silnika żaglówka o masie $m_z = 200\text{ kg}$ zbliżała się do pomostu z prędkością $v_z = 0,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Stojący na kei żeglarz o masie $m = 75\text{ kg}$ wskoczył na dziób łodzi wzdłuż osi łódki z prędkością $v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Czy po tym skoku łódka mogła się zatrzymać? Wykonaj odpowiednie obliczenia.
- **5.5.4.** Rybak o masie $m_r = 75\text{ kg}$ stanął na dziobie nieruchomej łodzi o masie $m_l = 125\text{ kg}$. O ile przesunie się łódź, gdy rybak przemieści się z dziobu w stronę rufy łodzi o $2,5\text{ m}$ względem brzegu? Pomiń opory ruchu.
- **5.5.5.** Dwaj łyżwiarze: Darek o ciężarze $F_D = 800\text{ N}$ i Konrad o ciężarze $F_K = 675\text{ N}$, stoją na lodowisku zwróceniami twarzami ku sobie. Darek rzuca piłkę o masie $m = 2,5\text{ kg}$ i nadaje jej w poziomie prędkość $v = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ względem ziemi.

 - a) Oblicz prędkość uzyskaną przez Darka po wyrzuceniu piłki oraz prędkość uzyskaną przez Konrada po złapaniu piłki. W obydwu przypadkach określ wartość i zwrot wektorów prędkości.
 - b) Jaką drogę przebył Darek, jeżeli zatrzymał się na lodzie pod wpływem siły tarcia o współczynnik $\mu = 0,03$?
- **5.5.6.** Oblicz prędkość, jaką nada piłce tenisowej silnie serwujący tenisista, uderzając rakietą z prędkością $v_r = 35 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ w „nieruchomą” piłkę tenisową (bez prędkości w kierunku ruchu rakiety). Załóż, że pęd rakiety po uderzeniu w piłkę stanowi $76,6\%$ początkowego pędu rakiety. Masa rakiety $m_r = 370\text{ g}$, a masa piłki $m_p = 57\text{ g}$.

- • **5.5.7.** W wesołym miasteczku można strzelać z wiatrówki do celu – pudełka ustawionego na specjalnym podeście w odległości $l = 45$ cm od jego brzegu. Jeżeli strzał jest celny, to śrut lecący poziomo z prędkością $v_0 = 120 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ przebija pudełko i wylatuje z niego z prędkością równą $v_k = \frac{1}{3} v_0$. Masa pocisku $m = 1$ g, masa pudełka $M = 40$ g, przyspieszenie ziemskie $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



- a) Oblicz prędkość pudełka po przejściu przez niego śrutu.
 - b) Na jaką odległość przemieści się pudełko, jeśli współczynnik tarcia między podestem a pudełkiem wynosi $\mu = 0,3$. Czy pudełko spadnie z podestu?
 - c) Przy jakim współczynniku tarcia pudełko pozostanie na podeście?
- **5.5.8.** Oblicz siłę, jaką piłka tenisowa o masie $m = 58$ g działa na raketę w czasie odbicia. Załóż, że czas kontaktu piłki z raketą wynosił $\Delta t = 0,005$ s, a zmiana prędkości piłki podczas odbicia była równa $\Delta v = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Jaką liczbę krążków o masie $M = 5$ kg należałoby nałożyć na gryf (drażek) hantli, aby ich ciężar był równy sile działającej na tę raketę tenisową?
- P2
- • **5.5.9.** Z działka polowego wystrzelono pocisk w kierunku poziomym z prędkością $v_p = 420 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz prędkość odrzutu działka oraz odległość, na jaką zostanie ono odrzucone, jeśli jego ruch jest jednostajnie opóźniony, a siła oporu jest równa 20% ciężaru. Masa działka $m_d = 584$ kg, a masa pocisku $m_p = 4$ kg.
- P2
- • **5.5.10.** Pocisk o masie $m = 9$ kg wystrzelony z armaty uzyskuje u wylotu z lufy prędkość $v_p = 680 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
 - a) Załóż, że pocisk porusza się w lufie ruchem jednostajnie przyspieszonym, i oblicz średnią siłę działającą na pocisk w lufie o długości $l = 3170$ mm.
 - b) Oblicz masę armaty, jeśli jej prędkość odrzutu po wystrzale wynosi $v_a = 5,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
- • **5.5.11.** W muszkietach (dawnej ręcznej broni palnej) używano kul ołowianych, które uzyskiwały prędkość dzięki gwałtownemu wzrostowi ciśnienia po spaleniu prochu w lufie. Po wystrzale strumień powstałego gazu wydostawał się przez otwór lufy. Przyjmij, że masa muszkietu $m_m = 7$ kg, masa kuli $m_k = 60$ g, a długość lufy $l = 160$ cm.
- P2
- a) Oblicz średnią siłę, z jaką gazy spalinowe działały na pocisk w lufie, jeżeli u wylotu kula uzyskiwała prędkość $v_k = 500 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
 - b) Oblicz pęd gazów wydostających się z lufy muszkietu tuż po wystrzale oraz udział procentowy pędu gazów spalinowych w pędzie całkowitym, jeżeli całkowity pęd kuli i gazów wynosi $p_c = 39,2 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
 - c) Oblicz prędkość odrzutu muszkietu. Wyjaśnij, w jaki sposób można zmniejszyć odrzut muszkietu w trakcie wystrzału.

● ● **5.5.12.** Pocisk karabinowy uzyskuje prędkość dzięki gwałtownemu wzrostowi ciśnienia po spalaniu prochu w lufie. Z karabinu o masie $m_k = 3,7 \text{ kg}$ i długości lufy $l = 110 \text{ cm}$ został wystrzelony pocisk o masie $m_p = 40,5 \text{ g}$ z prędkością $v_p = 400 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

P2

- Oblicz czas lotu pocisku w lufie przy założeniu, że porusza się on ruchem jednostajnie przyspieszonym.
- Oblicz prędkość odrzutu karabinu, jeśli wiadomo, że pęd gazów wydostających się z lufy tuż po wystrale to 20% całkowitego pędu karabinu.

● ● **5.5.13.** Z karabinu o masie $m_k = 4,5 \text{ kg}$ wystrzelono pocisk o masie $m_p = 40 \text{ g}$. Po gwałtownym spaleniu prochów w lufie uzyskał on prędkość $v_p = 470 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Prędkość odrzutu karabinu $v_0 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

P2

- Oblicz pęd gazów wydostających się z lufy.
- Oblicz impuls siły (zwany też popędem siły) uzyskiwany przez pocisk w lufie.

● ● **5.5.14.** Do czyszczenia różnych powierzchni stosuje się strumień wody pod wysokim ciśnieniem. Oblicz siłę wywieraną przez strumień wody oraz ciśnienie, gdy uderza on prostopadłe w ściankę i spływa po niej. Pole przekroju poprzecznego strumienia wody $S = 7,5 \text{ cm}^2$, wydajność strumienia wody, czyli stosunek pewnej objętości wody do czasu przepływu, wynosi $\frac{\Delta V}{\Delta t} = 1800 \frac{\text{dm}^3}{\text{min}}$. Gęstość wody $d = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

P3

● ● **5.5.15.** Strumień wody uderza prostopadłe w ścianę i spływając po niej, wywiera ciśnienie $p = 2,5 \text{ MPa}$. Oblicz prędkość wody w tym strumieniu. Gęstość wody $d = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

P3

● ● **5.5.16.** Piłka tenisowa o masie $m_p = 57 \text{ g}$ podczas lotu z prędkością $v_p = 36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ zderza się sprężysto ze ścianą. Kąt między wektorami prędkości przed zderzeniem i po zderzeniu $\alpha = 60^\circ$. Oblicz średnią siłę zderzenia piłeczki ze ścianą, jeżeli czas oddziaływania $t = 1,5 \text{ ms}$.

P3

● **5.5.17.** Rakieta o masie $m = 1000 \text{ t}$ wyrzuca gazy spalinowe z prędkością $u = 2000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ względem ziemi. Prędkość spalania paliwa wynosi $\frac{\Delta m}{\Delta t} = 7,5 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$. Oblicz siłę ciągu rakiety i jej przyspieszenie po minucie lotu.

P4

● **5.5.18.** W chwili startu z Ziemi rakiety Saturn V jej masa wynosi $m = 3\,038\,500 \text{ kg}$. Paliwo jest spalane przez silniki pierwszego stopnia rakiety ze stałą prędkością $\frac{\Delta m}{\Delta t} = 1,5 \cdot 10^4 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$. Oblicz minimalną prędkość, z jaką powinny być wyrzucane z dyszy gazy spalinowe, aby rakieta mogła oderwać się od Ziemi.

P4

● ● **5.5.19.** Rakieta w chwili startu ma masę $m = 100 \text{ t}$. Masa paliwa stanowi 80% całkowitej masy rakiety. Prędkość spalania paliwa wynosi $\frac{\Delta m}{\Delta t} = 8 \cdot 10^2 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$, gazy wyrzucane są z prędkością $u_g = 1,5 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz przyspieszenie rakiety w chwili startu i w momencie poprzedzającym wyczerpanie zapasu paliwa. Przyjmij $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

P4



5.6. Zderzenia niesprężyste i sprężyste

Podręcznik
rozd. 5.6

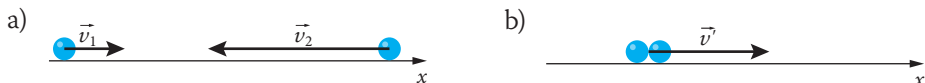
■ Przykład 1.

Dwie kule o jednakowych masach $m_1 = m_2 = 0,2 \text{ kg}$ zderzają się centralnie niesprężysto. Przed zderzeniem kulki zbliżały się do siebie z prędkościami o tym samym kierunku, przeciwnych zwrotach i wartościach odpowiednio: $v_{01} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i $v_{02} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

- Określ wartość, kierunek i zwrot prędkości kul po zderzeniu.
- Oblicz ilość ciepła wydzielonego podczas zderzenia.

Rozwiązanie

- Podczas zderzenia niesprężystego kule odkształcają się (zlepiają się) i po zderzeniu poruszają się razem ze wspólną prędkością. Przyjmijmy, że ruch w prawo jest zgodny ze zwrotem osi x .



Aby obliczyć tę prędkość stosujemy zasadę zachowania pędu: suma pędów przed zderzeniem jest równa sumie pędów po zderzeniu.

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$$

Pamiętajmy, że współrzędna pędu jest dodatnia, gdy wektor pędu jest zgodny z osią x , a ujemna, gdy wektor ten ma zwrot przeciwny do osi x . Zatem:

$$mv_1 - mv_2 = 2mv_{\text{wsp}}$$

Wyznaczamy prędkość po zderzeniu:

$$v_{\text{wsp}} = \frac{mv_1 - mv_2}{2m} = \frac{v_1 - v_2}{2}$$

Podstawiamy wartości liczbowe:

$$v_{\text{wsp}} = \frac{2 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2}$$

$$v_{\text{wsp}} = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Założyliśmy, że kule po zderzeniu będą się poruszały zgodnie ze zwrotem osi x (patrz rys. b). W rozwiązaniu otrzymaliśmy wynik ujemny $v_{\text{wsp}} = -0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, co oznacza, że kule po złączeniu poruszają się w stronę przeciwną do zwrotu osi x .

Odpowiedź: Kule po zderzeniu poruszają się z prędkością o wartości $0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Zwrot prędkości jest przeciwny do zwrotu przyjętej osi x , czyli przeciwny do zwrotu wektora prędkości pierwszej kuli przed zderzeniem.

- b) W zderzeniu niesprężystym energia kinetyczna nie jest zachowana, ponieważ część energii kinetycznej kul sprzed zderzenia zamienia się w energię wewnętrzną kul. Możemy zapisać następujące równanie:

$$E_{k1} + E_{k2} = E_{k\text{wsp}} + \Delta E_w$$

Zmiana energii wewnętrznej jest równa ciepłu wydzielonemu podczas zderzenia kul:

$$\Delta E_w = Q$$

$$Q = E_{k1} + E_{k2} - E_{k\text{wsp}}$$

$$Q = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} - \frac{2mv_{\text{wsp}}^2}{2}$$

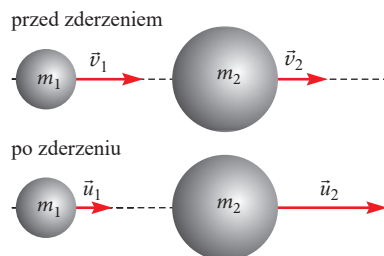
Wstawiamy wartości liczbowe:

$$Q = \frac{0,2 \text{ kg} \cdot (2 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2} + \frac{0,2 \text{ kg} \cdot (6 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2} - \frac{2 \cdot 0,2 \text{ kg} \cdot (2 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2} = 3,2 \text{ J}$$

Odpowiedź: Podczas zderzenia niesprężystego wydziel się 3,2 J energii w postaci ciepła.

■ Przykład 2.

Kula o masie $m_1 = 100 \text{ g}$ porusza się po linii prostej z prędkością $v_1 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i zderza się centralnie sprężysto z drugą kulą, o masie $m_2 = 300 \text{ g}$, której prędkość wynosi $v_2 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz prędkości obu kul po zderzeniu.



Rozwiązanie

Z zasady zachowania pędu wiemy, że wektorowa suma pędów przed zderzeniem jest równa wektorowej sumie pędów po zderzeniu. W zderzeniach sprężystych energia kinetyczna jest zachowana. Wszystkie wektory prędkości w sytuacji opisanej w zadaniu mają ten sam kierunek, możemy więc zapisać:

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,5 m_1 v_1^2 + 0,5 m_2 v_2^2 = 0,5 m_1 u_1^2 + 0,5 m_2 u_2^2 & (2) \end{cases}$$

Otrzymujemy w ten sposób układ równań: liniowego (1) i kwadratowego (2). Aby ułatwić sobie jego rozwiązanie, umieścimy w obu równaniach wyrazy z masą m_1 po jednej stronie równań, a wyrazy z masą m_2 po drugiej stronie równań; drugie równanie pomnożymy przez 2.

$$\begin{cases} m_1 v_1 - m_1 u_1 = m_2 u_2 - m_2 v_2 \\ m_1 v_1^2 - m_1 u_1^2 = m_2 u_2^2 - m_2 v_2^2 \end{cases}$$

Po obu stronach równań wyciągamy przed nawias masy:

$$\begin{cases} m_1 (v_1 - u_1) = m_2 (u_2 - v_2) & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 (v_1^2 - u_1^2) = m_2 (u_2^2 - v_2^2) & (4) \end{cases}$$

Podzielimy stronami równanie (4) przez równanie (3). Skracając masy oraz wykorzystując wzór skróconego mnożenia $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, otrzymujemy równanie:

$$v_1 + u_1 = v_2 + u_2 \quad (5)$$

Dzięki temu możemy rozwiązać układ równań liniowych (5) i (3):

$$\begin{cases} v_1 + u_1 = v_2 + u_2 & (6) \\ m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 - v_2) & (7) \end{cases}$$

Niewiadomymi w tych równaniach są prędkości po zderzeniu, u_1 i u_2 . Wyznamy u_2 z równania (6) i podstawimy do równania (7):

$$\begin{cases} u_2 = u_1 + v_1 - v_2 \\ m_1 v_1 - m_1 u_1 = m_2 u_1 + m_2 v_1 - 2m_2 v_2 \end{cases}$$

Po przekształceniach mamy:

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Podobnie prędkość drugiej kuli po zderzeniu:

$$u_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$u_1 = \frac{(0,1 \text{ kg} - 0,3 \text{ kg}) \cdot 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 2 \cdot 0,3 \text{ kg} \cdot 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,1 \text{ kg} + 0,3 \text{ kg}} = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

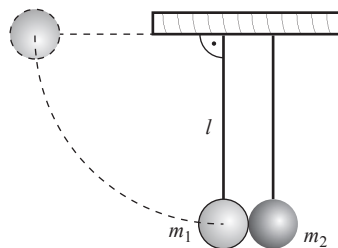
$$u_2 = \frac{(0,3 \text{ kg} - 0,1 \text{ kg}) \cdot 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 2 \cdot 0,1 \text{ kg} \cdot 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,1 \text{ kg} + 0,3 \text{ kg}} = 4,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Odpowiedź: Prędkości kul po zderzeniu: $u_1 = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $u_2 = 4,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

■ Przykład 3.

Dwie metalowe kulki o masach $m_1 = 0,02 \text{ kg}$ i $m_2 = 0,08 \text{ kg}$ wiszą na dwóch równoległych niciach o długości $l = 0,2 \text{ m}$ i stykają się ze sobą. Mniejszą kulkę odchylono o kąt 90° od początkowego położenia i puszczono swobodnie. Przyspieszenie ziemskie $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

- Określ zwroty prędkości i wartość prędkości kulek tuż po zderzeniu, zakładając, że zderzenie jest sprężyste.
- Kulki zostały oblepione plasteliną. Mniejsza kulka została odchylona od pionu o kąt 90° i puszczona swobodnie. Określ zwrot i wartość prędkości kulek tuż po zderzeniu, przy założeniu, że zderzenie jest niesprężyste. Pomiń masę plasteliny.
- Oblicz, jaka część energii początkowej kulek zamieni się w ciepło w wyniku zderzenia niesprężystego.



Rozwiązanie

Korzystamy ze wzorów na prędkości w zderzeniach sprężystych i niesprężystych przedstawionych w najważniejszych wiadomościach na s. 168 i 169.

- a) Aby skorzystać ze wzoru na prędkość kul po zderzeniu, musimy najpierw obliczyć prędkości początkowe kul. Większa kulka w chwili zderzenia spoczywa, czyli jej prędkość początkowa wynosi zero. Prędkość początkową mniejszej kulki obliczamy z zasady zachowania energii:

$$mgh = \frac{1}{2} mv_{01}^2$$

skąd po podstawieniu $h = l$ wyznaczamy v_{01} :

$$v_{01} = \sqrt{2gl} = \sqrt{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,2 \text{ m}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ze wzorów na prędkości ciał po zderzeniach, obliczamy tzw. prędkość wspólną $v_{\text{wsp}} = 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a następnie prędkości kulek po zderzeniu sprężystym:

$$\text{pierwsza kulka} \quad v_1 = 2v_{\text{wsp}} - v_{01} \Rightarrow v_1 = -1,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{druga kulka} \quad v_2 = 2v_{\text{wsp}} \Rightarrow v_2 = 0,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Jeżeli przyjmiemy, że pierwsza kulka poruszała się zgodnie ze zwrotem osi x przed zderzeniem, to znak minus przy v_1 oznacza, że kulka zmieniła zwrot prędkości na przeciwny. Druga kulka porusza się zgodnie z osią x .

Odpowiedź: Po zderzeniu pierwsza kulka ma prędkość $1,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i zwrot przeciwny do osi x , a druga kulka ma prędkość $0,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i zwrot zgodny z osią x .

- b) Przy zderzeniach niesprężystych kulki poruszają się razem z prędkością (wyznaczoną w punkcie a) o wartości: $v_{\text{wsp}} = 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i zwrocie zgodnym z osią x .
- c) Strata energii w wyniku zderzenia niesprężystego to różnica energii kinetycznych początkowej i końcowej:

$$W = E_{\text{kp}} - E_{\text{kk}}$$

Jeżeli chcemy wiedzieć, ile to stanowi energii początkowej E_p , obliczamy:

$$\frac{W}{E_p} = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_{01}^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{\text{wsp}}^2}{\frac{1}{2} m_1 v_{01}^2}$$

Po podstawieniu danych liczbowych:

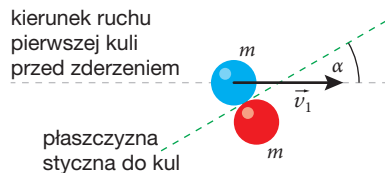
$$\frac{W}{E_p} = \frac{0,32 \text{ J}}{0,4 \text{ J}} = 0,8$$

Możliwe jest również doprowadzenie do postaci: $\frac{W}{E_p} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 0,8$.

Odpowiedź: Podczas zderzenia niesprężystego w ciepło zamieni się 80% energii początkowej.

■ Przykład 4.

Kula o masie m poruszająca się z prędkością $v_1 = 4 \frac{m}{s}$ uderza w nieruchomą kulę o takiej samej masie m . Zderzenie jest doskonale sprężyste, przy czym wektor prędkości kuli pierwszej tworzy z płaszczyzną styczną do obu kul w miejscu zderzenia kąt $\alpha = 30^\circ$. Oblicz prędkości tych kul po zderzeniu oraz kąty między wektorami tych prędkości $\vec{v}'_1$ i $\vec{v}'_2$ a kierunkiem wektora prędkości początkowej $\vec{v}_1$.



Rozwiązanie

Rozkładamy wektor prędkości $\vec{v}_1$ na składowe: równoległą do płaszczyzny stycznej $\vec{v}_{1s}$ i prostopadłą do tej płaszczyzny $\vec{v}_{1p}$.

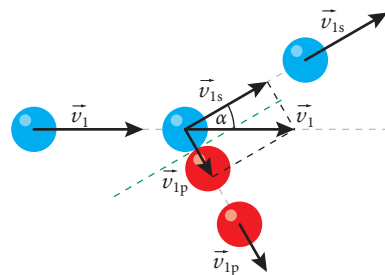
$$v_{1s} = v_1 \cdot \cos \alpha$$

$$v_{1p} = v_1 \cdot \sin \alpha$$

Obliczamy wartości tych składowych:

$$v_{1p} = 4 \frac{m}{s} \cdot \sin 30^\circ = 2 \frac{m}{s}$$

$$v_{1s} = 4 \frac{m}{s} \cdot \cos 30^\circ \approx 3,5 \frac{m}{s}$$



Podczas zderzenia na obie kule działają siły prostopadłe do płaszczyzny styczności kul i zmieniają prędkości obu kul w tym kierunku.

Obliczamy prędkości kul z zależności:

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_{01} + 2m_2 v_{02}}{m_1 + m_2}$$

$$v'_2 = \frac{(m_1 - m_2)v_{02} + 2m_1 v_{01}}{m_1 + m_2}$$

Wstawiamy prędkości kuli dla kierunku prostopadłego do płaszczyzny styczności:

$$v'_{1p} = \frac{(m_1 - m_2)v_{01p} + 2m_2 v_{02p}}{m_1 + m_2}$$

$$v'_{2p} = \frac{(m_1 - m_2)v_{02p} + 2m_1 v_{01p}}{m_1 + m_2}$$

Zwróćmy uwagę, że masy są jednakowe $m_1 = m_2$ oraz początkowa prędkość drugiej kuli wynosiła 0, zatem:

$$v'_{1p} = \frac{0 \cdot v_{01p} + 2m_2 \cdot 0}{m_1 + m_2} = 0$$

$$v'_{2p} = \frac{0 \cdot v_{02p} + 2m_1 v_{02p}}{2m_1} = v_{01p}$$

Po zderzeniu kula 1 nie porusza się w kierunku prostopadłym do płaszczyzny styczności (jej prędkość $v'_{1p} = 0$), a kula 2 porusza się z taką prędkością, jaką w tym kierunku miała kula 1 przed zderzeniem $\vec{v}'_{2p} = \vec{v}_{1p}$. Można powiedzieć, że w kierunku prostopadłym do płaszczyzny styczności kula 1 przekazała swój pęd kuli 2.

Z kolei składowa równoległa do płaszczyzny styczności prędkości kuli 1 nie ulega zmianie (nie działały w tym kierunku siły), czyli prędkość kuli pierwszej po zderzeniu jest równa składowej jej prędkości równoległej do płaszczyzny styczności przed zderzeniem $\vec{v}'_1 = \vec{v}_{1s}$ (innej składowej prędkości ta kula po zderzeniu nie ma).

Kula druga, spoczywająca przed zderzeniem, porusza się tylko w kierunku prostopadłym do płaszczyzny styczności kul: $\vec{v}'_2 = \vec{v}_{1p}$.

Skoro dla kuli pierwszej wektor $\vec{v}'_1$ tworzy z wektorem $\vec{v}_1$ kąt $\alpha = 30^\circ$, a wektor prędkości kuli drugiej $\vec{v}'_2$ tworzy z wektorem $\vec{v}_1$ kąt prosty, to wektor $\vec{v}'_2$ oraz $\vec{v}_1$ tworzą kąt $\beta = 60^\circ$.

Odpowiedź: Kule po zderzeniu sprężystym skośnym poruszają się z prędkościami odpowiednio: $\vec{v}'_1 = 3,5 \frac{m}{s}$, $\vec{v}'_2 = 2 \frac{m}{s}$. Wektory tych prędkości tworzą z kierunkiem prędkości kuli pierwszej przed zderzeniem kąty 30° i 60° . Kule po zderzeniu poruszają się w kierunkach wzajemnie prostopadłych.

■ Przykład 5.

Kulka o masie $m_1 = m$, której pęd ma wartość $p_1 = 90 \text{ kg} \cdot \frac{m}{s}$, porusza się po linii prostej i zderza sprężysto ze spoczywającą kulką o masie $m_2 = 2m$. Zderzenie jest niecentralne.

Po zderzeniu kulka o masie m_1 zmienia swój kierunek ruchu o 90° , a kulka o masie m_2 zaczyna poruszać się pod pewnym kątem względem pierwotnego kierunku ruchu pierwszej kulki.

- Oblicz wartość pędu pierwszej kulki po zderzeniu.
- Oblicz wartość pędu drugiej kulki po zderzeniu.
- Wyznacz miarę kąta, pod jakim porusza się druga kulka po zderzeniu.

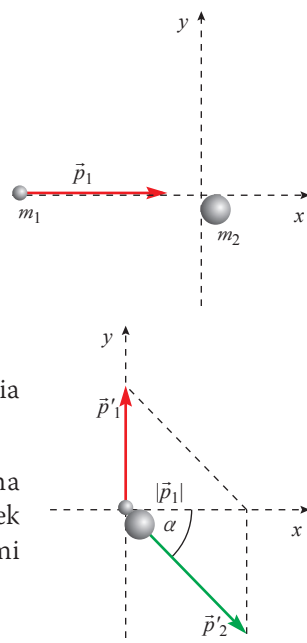
Rozwiązanie

- $\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1$ – pęd pierwszej kulki przed zderzeniem
 $\vec{p}'_1 = m_1 \vec{v}'_1$ – pęd pierwszej kulki po zderzeniu
 $\vec{p}'_2 = m_2 \vec{v}'_2$ – pęd drugiej kulki po zderzeniu

W zderzeniu sprężystym spełniona jest zasada zachowania pędu i energii kinetycznej.

Zasadę zachowania pędu przedstawiamy graficznie na rysunku. Zwróćmy uwagę, że pierwsza kulka zmienia kierunek o 90° . Możemy zatem zapisać związek między wartościami pędów za pomocą twierdzenia Pitagorasa:

$$p'^2_2 = p_1 + p'^2_1$$



Energię kinetyczną wyrazimy w zależności od pędu i masy ciała:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m^2 v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$$

Zapisujemy zasadę zachowania energii kinetycznej:

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2}$$

Do równania wstawiamy masy $m_1 = m$ i $m_2 = 2m$:

$$\frac{p_1^2}{2m} = \frac{p_1'^2}{2m} + \frac{p_2'^2}{4m} \Rightarrow p_1^2 = p_1'^2 + \frac{1}{2}p_2'^2$$

Rozwiązujemy układ równań (1) i (2) w celu wyznaczenia pędów kulek po zderzeniu.

$$(1) \quad p_2'^2 = p_1^2 + p_1'^2$$

$$(2) \quad p_1^2 = p_1'^2 + \frac{1}{2}p_2'^2$$

Wyznaczamy pęd pierwszej kulki po zderzeniu:

$$2p_1^2 = 2p_1'^2 + p_1^2 + p_1'^2$$

$$p_1'^2 = \frac{1}{3} \cdot p_1^2 \rightarrow p_1' = \frac{\sqrt{3}}{3} p_1$$

Następnie pęd drugiej kulki po zderzeniu:

$$p_2'^2 = \frac{4}{3} \cdot p_1^2 \rightarrow p_2' = \frac{2\sqrt{3}}{3} p_1$$

Podstawiamy dane liczbowe i otrzymujemy:

$$p_1' = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 90 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} = 51,9 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

$$p_2' = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot 90 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} = 103,8 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

Odpowiedź: Wartości pędów po zderzeniu wynoszą: pierwszej kulki $51,9 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$ i drugiej kulki $103,8 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$.

b) Kąt, pod jakim porusza się kulka druga po zderzeniu, obliczamy z funkcji trygonometrycznej (patrz rysunek na poprzedniej stronie):

$$\sin \alpha = \frac{p_1'}{p_2'} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} p_1}{\frac{2\sqrt{3}}{3} p_1} = \frac{1}{2}$$

Odpowiedź: Druga kulka po zderzeniu porusza się pod kątem 30° do pierwotnego ruchu pierwszej kulki.

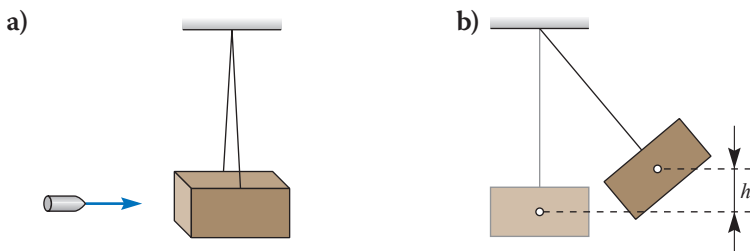
Pytania i zadania

- P1** • **5.6.1.** Ulepiona przez dzieci kula śnieżna o masie $m_1 = 3$ kg zsunęła się z oblodzonego wzniesienia ze stałą prędkością $v_{01} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i zderzyła się z nieruchomą śnieżną kulą o masie $m_2 = 5$ kg. Oblicz ilość energii cieplnej, jaka wydzielona się podczas zderzenia, jeżeli zderzenie będziemy uważać za centralne i niesprężyste.
- P1** • **5.6.2.** Dwie kulki poruszają się jedna za drugą i zderzają centralnie niesprężysto. Masy i prędkości kulek przed zderzeniem wynoszą odpowiednio: $m_1 = 0,05$ kg i $m_2 = 0,03$ kg, $v_{01} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i $v_{02} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz prędkość kulek po zderzeniu oraz ciepło wydzielone podczas zderzenia.
- P1** • • **5.6.3.** Dwie kule poruszają się wzdłuż jednej prostej naprzeciwko siebie. Prędkości tych kul wynoszą odpowiednio: $v_{01} = 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i $v_{02} = 0,45 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Dochodzi do zderzenia niesprężystego kul, po którym poruszają się one z prędkością o zwrocie zgodnym ze zwrotem prędkości kuli pierwszej i wartości $v_{\text{wsp}} = 0,15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz stosunek mas tych kul.
- P1** • • **5.6.4.** Wózek o masie m zderza się centralnie niesprężysto z drugim nieruchomym wózkiem o tej samej masie. Oblicz, jaka część początkowej energii kinetycznej wózka zamienia się na ciepło.
- P1** • • **5.6.5.** W zderzeniu czołowym uczestniczą samochody: ciężarowy o masie $m_1 = 14\,000$ kg i osobowy o masie $m_2 = 1000$ kg, poruszające się naprzeciw siebie z jednakowymi prędkościami o wartościach $54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Załóż, że zderzenie jest niesprężyste.
- a) Oblicz prędkość pojazdów po zderzeniu. Podaj zwrot tej prędkości.
- b) Oblicz, jaka część początkowej energii kinetycznej samochodów zamienia się w energię, której kosztem samochody ulegają odkształceniu.
- P2** • • **5.6.6.** Kulka o masie $2m$ poruszająca się z prędkością $v_{01} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ uderza w kulkę o masie m poruszającą się w tę samą stronę z prędkością $v_{02} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Wykonaj odpowiednie obliczenia i sprawdź, czy kulki po zderzeniu doskonale sprężystym będą poruszać się z prędkościami: $v_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i $v_2 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



- P2** • **5.6.7.** Stalowa kula o masie $m_1 = 3$ kg porusza się po linii prostej z prędkością $v_1 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i zderza się centralnie sprężysto z nieruchomą stalową kulą o masie $m_2 = 1$ kg. Oblicz prędkości obu kul po zderzeniu.

- **5.6.8.** Kulka o masie $m_1 = 150$ g porusza się po linii prostej z prędkością $v_1 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i zderza się centralnie sprężyście z nieruchomą kulką o masie $m_2 = 850$ g. Oblicz prędkości obu kul po zderzeniu.
- P2**
- • **5.6.9.** Kula o masie m_1 poruszająca się z prędkością v_{01} zderza się centralnie sprężyście z nieruchomą kulą o masie m_2 . Oblicz prędkości tych kul po zderzeniu w następujących przypadkach:
- P2**
- a) masy kul są takie same $m_1 = m_2 = m$,
 b) masa kuli pierwszej $m_1 = 7m$, a drugiej $m_2 = m$,
 c) masa kuli pierwszej $m_1 = m$, a drugiej $m_2 = 9m$.
- • **5.6.10.** Kula o masie m zderza się centralnie sprężyście ze spoczywającą kulą o masie $2m$. Oblicz, jaką część energii kinetycznej przekazuje pierwsza kula drugiej w wyniku zderzenia. Prędkość pierwszej kuli przed zderzeniem $v_{01} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
- P2**
- • • **5.6.11.** Trzy doskonale sprężyste kule o masach $m_1 = 50$ g, $m_2 = 40$ g i $m_3 = 60$ g wiszą na nitkach tak, że ich środki leżą na jednej poziomej prostej, a kule stykają się ze sobą. Po odchyleniu i puszczeniu pierwsza kula uderza w drugą z prędkością $v_{01} = 0,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a potem druga kula uderza w trzecią. Ile wyniosła prędkość trzeciej kuli po zderzeniu?
- P2**
- • • **5.6.12.** Rekordowa prędkość nadana piłeczce pingpongowej podczas odbicia to $v = 170 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.
- P2**
- a) Oblicz prędkość rakiety w momencie uderzenia. Wynik podaj w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Załóż, że zderzenie piłeczki z raketką jest idealnie sprężyste, a energia kinetyczna rakiety przed uderzeniem (zderzeniem z piłeczką) jest równa sumie energii kinetycznych rakiety i piłeczki po zderzeniu. Stosunek masy piłeczki do masy rakiety $m : M = 1 : 100$.
 b) Inny rekord pobili dwaj angielscy tenisiści stołowi, odbijając między sobą piłeczkę $n = 170$ razy w ciągu minuty. Oblicz średnią prędkość piłeczki w czasie bicia rekordu, przyjmując długość stołu pingpongowego $l = 2,74$ m jako jednorazową drogę piłeczki.
- • • **5.6.13.** Wahadło balistyczne służy do pomiaru prędkości pocisków wystrzeliwanych z broni palnej. Zbudowane jest z klocka zawieszonego na linkach, w którym grzęzną wystrzelwane pociski (rys. a). Gdy pocisk trafia w klocek, wahadło wraz z tkwiącym w nim pociskiem wychyla się z położenia równowagi (rys. b). Oblicz początkową prędkość pocisku, jeżeli po trafieniu w klocek układ wychylił się z położenia równowagi na wysokość $h = 8,45$ cm. Masy klocka i pocisku wynoszą odpowiednio: $M = 3,2$ kg i $m = 8$ g. Przyjmij $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.
- P3**



- • • **5.6.14.** Wahadło balistyczne o długości $l = 1,6$ m (liczonej od środka masy do punktu zawieszenia) wychylono z położenia równowagi o kąt $\alpha = 60^\circ$ i puszczono swobodnie. W chwili przechodzenia przez położenie równowagi w wahadło trafił pocisk o masie $m = 8$ g poruszający się z prędkością $v = 500 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i w nim ugrzązł. Oblicz masę, jaką powinno mieć wahadło, aby układ zatrzymał się natychmiast w położeniu równowagi. Przyjmij $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

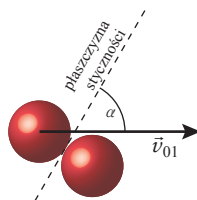
P3

- • • **5.6.15.** Dwie metalowe kulki zawieszono na cienkich równoległych niciach o długości $l = 0,2$ m tak, że stykały się ze sobą. Mniejszą z nich odchylono do poziomego zawieszenia (90°) i puszczono swobodnie. Po zderzeniu każda z kulek wzniosła się na taką samą wysokość. Oblicz prędkość mniejszej kulki tuż przed zderzeniem oraz jej masę, jeżeli masa większej kulki $m_2 = 0,06$ kg. Załóż, że zderzenie było sprężyste. Skorzystaj ze wzorów na prędkości kul po zderzeniu sprężystym.

P3

- • • **5.6.16.** Kula bilardowa uderza z prędkością $v_{01} = 0,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ w drugą bilę spoczywającą na stole (masy kul są takie same). Zderzenie jest sprężyste niecentralne. Wektor prędkości tworzy z płaszczyzną styczności tych kul kąt $\alpha = 60^\circ$. Oblicz wartości prędkości i podaj kierunki ruchów kul po zderzeniu.

P4



- • • **5.6.17.** Kula o masie $m = 450$ g i pędzie $p_1 = m_1 \vec{v}_1$, zderza się ze spoczywającą kulą o nieznanej masie m_x .

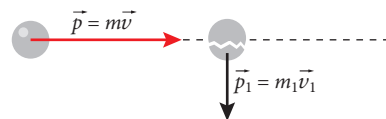
P5

W wyniku zderzenia sprężystego niecentralnego pierwsza kula zmienia swój kierunek ruchu o 90° i uzyskuje pęd o wartości $p'_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} p_1$. Z kolei kulka druga, uprzednio spoczywająca, uzyskuje w wyniku zderzenia pewien pęd p'_2 , którego wektor tworzy kąt α z pierwotnym kierunkiem ruchu pierwszej kulki.

- a) Oblicz, pod jakim kątem porusza się druga kulka po zderzeniu?
b) Oblicz masę drugiej kulki.

- • • **5.6.18.** Pocisk o masie $m = 2$ kg lecący poziomo z prędkością $v = 60 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ rozrywa się na dwie części o masach $m_1 = 0,5$ kg i $m_2 = 1,5$ kg. Prędkość pierwszej części spadającej pionowo tuż po wybuchu wynosi $v_1 = 180 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

P5



Naszkicuj tor ruchu drugiej części pocisku. Oblicz prędkość drugiego kawałka pocisku tuż po rozerwaniu oraz kąt, jaki tworzy wektor prędkości v_2 z kierunkiem poziomym.

- • **5.6.19.** Dwa samochody zderzyły się na skrzyżowaniu. Samochód o masie $m_1 = 1000$ kg, jadący z północy na południe, miał prędkość $v_1 = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a samochód o masie $m_2 = 1600$ kg zmierzający w kierunku zachodnim, jechał z prędkością $v_2 = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Przyjmij, że zderzenie było całkowicie niesprężyste, a samochody w wyniku zderzenia połączyły się ze sobą. Oblicz prędkość połączonych samochodów tuż po zderzeniu oraz wyznacz kierunek tej prędkości względem kierunku północ-południe.

P5

Klasyka fizyki B. Mendel i J. Mendel

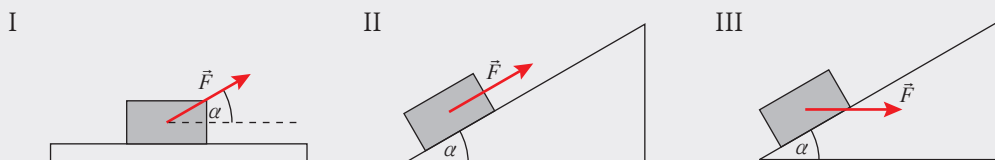
5.1. Ciało o masie $m = 2 \text{ kg}$ podniesiono na wysokość $h = 1 \text{ m}$, wykonując przy tym pracę $W = 25 \text{ J}$. Z jakim przyspieszeniem a podniesiono to ciało?

- a) $2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ b) $2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ c) $2,7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ d) $4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

5.2. Jaką pracę wykonały siły ciężkości działające na swobodnie spadającą kulę o masie $m = 1 \text{ kg}$ w drugiej sekundzie jej lotu?

- a) 100 J b) 122 J c) 144 J d) 150 J

5.3. Na rysunkach poniżej przedstawiono trzy przypadki przesuwania klocka po podłożu bez tarcia. Za każdym razem działano siłą o jednakowej wartości F , przesuwać kłosek na taką samą odległość s . W którym wypadku wykonano największą pracę?



- a) W każdym przypadku wykonano taką samą pracę.
b) W pierwszym przypadku wykonano największą pracę.
c) W drugim przypadku wykonano największą pracę.
d) W trzecim przypadku wykonano największą pracę.

5.4. W kopalni odkrywkowej wagonik jest wciągany ruchem jednostajnym na odległość $l = 25 \text{ m}$ po nachylonym stoku góry o wysokości $h = 5 \text{ m}$. Całkowita masa wagonika z rudą wynosi $m = 250 \text{ kg}$, a współczynnik tarcia jego kół o szynę $f = 0,05$. Jaką pracę musi wykonać wyciągarka, aby wagonik dotarł do szczytu górki?

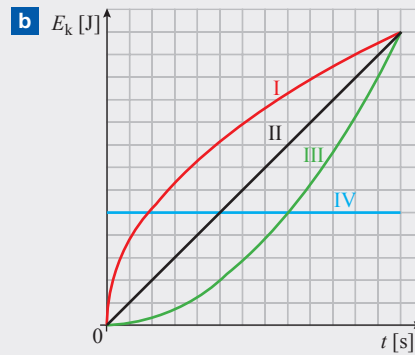
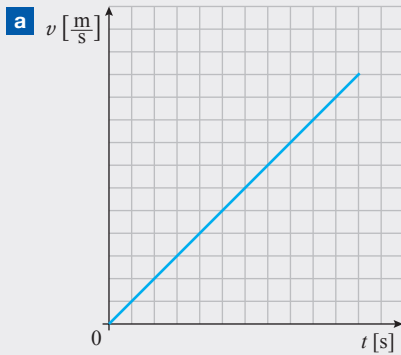
5.5. Z wysokości $h = 10 \text{ m}$ upuszczono na ziemię (prędkość początkowa była równa zero) przedmiot o masie $m = 2 \text{ kg}$. W momencie uderzenia o ziemię prędkość przedmiotu wynosiła $v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Jaka praca została wykonana przy pokonywaniu sił oporu powietrza?

- a) 0 J b) około 100 J c) około 150 J d) około 200 J

5.6. Kulę rzucono pionowo do góry z prędkością początkową $v_0 = 9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Na jakiej wysokości h energia kinetyczna kulki będzie równa jej energii potencjalnej? Opory powietrza można pominąć.

5.7. Kulka metalowa upuszczona z wysokości H uderza w poziomo rozpiętą na ramie gazetę i przebija ją, tracąc przy tym połowę swojej prędkości. Jaka jest najmniejsza wysokość h , z której upuszczona kulka przebije gazetę?

5.8. Na rysunku a) przedstawiono wykres zależności prędkości samochodu od czasu. Który z wykresów zależności energii kinetycznej od czasu na rysunku b) przedstawia energię kinetyczną tego samochodu?



a) I

b) II

c) III

d) IV

5.9. Na ciężarek o masie $m = 2,5 \text{ kg}$, będący w spoczynku, zaczęła działać siła $F = 1 \text{ N}$. Oblicz energię kinetyczną ciężarka po czasie $t = 2 \text{ s}$.

5.10. Silnik elektrowozu jadącego z prędkością $v = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ma moc $P = 750 \text{ kW}$. Jaka jest siła ciągu elektrowozu, jeżeli $k = 0,2$ mocy silnika ulega zamianie na ciepło?

5.11. Na jeziorze na łódce o długości $l = 4 \text{ m}$ i masie $M = 125 \text{ kg}$ stoi wędkarz o masie $m = 75 \text{ kg}$. W pewnym momencie wędkarz przechodzi z jednego końca łódki na drugi. O ile przesunie się łódka względem wody?

5.12. Cztery bilardowe kule leżą w jednakowych odległościach od siebie. Piąta kula bilardowa uderza centralnie wzdłuż prostej, na której leżą cztery pozostałe, w skrajną kulę z prędkością $v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Jaką prędkość będzie miała ostatnia kula po serii zderzeń kolejnych kul?

a) $0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

b) $2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

c) $7,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

d) $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

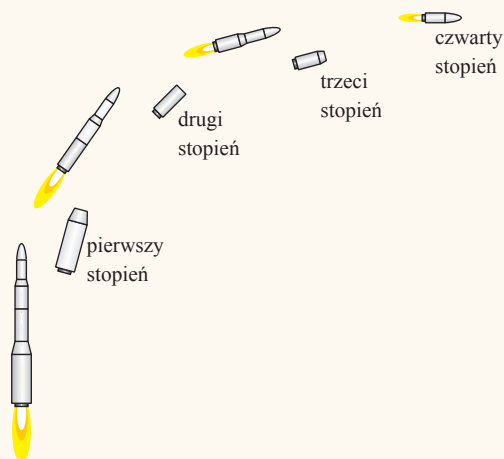
5.13. Dwie kule o masach $m_1 = 2 \text{ kg}$ i $m_2 = 4 \text{ kg}$ toczą się naprzeciwko siebie z prędkościami $v_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i $v_2 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a następnie zderzają centralnie i niesprężysto. Oblicz różnicę całkowitej energii kinetycznej kul przed zderzeniem i po nim.

5.14. W czasie wbijania pali bijak o masie $m_1 = 300 \text{ kg}$, spadając swobodnie z wysokości $h = 4 \text{ m}$, uderza w pal o masie $m_2 = 200 \text{ kg}$ i wbija go na głębokość $x = 4 \text{ cm}$. Jakie są średnie opory ruchu występujące podczas zagłębiania się pala, jeżeli można przyjąć, że zderzenie bijaka z palem jest niesprężyste?

Zadania maturalne

■ Przykład. Rakieta Vega

Europejska rakieta Vega może wynieść na niską orbitę Ziemi (od 200 km do 2000 km nad Ziemią) ładunek o masie 1,3 t. Vega jest rakieta 4-stopniową o masie startowej 137 t. Pierwsze trzy stopnie napędzane są silnikami na paliwo stałe, służą do wyniesienia rakiety na orbitę i są po kolei odrzucane. Ostatni stopień (człon) jest napędzany silnikiem na paliwo ciekłe i służy do umieszczania satelitów na docelowych orbitach. Rakieta Vega 13 lutego 2012 roku umieściła na orbicie polskiego satelitę PW-Sat. Trajektoria lotu została przedstawiona na rysunku obok.



Rozwiązując zadanie, korzystaj z danych podanych w tabeli.

Dane techniczne rakiety Vega dla startu z 13 lutego 2012 roku

Człony rakiety	Masa paliwa [t]	Czas pracy silnika [s]		Wysokość, na której człon zostaje odrzucony [km]
I P80	88	110		61
II Zefiro 23	23,9	87		127
III Zefiro 9	10,1	128		182
IV AVUM	0,55	pierwszy zapłon	171	260
		drugi zapłon	243	1448
Ładunek	1,3 t			

P.1. Oblicz, jaki procent całkowitej masy rakiety w chwili startu stanowiło paliwo.

Informacja do zadań P.2.–P.5.

Wykres przedstawia zależność przyspieszenia rakiety względem ziemi od czasu w ciągu 110 pierwszych sekund lotu. Zakładamy, że na raketę działa tylko siła ciągu oraz siła grawitacji.

Siłę ciągu określa wzór:

$$F_c = u \frac{\Delta m}{\Delta t},$$

gdzie:

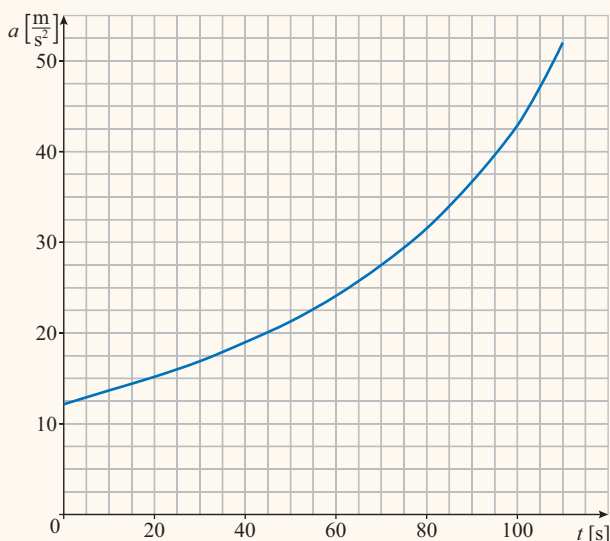
u – prędkość wyrzucania gazów spalinowych,

$\frac{\Delta m}{\Delta t}$ – prędkość spalania paliwa,

Δm – masa wyrzuconego paliwa,

Δt – czas pracy silnika.

Czas [s]	Przyspieszenie [$\frac{m}{s^2}$]
0	12,2
10	13,6
20	15,1
30	16,9
40	18,9
50	21,3
60	24,2
70	27,5
80	31,6
90	36,7
100	43,0
110	52,0



P.2. Na podstawie wykresu lub tabeli oblicz średnie przyspieszenie rakiety w ciągu pierwszych 30 s lotu. Załóż, że przyspieszenie w tym przedziale zmienia się liniowo.

P.3. Oblicz wartość prędkości rakiety po 30 s lotu. Wyjaśnij, dlaczego wyliczona wartość jest większa od rzeczywistej, która dla $t = 30$ s wyniosła $332 \frac{m}{s}$ przy osiągniętej wysokości 4,7 km.

P.4. Wykaż, że siła ciągu rakiety wynosi $F_c = 3040$ kN. Dopuszczalny błąd wynikający z zastosowania przybliżeń to 30 kN.

P.5. Z jaką prędkością gazy spalinowe wyrzucane są przez I człon rakiety?

P.6. Po drugim odpaleniu silnika IV człon rakiety znalazł się na orbicie kołowej i przygotowywał się do umieszczenia satelitów na orbitach docelowych. Oblicz wartość prędkości liniowej i okres obrotu wokół Ziemi satelity na orbicie kołowej na wysokości 1448 km. Wynik podaj w $\frac{m}{s}$ i minutach.

Masę i promień Ziemi odczytaj z tablic fizycznych.

Rozwiązanie

P.1. Początkowa masa paliwa jest sumą mas paliwa we wszystkich członach rakiety. Korzystając z danych w tabeli, otrzymujemy:

$$m_p = 88 \text{ t} + 23,9 \text{ t} + 10,1 \text{ t} + 0,55 \text{ t} = 122,55 \text{ t}$$

Całkowita masa rakiety została podana w treści zadania: $m_0 = 137 \text{ t}$.

Obliczamy, ile procent całkowitej masy rakiety w chwili startu stanowiło paliwo:

$$\frac{m_p}{m_0} = 0,89$$

Odpowiedź: Paliwo stanowiło około 90% masy rakiety w chwili startu.

P.2. Aby obliczyć przyspieszenie średnie rakiety w ciągu pierwszych 30 s, odczytujemy z tabeli (lub wykresu) wartości przyspieszeń dla skrajnych wartości przedziału czasu, czyli dla:

$$t_1 = 0 \text{ s przyspieszenie } a_1 = 12,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$t_2 = 30 \text{ s przyspieszenie } a_2 = 16,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Przyspieszenie średnie, przy założeniu, że w przedziale czasu zmienia się liniowo, wynosi:

$$a_{\text{sr}} = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

Po podstawieniu danych: $a_{\text{sr}} = 14,55 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Odpowiedź: Przyspieszenie średnie rakiety w czasie pierwszych 30 s lotu wynosi $14,55 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

P.3. Lot rakiety w ciągu pierwszych 30 s traktujemy jako ruch jednostajnie przyspieszony z przyspieszeniem obliczonym w zadaniu P.2. Korzystamy więc ze wzoru:

$$v = a_{\text{sr}} t$$

skąd po podstawieniu danych otrzymujemy: $v = 436,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Odpowiedź: Prędkość rakiety po 30 s lotu wyniosła $436,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i jest większa od prędkości rzeczywistej z powodu nieuwzględnienia sił oporu powietrza.

P.4. Siła ciągu rakiety musi pokonać siłę grawitacji oraz nadać rakiecie przyspieszenie, dlatego możemy skorzystać ze wzoru:

$$F_c = (a + g)m$$

gdzie: m – masa rakiety, a – przyspieszenie rakiety.

Korzystając z wykresu i danych w tabeli, obliczamy kilka wartości siły ciągu:

$$\text{z wykresu: dla } t = 0 \text{ s} \quad F_c = (12,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) \cdot 137 \text{ t} = 3056 \text{ kN},$$

$$\text{dla } t = 110 \text{ s} \quad F_c = (52,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) \cdot (137 \text{ t} - 88 \text{ t}) = 3053 \text{ kN},$$

$$\text{z tabeli: dla } t = 0 \text{ s} \quad F_c = (12,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) \cdot 137 \text{ t} = 3015 \text{ kN},$$

$$\text{dla } t = 110 \text{ s} \quad F_c = (52 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) \cdot (137 \text{ t} - 88 \text{ t}) = 3029 \text{ kN}.$$

Odpowiedź: Wszystkie otrzymane wartości siły ciągu mieszczą się w granicach dopuszczalnego błędu.

P.5. Korzystamy z podanego wzoru na siłę ciągu rakiety: $F_c = u \frac{\Delta m}{\Delta t}$, wyznaczając z niego szukaną prędkość wyrzucania gazów spalinowych:

$$u = \frac{F_c}{\frac{\Delta m}{\Delta t}}$$

gdzie: $\Delta t = 110 \text{ s}$ – czas pracy pierwszego członu rakiety odczytany z tabeli, F_c – siła ciągu rakiety wyznaczona w zadaniu P.4. (skorzystamy z wartości siły otrzymanej z danych w tabeli), $\Delta m = 88 \text{ t}$ – masa wyrzuconego paliwa; jest równa masie całego paliwa w tym członie.

Podstawiamy dane i otrzymujemy: $u = 3,79 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Odpowiedź: Prędkość wyrzucania gazów spalinowych przez I człon rakiety wynosi $3,79 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

P.6. Aby wyznaczyć liniową prędkość satelity, korzystamy z tego, że na orbicie kołowej siła grawitacji i siła dośrodkowa są równe:

$$\frac{m_s v^2}{R_Z + h} = G \frac{m_s M_Z}{(R_Z + h)^2}$$

Stąd wyznaczamy prędkość satelity:

$$v = \sqrt{\frac{GM_Z}{R_Z + h}}$$

Podstawiamy dane:

$$v = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{6,38 \cdot 10^6 \text{ m} + 1,448 \cdot 10^6 \text{ m}}} = 7130 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ponieważ satelita porusza się po orbicie kołowej o promieniu $R_Z + h$, jego okres obrotu wyznaczamy z zależności:

$$v = \frac{2\pi(R_Z + h)}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi(R_Z + h)}{v}$$

Po podstawieniu danych: $T = 6800 \text{ s} = 113 \text{ min}$.

Odpowiedź: Prędkość satelity wynosi $7130 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a jego okres obrotu to 113 min.

Pytania i zadania

Zadanie 1. Żuraw

Największy obecnie produkowany żuraw wieżowy (potocznie nazywany dźwigiem) może podnieść ładunek o maksymalnej masie 80 t na wysokość 100 m w czasie 1 min i 40 s ruchem jednostajnym. Podczas podnoszenia materiałów budowlanych ze stałą prędkością, na wysokości 40 m nad powierzchnią ziemi, z palety zsunęła się cegła o masie 4 kg. Przyspieszenie ziemskie $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



1.1. Oblicz czas spadania cegły. Pomiń opory ruchu.

1.2. Ile razy prędkość spadającej cegły znajdującej się na wysokości 10 m nad ziemią będzie większa od jej prędkości na wysokości 20 m nad ziemią? Pomiń opory ruchu.

1.3. Oblicz wartość energii kinetycznej i potencjalnej cegły po upływie 2 s swobodnego spadku, jeżeli cegła spadła z nieruchomego dźwigu z wysokości 40 m nad ziemią. Pomiń opory ruchu.

1.4. Dla jakiej wartości siły oporu ruchu przyspieszenie cegły wynosi $8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$?

1.5. Cegła spadła z nieruchomego dźwigu z wysokości 40 m i uderzyła w ziemię z prędkością $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz pracę wykonaną przez siły oporu ruchu.

1.6. Jaką maksymalną pracę może wykonać żuraw wieżowy, podnosząc materiały budowlane ze stałą prędkością, jeśli pominiemy opory ruchu?

Zadanie 2. Karabin

Z karabinu ustawionego pod kątem 45° do poziomu wystrzelono pocisk o masie 20 g z prędkością początkową $200 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. W najwyższym punkcie trajektorii pocisk rozpadł się na dwa kawałki o jednakowych masach. Jeden zaczął poruszać się pionowo w górę, wznosząc się na wysokość 100 m. Drugi fragment pocisku poruszał się jak ciało rzucone ukośnie. Wartości funkcji trygonometrycznych odczytaj z tablic.

- 2.1.** Jaką energię miał pocisk w najwyższym punkcie toru tuż przed rozpadem?
- 2.2.** Wykaż, że prędkość fragmentu pocisku, który poruszał się rzutem ukośnym, tuż po rozpadzie wynosiła około $290 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
- 2.3.** Oblicz tangens kąta, pod jakim fragment pocisku został odchyłony od poziomu.
- 2.4.** Ile razy różnią się czasy spadania fragmentów pocisku na ziemię?
- 2.5.** O ile różnią się energie fragmentów pocisku na wysokości 100 m nad ziemią?

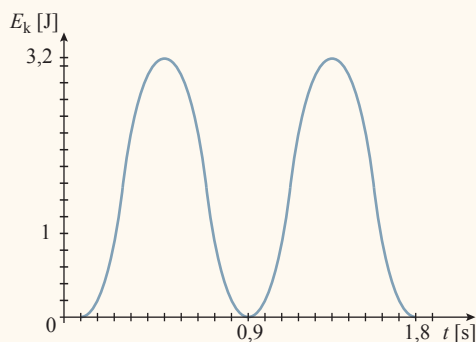
Zadanie 3. Klik-klak

Klik-klak to zabawka zręcznościowa popularna w latach 70. XX wieku, złożona z dwóch kulek zawieszonych na sznurku. Załóżmy, że kulki o takim samym promieniu i różnych masach – odpowiednio 400 g i 800 g – są zawieszone na dwóch równoległych sznurkach o długości 0,8 m każdy, a wisząc swobodnie, kulki stykają się. Przyjmij $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

- 3.1.** Kulka o masie 400 g zostaje odchyłona od pionu o kąt 90° . Jaką prędkość będą miały kulki przed zderzeniem doskonale niesprężystym i po nim?
- 3.2.** Kulka o masie 800 g zostaje odchyłona od pionu o kąt 90° . Jaką prędkość będą miały kulki przed i po zderzeniu doskonale sprężystym?
- 3.3.** W nieruchomo wiszącej kulce o masie 800 g grzeźnię pocisk o masie 10 g. Jaka powinna być prędkość początkowa pocisku, aby kulka została odchyłona od pionu o kąt 45° ?

Informacja do zadań 3.4 i 3.5. Na wykresie przedstawiono zależność energii kinetycznej wahającej się kulki o masie 400 g od czasu. Pominięto opory ruchu.

- 3.4.** Na jakiej wysokości nad położeniem równowagi znajdowała się kulka w chwili $t = 0,9$ s ruchu?
- 3.5.** Oblicz maksymalną prędkość kulki.



Zadanie 4. Sprężyny połączone

Sprężyny można łączyć ze sobą równolegle (rys. a) lub szeregowo (rys. b). W przypadku połączenia równoległego dwóch sprężyn o współczynnikach sprężystości k_1 i k_2 działająca na nie siła jest sumą sił działających na poszczególne sprężyny, a ich wydłużenia są jednakowe. Dla szeregowego połączenia sprężyn działające na nie siły są, przy pominięciu ciężaru sprężyn, jednakowe, natomiast ich łączne wydłużenie jest sumą wydłużeń obu sprężyn, x_1 i x_2 .

Wyznaczono wydłużenia dwóch jednakowych sprężyn w zależności od masy ciężarka zawieszonego na ich końcu w przypadku, gdy sprężyny były połączone równolegle i szeregowo. W tabeli podano wyniki. Niepewność pomiarowa wydłużenia $\Delta x = 2 \text{ mm}$, a niepewność pomiaru masy $\Delta m = 10 \text{ g}$.

$m \text{ [g]}$	50	100	150	200	250
$x \text{ [cm]}$	2,4	5	7,1	9,6	12,1
$x_1 + x_2 \text{ [cm]}$	9,5	18,8	29	37,8	48

4.1. Sporządź wykres zależności wydłużenia sprężyn od masy zawieszonego ciężarka. Zaznacz niepewności pomiarowe i opisz krzywe właściwym rodzajem połączenia.

4.2. Wyznacz współczynniki sprężystości obu sprężyn.

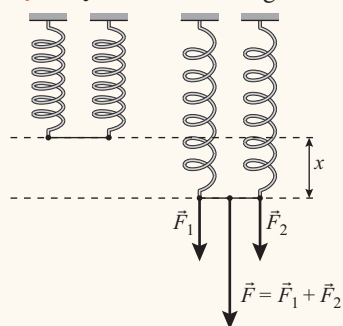
4.3. Oblicz, ile razy praca wykonana przez siły sprężystości podczas rozciągania w przypadku sprężyn połączonych szeregowo różni się od pracy wykonanej w przypadku sprężyn połączonych równolegle.

4.4. O ile różni się wydłużenie sprężyn połączonych szeregowo i równolegle w przypadku obciążenia ich 1 kg cukru?

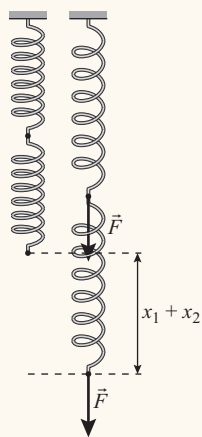
4.5. Zamiast sprężyn wykorzystano dwie gumy o jednakowej długości i współczynnikach sprężystości równych $50 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ i $70 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Na gumach równoległych do siebie zawieszono ciężarek, który spowodował ich wydłużenie o 5 cm. Jaka była masa tego ciężarka?

4.6. Sprężyny wchodzi w skład zderzaków wagonów, które są przeznaczone do łagodzenia sił nacisku i uderzeń oraz utrzymywania sprężgniętych wagonów w odpowiedniej odległości. Jeśli wagon kolejowy o masie 20 t, poruszający się ze stałą prędkością $0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, uderza w drugi wagon wypełniony węglem, poruszający się w jego stronę, o łącznej masie 40 t, to skróceniu ulega każda z czterech sprężyn amortyzatorów, a wagony zatrzymują się. Jaka jest prędkość wagonu z węglem? Oblicz, o ile ulega zmianie długość sprężyny każdego zderzaka. Przyjmij, że można pominąć opory ruchu, a współczynniki sprężystości wszystkich sprężyn zderzaków wynoszą $150\,000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

a) Połączenie równoległe



b) Połączenie szeregowe





6. Bryła sztywna

Najważniejsze informacje

Bryła sztywna to model ciała fizycznego, w którym odległości między poszczególnymi punktami nie zmieniają się mimo działania sił zewnętrznych.

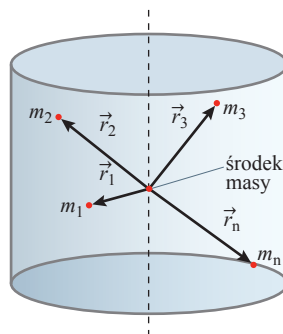
Bryła sztywna może się poruszać:

- ▶ tylko ruchem postępowym,
- ▶ tylko ruchem obrotowym wokół ustalonej osi,
- ▶ jednocześnie ruchem postępowym i ruchem obrotowym wokół ustalonej osi.

■ Środek masy

Środek masy jest to punkt charakteryzujący rozmieszczenie masy w bryle sztywnej (układzie ciał). Jeśli bryła (układ ciał) zostanie podzielona na małe części, to suma iloczynów mas m_i tych części i wektorów ich położenia $\vec{r}_i$ względem środka masy będzie równa zero:

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = 0$$



Środek ciężkości to punkt przyłożenia siły ciężkości do bryły.

Jeżeli rozmiary bryły są małe w porównaniu z Ziemią i znajduje się ona przy jej powierzchni, to możemy przyjąć, że środek ciężkości tej bryły pokrywa się z jej środkiem masy.

Jeżeli jednorodna bryła ma środek symetrii, to znajduje się on w tym samym punkcie co środek masy.

Aby poruszyć środek masy układu ciał lub zmienić jego prędkość, potrzebna jest siła zewnętrzna.

■ Moment siły

W ruchu obrotowym bryły sztywnej istotną rolę odgrywa nie tylko siła $\vec{F}$, lecz także odległość punktu przyłożenia tej siły od osi obrotu. Moment siły to iloczyn wektorowy wektorów $\vec{r}$ i $\vec{F}$:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

którego wartość wynosi:

$$M = rF \sin \alpha$$

gdzie:

r – odległość punktu przyłożenia siły od osi obrotu,

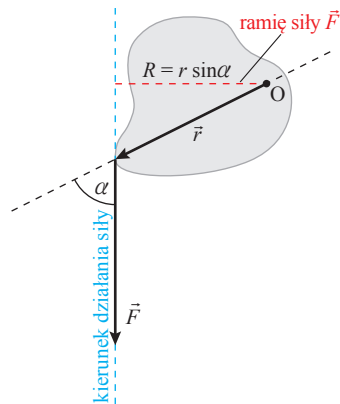
F – wartość przyłożonej siły,

α – kąt między wektorami $\vec{r}$ i $\vec{F}$ (iloczyn wektorowy, patrz dodatek matematyczny s. 301).

Kierunek wektora momentu siły leży w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{r}$ i $\vec{F}$. Zwrot tego wektora można wyznaczyć na dwa sposoby – stosując regułę prawej dłoni lub **regułę śruby prawoskrętnej** (patrz dodatek matematyczny s. 301). Gdy odniesiemy je do rysunku obok, stwierdzimy, że oś obrotu przechodzi przez punkt O i jest prostopadła do płaszczyzny kartki.

Jeżeli przez $R = r \sin \alpha$ oznaczymy ramię siły, to wartość momentu siły:

$$M = RF$$



■ Pierwsza zasada dynamiki dla ruchu obrotowego

Jeżeli siła będąca wypadkową kilku sił, działających na bryłę sztywną, wynosi zero:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0$$

a suma momentów tych sił względem ustalonej osi obrotu również wynosi zero:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = 0$$

to bryła:

- pozostaje w spoczynku,
- porusza się wyłącznie ruchem obrotowym ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega} = \text{const}$,
- porusza się wyłącznie ruchem postępowym ze stałą prędkością $\vec{v} = \text{const}$,
- porusza się jednocześnie ruchem jednostajnym obrotowym i jednostajnym postępowym.

■ Środek ciężkości

Przyciąganie grawitacyjne oddziałuje na każdą cząsteczkę ciała, ale skutek tego oddziaływania jest taki, jakby cała siła wynikająca z oddziaływania grawitacyjnego na ciało była przyłożona do jednego punktu – tzw. **środka ciężkości**.

■ Energia potencjalna

Energia potencjalna bryły sztywnej zależy od położenia środka ciężkości względem poziomu odniesienia bryły i wyraża się wzorem:

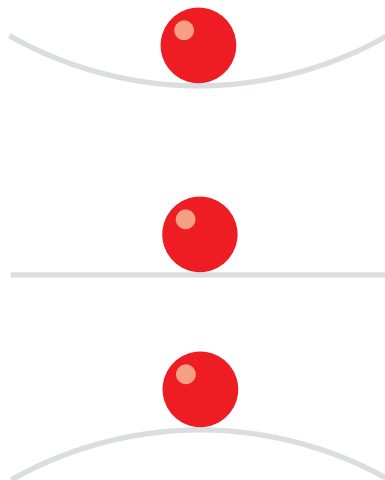
$$E_p = mgh$$

Rodzaje równowagi bryły sztywnej

Równowaga trwała występuje wtedy, gdy środek ciężkości bryły zajmuje najniższe możliwe położenie, a energia potencjalna ma najmniejszą wartość. Ciało wychylone z położenia równowagi samoczynnie do niego powraca.

Równowaga obojętna ma miejsce wtedy, gdy po wychyleniu bryły z położenia równowagi środek ciężkości bryły znajduje się na stałej wysokości – energia potencjalna bryły ma stałą wartość.

Równowaga nietrwała (chwiejna) występuje wtedy, gdy środek ciężkości bryły zajmuje najwyższe możliwe położenie. Bryła po wychyleniu z położenia równowagi znajduje nowe położenie równowagi, w którym środek ciężkości znajduje się niżej, a energia potencjalna bryły ma mniejszą wartość niż w położeniu początkowym.



Moment bezwładności

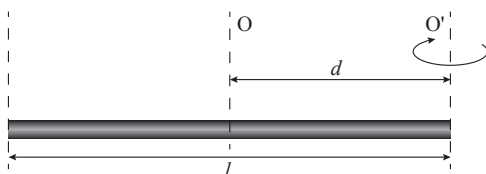
Jeśli bryłę sztywną (układ ciał) podzielimy na małe części, to sumę iloczynów mas m_i tych części i kwadratów ich odległości R_i od osi obrotu nazywamy **momentem bezwładności**:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2$$

Wzory pozwalające obliczyć momenty bezwładności wybranych brył zamieszczono w tabeli 4. na s. 305.

Twierdzenie Steinera

Jeśli znany jest moment bezwładności I_0 względem osi przechodzącej przez środek masy ciała (na rysunku oś O), to możemy wyznaczyć moment bezwładności I' ciała względem osi obrotu O' równoległej do osi przechodzącej przez środek masy ciała.



W tym celu stosuje się **twz. wzór Steinera**:

$$I' = I_0 + md^2$$

gdzie d – odległość osi obrotu O' równoległej do osi obrotu O, od osi obrotu O przechodzącej przez środek masy ciała.

■ Energia kinetyczna

Energia kinetyczna bryły sztywnej to suma energii kinetycznych poszczególnych punktów materialnych tej bryły:

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}$$

Po uwzględnieniu, że $v_i = r_i \omega$ otrzymamy:

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

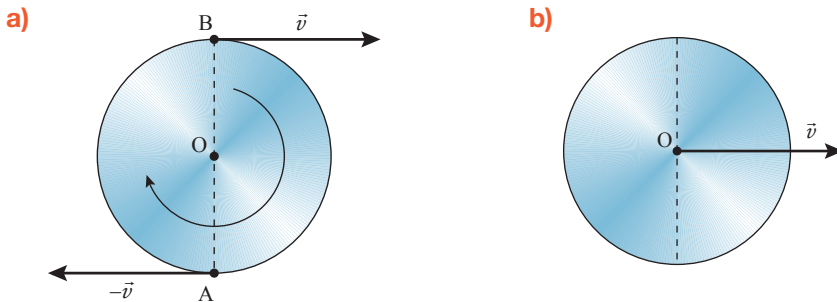
Suma iloczynów mas i kwadratów odległości tych mas od osi obrotu to moment bezwładności bryły sztywnej:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

Energię kinetyczną ruchu obrotowego bryły sztywnej wyraża wzór:

$$E_{ko} = \frac{I \omega^2}{2}$$

Energia całkowita toczącej się bryły sztywnej jest sumą energii kinetycznej jej ruchu obrotowego względem środka masy (rys. a) i energii kinetycznej ruchu postępowego jej środka masy (rys. b):



$$E_{cał} = \frac{I \omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$$

■ Druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego

Jeżeli na bryłę sztywną działa wypadkowy moment siły różny od zera:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \vec{M}$$

to bryła ta porusza się ruchem obrotowym zmiennym z przyspieszeniem kątowym $\vec{\varepsilon}$, proporcjonalnym do wypadkowego momentu siły:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I}$$

gdzie I jest momentem bezwładności tej bryły względem jej osi obrotu.

■ Moment pędu

Moment pędu punktu materialnego o masie m jest równy iloczynowi wektorowemu wektora położenia $\vec{r}$ i wektora pędu $\vec{p}$ tego punktu materialnego:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Wartość wektora momentu pędu wynosi:

$$l = rp \sin \alpha = rmv \sin \alpha$$

gdzie: v – prędkość liniowa, α – kąt między wektorem położenia a wektorem pędu, r – odległość punktu materialnego od osi obrotu.

Moment pędu bryły sztywnej to suma momentów pędów poszczególnych punktów materialnych tej bryły:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i$$

Wartość momentu pędu bryły sztywnej:

$$L = \sum_{i=1}^n l_i = \sum_{i=1}^n m_i v_i R_i = \omega \sum_{i=1}^n m_i R_i^2$$

gdzie: ω – prędkość kątowa bryły oraz $v_i = \omega R_i$.

Ponieważ moment bezwładności bryły $I = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2$, otrzymujemy:

$$L = I\omega$$

Gdy uwzględnimy moment pędu bryły sztywnej, możemy zapisać **drugą zasadę dynamiki ruchu obrotowego w postaci ogólnej**:

Jeżeli w pewnym przedziale czasu na bryłę sztywną działa niezrównoważony moment siły, to powoduje on zmianę momentu pędu tej bryły:

$$\vec{M} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}$$

■ Prawo zachowania momentu pędu

► dla bryły sztywnej

Jeżeli wypadkowy moment siły działający na bryłę sztywną wynosi zero, to moment pędu tej bryły pozostaje stały.

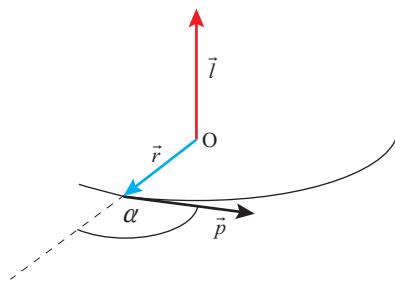
$$\vec{M} = 0, \text{ czyli } \Delta \vec{L} = 0. \text{ Stąd } \vec{L} = \text{const}$$

► dla brył sztywnych tworzących układ

Jeżeli moment sił zewnętrznych działających na układ ciał względem osi obrotu jest równy zero, to całkowity pęd układu nie ulega zmianie:

$$\vec{L}_0 = \vec{L}_k$$

gdzie: $\vec{L}_0$ – wypadkowy początkowy moment pędu, $\vec{L}_k$ – wypadkowy końcowy moment pędu.



6.1. Ruch postępowy i obrotowy bryły sztywnej. Środek masy

Podręcznik
rozdz. 6.1

■ Przykład 1.

Bęben pralki automatycznej po uruchomieniu funkcji wirowania w czasie $\Delta t = 3$ s osiąga 600 obrotów na minutę. Oblicz przyspieszenie kątowe bębna i przyspieszenie liniowe prania, które przyległo do powierzchni bębna, jeżeli jego średnica to $d = 45$ cm.

Rozwiązanie

Korzystamy z definicji przyspieszenia kąowego:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Początkowa prędkość kąowa bębna to $\omega_0 = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, a po upływie czasu jego prędkość kąowa wynosi $\omega = 2\pi f$, gdzie $f = 600 \frac{\text{obr}}{\text{min}} = 10$ Hz.

Możemy zatem zapisać:

$$\omega = \frac{2\pi f}{\Delta t}$$

Podstawiamy dane liczbowe:

$$\varepsilon = \frac{2\pi \cdot 10 \text{ Hz}}{3 \text{ s}} = 20,9 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Aby obliczyć przyspieszenie liniowe dla wirowanego prania znajdującego się w odległości $r = \frac{d}{2} = 0,225$ m od osi obrotu, bębna korzystamy ze wzoru:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega r}{\Delta t} = \varepsilon r$$

Zatem:

$$a = \varepsilon \frac{d}{2}$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy:

$$a = 20,9 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot 0,225 \text{ m} = 4,7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Odpowiedź: Po uruchomieniu funkcji wirowania bęben pralki ma przyspieszenie kąowe $20,9 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$, a wirowane pranie przylegające do ścianek bębna – przyspieszenie liniowe $4,7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

■ Przykład 2.

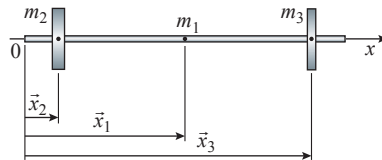
Sztanga olimpijska to gryf, czyli stalowy drążek o długości $l = 2,2$ m i masie $m_1 = 20$ kg, oraz obciążniki. Na gryf nałożono dwa różne obciążniki o masach $m_2 = 25$ kg i $m_3 = 20$ kg, których środki masy znajdują się w odległości $d = 10$ cm od końców drążka. Określ położenie środka masy sztangi.



Rozwiązanie

Zanim określimy środek masy sztangi, musimy określić środki masy jej poszczególnych elementów.

Środki masy wszystkich mas tworzących sztangę leżą wzdłuż osi x równoległej do podłoża, której punkt zero przyjęliśmy tak jak na rysunku.



Położenie środka masy układu ciał obliczamy ze wzoru:

$$\vec{r}_s = \frac{1}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n)$$

gdzie: $m_1, m_2, \dots, m_n$ – masy poszczególnych ciał, $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ – wektory położenia mas.

W naszym zadaniu układ składa się z trzech ciał: gryfu i dwóch obciążników. Z powyższego wzoru obliczamy odległość środka masy od lewego końca sztangi:

$$x_s = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} (m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)$$

gdzie: $x_1 = \frac{1}{2}l = 1,1$ m, $x_2 = d = 0,1$ m i $x_3 = l - d = 2,1$ m określają odpowiednio położenie środków mas m_1, m_2 i m_3 .

Po podstawieniu danych liczbowych:

$$x_s = \frac{1}{20 \text{ kg} + 25 \text{ kg} + 20 \text{ kg}} (20 \text{ kg} \cdot 1,1 \text{ m} + 25 \text{ kg} \cdot 0,1 \text{ m} + 20 \text{ kg} \cdot 2,1 \text{ m})$$

$$x_s \approx 1,023 \text{ m}$$

Odpowiedź: Odległość środka masy od lewego końca sztangi to 1,023 m.

■ Przykład 3.

Trzy jednorodne kule o masach $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 4$ kg, $m_3 = 4$ kg są rozmieszczone w taki sposób, że współrzędne ich środków wynoszą odpowiednio $K_1 = (2 \text{ m}, 3 \text{ m})$, $K_2 = (2 \text{ m}, 1 \text{ m})$, $K_3 = (4 \text{ m}, 1 \text{ m})$. Oblicz współrzędne wspólnego środka masy wszystkich kul.

Rozwiązanie

Położenie środka masy układu kul ustalimy, gdy wyznaczymy jego współrzędne: x_{SM} i y_{SM} .

Wartość x_{SM} obliczamy ze wzoru:

$$x_{SM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy:

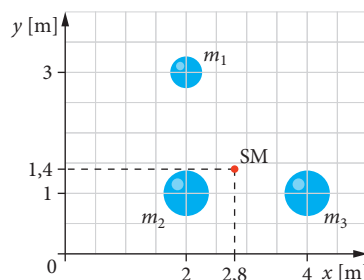
$$x_{SM} = \frac{2 \text{ kg} \cdot 2 \text{ m} + 4 \text{ kg} \cdot 2 \text{ m} + 4 \text{ kg} \cdot 4 \text{ m}}{2 \text{ kg} + 4 \text{ kg} + 4 \text{ kg}} = 2,8 \text{ m}$$

Wartość y_{SM} obliczamy ze wzoru:

$$y_{SM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy:

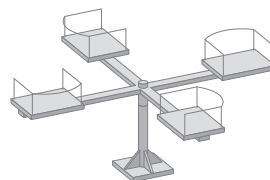
$$y_{SM} = \frac{2 \text{ kg} \cdot 3 \text{ m} + 4 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m} + 4 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m}}{2 \text{ kg} + 4 \text{ kg} + 4 \text{ kg}} = 1,4 \text{ m}$$



Odpowiedź: Środek masy układu trzech kul znajduje się w punkcie o współrzędnych $SM = (2,8 \text{ m}; 1,4 \text{ m})$.

Pytania i zadania

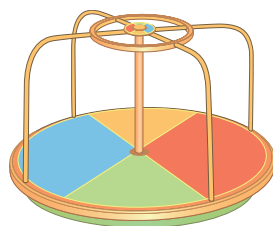
- P2** 6.1.1. Po uruchomieniu maszyny rolniczej jej koło zamachowe o promieniu $r = 80 \text{ cm}$ w czasie $\Delta t = 4 \text{ s}$ obracało się ze stałym przyspieszeniem kątowym $\epsilon = 15 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$. Oblicz przyspieszenie liniowe pasa transmisyjnego stykającego się z kołem zamachowym oraz częstotliwość, z jaką obracało się koło po czterech sekundach?
- P2** 6.1.2. Koła roweru mają średnicę $d = 71 \text{ cm}$. Gdy rowerzysta zjeżdża z góry w czasie $\Delta t = 8 \text{ s}$, jego prędkość wzrasta od $v_1 = 12 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ do $v_2 = 27 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Oblicz przyspieszenie kątowe kół w tym czasie.
- P2** 6.1.3. Gdy dziecko przez $\Delta t = 20 \text{ s}$ popycha jedno z ramion karuzeli takiej jak na rysunku koniec jej ramienia porusza się z przyspieszeniem liniowym $a = 0,18 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. W tym czasie prędkość kątowa jej obracających się ramion wzrasta o $\Delta\omega = 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Oblicz długość ramienia karuzeli.
- P2** 6.1.4. Słynny londyński diabelski młyn London Eye ma kształt koła, na którego obwodzie znajdują się kapsuły widokowe. W czasie $t = 30 \text{ min}$ koło wykonuje jeden obrót, a kapsuła porusza się z prędkością $v = 0,8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Oblicz średnicę *London Eye* i prędkość kątową kapsuły widokowej.



- P2** • **6.1.5.** Morska elektrownia wiatrowa w Osterild w Danii ma wirnik o długości łopat $d = 154$ m. Łopata wirnika obraca się $n = 20$ razy na minutę. Oblicz prędkość liniową i prędkość kątową punktów łopaty, z których pierwszy znajduje się na końcu łopaty, a drugi w odległości $\frac{1}{4}$ jej długości od osi obrotu.

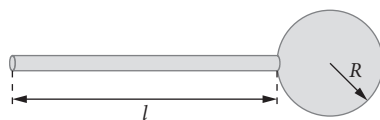
- P2** • **6.1.6.** Po krótkim treningu można wprowadzić w ruch obrotowy piłkę nożną i utrzymać ją wirującą wzdłuż pionowej osi, podpierając czubkiem palca. Przyjmij, że piłka o obwodzie $L = 70$ cm obraca się ze stałą częstotliwością $f = 10$ Hz. Oblicz prędkość liniową punktów na powierzchni piłki, które znajdują się najdalej od osi obrotu. Następnie sporządź wykresy zależności prędkości liniowej od odległości od osi obrotu $v(r)$ oraz prędkości kątowej od odległości od osi obrotu $\omega(r)$ dla wszystkich punktów leżących na powierzchni piłki.

- P2** • **6.1.7.** Po wprowadzeniu w ruch karuzela tarczowa o średnicy $d = 130$ cm zaczęła poruszać się coraz szybciej. W czasie $\Delta t = 0,6$ s jej prędkość kątowa wzrosła od $\omega_1 = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ do $\omega_2 = 3,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Oblicz przyspieszenie kątowe oraz przyspieszenie liniowe punktu znajdującego się na brzegu tarczy i punktu znajdującego się w odległości $x = 50$ cm od osi obrotu.

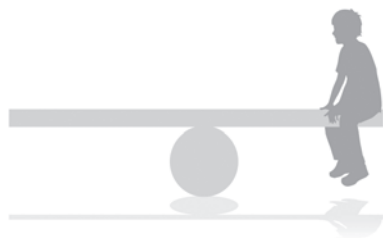


- P3** • • **6.1.8.** Określ położenie środka masy dla układu Pluton–Charon. Masa Plutona wynosi $m_p = 1,3 \cdot 10^{22}$ kg, masa Charona $m_{Ch} = 0,16 \cdot 10^{22}$ kg, a odległość między tymi obiektami to $d = 19\,640$ km. Wynik porównaj z promieniem Plutona $R_p = 1151$ km. Przyjmij, że oba ciała mają kształt kulisty, a ich środki mas znajdują się w ich środkach geometrycznych.

- P3** • • **6.1.9.** Ustal położenie środka masy elementu maszyny składającego się z jednorodnej metalowej belki o masie $m_b = 4$ kg i długości $l = 1$ m oraz przyspawanej na jednym jej końcu kuli o masie $m_k = 2$ kg i promieniu $R = 20$ cm (patrz rysunek).



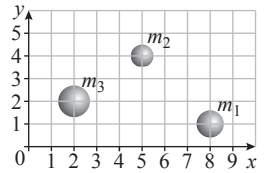
- P3** • • **6.1.10.** Rodzice zamierzają zbudować swojemu dziecku taką huśtawkę, by mogło bawić się samo. Belkę o długości $l = 4$ m i masie $m_1 = 25$ kg należy podeprzeć w miejscu, gdzie będzie znajdował się środek masy, gdy na jednym końcu belki usiądzie dziecko o masie $m_2 = 15$ kg. W jakiej odległości od drugiego końca należy podeprzeć belkę? Dziecko uznaj za punkt materialny.



- P3** • • **6.1.11.** Środki dwóch kul o masach $m_1 = 0,5$ kg i $m_2 = 2$ kg znajdują się w punktach o współrzędnych $S_1 = (3 \text{ m}, 10 \text{ m})$ i $S_2 = (-2 \text{ m}, 5 \text{ m})$. Oblicz współrzędne środka masy układu tych kul i jego odległość od środka drugiej kuli.

- • **6.1.12.** Trzy kule o masach $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 1$ kg i $m_3 = 3$ kg zajmują położenie w układzie współrzędnych takie jak pokazano na rysunku. Oblicz współrzędne środka masy układu tych kul.

P3

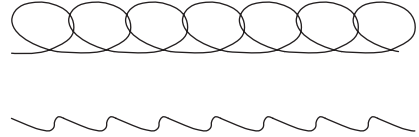


- • **6.1.13.** W wykrywaniu planet pozasłonecznych istotne jest m.in. to, że gwiazda i planeta krążą wokół wspólnego środka masy.

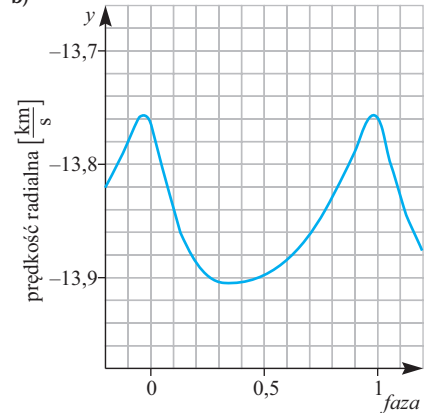
P3

1. W metodzie astrometrycznej analizuje się tor gwiazdy względem Ziemi. Może on być linią prostą lub mieć kształt taki jak na rysunku a).
2. Inna metoda polega na rejestrowaniu zmian prędkości radialnych gwiazdy (przykładowy wykres przedstawiono na rysunku b). Prędkość radialna to składowa prędkości gwiazdy względem Ziemi, leżąca na prostej łączącej Ziemię z gwiazdą.
3. Metoda zwana chronometrażem pulsarów polega na analizowaniu przesunięć w czasie impulsów radiowych wysyłanych przez pulsary. Za jej pomocą Aleksander Wolszczan w 1992 r. odkrył pierwsze planety poza Układem Słonecznym, krążące wokół pulsara PSR 1257+12.

a)



b)



Dowiedz się więcej o tych metodach z różnych źródeł. Wyjaśnij, jak astrofizycy interpretują informacje uzyskiwane za pomocą opisanych wyżej metod wykrywania planet.

- • **6.1.14.** Weź rurę do odkurzacza i połóż ją na palcach wskazujących, tak aby nie spadła. Następnie ściągnij palce ku sobie, nie pozwalając rurze upaść. Czynność powtórz kilkakrotnie, zaczynając od różnych położenia palców. W którym punkcie palce się spotkają? Czy położenie tego punktu zależy od początkowego położenia palców? Jeśli rura składa się teleskopowo, zmień jej długość i powtórz doświadczenie.

P3

D

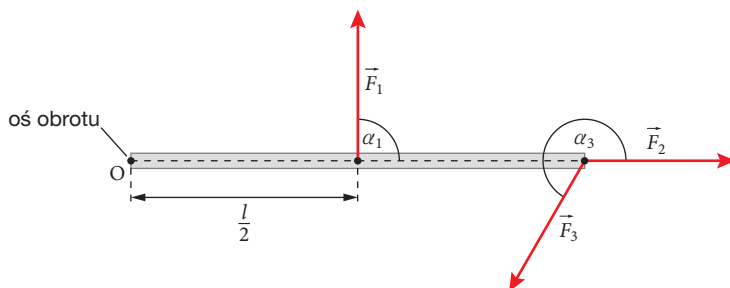


6.2. Moment siły. I zasada dynamiki dla ruchu obrotowego

Podręcznik
rozdz. 6.2

■ Przykład 1.

Metalowy drążek o długości $l = 1$ m może się obracać wzdłuż osi, która przechodzi przez jego koniec i jest prostopadła do płaszczyzny rysunku. Ustal wartości, kierunki i zwroty momentów sił: $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, jeżeli $F_1 = F_2 = F_3 = 4$ N, $\alpha_1 = 90^\circ$, $\alpha_2 = 0^\circ$, $\alpha_3 = 240^\circ$.



Rozwiązanie

Do określenia kierunku i zwrotu wektora momentu siły $\vec{M}$ stosujemy regułę śruby prawoskrętnej. Natomiast jego wartość obliczamy ze wzoru:

$$M = r \cdot F \cdot \sin \alpha$$

gdzie $\alpha = \sphericalangle(\vec{r}, \vec{F})$ to kąt zawarty między wektorem ramienia siły $\vec{r}$ i wektorem siły $\vec{F}$.

Wyznaczamy wartości i określamy kierunki i zwroty momentów sił:

► Moment siły $\vec{M}_1$

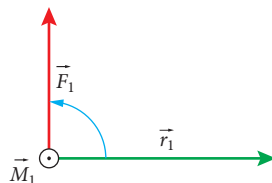
Kąt między wektorami $\vec{r}_1$ i $\vec{F}_1$ jest równy $\alpha_1 = 90^\circ$.

Wiemy, że $\sin 90^\circ = 1$. Ramię siły ma długość $r_1 = 0,5$ m. Wartość momentu siły $\vec{M}_1$ wynosi:

$$M_1 = r_1 \cdot F_1 \cdot \sin 90^\circ = r_1 \cdot F_1$$

$$M_1 = 0,5 \text{ m} \cdot 4 \text{ N} = 2 \text{ Nm}$$

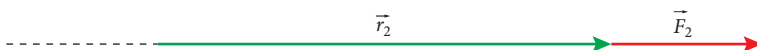
$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1$$



Moment siły M_1 jest zwrócony przed płaszczyznę kartki, co oznaczamy symbolem $\odot$.

► Moment siły $\vec{M}_2$

W tym przypadku wektory $\vec{r}_2$ i $\vec{F}_2$ mają ten sam kierunek i zwrot, więc kąt między nimi wynosi $\alpha_2 = 0^\circ$. W związku z tym, że $\sin 0^\circ = 0$, moment siły $\vec{M}_2 = 0$.

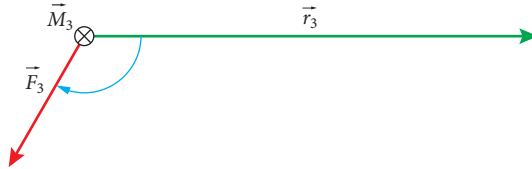


► Moment siły $\vec{M}_3$:

$$M_3 = r_3 \cdot F_3 \cdot \sin \alpha_3 = r_3 \cdot F_3 \cdot \sin 240^\circ = r_3 \cdot F_3 \cdot \sin \alpha$$

$$M_3 = 1 \text{ m} \cdot 4 \text{ N} \cdot \sin 240^\circ = -4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ Nm} = -2\sqrt{3} \text{ Nm}$$

Zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej:



Moment siły $\vec{M}_3$ jest zwrócony za płaszczyznę kartki, co oznaczmy symbolem $\otimes$. Zauważmy, że wartość momentu siły ma znak minus. Jak pamiętamy, wartość wektora nie może być ujemna, ale znak minus w tej sytuacji oznacza, że wektor $\vec{M}_3$ jest zwrócony przeciwnie do wektora $\vec{M}_1$.

Odpowiedź: Moment siły $M_1 = 2 \text{ Nm}$, ma kierunek prostopadły do płaszczyzny kartki i zwrot przed płaszczyznę kartki, moment siły $M_2 = 0$, a moment siły $M_3 = -2\sqrt{3} \text{ Nm}$, ma kierunek prostopadły do płaszczyzny kartki i zwrot za płaszczyznę kartki.

■ Przykład 2.

Chłopiec jedzie rowerem ze stałą prędkością, wciąż pedałując. Siła tarcia między oponą a podłożem wynosi $F_T = 320 \text{ N}$. Oblicz wartość siły, jaką łańcuch działa na koło zębate zamontowane na osi tylnego koła roweru. Promień koła zębatego $R_1 = 5 \text{ cm}$, promień koła roweru $R_2 = 0,5 \text{ m}$.

Rozwiązanie

Tylne koło roweru wraz z zębatką osadzoną na tylnej osi to kołowrót. Mamy więc do czynienia z równowagą momentów sił:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0$$

gdzie:

$\vec{M}_1$ – moment siły, jaką łańcuch działa na koło zębate,
 $\vec{M}_2$ – moment siły, jaką siła tarcia działa na oponę tylnego koła.

Ogólny wzór na moment siły ma postać:

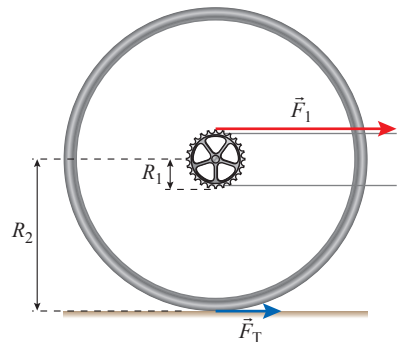
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

W zadaniu obie siły są prostopadłe do promieni, dlatego:

$$\sin \angle(\vec{r}, \vec{F}) = 1$$

Wynika stąd, że:

$$F_1 R_1 = F_T R_2$$



Z powyższej równości wyznaczamy F_1 , czyli szukaną siłę, jaką łańcuch działa na koło zębate:

$$F_1 = \frac{F_T R_2}{R_1}$$

Podstawiamy dane liczbowe:

$$F_1 = \frac{320 \text{ N} \cdot 0,5 \text{ m}}{0,05 \text{ m}} = 3200 \text{ N}$$

Odpowiedź: Wartość siły, jaką łańcuch działa na koło zębate, wynosi 3200 N.

■ Przykład 3.

Robotnik unosi do góry jeden koniec drewnianej belki o masie $m = 40 \text{ kg}$, działając stale siłą $\vec{F}$ skierowaną pionowo do góry. Drugi koniec belki jest oparty o podłoże. Belka jest w równowadze, gdy tworzy z poziomem kąt $\alpha = 60^\circ$. Oblicz wartość siły $\vec{F}$.

Rozwiązanie

Na belkę działają następujące siły: siła ciężkości belki $\vec{F}_g$, siła reakcji podłoża $\vec{F}_R$, siła $\vec{F}$, którą człowiek działa na belkę, siła tarcia statycznego $\vec{F}_T$.

Przyjmijmy, że chwilowa oś obrotu przechodzi przez koniec belki stykający się z podłożem. Mamy teraz do czynienia z dźwignią jednostronną.

Nasza dźwignia pozostanie w równowadze, gdy wypadkowy moment siły względem osi obrotu będzie równy zero:

$$\vec{M}_R + \vec{M}_F + \vec{M}_g = 0$$

Wartości poszczególnych momentów sił wynoszą:

$$M_R = 0 \cdot F_R = 0$$

$$M_F = Fl(\sin 90^\circ - \alpha) = Fl \cos \alpha$$

$$M_g = \frac{1}{2} l \cdot F_g \cdot \sin(90^\circ + \alpha) = -\frac{1}{2} mgl \cos \alpha$$

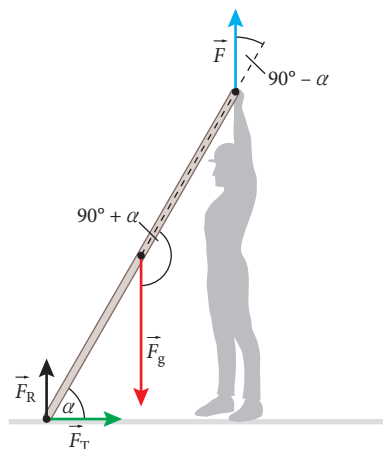
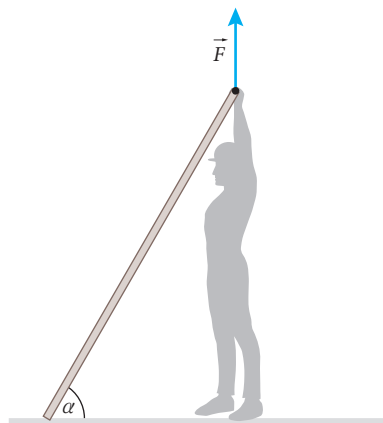
Zatem:

$$Fl \cos \alpha - \frac{1}{2} mgl \cos \alpha = 0 \quad Fl \cos \alpha = \frac{1}{2} mgl \cos \alpha$$

Z powyższej równości wynika, że:

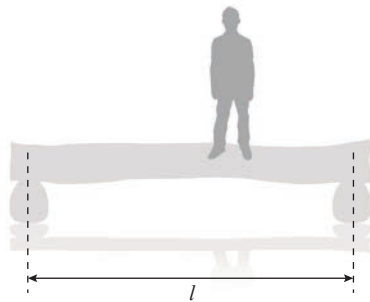
$$F = \frac{1}{2} mg = \frac{1}{2} \cdot 40 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 196,2 \text{ N}$$

Odpowiedź: Belka jest w równowadze, gdy wartość siły, z jaką robotnik podtrzymuje koniec belki, jest równa połowie jej ciężaru, czyli $F = 196,2 \text{ N}$.



■ Przykład 4.

Na strumyku postawiono mostek złożony z dwóch podpór – drewnianych bali leżących wzdłuż strumyka oraz z ułożonego na nich przęsła – pnia wysokiego drzewa (patrz rysunek). Na mostek wszedł człowiek o masie $m_2 = 80 \text{ kg}$ i zatrzymał się w odległości $x = 2 \text{ m}$ od jednego z końców mostka. Oblicz wartości sił działających na podpory. Przyjmij, że pień drzewa o masie $m_1 = 200 \text{ kg}$ na całej długości ma taką samą średnicę, a odległość między podporami wynosi $l = 5 \text{ m}$.



Rozwiązanie

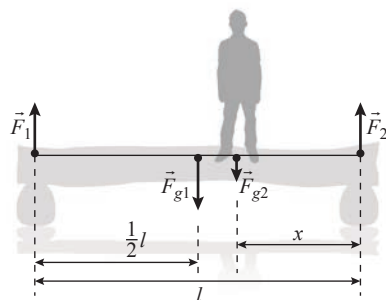
Na przęsło mostu działają:

siła ciężkości człowieka $\vec{F}_{g2} = m_2 g$,

siła ciężkości przęsła $\vec{F}_{g1} = m_1 g$,

siły reakcji podpór na przęsło $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$.

Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki na podpory działają siły o takich samych wartościach jak $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$.



Wybieramy chwilową oś obrotu – prostą przechodzącą przez punkt przyłożenia siły $\vec{F}_1$.

Mostek jest w równowadze, dlatego zgodnie z pierwszą zasadą dynamiki ruchu obrotowego wypadkowa siła i wypadkowy moment siły względem wybranej osi obrotu wynosi zero:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_{g1} + \vec{F}_{g2} + \vec{F}_2 = 0$$

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_{g1} + \vec{M}_{g2} + \vec{M}_2 = 0$$

Podstawiamy do powyższego równania w formie skalarnej wzory opisujące momenty sił poszczególnych składowych sił:

$$M_{g1} = m_1 g \frac{l}{2}$$

$$M_{g2} = m_2 g (l - x)$$

$$M_2 = F_2 l$$

Otrzymujemy układ równań, w którym uwzględniamy, że odległość siły F_1 od osi obrotu wynosi zero, więc $M_1 = 0$:

$$\begin{cases} F_1 - F_{g1} - F_{g2} + F_2 = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 g \frac{l}{2} + m_2 g (l - x) - F_2 l = 0 & (2) \end{cases}$$

Po wyznaczeniu z równania (2) F_2 otrzymujemy wyrażenie:

$$F_2 = \frac{m_1 g \frac{l}{2} + m_2 g (l - x)}{l} = \left[\frac{1}{2} m_1 + m_2 \left(1 - \frac{x}{l} \right) \right] g$$

Po wstawieniu wartości liczbowych:

$$F_2 = \left[\frac{1}{2} \cdot 200 \text{ kg} + 80 \text{ kg} \left(1 - \frac{2 \text{ m}}{5 \text{ m}} \right) \right] \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 148 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1452 \text{ N}$$

Następnie korzystamy z równania (1). Podstawiamy wyrażenia na siły ciężkości i otrzymujemy wyrażenie na wartość siły F_1 :

$$F_1 = m_1 g + m_2 g - F_2 = (m_1 + m_2)g - F_2$$

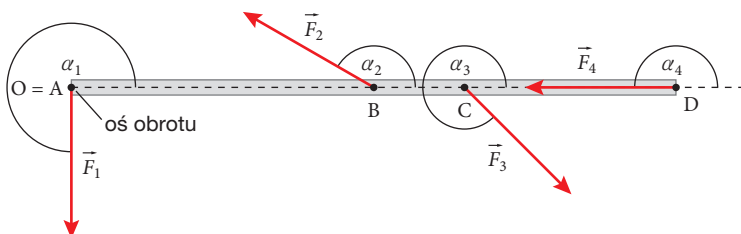
Po podstawieniu danych:

$$F_1 = (200 \text{ kg} + 80 \text{ kg}) \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 1452 \text{ N} = 1295 \text{ N}$$

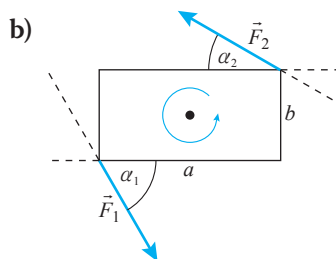
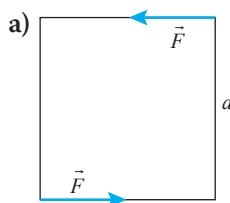
Odpowiedź: Na podpory działają siły 1452 N i 1295 N

Pytania i zadania

- P1** 6.2.1. Metalowa belka o długości $l = 2 \text{ m}$ może obracać się względem osi znajdującej się na jej lewym końcu. Na belkę w punktach A, B, C, D działają siły o wartości $F = 25 \text{ N}$, tak jak pokazano na rysunku. Oblicz wypadkowy moment siły działający na belkę oraz ustal jego kierunek i zwrot. Przyjmij, że punkt B znajduje się w połowie długości belki, natomiast punkt C w odległości 1,3 m od osi obrotu, $\alpha_1 = 270^\circ$, $\alpha_2 = 150^\circ$, $\alpha_3 = 315^\circ$, $\alpha_4 = 180^\circ$.

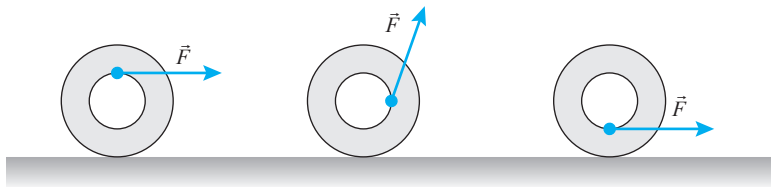


- P1** 6.2.2. Na dwa przeciwległe narożniki kwadratowego stołu o boku $a = 120 \text{ cm}$ działają siły o tej samej wartości $F = 100 \text{ N}$. Kierunki działania sił przedstawiono na rysunku a). Oblicz wypadkowy moment sił działających na stół względem osi obrotu przechodzącej przez środek blatu stołu.



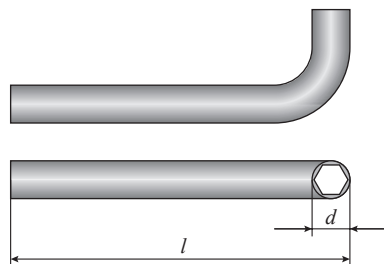
- P1** 6.2.3. Kontener na śmieci ma kształt prostopadłościanu o długości $a = 2 \text{ m}$, szerokości $b = 1 \text{ m}$ i wysokości $h = 1,2 \text{ m}$. Dwóch pracowników firmy oczyszczania miasta chce obrócić wypełniony po brzegi pojemnik wokół osi, która przechodzi przez jego środek. Działają siłami o wartościach $F_1 = 200 \text{ N}$ i $F_2 = 300 \text{ N}$, skierowanymi poziomo i przyłożonymi do dwu przeciwległych górnych rogów kontenera, odpowiednio pod kątami $\alpha_1 = 60^\circ$ i $\alpha_2 = 30^\circ$ względem jego dłuższej ściany (patrz rysunek b). Oblicz wypadkowy moment siły i ustal jego kierunek i zwrot.

- • **6.2.4.** Na oś łączącą ciężarki hantli nawinięto sznurek. Jeżeli powstałą w ten sposób szpulę położymy na stole, to tarcie będzie na tyle duże, że umożliwi jej obrót poprzez pociągnięcie sznurka. Wyznacz kierunek i zwrot momentu siły naciągu sznurka i ustal, w którą stronę powinna się obracać szpula w każdym z przypadków przedstawionych na rysunku poniżej. Jeśli to możliwe, sprawdź zachowanie hantli doświadczalnie i porównaj wyniki swoich obserwacji z wnioskami wynikającymi z rozważań teoretycznych. Doświadczenie możesz również wykonać przy użyciu zabawki jo-jo.

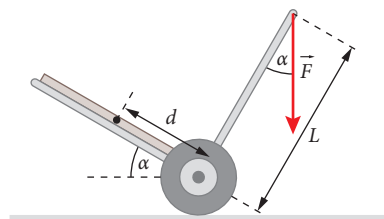


- • **6.2.5.** Rowerzysta jedzie rowerem ze stałą prędkością. Podczas ciągłego pedałowania łańcuch działa siłą $F_1 = 2800 \text{ N}$ na koło zębate zamontowane na tylnej osi koła. Jednocześnie siła tarcia między oponą i podłożem wynosi $F_2 = 448 \text{ N}$. Oblicz promień koła zębatego, jeżeli wiemy, że promień koła roweru $R_2 = 50 \text{ cm}$.

- **6.2.6.** Do wymiany koła kierowca używa klucza o długości $l = 30 \text{ cm}$, zakończonego tulejką o średnicy $d = 2 \text{ cm}$, wyprofilowaną zgodnie z kształtem śruby mocującej koło (patrz rysunek obok). Oblicz wartość siły, która będzie działała na śrubę, jeżeli kierowca o masie $m = 80 \text{ kg}$ stanie na końcu ramienia klucza ustawionego poziomo.



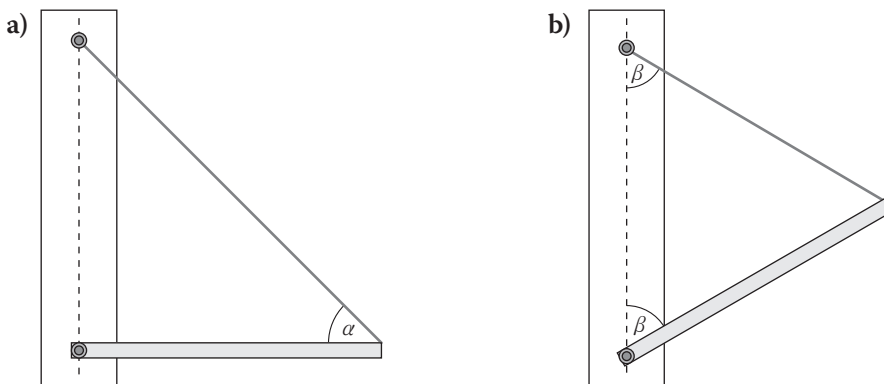
- • **6.2.7.** Na platformę wózka transportowego została załadowana płaska sztaba o masie $m = 50 \text{ kg}$. W pewnej chwili robotnik działał na ramię wózka o długości $L = 1,2 \text{ m}$ siłą skierowaną w dół, tak jak pokazano na rysunku. Oblicz wartość siły, jaką działał robotnik, gdy ramię wózka tworzyło z pionem kąt $\alpha = 30^\circ$. Przyjmij, że środek ciężkości sztaby znajdował się w odległości $d = 60 \text{ cm}$ od ramienia wózka oraz że $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



- • **6.2.8.** Drewniany most zwodzony o masie $m = 1000 \text{ kg}$ i długości $l = 6 \text{ m}$ jest podnoszony przy użyciu dwóch lin.

a) Porównaj wartości sił naciągu lin w położeniach pokazanych na rysunkach a) i b). Zaznaczone kąty wynoszą odpowiednio $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$.

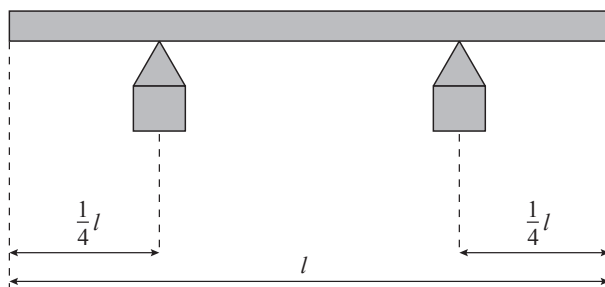
- b) Dwie liny, za pomocą których most jest podciągany, nawija się na dwa oddzielne kołowroty. Każdy z nich obsługuje jedna osoba. Promień walca, na który nawijana jest lina, wynosi $R_1 = 10$ cm, a promień ramienia kołowrotu $R_2 = 100$ cm. Oblicz wartość siły, jaką każda z osób musi działać na ramię kołowrotu, aby rozpocząć podnoszenie mostu.



- • 6.2.9. Na rzece zbudowano kładkę z belki o długości $l = 4$ m i o ciężarze $F_1 = 200$ N, wspartej dwiema podporami znajdującymi się w odległości jednej czwartej l od końców belki. Pośrodku kładki stanęli chłopiec o ciężarze $F_2 = 500$ N i dziewczynka o ciężarze $F_3 = 400$ N. Dzieci przeszły następnie na końce kładki: chłopiec na lewy, a dziewczynka na prawy.

P4

- a) Dorysuj wektory sił działających na belkę, gdy dzieci stoją pośrodku kładki i gdy stoją na jej końcach.
b) Oblicz wartości sił, jakimi podpory działają na belkę, gdy dzieci stoją pośrodku kładki.
c) Oblicz, o ile zmieni się obciążenie podpór, kiedy dzieci przejdą ze środka kładki na jej końce.



- • 6.2.10. Dwóch myśliwych, idących jeden za drugim, opiera na barłach końce drążka o długości $l = 2$ m, na którym w odległości $d = 50$ cm od tylnego końca wisi w siatce upolowany dzik. Jaką część ciężaru dzika dźwiga każdy z myśliwych?

P4

- • 6.2.11. Tyczkarka podczas rozbiegu utrzymuje w pozycji poziomej tyczkę z włókna szklanego o masie $m = 5$ kg i długości $l = 6$ m. Jedną dłonią dociska tyczkę siłą skierowaną w dół w odległości $x_1 = 30$ cm od jej końca, a drugą dłonią podtrzymuje przyrząd $x_2 = 50$ cm dalej, działając siłą do góry. Oblicz wartości sił działających na ręce tyczkarki.

P4

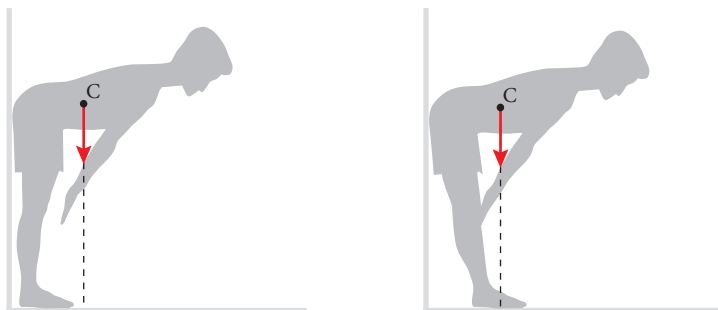


6.3. Środek ciężkości i energia potencjalna bryły sztywnej

Podręcznik
rozdz. 6.3

D ■ Przykład 1.

Stań tuż przy ścianie plecami do niej i spróbuj dłońmi dotknąć stóp. Czy będzie możliwe wykonanie skłonu bez utraty równowagi? Ustal minimalną odległość stóp od ściany, przy której możliwy jest taki skłon.



Rozwiązanie

Gdy spróbujesz wykonać skłon, stojąc tuż przy ścianie, to środek ciężkości ciała przesunie się do przodu. W pewnym momencie znajdzie się poza obszarem podparcia, zależnym od ułożenia stóp, i wówczas stracisz równowagę. Gdy odsuniesz się od ściany, będziesz mieć możliwość takiego ułożenia ciała, aby środek ciężkości ciała znajdował się cały czas nad obszarem podparcia. Wówczas równowaga zostanie zachowana, co umożliwi wykonanie skłonu.

■ Przykład 2.

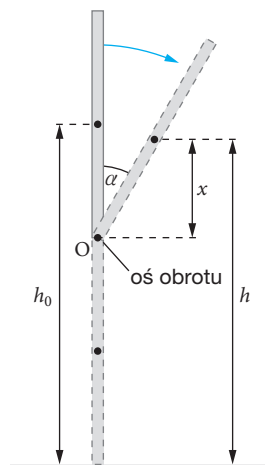
Jednorodny pręt o masie $m = 0,5 \text{ kg}$ i długości $l = 80 \text{ cm}$ został zawieszony na osi poziomej przechodzącej przez jego górny koniec.

- Napisz równanie opisujące zależność energii potencjalnej pręta od kąta obrotu α w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.
- Sporządź wykres zależności energii potencjalnej od kąta obrotu α , dla przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$. Skorzystaj z programu komputerowego. Przyjmij $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Rozwiązanie

- Energia potencjalna pręta zależy od położenia jego środka ciężkości. Środek ciężkości jednorodnego pręta znajduje się w połowie długości pręta.

$$E_p = mgh$$



Wyznaczamy energię, gdy pręt jest odchylony od pionu o kąt α . Wówczas środek ciężkości znajduje się w odległości $h = l + x$ od poziomego odniesienia.

Odległość x obliczamy z funkcji trygonometrycznej:

$$x = \frac{l}{2} \cos \alpha$$

Wysokość h wyraża się zatem wzorem:

$$h = l + \frac{l}{2} \cos \alpha$$

Zatem energia potencjalna:

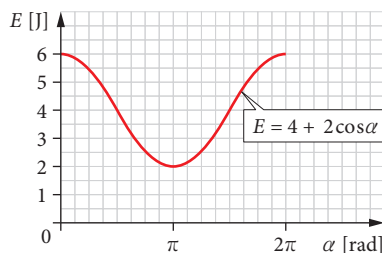
$$E_p = mg\left(l + \frac{l}{2} \cos \alpha\right) = mgl + mg\frac{l}{2} \cos \alpha$$

- b)** W celu sporządzenia wykresu wstawiamy do wzoru z punktu a) wartości liczbowe. Wyrażamy wielkości występujące we wzorze w jednostkach układu SI, aby otrzymać wymiar energii [J]:

$$E_p = 0,5 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,8 \text{ m} + 0,5 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,4 \text{ m} \cdot \cos \alpha$$

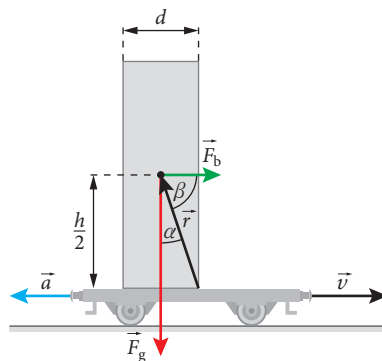
Otrzymujemy równanie, na podstawie którego sporządzamy wykres:

$$E_p(\alpha) = 4 + 2 \cos \alpha$$



■ Przykład 3.

Na platformie pociągu towarowego postawiono skrzynię o podstawie kwadratu o boku $d = 0,8 \text{ m}$. Skrzynia o wysokości $h = 2,4 \text{ m}$ była równomiernie wypełniona materiałem budowlanym. Na skutek gwałtownego hamowania niezablokowana skrzynia się przewróciła. Oblicz wartość opóźnienia pociągu podczas hamowania.



Rozwiązanie

Rozpatrzmy nieinercjalny układ odniesienia. Na skrzynię działa siła ciężkości $\vec{F}_g$ i siła bezwładności $\vec{F}_b$. Gdy moment siły bezwładności będzie większy od momentu siły ciężkości, skrzynia się przewróci i wykona obrót względem krawędzi podstawy skrzyni.

Wartość momentu siły grawitacji obliczymy ze wzoru:

$$M_1 = rF_g \sin \alpha$$

Natomiast wartość momentu siły bezwładności jest równa:

$$M_2 = rF_b \sin \beta$$

Dla sytuacji granicznej $M_1 = M_2$:

$$rF_g \sin \alpha = rF_b \sin \beta$$

Wstawiamy do wzoru $\sin \alpha = \frac{0,5d}{r}$, $\sin \beta = \frac{0,5h}{r}$ i otrzymujemy:

$$rF_g \frac{d}{2r} = rF_b \frac{h}{2r}$$

Po podstawieniu do wzoru: $F_g = mg$ i $F_b = ma$ otrzymujemy:

$$mg \frac{d}{2r} = rma \frac{h}{2r}$$

$$a = \frac{gd}{h}$$

Zatem:

$$a = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{0,8 \text{ m}}{2,4 \text{ m}} = 3,27 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Odpowiedź: Skrzynia przewróci się, gdy opóźnienie przekroczy wartość $3,27 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Pytania i zadania

- • **6.3.1.** Połóż na stole książkę. Stań w odległości co najmniej 1,5 m od stołu.

P1

a) Bez odrywania stóp od podłogi sięgnij w kierunku blatu i spróbuj chwycić książkę.

D

b) Sięgnij jeszcze raz po książkę, wyciągając do tyłu jedną nogę.

Jak było łatwiej to zrobić? Jak zachowywało się twoje ciało w obu przypadkach?

- • **6.3.2.** Platforma równowagowa bez dodatkowego obciążenia przyjmuje pozycję skośną względem podłoża, ponieważ punkt podparcia znajduje się poza jej środkiem ciężkości. Dwie osoby o takiej samej masie wchodzą na platformę i zajmują taką pozycję, aby platforma ustawiła się poziomo. Ustal orientacyjnie ich położenie na platformie i wyjaśnij, pod jakim warunkiem zachowa ona równowagę. Zastanów się, czy istnieje tylko jedno położenie osób na platformie, przy którym będzie ona ustawiona poziomo.

P1



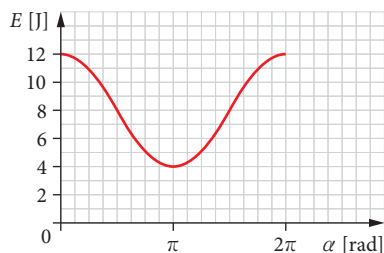
- • **6.3.3.** Pręt o masie $m = 0,3 \text{ kg}$ i długości $l = 100 \text{ cm}$ zawieszono na osi w odległości $x = 20 \text{ cm}$ od jego górnego końca. Oblicz pracę wykonaną przy obrocie o 90° i o 180° . Przyjmij $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

P2

P2 6.3.4. Na wykresie przedstawiono zależność energii potencjalnej pręta o masie $m = 0,8 \text{ kg}$ od kąta obrotu α . Obrót pręta następował względem osi przechodzącej przez jego dolny koniec. Przyjmij $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

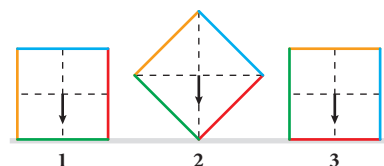
Na podstawie wykresu:

- określ, dla jakich kątów α pręt jest w równowadze trwałej, a dla jakich w nietrwałej,
- wyznacz pracę wykonaną przy przeprowadzeniu pręta ze stanu równowagi trwałej do stanu równowagi nietrwałej,
- oblicz długość pręta.

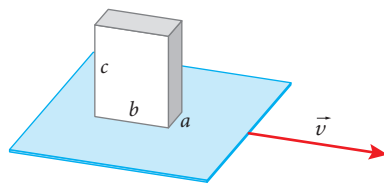


P2 6.3.5. Sześcienne puf o boku $a = 60 \text{ cm}$ i masie $m = 1,4 \text{ kg}$ został obrócony tak, jak pokazano na rysunku.

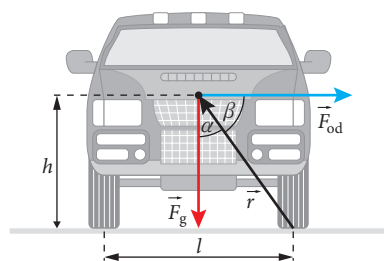
- Wskaż, w którym położeniu puf znajduje się w równowadze trwałej, a w którym – w równowadze chwiejnej.
- Dla jakich kątów odchylenia od stanu początkowego puf będzie pozostawał w równowadze trwałej.
- Oblicz pracę potrzebną do obrócenia pufa z położenia 1 do położenia 2.



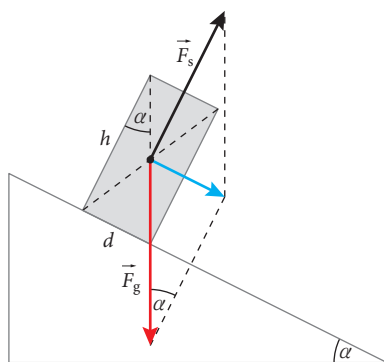
P3 6.3.6. Pasażer pociągu postawił na podłodze walizkę o rozmiarach: $a = 20 \text{ cm}$, $b = 40 \text{ cm}$, $c = 60 \text{ cm}$, krawędzią a prostopadłe do kierunku jazdy. Przy jakim przyspieszeniu pociągu walizka się przewróci? Przyjmij, że tarcie między walizką a podłogą jest zbyt duże, aby mogła się ona przesunąć.



P3 6.3.7. Samochód dostawczy ma rozstaw kół $l = 207 \text{ cm}$, a środek ciężkości równomiernie załadowanego samochodu znajduje się na wysokości $h = 180 \text{ cm}$ od ziemi. Czy na zakręcie o promieniu $R = 40 \text{ m}$ samochód jadący z prędkością $v = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ się nie przewróci?



P3 6.3.8. Do hurtowni przywieziono beczki, które były ściśle wypełnione gipsem. Podczas rozładunku beczkę o średnicy $d = 80 \text{ cm}$ i wysokości $h = 160 \text{ cm}$ ustawiono na pochylni. Przy jakim kącie nachylenia do poziomu beczka może się przewrócić?



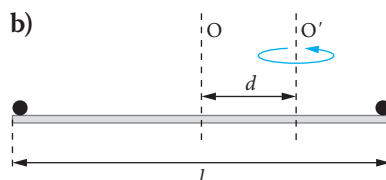
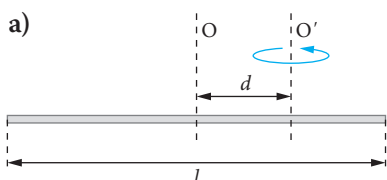
6.4. Energia kinetyczna w ruchu obrotowym

Podręcznik
rozdz. 6.4

■ Przykład 1.

Pręt o długości $l = 1,2$ m i masie $m = 0,4$ kg jest osadzony na osi pionowej O' w odległości $\frac{1}{4}l$ od końca pręta. Moment bezwładności pręta względem osi O przechodzący przez jego środek masy wynosi: $I_O = \frac{ml^2}{12}$.

- Oblicz moment bezwładności pręta względem osi obrotu O' .
- Ile razy zmieni się moment bezwładności pręta, jeśli na jego końcach umieścimy ciężarki o masie $m = 0,4$ kg każdy? Przyjmij, że ciężarki można traktować jak punkty materialne.



Rozwiązanie

- Aby obliczyć moment bezwładności pręta względem osi O' stosujemy twierdzenie Steinera:

$$I' = I_O + md^2$$

Odległość między osiami wynosi $d = \frac{1}{4}l$, a zatem otrzymujemy:

$$I' = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{1}{4}l\right)^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{16} = \frac{7ml^2}{48}$$

Do otrzymanego wzoru wstawiamy wartości liczbowe:

$$I' = \frac{7ml^2}{48} = \frac{7 \cdot 0,4 \text{ kg} \cdot (1,2 \text{ m})^2}{48} = 0,084 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Odpowiedź: Moment bezwładności pręta względem osi O' wynosi $I' = 0,084 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

- Jeżeli na końcach pręta umieścimy ciężarki o masie m każdy, to należy policzyć momenty bezwładności każdego ciężarka oddzielnie względem osi O' . Moment bezwładności całości jest równy sumie momentów bezwładności ciężarków i pręta względem osi O' . Ponieważ ciężarki traktujemy jak punkty materialne, moment bezwładności obliczymy ze wzoru:

$$I = mr^2$$

gdzie m – masa ciężarka, r – odległość od osi obrotu.

Dla ciężarka z lewej strony odległość od osi obrotu jest równa $r = \frac{3}{4}l$, zatem moment bezwładności wynosi:

$$I_{k1} = m\left(\frac{3}{4}l\right)^2 = \frac{9}{16}ml^2$$

Dla ciężarka z prawej strony odległość od osi obrotu jest równa $r = \frac{1}{4}l$, zatem moment bezwładności wynosi:

$$I_{k2} = m\left(\frac{1}{4}l\right)^2 = \frac{1}{16}ml^2$$

Moment bezwładności pręta wraz z ciężarkami to suma momentów bezwładności ciężarków i pręta:

$$I_{\text{cał}} = I_{k1} + I_{k2} + I'$$

Ciężarki i pręt mają równe masy, zatem możemy zapisać:

$$I_{\text{cał}} = \frac{9}{16}ml^2 + \frac{1}{16}ml^2 + \frac{7}{48}ml^2 = \frac{37}{48}ml^2$$

Porównujemy moment bezwładności pręta z ciężarkami z momentem bezwładności samego pręta:

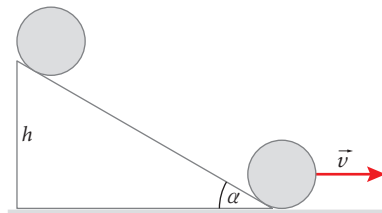
$$\frac{I_{\text{cał}}}{I} = \frac{\frac{37}{48}ml^2}{\frac{7}{48}ml^2} = \frac{37}{7}ml^2 \approx 3,04$$

Odpowiedź: Moment bezwładności pręta z ciężarkami jest około 3 razy większy niż moment bezwładności samego pręta.

■ Przykład 2.

Beczki są wyładowywane z samochodu po pochylni o wysokości $h = 1,2$ m i nachyleniu $\alpha = 30^\circ$ do poziomu. Masa beczki wraz z zawartością wynosi $m = 80$ kg, a średnica beczki $d = 60$ cm. Beczkę potraktuj jak jednorodny walec. Przyspieszenie ziemskie $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

- Oblicz wartość prędkości liniowej beczki po stoczeniu się z równi pochyłej bez poślizgu.
- Oblicz czas, w jakim beczka stoczy się z równi.
- Oblicz drogę przebytą przez beczkę na poziomej trawiastej powierzchni. Przyjmij, że podczas toczenia się beczki działała na nią stała siła oporu $F_o = 40$ N.



Rozwiązanie

- Na wysokości h beczka ma energię potencjalną grawitacji, a po stoczeniu się z równi – energię kinetyczną ruchu postępowego środka masy i energię kinetyczną ruchu obrotowego względem osi przechodzącej przez środek masy beczki. Punkt styczności beczki z podłożem, do którego przyłożona jest siła tarcia, ma prędkość równą zero, więc siła

tarcia statycznego wprawiająca walec w ruch obrotowy nie wykonuje pracy. Zgodnie z zasadą zachowania energii zapisujemy równość:

$$E_p = E_{ko} + E_{kp} \Rightarrow mgh = \frac{I_0 \omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$$

Po uwzględnieniu momentu bezwładności walca i związku między prędkością liniową i kątową:

$$I_0 = \frac{1}{2} mR^2, \quad \omega = \frac{v}{R}$$

otrzymujemy:

$$mgh = \frac{3mv^2}{4} \Rightarrow v = 2\sqrt{\frac{gh}{3}}$$

Podstawiamy dane liczbowe:

$$v = 2\sqrt{\frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,2 \text{ m}}{3}} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Odpowiedź: Prędkość środka masy beczki po stoczeniu się z równi pochyłej wynosi $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

b) Czas obliczymy ze wzorów opisujących ruch jednostajnie przyspieszony:

$$s = \frac{1}{2} at^2 \quad \text{i} \quad v = at$$

zatem:

$$t = \frac{2s}{v}$$

Drogę przebytą przez beczkę wyznaczymy z funkcji trygonometrycznej:

$$\sin \alpha = \frac{h}{s} \Rightarrow s = \frac{h}{\sin \alpha} = 2h = 2,4 \text{ m}$$

Wstawiamy wartości s i v do wzoru na czas i otrzymamy:

$$t = \frac{2s}{v} = \frac{2 \cdot 2,4 \text{ m}}{4 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1,2 \text{ s}$$

Odpowiedź: Czas staczania się beczki z równi 1,2 s.

c) Zastosujemy wzór na związek pracy z energią. Siła oporu wykonuje pracę zmniejszającą energię walca na drodze s . Możemy zatem zapisać:

$$W_{Fo} = \Delta E_m$$

Pracę sił oporu zapiszemy:

$$W_{Fo} = F_o s \cos 180^\circ = -F_o s$$

Zmianę energii mechanicznej zapiszemy:

$$\Delta E_m = E_{kon} - E_{pocz}$$

Energia końcowa beczki po zatrzymaniu się na trawiastej powierzchni wynosi zero.

Energia początkowa beczki to jej energia potencjalna na szczycie pochylni:

$$E_p = mgh$$

równa jej całkowitej energii kinetycznej tuż po stoczeniu się z pochylni:

$$E_k = \frac{3mv^2}{4}$$

Zależność możemy zapisać na dwa sposoby:

$$(1) \quad F_0 s = mgh \Rightarrow s = \frac{mgh}{F_0}$$

lub

$$(2) \quad F_0 s = \frac{3mv^2}{4} \Rightarrow s = \frac{3mv^2}{4F_0}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych do jednego lub drugiego równania otrzymamy:

$$s = \frac{80 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,2 \text{ m}}{40 \text{ N}} = 24 \text{ m} \quad \text{lub} \quad s = \frac{3 \cdot 80 \text{ kg} \cdot \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{4 \cdot 40 \text{ N}} = 24 \text{ m}$$

Odpowiedź: Beczka zatrzyma się na trawiastej powierzchni po przebyciu drogi 24 m.

■ Przykład 3.

Koło jednokołowego roweru ma masę $m = 2,6 \text{ kg}$, promień $R = 25 \text{ cm}$, a moment bezwładności koła $I_0 = mR^2$. Koło jest połączone na stałe z korbami pedałów odległymi od osi obrotu o $l = 14 \text{ cm}$. Podczas przeglądu technicznego mechanik odwrócił rower siodełkiem do dołu i pedałem wprowadził w ruch obrotowy koło, które po pewnym czasie uzyskało prędkość kątową $\omega = 7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.



- Oblicz pracę wykonaną przez mechanika przy rozkręcaniu koła do prędkości kątowej ω .
- Ile obrotów musiałby wykonać mechanik, działając stałą siłą $F = 1,5 \text{ N}$ na pedały roweru, aby uzyskać prędkość kątową $14 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$? Przyjmij, że ruch obrotowy koła był jednostajnie przyspieszony. Pomiń siły oporu.

Rozwiązanie

- Korzystamy ze związku pracy z energią kinetyczną ruchu obrotowego: $W = \Delta E_{\text{ko}}$.

Ponieważ energia kinetyczna początkowa koła wynosi zero, to otrzymamy $W = E_{\text{ko}}$.

$$E_{\text{ko}} = \frac{I_0 \omega^2}{2}$$

Gdy uwzględnimy moment bezwładności koła z treści zadania $I_0 = mR^2$ otrzymamy:

$$E_{\text{ko}} = \frac{mR^2 \omega^2}{2} = \frac{m(R\omega)^2}{2}$$

Po podstawieniu danych:

$$W = \frac{2,6 \text{ kg} \cdot \left(0,25 \text{ m} \cdot 7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2}{2} \approx 3,98 \text{ J}$$

Odpowiedź: Mechanik, aby rozpędzić koło do prędkości $7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, wykonał pracę 3,98 J.

- b) W ruchu obrotowym działanie na ciało momentu siły M podczas obracania go o kąt α spowoduje przyrost energii kinetycznej ruchu obrotowego ciała. Jest to sytuacja analogiczna do ruchu postępowego, gdy działanie siłą F na drodze s powodujemy przyrost energii kinetycznej ruchu postępowego ciała.

Ruch postępowy	Ruch obrotowy
Praca wykonana przez siłę F jest równa przyrostowi energii kinetycznej ciała w ruchu postępowym: $W_F = \Delta E_k$ Jeśli prędkość początkowa to $v_0 = 0$, możemy zapisać: $Fs = \frac{mv^2}{2}$	Praca wykonana przez moment siły M przy obrocie ciała o kąt α jest równa przyrostowi energii kinetycznej ruchu obrotowego bryły sztywnej: $W_M = \Delta E_{ko}$ Jeśli prędkość początkowa to $\omega_0 = 0$, możemy zapisać: $M\alpha = \frac{I\omega^2}{2}$

Do wzoru:

$$M\alpha = \frac{I_0\omega^2}{2}$$

wprowadzamy wyrażenie na moment siły, z jakim działa mechanik:

$$M = Fl$$

a więc:

$$Fl\alpha = \frac{I_0\omega^2}{2}$$

Wyznaczamy kąt α :

$$\alpha = \frac{I_0\omega^2}{2Fl}$$

Po uwzględnieniu momentu bezwładności koła otrzymujemy:

$$\alpha = \frac{mR^2\omega^2}{2Fl} = \frac{m(R\omega)^2}{2Fl}$$

Po podstawieniu danych liczbowych:

$$\alpha = \frac{2,6 \text{ kg} \cdot (0,25 \text{ m} \cdot 14 \frac{\text{rad}}{\text{s}})^2}{2 \cdot 0,14 \text{ m} \cdot 1,5 \text{ N}} = 75,8 \text{ rad}$$

Znamy wartość kąta w radianach, więc możemy zapisać, że $\alpha = N \cdot 2\pi$. Stąd wyznaczamy N – liczbę obrotów koła:

$$N = \frac{\alpha}{2\pi} \quad N = \frac{75,8 \text{ rad}}{2 \cdot 3,14 \text{ rad}} = 12$$

Odpowiedź: Aby koło uzyskało prędkość kątową $14 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, mechanik musiał wykonać 12 obrotów pedałem roweru.

■ Przykład 4.

Drewniany słupek o masie $m = 400$ kg i wysokości $H = 4$ m został podpiłowany u podstawy.

a) Oblicz jego energię kinetyczną tuż przed upadkiem na ziemię.

b) Oblicz prędkość, z jaką upadnie na ziemię wierzchołek słupa.

Przyjmij, że moment bezwładności drewnianego słupa jest równy momentowi bezwładności jednorodnego pręta względem osi przechodzącej przez jego koniec. Przyjmij przyspieszenie ziemskie $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, pominiń opory ruchu.

Rozwiązanie

a) Ruch słupa można rozpatrywać jako ruch obrotowy względem osi przechodzącej przez jego podstawę. Przyjmujemy, że podczas ruchu nie działają siły oporu, a jedynie siła grawitacji, więc możemy zastosować zasadę zachowania energii. Oznacza to, że początkowa energia mechaniczna jest równa energii mechanicznej w stanie końcowym.

$$E_{\text{m pocz}} = E_{\text{m kon}}$$

Energia początkowa słupa jest równa energii potencjalnej środka ciężkości słupa:

$$E_{\text{m pocz}} = mg \frac{1}{2} H$$

Energia końcowa jest równa energii kinetycznej ruchu obrotowego względem osi przechodzącej przez podstawę słupa. Jego energia potencjalna w tym położeniu wynosi zero:

$$E_{\text{m kon}} = E_{\text{m pocz}} = 400 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2 \text{ m} = 7848 \text{ J}$$

Odpowiedź: Energia kinetyczna słupa w chwili upadku na ziemię jest równa energii potencjalnej, jaką posiadał słupek w chwili początkowej, i wynosi 7848 J.

b) Aby obliczyć prędkość końca słupa tuż przed uderzeniem w ziemię, należy ponownie posłużyć się zasadą zachowania energii $E_{\text{m pocz}} = E_{\text{m kon}}$.

Jak wspomnieliśmy w punkcie a), energia początkowa jest równa energii potencjalnej środka ciężkości słupa:

$$E_{\text{m pocz}} = mg \frac{1}{2} H$$

Energia końcowa jest natomiast równa energii kinetycznej ruchu obrotowego słupa:

$$E_{\text{m kon}} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

gdzie I jest momentem bezwładności słupa względem osi przechodzącej przez jego koniec:

$$I = \frac{1}{3} m H^2$$

Możemy zatem zapisać:

$$\frac{I \omega^2}{2} = mg \frac{1}{2} H$$

czyli:

$$\frac{m H^2 \omega^2}{6} = mg \frac{1}{2} H$$

Z otrzymanego równania:

$$\frac{H\omega^2}{3} = g$$

wyznaczamy prędkość kątową słupa:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{H}}$$

Następnie ze związku:

$$v = \omega r$$

obliczamy prędkość liniową końca słupa. W naszym przypadku $r = H$. Zatem:

$$v = \omega H = \sqrt{3gH} = \sqrt{3 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4 \text{ m}} = 10,85 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Odpowiedź: Koniec słupa uderza w ziemię z prędkością $10,85 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Pytania i zadania

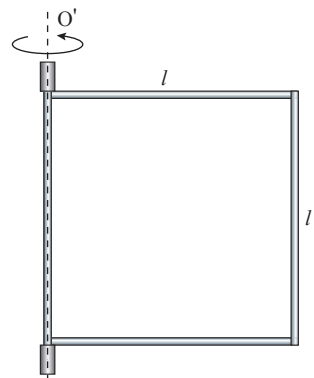
- • **6.4.1.** Moment bezwładności pręta o masie m i długości l względem osi O przechodzącej przez jego środek masy wynosi $I_0 = \frac{ml^2}{12}$. Wyznacz moment bezwładności pręta względem osi O' równoległej do osi O , gdy:

P1

- oś O' przechodzi przez koniec pręta,
- oś O' znajduje się w odległości $\frac{1}{3}l$ od końca pręta,
- oś O' znajduje się w odległości $\frac{1}{3}l$ od końca pręta, a na jego końcach umieszczono jednakowe ciężarki o masie m każdy. Potraktuj ciężarki jak punkty materialne.

- • **6.4.2.** Aby wejść do części ekspozycyjnej muzeum, należy przejść przez bramkę o kształcie przedstawionym na rysunku obok. Bramkę zmontowano z czterech jednakowych rurek o długości $l = 1 \text{ m}$ i masie $m = 0,5 \text{ kg}$. Oblicz moment bezwładności bramki względem osi obrotu zaznaczonej na rysunku. Rurkę potraktuj jak cienki pręt.

P1

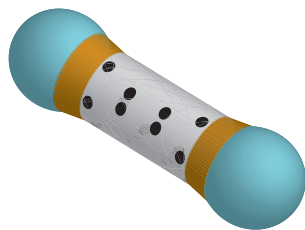


- • **6.4.3.** Jednorodna kula o promieniu $R = 10 \text{ cm}$ i masie $m = 0,5 \text{ kg}$ stacza się z równi pochyłej o wysokości $h = 1,4 \text{ m}$ i kącie nachylenia $\alpha = 30^\circ$ do poziomu.

P2

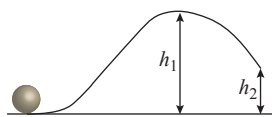
- Oblicz wartość prędkości liniowej kuli po stoczeniu się z równi pochyłej bez poślizgu oraz czas staczania się kuli z równi.
- Kula potoczyła się po płaskiej chropowatej powierzchni i zatrzymała po przebyciu drogi $d = 10 \text{ m}$. Oblicz siłę oporu, jaka działała na kulę podczas toczenia.

• • **6.4.4.** W sklepach z artykułami dla zwierząt można kupić zabawki, w których wewnątrz jest ukryte pożywienie. Zwierzę musi popchnąć zabawkę w odpowiedni sposób, aby wypadły z niej smakołyki. Właściciel psa kupił swojemu pupilowi zabawkę tego typu w kształcie walca. Przyjmij, że masa zabawki wraz z pokarmem $m = 0,35 \text{ kg}$ jest rozłożona równomiernie w całej objętości walca i nie zmienia się podczas ruchu.



- Oblicz całkowitą energię kinetyczną walca toczącego się po podłodze bez poślizgu, jeżeli popychany pyskiem przez psa, uzyskał on prędkość liniową środka masy $v_0 = 0,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
- Oblicz, jaką część całkowitej energii kinetycznej stanowi energia kinetyczna ruchu obrotowego, a jaką – ruchu postępowego środka masy zabawki.

• • **6.4.5.** *Snack ball* jest rodzajem zabawki z dozownikiem pokarmu dla małych zwierząt. Królik toczy piłeczkę, której masa wraz z pokarmem $m = 0,15 \text{ kg}$, a promień $R = 3 \text{ cm}$. Zakładamy, że masa piłeczki rozłożona jest równomiernie w całej objętości kuli i nie zmienia się podczas ruchu.



- Oblicz minimalną wartość prędkości liniowej, jaką królik musi nadać piłeczce, aby prze-toczyła się przez pagórek o wysokości $h_1 = 28 \text{ cm}$.
- Piłeczka bez prędkości początkowej stoczyła się z pagórka o wysokości h_1 na płaską powierzchnię o wysokości $h_2 = 7 \text{ cm}$. Wykaż, że wartość prędkości kątowej piłeczki na końcu wzniesienia $\omega = 57,2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

• • **6.4.6.** Na szczycie równi pochyłej o wysokości $h = 0,3 \text{ m}$ i długości $s = 1,2 \text{ m}$ umieszczono dwa identycznie wyglądające walce i puszczono je jednocześnie bez prędkości początkowej. Pierwszy z walców był wykonany z jednorodnego materiału, drugi był w środku pusty.

- Oblicz prędkości liniowe walców po stoczeniu się z równi, zakładając, że ruch odbywał się bez poślizgu. Zinterpretuj otrzymane wyniki.
- Porównaj wyniki obliczeń z prędkością ciała, które zsuwałoby się z równi pochyłej z tej samej wysokości bez tarcia.
- Oblicz czas, w jakim stoczy się z równi każdy z walców. Który z walców znajdzie się na dole pierwszy? Dlaczego?

• • **6.4.7.** Tarcza szlifierki kątowej ma średnicę $d = 125 \text{ mm}$, masę $m = 0,2 \text{ kg}$ i obraca się, wykonując $n = 11\,000$ obrotów na minutę. Po wyłączeniu silnika urządzenie zatrzymało się pod wpływem momentu siły tarcia o wartości $M = 8,83 \text{ Nm}$. Oblicz, ile obrotów wykonała tarcza szlifierki do zatrzymania się. Przyjmij, że moment bezwładności tarczy $I = \frac{1}{2}mR^2$.

• • **6.4.8.** Koło zamachowe o momencie bezwładności $I = 245 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ obraca się z częstotliwością $f = 20 \text{ Hz}$. Po wyłączeniu napędu koło wykonało jeszcze $N = 601$ obrotów do całkowitego zatrzymania się. Oblicz moment sił tarcia.

- • **6.4.9.** Scena obrotowa o promieniu $R = 5 \text{ m}$ i masie $m = 1500 \text{ kg}$ została wprowadzona w ruch i osiągnęła prędkość kątową $\omega = 0,6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ w czasie $t = 15 \text{ s}$. Oblicz moc silnika wprowadzającego scenę w ruch. Przyjmij, że moment bezwładności sceny obrotowej jest taki jak moment bezwładności krążka. Pomiń tarcie.

- • **6.4.10.** Powerball to przyrząd służący do ćwiczeń nadgarstka. Urządzenie zawiera rdzeń-rotor w kształcie kuli o masie około $m = 200 \text{ g}$, na który jest nawinięty sznurek. Moment bezwładności urządzenia $I = 18 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Aby rozkręcić powerball, gwałtownie pociągamy za sznurek nawinięty na oś urządzenia.



- Oblicz pracę wykonaną w celu rozkręcenia urządzenia, gdy sznurek zostaje wyciągnięty na długość $l = 20 \text{ cm}$ siłą $F = 20 \text{ N}$.
- Oblicz maksymalną częstotliwość rotora.
- Obracając nadgarstkiem, zwiększamy liczbę obrotów rotora. Oblicz energię ruchu obrotowego rotora, gdy wykonuje on $n = 6000$ obrotów na minutę. Obecny rekord świata wynosi 16 553 obroty na minutę.

- • **6.4.11.** Jedną z konkurencji podczas zawodów drwali to ścinanie specjalnie przygotowanych bali. Bal o masie $m = 1500 \text{ kg}$ i wysokości $H = 5,4 \text{ m}$ został podpiłowany u podstawy i upadł na ziemię, obracając się względem podstawy. Oblicz prędkość kątową i liniową jego górnego końca w chwili uderzenia o podłoże. Przyjmij, że moment bezwładności bala jest równy momentowi bezwładności jednorodnego pręta względem osi obrotu przechodzącej przez jego koniec.

P4

- • **6.4.12.** Metalowy pręt o długości $l = 1,7 \text{ m}$ zawieszony na osi poziomej przechodzącej przez jego górny koniec został odchylony od pionu o kąt 60° i puszczony. Jaką prędkość liniową uzyska koniec pręta przy przechodzeniu przez położenie równowagi?

P4

- • **6.4.13.** Popularna zabawka jo-jo ma masę $m = 0,2 \text{ kg}$ i promień $r = 3,2 \text{ cm}$. Na walec nawinięto sznurek o długości $l = 1 \text{ m}$. Przyjmij, że moment bezwładności jo-jo o masie m i promieniu r jest równy momentowi bezwładności walca o takich samych wymiarach.

- Oblicz wartość prędkości liniowej zabawki w chwili, gdy sznurek swobodnie opadającego jo-jo odwinie się o $h = 30 \text{ cm}$.
- Oblicz przyspieszenie kątowe zabawki po rozwinięciu sznurka o h .

- • • **6.4.14.** W gimnastyce artystycznej zawodniczka wykonuje ewolucje z obręczą, np. wyrzuca obręcz, nadając jej ruch obrotowy z prędkością kątową ω_0 , jednocześnie obręcz porusza się z prędkością ruchu postępowego v_0 . Początkowo obręcz toczy się z poślizgiem, a następnie wraca do zawodniczki bez poślizgu. Ustal zależność pomiędzy prędkością ruchu postępowego a prędkością ruchu obrotowego, aby obręcz wróciła do zawodniczki. W którą stronę zawodniczka powinna zakręcić obręczą?



6.5. Druga zasada dynamiki w ruchu obrotowym

Podręcznik
rozd. 6.5

■ Przykład 1.

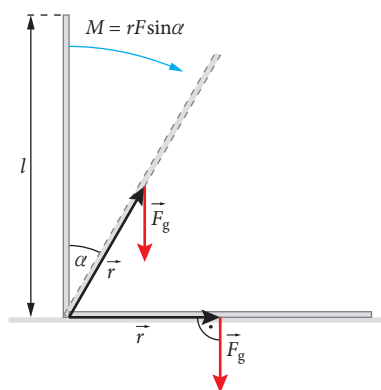
Ustawiony pionowo prostokątny panel ogrodzeniowy o wysokości $l = 1,5$ m przewrócił się podczas montażu. Tuż przed zetknięciem z podłożem poruszał się z maksymalnym przyspieszeniem kątowym $\varepsilon = 12,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$.

Moment bezwładności panelu ogrodzeniowego względem jego osi obrotu $I = 24 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Oblicz masę panelu ogrodzeniowego. Przyjmij $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Rozwiązanie

Przewracający się panel ogrodzeniowy obraca się z coraz większym przyspieszeniem kątowym, ponieważ zwiększa się działający na niego moment siły. Moment siły grawitacji osiągnie maksymalną wartość w chwili, gdy ramię siły $\vec{r}$ i siła $\vec{F}_g$ utworzą kąt $\alpha = 90^\circ$, czyli tuż przed zetknięciem się górnego końca panelu z ziemią.

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki dla ruchu obrotowego bryły sztywnej:



$$\varepsilon = \frac{M}{I}$$

Moment siły to iloczyn siły i ramienia siły:

$$\varepsilon = \frac{F_g \cdot r}{I}$$

A zatem:

$$\varepsilon = \frac{mg \frac{l}{2}}{I}$$

Wyznaczamy masę panelu:

$$m = \frac{2\varepsilon I}{gl}$$

Masa panelu ogrodzeniowego wynosi:

$$m = \frac{2 \cdot 12,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot 24 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,5 \text{ m}} = 40 \text{ kg}$$

Odpowiedź: Panel ogrodzeniowy ma masę 40 kg.

■ Przykład 2.

Na jednorodny walec o masie $m = 250 \text{ g}$ i promieniu $r = 36 \text{ cm}$, obracający się wokół nieruchomej osi symetrii, jest nawinięta nitka. Do nitki przyłożono siłę o wartości $F = 0,09 \text{ N}$. Po jakim czasie walec osiągnie prędkość kątową $\omega = 120 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$?

Rozwiązanie

Prędkość kątową walca zmienia się zgodnie z zależnością:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$$

gdzie $\omega_0 = 0$ jest prędkością początkową.

Walec osiągnie prędkość kątową ω po czasie:

$$t = \frac{\omega}{\varepsilon}$$

Przyspieszenie kątowe walca wyznaczamy z drugiej zasady dynamiki dla ruchu obrotowego:

$$\varepsilon = \frac{M}{I} = \frac{Fr}{\frac{1}{2}mr^2} = \frac{2F}{mr}$$

Po podstawieniu przyspieszenia kąтового do równania na czas otrzymujemy:

$$t = \frac{\omega}{\frac{2F}{mr}} = \frac{m\omega r}{2F}$$

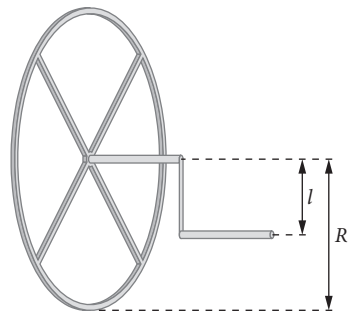
Podstawiamy dane liczbowe:

$$t = \frac{0,25 \text{ kg} \cdot 120 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 0,36 \text{ m}}{2 \cdot 0,09 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}} = 60 \text{ s}$$

Odpowiedź: Walec osiągnie prędkość kątową $120 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ w czasie jednej minuty.

■ Przykład 3.

Stara maszyna rolnicza ma stalowe koło zamachowe o masie $m = 20 \text{ kg}$ i promieniu $R = 80 \text{ cm}$. Moment bezwładności koła względem osi obrotu to $I_0 = mR^2$. Na wspólnej osi obrotu jest osadzona korba, której ramię znajduje się w odległości $l = 40 \text{ cm}$ od osi obrotu. Gdy rolnik wprowadził koło w ruch obrotowy, działał na ramię korby pewną siłą $\vec{F}$, stale skierowaną prostopadłe do ramienia korby. W czasie $\Delta t = 2 \text{ s}$ koło zamachowe uzyskało prędkość kątową $\omega = \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Oblicz wartość siły, jaką rolnik działał na ramię korby. Przyjmij, że ruch obrotowy był jednostajnie przyspieszony. Pomiń siły oporu ruchu.



Rozwiązanie

Z treści zadania wynika, że koło zamachowe wykonuje ruch obrotowy jednostajnie przyspieszony, zatem jego przyspieszenie kątowe możemy wyrazić wzorem:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Ponieważ w chwili $t = 0$ s koło było w spoczynku, jego początkowa prędkość kątowa $\omega_0 = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, a więc:

$$\Delta\omega = \omega$$

Przyspieszenie kątowe koła zamachowego wyznaczamy z drugiej zasady dynamiki dla ruchu obrotowego:

$$\varepsilon = \frac{M}{I_0}$$

gdzie: I_0 – moment bezwładności koła zamachowego, M – moment siły, jaką człowiek działa na ramię korby o długości l .

Zatem przyspieszenie kątowe:

$$\varepsilon = \frac{Fl}{mR^2}$$

Gdy porównamy oba wyrażenia na przyspieszenie kątowe ε , otrzymamy równość:

$$\frac{\omega}{\Delta t} = \frac{Fl}{mR^2}$$

Wyznaczamy szukaną siłę F :

$$F = \frac{\omega m R^2}{l \cdot \Delta t}$$

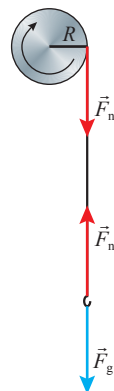
Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$F = \frac{\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 20 \text{ kg} \cdot (0,8 \text{ m})^2}{0,4 \text{ m} \cdot 2 \text{ s}} = 50,24 \text{ N}$$

Odpowiedź: Podczas wprawiania koła zamachowego w ruch człowiek w czasie pierwszych 2 s działa na ramię korby siłą 50,24 N.

■ Przykład 4.

Przy budowie domu tzw. systemem gospodarczym często wciąga się materiał budowlany na wyższą kondygnację za pomocą wciągarki. Lina nawija się na walec o masie $m = 4$ kg i promieniu $R = 5$ cm. Hak o masie $M = 1,2$ kg uwiązany do końca liny zaczyna spadać swobodnie i pociąga za sobą linkę, wprawiając w ruch obrotowy walec wciągarki o momencie bezwładności $I = \frac{mR^2}{2}$. Oblicz przyspieszenie kątowe walca, przyspieszenie, z jakim zjeżdża w dół hak, oraz naciąg liny. Pomiń masę liny.



Rozwiązanie

Na hak działa siła ciężkości $\vec{F}_g$ i siła naciągu liny $\vec{F}_n$. Na walec wciągarki działa siła naciągu liny $\vec{F}_n$.

Hak porusza się ruchem postępowym z przyspieszeniem a , walec zaś ruchem obrotowym z przyspieszeniem kątowym ε .

Po opisanu obu rodzajów ruchu z wykorzystaniem drugiej zasady dynamiki i uwzględnieniu zależności pomiędzy przyspieszeniem kątowym i liniowym otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} Mg - F_n = Ma & (1) \\ \varepsilon = \frac{F_n R}{I} = \frac{F_n R}{\frac{1}{2} m R^2} & (2) \\ a = \varepsilon R & (3) \end{cases}$$

Równanie (3) podstawiamy do równania (1), z którego wyznaczamy F_n i podstawiamy do równania (2). Otrzymujemy:

$$\varepsilon = \frac{Mg}{\left(\frac{1}{2}m + M\right)R}$$

Po podstawieniu danych liczbowych:

$$\varepsilon = 73,6 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Przyspieszenie liniowe haka możemy obliczyć z równania (3):

$$a = 73,6 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot 0,05 \text{ m} = 3,68 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

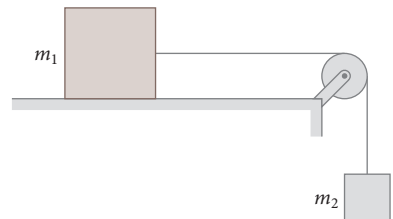
Siłę naciągu liny wyznaczamy z równania (1) $F_n = M(g - a)$ i podstawiamy dane liczbowe:

$$F_n = 1,2 \text{ kg} \cdot \left(9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 3,68 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 7,36 \text{ N}$$

Odpowiedź: Przyspieszenie kątowe walca wciągarki $\varepsilon = 73,6 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$, przyspieszenie liniowe haka zjeżdżającego w dół $a = 3,68 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, a siła naciągu liny $F_n = 7,36 \text{ N}$.

■ Przykład 5.

Do drewnianej skrzynki o masie m_1 przymocowano cienką linkę, która jest przerzucona przez ruchomy błocek o momencie bezwładności $I = \frac{1}{2}mr^2$. Przyjmij, że błocek ma kształt walca, a linka przechodzi przez błocek w odległości r od jego osi obrotu. Współczynnik tarcia kinetycznego drewnianej skrzynki o podłoże wynosi μ . Wykaż, że po doczepieniu na drugim końcu linki obciążnika o masie m_2 cały układ uzyska przyspieszenie:



$$a = \frac{(m_2 - \mu m_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m}$$

Rozwiązanie

Narysujmy siły działające na układ.

Należy ułożyć układ równań opisujących drugą zasadę dynamiki dla obu klocków i bloczka. Ponieważ bloczek jest nieruchomy, w jego przypadku zapisujemy II zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego bryły sztywnej. Wielkością łączącą wszystkie elementy układu jest przyspieszenie liniowe wspólne dla klocków i punktów na obwodzie bloczka. Wzór łączący przyspieszenie liniowe i przyspieszenie kątowe także należy włączyć do układu równań.

$$\begin{cases} F_{N1} - F_T = m_1 a, & \text{gdzie } F_T \text{ to siła tarcia } F_T = \mu m_1 g \\ F_{g2} - F_{N2} = m_2 a, & \text{gdzie } F_{g2} = m_2 g \\ (F_{N2} - F_{N1})r = I\varepsilon \\ a = \varepsilon r \end{cases}$$

Po kolejnych przekształceniach:

$$\begin{cases} F_{N1} = m_1 a + \mu m_1 g \\ F_{N2} = m_2 g - m_2 a \\ F_{N2} - F_{N1} = I \frac{a}{r^2} \end{cases}$$

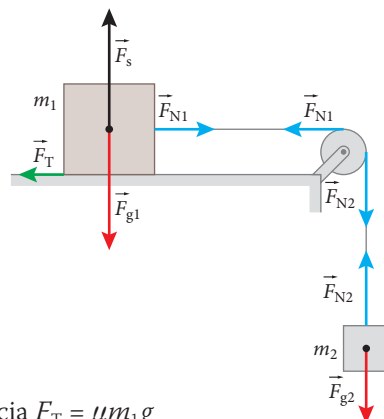
$$m_2 g - m_2 a - m_1 a - \mu m_1 g = \frac{1}{2} m r^2 \cdot \frac{a}{r^2}$$

$$m_2 g - \mu m_1 g = m_1 a + m_2 a + \frac{1}{2} m a$$

Otrzymujemy równanie:

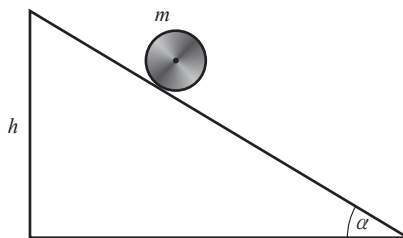
$$a = \frac{(m_2 - \mu m_1)}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m} g$$

Tym samym wykazaliśmy poprawność równania podanego w treści zadania.

**■ Przykład 6.**

Ze szczytu równi pochyłej o wysokości h i kącie nachylenia α puszczono walec o masie m oraz promieniu R . Współczynnik tarcia kinetycznego o równię $\mu_s = \mu_k = \frac{1}{3}$.

- Narysuj i nazwij wszystkie siły działające na walec w czasie staczania się z równi.
- Wyznacz przyspieszenie liniowe środka masy walca, przyspieszenie kątowe walca wokół osi obrotu przechodzącej przez środek masy walca oraz siłę tarcia statycznego.
- Jaką prędkość osiągnie środek masy walca po stoczeniu się z równi?
- Wyznacz kąt α , dla którego siła tarcia statycznego osiągnie wartość maksymalną.

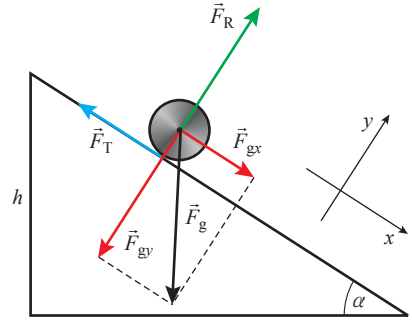


Rozwiązanie

a) Na walec działają siły:

- ▶ ciężkości $\vec{F}_g$,
- ▶ reakcji podłoża $\vec{F}_R$,
- ▶ tarcia statycznego $\vec{F}_T$.

Siły te zostały przedstawione na rysunku obok wraz z ułożeniem osi x i y .



b) Siłę ciężkości działającą na walec rozkładamy na składową:

równoległą do równi $F_{gx} = mg \sin \alpha$ oraz prostopadłą do równi $F_{gy} = mg \cos \alpha$.

Zapisujemy drugą zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego i postępowego walca oraz zależność pomiędzy przyspieszeniem kątowym ε i liniowym a . Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} F_{gx} - F_T = ma & (1) \\ F_T R = \varepsilon I & (2) \\ a = \varepsilon R & (3) \end{cases}$$

gdzie $I = \frac{1}{2} mR^2$ jest momentem bezwładności walca.

Z równań (2) i (3) oraz wzoru na moment bezwładności walca, otrzymujemy:

$$F_T = \frac{a}{R^2} \cdot \frac{1}{2} mR^2 = \frac{1}{2} ma \quad (4)$$

Otrzymane równanie podstawiamy do wzoru (1) i otrzymujemy:

$$mg \sin \alpha = \frac{3}{2} ma$$

stąd:

$$a = \frac{2}{3} g \sin \alpha \quad (5)$$

Po podstawieniu otrzymanego wzoru do równania (3) otrzymamy:

$$\varepsilon = \frac{2g \sin \alpha}{3R}$$

Po podstawieniu równania (5) do wzoru na siłę tarcia (4) otrzymujemy:

$$F_T = \frac{1}{3} mg \sin \alpha$$

Odpowiedź: Przyspieszenie liniowe środka masy walca wynosi: $a = \frac{2}{3} g \sin \alpha$, przyspieszenie kątowe walca: $\varepsilon = \frac{2g \sin \alpha}{3R}$, a siła tarcia działająca na walec: $F_T = \frac{1}{3} mg \sin \alpha$.

c) Długość równi, czyli droga pokonana przez walec, wynosi:

$$s = \frac{h}{\sin \alpha}$$

Środek masy walca poruszał się ruchem jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej, więc możemy zapisać, że:

$$s = \frac{1}{2}at^2 \quad \text{oraz} \quad v = at$$

Z tych równań możemy wyznaczyć prędkość środka masy walca u podnóża równi:

$$v = \sqrt{\frac{2ha}{\sin \alpha}}$$

Po uwzględnieniu otrzymanej w punkcie b) zależności $a = \frac{2}{3}g \sin \alpha$ otrzymujemy:

$$v = 2\sqrt{\frac{gh}{3}}$$

Odpowiedź: Prędkość środka masy walca po stoczeniu się z równi $v = 2\sqrt{\frac{gh}{3}}$.

d) Na podstawie otrzymanego w punkcie b) wyrażenia na siłę tarcia $F_T = \frac{1}{3}mg \sin \alpha$ możemy stwierdzić, że siła tarcia rośnie wraz ze wzrostem kąta α , który wyznaczamy dla maksymalnej wartości siły tarcia statycznego, rozwiązując równanie:

$$F_T = F_{T\max} \Rightarrow \frac{1}{3}mg \sin \alpha = \mu_s mg \cos \alpha$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

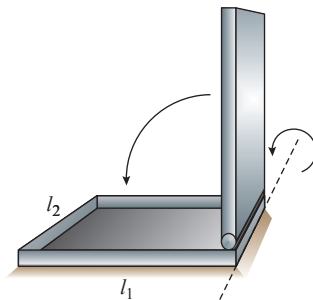
$$\operatorname{tg} \alpha = 3\mu_s$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

Odpowiedź: Maksymalna siła tarcia statycznego działa na walec, gdy kąt $\alpha = 45^\circ$.

Pytania i zadania

- • **6.5.1.** Prostokątna kłapa wjazdu, która znajduje się pod burta, ma wymiary $l_1 = 1,2$ m i $l_2 = 0,8$ m i jest zamontowana tak, jak przedstawiono na rysunku. Oblicz maksymalne przyspieszenie, jakie uzyska jej brzeg o długości l_2 , jeżeli kłapę puści się swobodnie w chwili, gdy jest odchylona o 90° od poziomu. Przyjmij, że kłapa to cienka płyta o masie m obracająca się względem osi obrotu przechodzącej przez jedną z jej krawędzi. Moment bezwładności płyty $I = \frac{ml_1^2}{3}$.



- **6.5.2.** Oblicz przyspieszenie kątowe uzyskane przez jednoskrzydłowe drzwi płytowe o masie $m = 20$ kg i szerokości $l = 80$ cm, jeśli człowiek pchnie je siłą $F = 10$ N, skierowaną prostopadle do płaszczyzny drzwi w odległości $R = 75$ cm od osi obrotu drzwi. Pomiń opory ruchu.

6.5.3. Oblicz moment bezwładności czteroskrzydłowych drzwi obrotowych względem ich osi obrotu oraz wartość siły, jaką popycha je człowiek, jeżeli przykłada ją prostopadle do płaszczyzny drzwi w odległości $R = 1$ m od osi obrotu i nadaje drzwicom przyspieszenie kątowe $\varepsilon = 0,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$. Pojedyncze skrzydło ma masę $m = 50$ kg i szerokość $l = 1,2$ m. Moment bezwładności prostokątnej płyty względem osi obrotu przechodzącej wzdłuż krawędzi $I = \frac{1}{3}ml^2$.

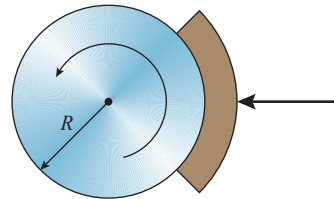
6.5.4. Koło do biegania dla chomika ma średnicę $d = 20$ cm i masę $m = 0,1$ kg. Oblicz siłę, jaką gryzoń odpycha się od bieżni wewnątrz koła, jeżeli koło obraca się z przyspieszeniem kątowym $\varepsilon = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$. Przyjmij, że koło do biegania to krótka rura o cienkiej ścianie. Pomiń opory ruchu i moment bezwładności prętów mocujących oś obrotu.



6.5.5. Artysta cyrkowy, leżąc na plecach, obraca stopami piłkę o masie $m = 0,5$ kg i promieniu $R = 30$ cm. Piłka po upływie $\Delta t = 2$ s od momentu wprawienia w ruch uzyskała prędkość kątową $\omega = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Oblicz wartość siły, jaką stopy cyrkowca działały w tym czasie na powierzchnię piłki, stycznie do jej powierzchni.

6.5.6. Koło zamachowe, którego moment bezwładności $I_0 = 100 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, obraca się, wykonując $n = 320$ obrotów na minutę. Ustal, po jakim czasie się zatrzyma, jeśli przestał na nie działać moment sił zewnętrznych i działa jedynie stały moment sił tarcia $M_t = 28 \text{ Nm}$.

6.5.7. Koło zamachowe o momencie bezwładności $I_0 = 110 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ i promieniu $R = 40$ cm wiruje z prędkością kątową $\omega = 95 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Oblicz siłę, jaką należy przycisnąć do niego klocek hamulcowy, aby zatrzymać koło po upływie $\Delta t = 14$ s. Współczynnik tarcia między klockiem a kołem $\mu = 0,5$.



6.5.8. Pusty bęben pralki automatycznej o momencie bezwładności $I_0 = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ wiruje ze stałą prędkością kątową, wykonując $n = 850$ obrotów na minutę. Po wyłączeniu silnika bęben pralki zatrzymuje się po $\Delta t = 21$ s. Oblicz moment sił tarcia powodujący zatrzymanie bębna pralki. Załóż, że siła tarcia ma stałą wartość.

6.5.9. Chłopiec odwrócił rower siodłem do dołu i pedałem wprawił w ruch obrotowy koło, które po $\Delta t = 5$ s uzyskało prędkość kątową $\omega = 6,46 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. W tym czasie działał na pedał roweru siła $F = 1,5$ N. Masa koła wynosi $m = 2,6$ kg, jego promień $R = 25$ cm, a moment bezwładności względem osi, na której jest osadzone koło, to $I_0 = mR^2$. Oblicz, w jakiej odległości l od osi obrotu są zamocowane pedały roweru.

6.5.10. Pacjent podczas ćwiczeń rąk wprawił w ruch obrotowy rotor rehabilitacyjny, działając stałą siłą $F = 0,5$ N na każdą rączkę rotora. Odległość uchwytów korbki rotora od osi obrotu $l = 30$ cm. Po czasie $\Delta t = 3,14$ s rotor uzyskał prędkość kątową $\omega = 4,71 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Oblicz moment bezwładności rotora. Przyjmij, że ruch był jednostajnie przyspieszony. Pomiń siły oporu ruchu.



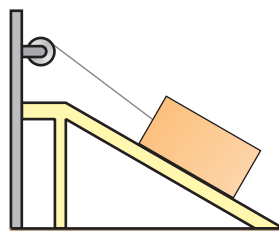
• • • **6.5.11.** Kotwica o masie $M = 9 \text{ kg}$ podnoszona jest za pomocą wciągarki zamontowanej na pokładzie jachtu. Lina wciągarki nawija się na walec o masie $m = 2 \text{ kg}$ i promieniu $R = 5,5 \text{ cm}$. Po odblokowaniu zabezpieczenia kotwica spada i pociąga za sobą linę, co wprawia w ruch obrotowy walec wciągarki. Oblicz przyspieszenie kotwicy i naciąg liny, gdy kotwica opada w wodzie. Przyjmij objętość kotwicy $V = 0,007 \text{ m}^3$. Pomiń masę i objętość zanurzonej w wodzie liny oraz opory wody i mechanizmu wciągarki. Gęstość wody $d = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

• • • **6.5.12.** Na tekturową rurkę nawinięto $l = 1 \text{ m}$ cienkiej nierozciągliwej nitki, a następnie puszczo rurkę, jednocześnie trzymając koniec nawiniętej na nią nitki. Oblicz przyspieszenie środka ciężkości rurki i czas, po którym nitka całkowicie się rozwinie.

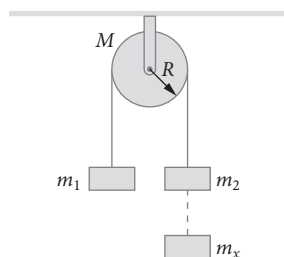
• • • **6.5.13.** Na każdy z uchwytów wałka rehabilitacyjnego (patrz zdjęcie obok) o promieniu $r = 1 \text{ cm}$ nawinięto sznurki o takiej samej długości. Następnie końce sznurka przymocowano do uchwytów zamontowanych w suficie. Kółka nałożone na wałek mają łączną masę $m = 1 \text{ kg}$, a promień każdego z nich $R = 10 \text{ cm}$. Oblicz przyspieszenie kątowe zablokowanych kółek i siłę naciągu sznurka. Pomiń moment bezwładności uchwytów.



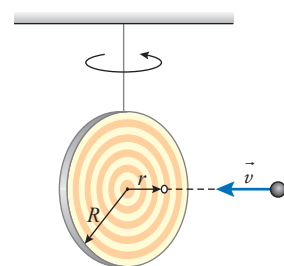
• • • **6.5.14.** Po pochylni o kącie nachylenia $\alpha = 30^\circ$ za pomocą wciągarki transportowano skrzynię o masie $M = 200 \text{ kg}$. Gdy skrzynia znalazła się na szczycie pochylni, wciągarkę zablokowano. W pewnej chwili blokada zawiodła i skrzynia zaczęła się zsuwać ruchem jednostajnie przyspieszonym, rozwijając linę z bębna wciągarki. Po $t = 2 \text{ s}$ znalazła się na dole pochylni. Oblicz długość pochylni. Współczynnik tarcia między skrzynią a pochylnią $\mu = 0,4$. Przyjmij, że bęben wciągarki to jednolity walec o masie $m = 5 \text{ kg}$.



• • • **6.5.15.** Przez blok o masie $M = 200 \text{ g}$ i promieniu $R = 10 \text{ cm}$ przewieszono nić, do której końców przyczepiono dwa jednakowe ciężarki o masach $m_1 = m_2 = m = 300 \text{ g}$. Gdy do drugiego ciężarka doczepiono odważnik o pewnej masie m_x , ciężarki zaczęły się poruszać bez poślizgu z przyspieszeniem liniowym $a = 1,25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Oblicz masę doczepionego ciężarka. Moment bezwładności bloczka $I = \frac{1}{2}MR^2$. Pomiń tarcie i przyjmij $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



• • • **6.5.16.** Do zawieszonej w pionie metalowej tarczy o promieniu $R = 0,5 \text{ m}$, masie $m = 2 \text{ kg}$ i momencie bezwładności $I = \frac{1}{4}mR^2$ wystrzelono z pistoletu gumową kulę o masie $m_k = 1 \text{ g}$. Kula z poziomą prędkością $v = 300 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ uderzyła prostopadle w tarczę i odbiła się od niej sprężysto w miejscu wskazanym na rysunku, w odległości $r = 0,4 \text{ m}$ od pionowej osi obrotu tarczy. W miejscu uderzenia tarcza nie uległa odkształceniu. Oblicz prędkość kątową, uzyskaną przez tarczę w wyniku oddziaływania z gumową kulą.



• • • **6.5.17.** Wykonaj niezbędne obliczenia i wykaż, że prędkość kuli o masie m staczającej się bez poślizgu z równi pochyłej o kącie nachylenia α nie zależy od promienia kuli R .

P6

• • • **6.5.18.** Pusta kula do zorbingu o masie $m = 75$ kg i promieniu $R = 1,6$ m zaczęła się toczyć bez poślizgu po zboczu o kącie nachylenia $\alpha = 3^\circ$. Oblicz prędkość kątową kuli po upływie $t = 10$ s. Kula jest pusta w środku, więc możemy przyjąć, że jest sferą.

P6



• • • **6.5.19.** Oblicz promień obręczy, która staczając się bez poślizgu po zboczu o kącie nachylenia $\alpha = 30^\circ$, po czasie $t = 20$ s uzyskała prędkość kątową $\omega = 100 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

P6

• • • **6.5.20.** Wypełniona po brzegi i szczelnie zamknięta beczka o masie $m = 100$ kg i promieniu $R = 0,5$ m stacza się bez poślizgu z pochylni o kącie nachylenia $\alpha = 30^\circ$. Oblicz siłę tarcia statycznego. Przyjmij, że moment bezwładności beczki odpowiada momentowi bezwładności pełnego walca.

P6

• • • **6.5.21.** Ze zbocza stacza się okorowany okrągły pień drzewa o średnicy jednakowej na całej długości, równej $d = 1$ m. Na pewnym odcinku drogi w czasie $\Delta t = 4$ s jego częstotliwość obrotów wzrosła z $f_1 = 1,5$ Hz do $f_2 = 5$ Hz. Oblicz kąt nachylenia zbocza. Przyjmij, że pień jest jednorodnym walcem.

P6

• • • **6.5.22.** Podczas rozładunku metalowe rury staczają się po pochylni, której maksymalny współczynnik tarcia statycznego $\mu_s = 0,2$ jest równy kinetycznemu współczynnikowi tarcia. Oblicz maksymalny kąt nachylenia pochylni, przy którym rury będą toczyć się bez poślizgu.

P6

• • • **6.5.23.** W kręgielni zawodnik wyrzucając kulę, nadał jej liniową prędkość początkową $v_0 = 7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Prędkość kątowa kuli w chwili wyrzucenia wynosiła zero. Gdy kula dotknęła podłoża, zaczęła poruszać się ruchem obrotowym z poślizgiem. Wartość współczynnika tarcia między kulą a podłożem $\mu = 0,2$.

P6

- Oblicz czas, po upływie którego rozpocznie się ruch kuli bez poślizgu.
- Oblicz prędkość kuli w chwili, gdy zacznie się toczyć bez poślizgu.

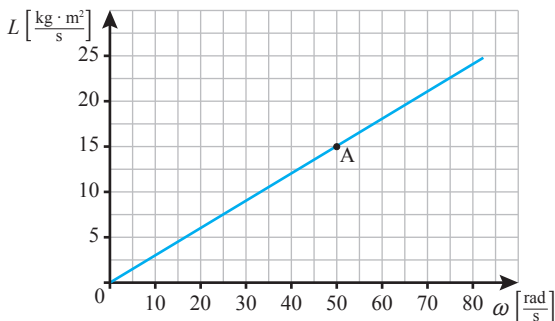
6.6. Moment pędu bryły sztywnej

Podręcznik
rozdz. 6.6

■ Przykład 1.

Na wykresie pokazano zależność momentu pędu pewnej bryły od prędkości kątowej, z jaką bryła obraca się względem ustalonej osi obrotu.

- Oblicz moment bezwładności bryły względem osi obrotu.
- Oblicz moment siły potrzebny do rozpędzenia bryły do prędkości kątowej $\omega = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ w czasie $\Delta t = 3 \text{ s}$. Przyjmij, że ruch obrotowy był jednostajnie przyspieszony.



Rozwiązanie

- Moment bezwładności obliczamy jako współczynnik kierunkowy prostej na wykresie, na podstawie równości $L = I\omega$. Nachylenie prostej określimy jako stosunek różnicy rzędnych do różnicy odciętych w punkcie A i w początku układu współrzędnych. Różnica rzędnych wynosi $15 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$, a różnica odciętych $50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Stąd:

$$I = \frac{15 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}}{50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 0,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Odpowiedź: Moment bezwładności bryły ma wartość $I = 0,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

- Korzystamy z drugiej zasady dynamiki w postaci ogólnej:

$$\overline{M} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}$$

Moment siły działający na bryłę powoduje zmianę w czasie jej momentu pędu.

Zmianę momentu pędu odczytamy z wykresu.

Wiemy, że w czasie $\Delta t = 3 \text{ s}$ prędkość kątowa wzrosła od 0 do $50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, zatem moment pędu zmienił się od 0 do $15 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$.

Wartości odczytane z wykresu wstawiamy do wzoru:

$$M = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{15 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}}{3 \text{ s}} = 5 \text{ Nm}$$

Odpowiedź: Rozpędzenie bryły do prędkości kątowej $50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ w czasie 3 s wymagało działania stałego momentu siły $M = 5 \text{ Nm}$.

■ Przykład 2.

Chłopiec siedział na fotelu obrotowym, trzymając w rozłożonych rękach ciężarki o masie $m = 5 \text{ kg}$ każdy. Fotel wprowadzono w ruch obrotowy i po pewnym czasie częstotliwość obrotów wynosiła $f_1 = 1,5 \text{ Hz}$. Przyjmij, że przemieszczanie ciężarków zachodziło na tej samej wysokości, oraz że moment bezwładności chłopca wraz z fotelem względem osi obrotu jest stały i wynosi $I_{\text{ch}} = 2,6 \text{ kgm}^2$. Pomiń opory ruchu.

- Ile wynosiła częstotliwość obrotów, gdy chłopiec zbliżył ciężarki do tułowia, czyli z początkowej odległości $r_1 = 80 \text{ cm}$ na odległość $r_2 = 20 \text{ cm}$ od osi obrotu.
- Jaką pracę wykonał chłopiec, gdy zmienił położenie ciężarków względem osi obrotu.

Rozwiązanie

- Chłopiec, fotel i ciężarki stanowią układ fizyczny. Skoro pomijamy opory ruchu, to na ten układ nie działa żaden moment siły, a moment pędu układu pozostaje stały:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = \text{const}$$

Oznacza to, że jeżeli w tym układzie moment bezwładności wzrośnie n razy, to prędkość kątowa zmaleje n razy.

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

Moment bezwładności układu to suma momentu bezwładności chłopca wraz z fotelem i momentu bezwładności dwóch ciężarków:

$$I = I_{\text{ch}} + 2mr^2$$

Początkowy moment bezwładności jest zatem równy:

$$I_1 = I_{\text{ch}} + 2mr_1^2$$

natomiast końcowy moment bezwładności wynosi:

$$I_2 = I_{\text{ch}} + 2mr_2^2$$

Możemy więc zapisać zasadę zachowania momentu pędu:

$$(I_{\text{ch}} + 2mr_1^2)\omega_1 = (I_{\text{ch}} + 2mr_2^2)\omega_2$$

$$(I_{\text{ch}} + 2mr_1^2)2\pi f_1 = (I_{\text{ch}} + 2mr_2^2)2\pi f_2$$

Z równania wyznaczamy częstotliwość f_2 :

$$f_2 = \frac{(I_{\text{ch}} + 2mr_1^2)}{(I_{\text{ch}} + 2mr_2^2)} f_1$$

Wstawiamy wartości liczbowe:

$$f_2 = \frac{2,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 + 2 \cdot 5 \text{ kg} \cdot (0,8 \text{ m})^2}{2,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 + 2 \cdot 5 \text{ kg} \cdot (0,2 \text{ m})^2} 1,5 \text{ Hz} = \frac{9}{3} \cdot 1,5 \text{ Hz} = 3 \cdot 1,5 \text{ Hz} = 4,5 \text{ Hz}$$

Odpowiedź: Po zbliżeniu ciężarków do tułowia na odległość $0,2 \text{ m}$ chłopiec zacznie się obracać z częstotliwością $f_2 = 4,5 \text{ Hz}$.

- b) Praca wykonana przez chłopca jest równa przyrostowi energii kinetycznej:

$$W = \Delta E_k$$

Obliczamy początkową i końcową energię kinetyczną:

$$E_{k1} = \frac{I_1 \omega_1^2}{2} = I_1 2\pi^2 f_1^2, \quad \text{gdzie} \quad I_1 = I_{\text{ch}} + 2mr_1^2 = 9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$E_{k2} = \frac{I_2 \omega_2^2}{2} = I_2 2\pi^2 f_2^2, \quad \text{gdzie} \quad I_2 = I_{\text{ch}} + 2mr_2^2 = 3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

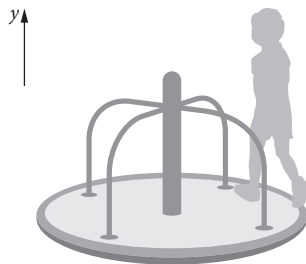
$$W = \Delta E_k = 2\pi^2 (I_2 f_2^2 - I_1 f_1^2)$$

$$W = 2 \cdot 3,14^2 \cdot (3 \cdot 4,5^2 - 9 \cdot 1,5^2) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \frac{1}{\text{s}^2} = 798,6 \text{ J}$$

Odpowiedź: Praca wykonana podczas przemieszczenia ciężarków wyniosła 798,6 J.

■ Przykład 3.

Na podłodze nieruchomej karuzeli w kształcie koła o momencie bezwładności $I_k = 10,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ i promieniu $r = 0,9 \text{ m}$ stoi dziecko o masie $m = 35 \text{ kg}$. W pewnym momencie zaczyna ono poruszać się wzdłuż brzegu podłogi karuzeli przeciwnie do ruchu wskazówek zegara z prędkością $v = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ względem niej. Skorzystaj z zasady zachowania momentu pędu i:



- ustal, w którą stronę zacznie obracać się karuzela,
- oblicz prędkość kątową karuzeli.

Rozwiązanie

- a) Stosujemy zasadę zachowania momentu pędu dla układu karuzela–dziecko.

$$\vec{L}_p = \vec{L}_k$$

Początkowy moment pędu $\vec{L}_p = 0$, ponieważ karuzela i dziecko były w spoczynku.

Końcowy moment pędu $\vec{L}_k$ to suma momentów pędu dziecka $\vec{L}_{dz}$ i karuzeli $\vec{L}_{kr}$, czyli:

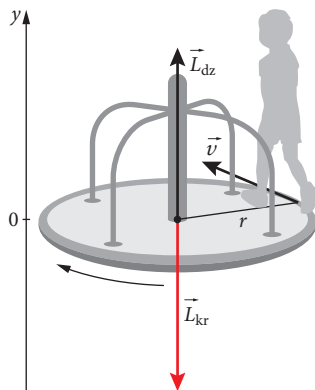
$$0 = \vec{L}_{dz} + \vec{L}_{kr}$$

Stąd wynika, że:

$$\vec{L}_{kr} = -\vec{L}_{dz}$$

Wprowadzamy pionową oś y .

Dziecko poruszające się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara wzdłuż brzegu karuzeli uzyskuje moment pędu zgodny z osią y . Z równania wynika, że karuzela uzyska moment pędu równy co do wartości momentowi pędu dziecka, lecz o przeciwnym zwrocie.



Odpowiedź: Karuzela zacznie poruszać się przeciwnie do kierunku ruchu dziecka, czyli zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

- b) Aby obliczyć prędkość kątową karuzeli ω_{kr} , ponownie należy odwołać się do zasady zachowania momentu pędu. W punkcie a) powiedzieliśmy, że skoro początkowy moment pędu układu był równy zero:

$$\vec{L}_p = \vec{L}_k \Rightarrow 0 = \vec{L}_{dz} + \vec{L}_{kr}$$

to końcowe momenty pędów dziecka i karuzeli muszą być równe co do wartości. Zatem:

$$I_{kr}\omega_{kr} = I_{dz}\omega_{dz}$$

Zwróćmy uwagę, że prędkościątowe w powyższym równaniu są określone względem zewnętrznego układu odniesienia, np. ziemi. W treści zadania mamy natomiast podaną prędkość, z jaką chłopiec zaczął poruszać się względem karuzeli. Zatem ze wzoru:

$$\omega_{dz-kr} = \frac{v}{r}$$

obliczymy prędkość kątową chłopca względem karuzeli. Aby obliczyć prędkość kątową chłopca względem ziemi należy od prędkości kątovej chłopca względem karuzeli odjąć prędkość kątową karuzeli:

$$\omega_{dz} = \omega_{dz-kr} - \omega_{kr} = \frac{v}{r} - \omega_{kr}$$

A zatem:

$$I_{kr}\omega_{kr} = I_{dz}\left(\frac{v}{r} - \omega_{kr}\right)$$

Moment bezwładności dziecka to iloczyn masy i kwadratu jego odległości od osi obrotu:

$$I_{dz} = mr^2$$

Otrzymujemy równanie:

$$I_{kr}\omega_{kr} = mr^2\left(\frac{v}{r} - \omega_{kr}\right)$$

z którego wyznaczamy prędkość kątową karuzeli:

$$\omega_{kr} = \frac{mrv}{I_{kr} + mr^2}$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymamy:

$$\omega_{kr} = \frac{35 \text{ kg} \cdot 0,9 \text{ m} \cdot 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 + 35 \text{ kg} \cdot (0,9 \text{ m})^2} = 1,2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Odpowiedź: Prędkość kątową karuzeli wynosi $1,2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

■ Przykład 4.

Pulsary są gwiazdami neutronowymi, powstałymi w wyniku ewolucji gwiazd masywniejszych od Słońca. Gwiazda o masie $M = 2M_s$ i promieniu $R = 1,5R_s$ wirująca z częstotliwością $f = 4 \cdot 10^{-5} \text{ Hz}$ w końcowym etapie ewolucji wyrzuca w przestrzeń kosmiczną 80% swojej masy, a jej jądro gwałtownie się zapada i coraz szybciej wiruje. Masa Słońca wynosi $M_s = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, a promień Słońca $R_s = 7 \cdot 10^8 \text{ m}$. Przyjmij uproszczony model, w którym:

- moment pędu odrzuconej w przestrzeń kosmiczną masy gwiazdy wynosi zero,
- gwiazda jest jednorodną kulą o momencie bezwładności $I = 0,4mR^2$.

- a) Oblicz okres obrotu gwiazdy wokół własnej osi, gdy jej promień zmniejszy się 10 000 razy.
 b) Oblicz, ile razy w wyniku zapadnięcia się gwiazdy wzrośnie jej gęstość.

Rozwiązanie

- a) Ponieważ przyjmujemy, że odrzucona masa nie ma momentu pędu, możemy skorzystać z zasady zachowania momentu pędu:

$$\vec{L}_p = \vec{L}_k$$

A więc:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

Początkowy moment bezwładności gwiazdy to:

$$I_1 = 0,4MR^2$$

W końcowym etapie masa gwiazdy wynosi $m = 0,2M$, a jej promień $r = 10^{-4}R$, a więc jej moment bezwładności wynosi:

$$I_2 = 0,4(0,2 \cdot M) \cdot (10^{-4} \cdot R)^2$$

Możemy zatem zapisać zasadę zachowania momentu pędu w postaci:

$$0,4MR^2 2\pi f_1 = 0,08M \cdot 10^{-8} \cdot R^2 \cdot 2\pi f_2$$

Z równania wyznaczamy częstotliwość f_2 :

$$f_2 = \frac{5}{10^{-8}} f_1$$

$$f_2 = 5 \cdot 10^8 \cdot 4 \cdot 10^{-5} \text{ Hz} = 20 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

Znamy częstotliwość, więc możemy obliczyć okres obrotu gwiazdy wokół własnej osi:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{20 \cdot 10^3 \text{ Hz}} = 0,05 \text{ ms}$$

Odpowiedź: Częstotliwość obrotów gwiazdy neutronowej to $20 \cdot 10^3 \text{ Hz}$, a okres wirowania 0,05 ms.

- b) Stosujemy wzór na gęstość substancji:

$$d = \frac{M}{V}$$

i zapisujemy odpowiednio dla gwiazdy w stanach początkowym i końcowym:

$$d_1 = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad d_2 = \frac{0,2M}{\frac{4}{3}\pi (10^{-4}R)^3}$$

następnie dzielimy d_2 przez d_1 :

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{0,2M}{\frac{4}{3}\pi (10^{-4}R)^3} \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{M}$$

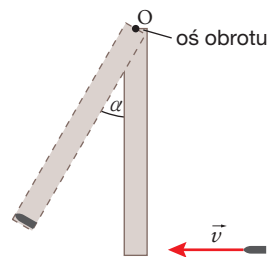
i otrzymujemy:

$$\frac{d_2}{d_1} = 2 \cdot 10^{11} = 200 \cdot 10^9$$

Odpowiedź: Gęstość materii gwiazdy neutronowej jest 200 miliardów razy większa od gęstości gwiazdy takiej jak Słońce, którego gęstość średnia to $1400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

■ Przykład 5.

Jednorodną drewnianą belkę o masie $m_b = 6$ kg i długości $l = 1,2$ m zamocowano tak, że może obracać się wokół osi poziomej przechodzącej przez jeden z jej końców. W drugi koniec nieruchomej, zwisającej pionowo belki trafia pocisk o masie $m_p = 20$ g, lecący poziomo z prędkością $v = 300 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, i grzęźnie w niej. Oblicz prędkość kątową belki tuż po uderzeniu pocisku oraz prędkość liniową końca belki. Moment bezwładności belki względem osi prostopadłej do belki i przechodzącej przez jej koniec wynosi $I = \frac{1}{3}ml^2$.



Rozwiązanie

Stosujemy zasadę zachowania momentu pędu dla układu ciał pocisk i belka.

$$\vec{L}_0 = \vec{L}_k$$

Początkowy moment pędu jest sumą momentów pędu belki i pocisku. Ponieważ belka jest w spoczynku, jej moment pędu wynosi zero. Pocisk traktujemy jak punkt materialny o momencie pędu $\vec{L} = \vec{r} \cdot m\vec{v}$, gdzie r to odległość od osi obrotu równa długości belki.

Kąt między wektorami $\vec{r}$ i $\vec{v}$ to 90° , zatem wzór na moment pędu pocisku możemy zapisać:

$$L_p = m_p v l$$

Końcowy moment pędu to moment belki i pocisku:

$$L_k = (I_p + I_b)\omega$$

Moment bezwładności belki i pocisku są równe odpowiednio:

$$I_b = \frac{1}{3}m_b l^2 \text{ i } I_p = m_p l^2$$

Po uwzględnieniu tych zależności otrzymamy równanie:

$$m_p v l = \left(\frac{1}{3}m_b l^2 + m_p l^2 \right) \omega$$

z którego obliczymy prędkość kątową belki:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{m_p v l}{\frac{1}{3}m_b l^2 + m_p l^2} = \frac{m_p v}{l \left(\frac{1}{3}m_b + m_p \right)} \\ \omega &= \frac{0,02 \text{ kg} \cdot 300 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1,2 \text{ m} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 6 \text{ kg} + 0,02 \text{ kg} \right)} = 2,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ v &= \omega l = 2,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 1,2 \text{ m} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

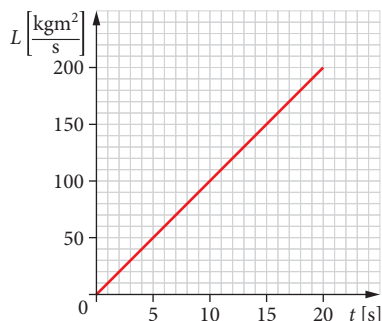
Odpowiedź: Prędkość kątową belki zaraz po uderzeniu pocisku wynosi $2,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, a prędkość liniową końca belki $3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Pytania i zadania

- • **6.6.1.** Koło zamachowe o momencie bezwładności $I = 2,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ zaczyna obracać się względem ustalonej osi ruchem jednostajnie przyspieszonym obrotowym. Zależność momentu pędu koła od czasu trwania tego ruchu przedstawiono na wykresie.

P1

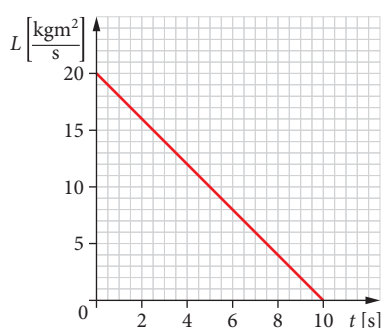
- a) Oblicz moment siły wprawiający koło w ruch jednostajnie przyspieszony obrotowy.
b) Oblicz prędkość kątową koła po czasie $\Delta t = 20 \text{ s}$ trwania ruchu oraz wartość przyspieszenia kąowego.



- • **6.6.2.** Koło osadzone na osi przechodzącej przez jego środek masy wiruje ze stałą prędkością kątową $\omega_0 = 40 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Po przyłożeniu do obwodu koła siły hamującej rozpoczął się ruch obrotowy jednostajnie opóźniony. Zależność momentu pędu koła od czasu przedstawia wykres. Oblicz:

P1

- a) moment siły hamującej,
b) moment bezwładności koła,
c) prędkość kątową koła po czasie $t = 4 \text{ s}$ trwania ruchu.



- • **6.6.3.** Chłopiec siedzący na stołku obrotowym w rozłożonych rękach trzyma hantle. Stołek wprawiono w ruch obrotowy tak, że po pewnym czasie obracał się $n_1 = 36$ razy na minutę. Odległość hantli od osi obrotu wynosiła w tym momencie $r_1 = 65 \text{ cm}$. Ile wyniesie częstotliwość obrotów, gdy chłopiec zbliży hantle do tułowia na odległość $r_2 = 10 \text{ cm}$ od osi obrotu. Przyjmij, że moment bezwładności chłopca względem osi obrotu jest stały i równy momentowi bezwładności dwóch hantli w położeniu początkowym $I_{\text{ch}} = 2I_{\text{h},1}$, gdzie $I_{\text{h},1} = mr_1^2$.

P2

- • **P2** Łyżwiarka wykonywała pewne ewolucje podczas kręcenia piruetu. W pozycji pokazanej na 1. rysunku obracała się 135 razy w ciągu minuty. Po zmianie figury na taką, jaką widać na 2. rysunku, jej moment bezwładności zwiększył się o połowę w stosunku do wartości początkowej. Oblicz, z jaką częstotliwością wirowała tancerka w tej pozycji.

1.



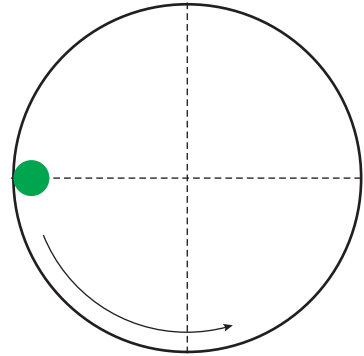
2.



- • **6.6.4.** Na karuzeli tarczowej o masie $M = 24 \text{ kg}$ i średnicy $D = 1,8 \text{ m}$ posadzono twarzą w kierunku środka karuzeli dziecko trzymające na kolanach piłkę o masie $m_p = 2 \text{ kg}$. Karuzelę wprowadzono w ruch obrotowy. W czasie $t = 1 \text{ min}$ wykonała ona $n_1 = 10$ obrotów. Czy prędkość kątową karuzeli wzrośnie, zmaleje, czy się nie zmieni, jeżeli dziecko potoczy piłkę w kierunku środka karuzeli?

P2

Oblicz prędkość kątową dla sytuacji, gdy piłka znajduje się na środku tarczy. Przyjmij moment bezwładności karuzeli względem osi przechodzącej przez środek tarczy $I_t = \frac{1}{2}MR^2$, początkową odległość piłki od środka tarczy $r = 0,8 \text{ m}$, moment bezwładności dziecka względem osi przechodzącej przez środek tarczy $I_{dz} = 11,52 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.



- • **6.6.5.** Dzieci usiadły na karuzeli (patrz rysunek) po dwoje na każdej ławeczce, tak że masa dwójki dzieci wyniosła $M = 50 \text{ kg}$. Każde dziecko otrzymało piłkę lekarską o masie $m_p = 2 \text{ kg}$. Instruktor umocował na osi obrotu kosz, a następnie wprowadził karuzelę w ruch obrotowy z prędkością kątową $\omega_1 = 0,4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Jaka będzie częstotliwość końcowa karuzeli, jeśli na sygnał gwizdka dzieci wrzucą piłki do kosza?

P2



Przyjmij odległość dzieci na ławeczkach i odległość piłek od osi obrotu równą promieniowi karuzeli $R = 1,2 \text{ m}$. Moment bezwładności karuzeli $I_0 = 40 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, momenty bezwładności dzieci i piłek przyjmij jak dla punktów materialnych.

Informacja do zadań 6.6.6 i 6.6.7. W Ogrodzie Doświadczeń im. Stanisława Lema w Krakowie znajduje się duża platforma obrotowa o promieniu $R = 1,3 \text{ m}$ i masie $M = 120 \text{ kg}$, służąca do badania ruchu obrotowego bryły sztywnej.

Doświadczenia wykonuje dziewczynka o masie $m = 50 \text{ kg}$. Moment bezwładności: platformy $I_p = \frac{1}{2}MR^2$, dziewczynki $I_{dz} = mr^2$, gdzie r to odległość dziewczynki od środka platformy.

- • **6.6.6.** Dziewczynka stoi na okrągłej nieruchomej platformie. Oblicz prędkość kątową platformy względem ziemi, gdy dziewczynka zacznie poruszać się wzdłuż obwodu platformy z prędkością $v = 1,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ względem platformy.

P3

- • **6.6.7.** Platforma wraz z dziewczynką została wprowadzona w ruch obrotowy z prędkością kątową $\omega_0 = \frac{\pi}{2} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

P3

- Oblicz prędkość kątową platformy, gdy dziewczynka przejdzie wzdłuż promienia tarczy od brzegu do jej środka.
- Oblicz pracę wykonaną przez dziewczynkę podczas przechodzenia od brzegu tarczy do jej środka.
- Jaka siła działająca prostopadle do promienia, wzdłuż którego porusza się dziewczynka, utrudnia jej przejście wzdłuż średnicy karuzeli?

- • **6.6.8.** P3 Uczeń o masie $m = 65$ kg stoi na obrotowej platformie. Oblicz prędkość kątową platformy i liczbę jej obrotów w ciągu 1 minuty, gdy uczeń zacznie się poruszać wzdłuż brzegu platformy w odległości $r = 1$ m od jej osi obrotu z prędkością $v = 5,4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ względem platformy. Platforma ma masę $M = 90$ kg i promień $R = 1,5$ m, a jej moment bezwładności to $I = \frac{1}{2}MR^2$.

- • **6.6.9.** P4 Pulsar PSR B0531+21, znajdujący się w centrum mgławicy Kraba, jest pozostałością po wybuchu supernowej, który obserwowano na niebie w 1054 r. Obecnie ta gwiazda w kształcie kuli ma średnicę $d = 10$ km i obraca się 30 razy na sekundę. Oblicz jej okres obrotów wtedy, gdy jej promień był 10 000 razy dłuższy, niż jest obecnie.



- • **6.6.10.** P4 Pulsar Vela, oddległy od Ziemi o około 800 lat świetlnych, jest gwiazdą neutronową o masie przekraczającej masę Słońca i średnicy d około 2 km. Po wybuchu supernowej zewnętrzna otoczka tej gwiazdy została odrzucona w przestrzeń, a powstające jądro skurczyło się i zaczęło szybko wirować. Obecnie pulsar Vela wiruje z częstotliwością $f_1 = 10$ Hz. Oblicz okres obrotów gwiazdy wtedy, gdy jej promień był $n = 1000$ razy dłuższy niż obecnie. Załóż, że gwiazda neutronowa jest kulą.

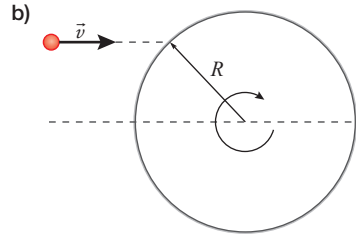
Wskazówka. W czasie kurczenia się gwiazda neutronowa jest układem izolowanym, więc jej moment pędu jest stały.

- • **6.6.11.** P4 Przyjmijmy, że gdzieś we Wszechświecie znajduje się planeta o masie $m_1 = 5,97 \cdot 10^{24}$ g, której księżyc, krążący po orbicie eliptycznej, ma masę $m_2 = 0,1m_1$. Największa odległość księżycy od planety (apocentrum) wynosi $r_a = 1,15 \cdot 10^5$ m, a jego prędkość liniowa $v_a = 5,88 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz wartość prędkości liniowej księżycy w najbliższej odległości od planety (perycentrum), jeżeli jego odległość od planety wynosi wtedy $r_p = 1,05 \cdot 10^5$ m. Załóż, że księżyc krąży wokół nieruchomej planety.

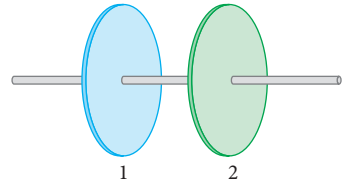
- • **6.6.12.** P5 Drewnianą jednorodną belkę o masie $M = 5$ kg i długości $l = 1$ m zamocowano tak, że może obracać się wokół osi poziomej przechodzącej przez jeden z jej końców. Bardzo blisko drugiego końca nieruchomej, zwisającej pionowo belki trafia pocisk o masie $m = 20$ g, lecący poziomo z prędkością o wartości $v_1 = 500 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Pocisk przebija belkę na wylot i porusza się dalej z prędkością o wartości $v_2 = 200 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz prędkość kątową belki tuż po przestrzeleniu jej pociskiem. Moment bezwładności belki względem osi prostopadłej do belki i przechodzącej przez jej koniec wynosi $I = \frac{1}{3}Ml^2$.

- • **6.6.13.** P5 Małe koło garncarskie może obracać się swobodnie wokół osi pionowej przechodzącej przez jego środek. W pewnej chwili na płytę garncarską obracającą się z prędkością kątową $\omega_0 = 3,14 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ spadł kawałek mokrej gliny o masie $m = 250$ g i przykleił się do niej w odległości $r = 8$ cm od osi obrotu. Oblicz prędkość kątową koła garncarskiego tuż po przyklejeniu się niego kawałka gliny. Moment bezwładności koła garncarskiego $I_k = 18,15 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$, moment bezwładności kawałka gliny $I_g = mr^2$.

- • **6.6.14.** Kula dla myszy (rys. a) może swobodnie obracać się wokół osi poziomej. Promień kuli $R = 6$ cm, a masa $M = 120$ g. Dziewczynka ulepiła kulkę z plasteliny o masie $m = 30$ g i rzuciła ją w kierunku pustej kuli. Plastelina przyklepiła się do niej na wysokości $h = 5$ cm od poziomej osi obrotu (patrz rys. b). Oblicz prędkość kątową kuli tuż po przyklejeniu się plasteliny, jeżeli kulka została wyrzuciona przez dziewczynkę z prędkością $v = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Kula dla myszy to sfera o momencie bezwładności $I = \frac{2}{3}MR^2$.

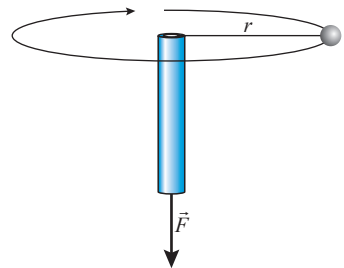


- • **6.6.15.** Dwa krążki o momentach bezwładności I_1 oraz I_2 osadzone na wspólnej poziomej osi wirują niezależnie z prędkościami kątowymi ω_1 i ω_2 . W pewnej chwili krążki zsunięto do siebie, tak że się zlepiły. Oblicz prędkość kątową krążków po zlepieniu, gdy:



- a) moment bezwładności pierwszego krążka jest dwa razy większy niż drugiego $I_1 = 2I_2$, a oba krążki wirują zgodnie z ruchem wskazówek zegara z prędkościami kątowymi wynoszącymi odpowiednio: $\omega_1 = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ oraz $\omega_2 = \frac{1}{4}\omega_1$,
- b) moment bezwładności pierwszego krążka jest cztery razy mniejszy niż drugiego $I_1 = \frac{1}{4}I_2$, krążek pierwszy wiruje zgodnie z ruchem wskazówek zegara, drugi natomiast przeciwnie, a ich prędkościątowe są równe odpowiednio: $\omega_1 = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $\omega_2 = \frac{1}{2}\omega_1$.

- • **6.6.16.** Uczniowie sprawdzili zasadę zachowania momentu pędu za pomocą prostego układu doświadczalnego składającego się z plastikowej rurki, mocnej, nierozciągliwej nici oraz gumki do ścierania. Gumkę do ścierania przyczepili do nici, a jej wolny koniec przewlekli przez rurkę i zawiesili na nim obciążnik o ciężarze F .



Na nici zaznaczyli odległość między gumką a rurką i zmierzili promień r . Następnie zaznaczyli odległość dwa razy mniejszą od r . Wprawili gumkę na nici w ruch obrotowy, tak aby wirowała w płaszczyźnie zbliżonej do płaszczyzny poziomej w stałej odległości r od rurki. Zmierzyli liczbę obrotów gumki w pewnym przedziale czasu Δt , aby móc wyznaczyć ich częstotliwość. Bez zatrzymywania gumki zawiesili dodatkowy obciążnik na nici tak, że promień okręgu, po którym gumka się poruszała zmniejszył się do $\frac{r}{2}$ i powtórzyli pomiar.

Przeprowadzając odpowiednie obliczenia określ, jaką częstotliwość powinni otrzymać uczniowie w drugiej części eksperymentu.

Klasyka fizyki B. Mendel i J. Mendel

6.1. Samochód osobowy jedzie z prędkością liniową $v = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Z jaką prędkością kątową obraca się jego koła, jeżeli ich średnica wynosi $d = 75 \text{ cm}$?

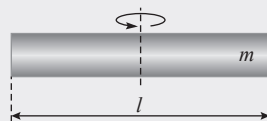
6.2. Jaką wartość ma prędkość liniowa końca minutowej wskazówki zegara na wieży ratowniczej, jeżeli jej długość wynosi $l = 5 \text{ m}$?

6.3. Jaki jest moment bezwładności I oraz moment pędu L kuli ziemskiej? Promień Ziemi $R = 6400 \text{ km}$, a jej masa $m = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. Okres obrotu Ziemi $T = 24 \text{ h}$. Załóż jednorodny rozkład masy Ziemi.

6.4. Nieruchomy walec o momencie bezwładności $I = 25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ został wprawiony w ruch obrotowy wokół osi równoległej do tworzącej i przechodzącej przez jego środek. Moment siły względem osi obrotu wynosił $M = 50 \text{ Nm}$. Po jakim czasie od chwili rozpoczęcia obracania się walec wykona $N = 400$ obrotów? Wiadomo, że jego prędkość kątowa rośnie liniowo od zera.

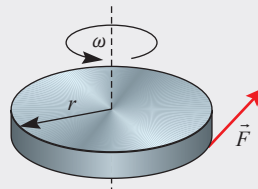
- a) 20 s b) 40 s c) 50 s d) 80 s

6.5. Pręt o długości $l = 1 \text{ m}$ i masie $m = 400 \text{ g}$ (patrz rysunek) wiruje wokół pionowej osi, prostopadłej do pręta i przechodzącej przez jego środek. Jakie jest przyspieszenie kątowe w ruchu obrotowym pręta, gdy działa na niego moment siły $M = 0,05 \text{ Nm}$?



6.6. Metalowe koło o momencie bezwładności $I = 120 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ wiruje z prędkością kątową $\omega = 25 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ wokół pionowej osi, przechodzącej przez środek koła. Oblicz moment siły hamującej, która spowoduje zatrzymanie się koła po czasie $t = 20 \text{ s}$.

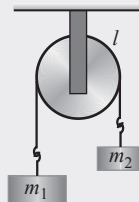
6.7. Do jednorodnego krążka o promieniu $r = 40 \text{ cm}$ i masie $m = 50 \text{ kg}$ przyłożono stycznie do jego obwodu siłę o wartości $F = 50 \text{ N}$ (patrz rysunek). Po jakim czasie t krążek uzyska prędkość kątową $\omega = 100 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$?



6.8. Koło zamachowe pod wpływem siły napędzającej obracało się z częstotliwością $f = 16 \text{ Hz}$. Kiedy wyłączono silnik napędzający koło, zatrzymało się ono po czasie $t = 50 \text{ s}$. Jaki był moment siły hamującej? Moment bezwładności koła wynosił $I = 50 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

- a) 0 Nm b) 50 Nm c) 100 Nm d) 150 Nm

6.9. Przez nieruchomy blok o promieniu R , który ma moment bezwładności I , przerzucono nić i na jej końcach umieszczono dwa ciężarki o masach m_1 i m_2 (patrz rysunek). Jakie będą siły napinające nici N_1 i N_2 po obu stronach bloku, jeżeli układ ciężarków zacznie poruszać się pod wpływem siły ciężkości?



6.10. Po stole toczy się bez poślizgów moneta o masie $m = 50 \text{ g}$ z prędkością $v = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Jaka jest jej całkowita energia kinetyczna?

6.11. Jednorodna kula toczy się bez poślizgu po poziomej powierzchni. Jaki jest stosunek energii kinetycznej ruchu postępowego kuli do jej całkowitej energii kinetycznej?

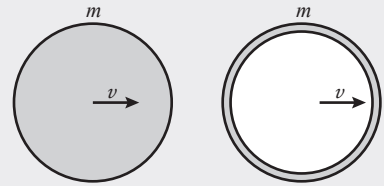
a) $\frac{1}{7}$

b) $\frac{3}{7}$

c) $\frac{1}{2}$

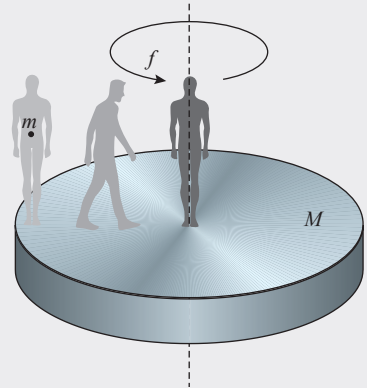
d) $\frac{5}{7}$

6.12. Obręcz i krążek o jednakowych masach m (patrz rysunek obok) toczą się bez poślizgu po poziomej powierzchni z jednakowymi prędkościami o wartości v . Oblicz całkowitą energię kinetyczną krążka. Całkowita energia kinetyczna obręczy $E_{kp} = 16 \text{ J}$.



6.13. Energia kinetyczna wału obracającego się z częstotliwością $f = 10$ obrotów na sekundę wynosi $E_k = 120 \text{ J}$. Jaki jest moment pędu wału L ?

6.14. Platforma obrotowa o masie $M = 341 \text{ kg}$ wiruje w płaszczyźnie poziomej z częstotliwością $f = 12$ obrotów na minutę wokół osi przechodzącej przez jej środek. Na brzegu platformy stoi człowiek (patrz rysunek obok) o masie $m = 75 \text{ kg}$. Z jaką częstotliwością będzie obracać się platforma, jeżeli człowiek przejdzie na jej środek? Platforma ma kształt dużego krążka, człowieka można uznać za masę skupioną w jednym punkcie.



6.15. Łyżwiarz wiruje na lodzie z częstotliwością $f_1 = 1 \text{ Hz}$, mając rozłożone szeroko ręce. Jeśli przyciągnie ręce do tułowia, jego moment bezwładności zmaleje z $I_1 = 2,94 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ do $I_2 = 0,98 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Z jaką częstotliwością f_2 będzie obracać się łyżwiarz po przyciągnięciu rąk?

6.16. Wentylator obracał się z częstotliwością $f = 15 \frac{\text{obr}}{\text{min}}$. Po wyłączeniu zasilania wentylatora jego łopatki wykonały jeszcze $n = 75$ obrotów, a siły oporów ruchu wykonały pracę $W = 43,3 \text{ J}$. Jakie wartości mają moment bezwładności I obracającej się części wentylatora i moment sił oporów ruchu? Zakładamy, że prędkość obrotowa wentylatora od chwili wyłączenia go malała liniowo.

6.17. Człowiek o masie $m = 50 \text{ kg}$ znajduje się na platformie o masie $M = 100 \text{ kg}$, która jest dużym krążkiem o promieniu $R = 5 \text{ m}$ i może swobodnie obracać się względem pionowej osi przechodzącej przez jej środek. Z jaką prędkością kątową zacznie obracać się platforma, jeśli człowiek zacznie iść po brzegu platformy? Prędkość człowieka względem platformy wynosi $u = 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Zadania maturalne

■ Przykład. Łyżwiarz

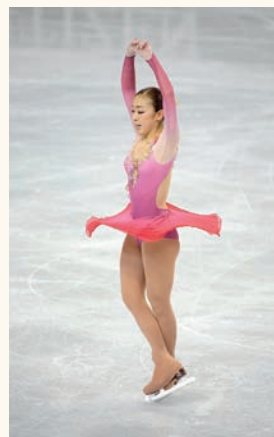
Łyżwiarze figurowi wykorzystują związek między momentem bezwładności a sposobem rozłożenia masy wokół osi obrotu podczas wykonywania ewolucji takich jak skoki czy piruety. Zaczynają wykonywać piruet z rozłożonymi rękami i po jakimś czasie przyciągają ręce do siebie, zmniejszając w ten sposób swój moment bezwładności. Dzięki temu zaczynają wirować szybciej.

P.1. Wyprowadź wzór na moment pędu łyżwiarza wykonującego piruet w zależności od jego momentu bezwładności i energii kinetycznej ruchu obrotowego.

P.2. Wyznacz zmianę częstotliwości ruchu obrotowego łyżwiarza wykonującego piruet, jeśli jego moment bezwładności zmniejszył się o 0,2 wartości początkowej.

P.3. Łyżwiarze sportowi wykonują wspólnie piruet, podczas którego partnerka siedzi na ramionach partnera. W czasie tej ewolucji prędkość kątowa obracającej się pary jest 1,5 raza mniejsza od prędkości kątowej łyżwiarza wykonującego tę samą figurę w pojedynkę. Zakładając, że położenie rąk i nóg łyżwiarza nie zmienia się w czasie piruetu, wyznacz stosunek momentów bezwładności obojga łyżwiarzy.

P.4. Łyżwiarz jedzie po lodzie z prędkością $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ po okręgu o promieniu 10 m. Oblicz kąt, o jaki musi się odchylić od pionu, aby zachować równowagę.



Rozwiązanie

P.1. Moment pędu łyżwiarza o momencie bezwładności I i prędkości kątowej ω wynosi:

$$L = I\omega$$

Jego energia kinetyczna określona jest zależnością:

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2}$$

Z drugiego równania wyznaczamy $\omega = \sqrt{\frac{2E_k}{I}}$ i podstawiamy do pierwszego równania:

$$L = I\sqrt{\frac{2E_k}{I}} = \sqrt{2E_k I}$$

Odpowiedź: Moment pędu łyżwiarza w zależności od jego energii kinetycznej $L = \sqrt{2E_k I}$

P.2. Moment pędu łyżwiarza przy wykonywaniu piruetów jest stały $L_1 = L_2$. Zmianę częstotliwości obrotów łyżwiarza możemy wyznaczyć, rozwiązując równanie:

$$\omega_1 I_1 = \omega_2 I_2$$

Po podstawieniu odpowiednich zależności otrzymujemy:

$$2\pi f_1 I_1 = 2\pi f_2 0,8 I_1 \Rightarrow f_2 = 1,25 f_1$$

Odpowiedź: Częstotliwość obrotów łyżwiarza wzrośnie 1,25 raza.

P.3. Moment bezwładności łyżwiarza i łyżwiarki wykonujących wspólnie piruet jest równy sumie ich momentów bezwładności w przypadku, gdyby wykonywali piruet pojedynczo. Na podstawie z informacji podanych w zadaniu, możemy zapisać:

$$\omega_1 I_1 = \omega_2 (I_1 + I_2)$$

gdzie I_1 – moment bezwładności łyżwiarza wykonującego piruet w pojedynkę, I_2 – moment bezwładności łyżwiarki wykonującej piruet w pojedynkę. Rozwiązując równanie, przy uwzględnieniu zależności $\omega_1 = 1,5\omega_2$, otrzymujemy:

$$\frac{I_2}{I_1} = 0,5$$

Odpowiedź: Stosunek momentów bezwładności łyżwiarki i łyżwiarza wynosi 0,5.

P.4. Aby obliczyć kąt odchylenia łyżwiarza od pionu, wykorzystujemy zależności pomiędzy siłą grawitacji i dośrodkową:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{mv^2}{r}}{mg} = \frac{v^2}{rg}$$

Podstawiamy dane liczbowe:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{36 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{10 \text{ m} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0,37 \Rightarrow \alpha = 20^\circ$$

Odpowiedź: Łyżwiarz odchyli się od pionu o kąt 20° .

Pytania i zadania

Zadanie 1. Krąg studzienny

Na szczycie wzniesienia o długości stoku 80 m i stałym kącie nachylenia 30° pozostawiono betonowy krąg studzienny o masie 530 kg, który w pewnej chwili zaczął się z niego staczać. Średnica zewnętrzna kręgu jest równa 1800 mm, a wewnętrzna 1500 mm. Przyjmij, że moment bezwładności kręgu jest równy momentowi bezwładności rury cylindrycznej $I = \frac{1}{2}m(r_w^2 + r_z^2)$, gdzie r_w – promień wewnętrzny kręgu, a r_z – promień zewnętrzny kręgu, oraz że ruch kręgu odbywa się bez poślizgu.



1.1. Po jakim czasie krąg stoczy się ze wzniesienia?

1.2. Oblicz prędkość kątową kręgu u podnóża wzniesienia.

1.3. Jaki warunek musi spełniać współczynnik tarcia statycznego, aby krąg toczył się bez poślizgu?

1.4. U podnóża wzniesienia było inne podłoże i krąg toczył się dalej znacznie wolniej. Jaką odległość przebędzie krąg po tej nawierzchni, zanim się zatrzyma, jeżeli współczynnik tarcia betonu o podłoże wynosi 0,26?

1.5. Oblicz, ile obrotów wykonał krąg studzienny, staczając się ze wzniesienia.

Zadanie 2. Rower górski

Promień koła roweru górskiego mierzony wraz z oponą wynosi 36 cm, a moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy $0,38 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Koło zębate przerzutki przymocowanej do środka koła ma promień 4,2 cm.

Rower został postawiony na stojaku tak, że tylne koło mogło kręcić się w powietrzu bez oporu. Mechanik, kręcąc pedałem, wprowadził je w ruch obrotowy w taki sposób, że siła działająca na koło zębate przerzutki miała stałą wartość 5 N.

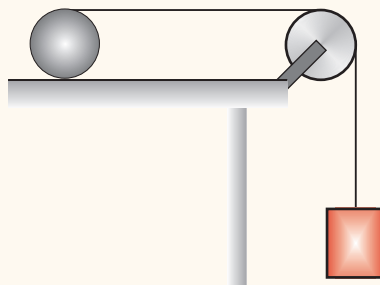
2.1. Oblicz moment siły działający na zębatkę przerzutki, przyspieszenie kątowe i prędkość kątową koła roweru po 10 s od momentu wprowadzenia koła w ruch. Określ zwrot i kierunek tej prędkości.

2.2. Oblicz wartość momentu pędu koła po 10 s od chwili wprowadzenia koła w ruch. Określ jego kierunek i zwrot.

2.3. Gdy koło rowerowe obracało się z częstotliwością 10 Hz, mechanik ścisnął dźwignię hamulca. Szczęki hamulcowe, działając na opony siłą tarcia, zmniejszyły częstotliwość obrotów koła do 2 Hz. Oblicz siłę, jaką klocki hamulcowe działały na oponę koła, jeżeli w tym czasie koło wykonało 16 obrotów.

Zadanie 3. Puszka

Puszka całkowicie wypełniona napojem, o łącznej masie 355 g i średnicy 6 cm, toczy się po poziomym stole bez poślizgu. Na puszkę nawinięto nieważką i nierozciągliwą nić, którą przerzucono przez nieważki bloczek. Na końcu nici zawieszono obciążnik o masie 50 g. Puskę traktuj jako jednorodny walec o momencie bezwładności $I = \frac{1}{2}mr^2$.



3.1. Narysuj siły działające na ciężarek i puszkę w opisanej sytuacji.

3.2. Oblicz przyspieszenie obciążnika.

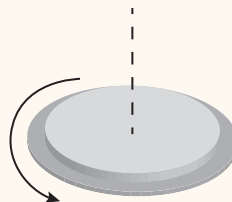
3.3. Oblicz wartość prędkości kątowej puszki, gdy ciężarek obniży się o 50 cm.

3.4. Wyznacz drogę przebytą przez ciężarek w pierwszej sekundzie ruchu.

3.5. Jaką pracę wykona siła ciężkości nad ciężarkiem w chwili, gdy puszka wykonała dwa pełne obroty?

Zadanie 4. Karuzela

Pięcioro dzieci bawiło się w parku na karuzeli. Masa karuzeli wynosiła 140 kg, jej promień był równy 1,7 m, a średnia masa każdego dziecka to 45 kg. Moment bezwładności karuzeli jest taki, jak moment bezwładności krążka względem osi przechodzącej przez środek jego masy, a moment bezwładności dziecka wynosi mr^2 , gdzie r to odległość dziecka od osi obrotu.



4.1. Dzieci rozkręciły karuzelę, biegnąc po jej brzegu wokół krawędzi. Jaką prędkość kątową uzyskała karuzela, jeżeli dzieci biegły z tą samą prędkością $3,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Załóż, że biegły przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Podaj kierunek i zwrot prędkości kątowej karuzeli.

4.2. Po rozkręceniu ręką karuzeli tak, że prędkość punktów na jej obwodzie wynosiła $3,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, dzieci wskoczyły na jej brzeg. Oblicz wartość prędkości kątowej karuzeli tuż po tym skoku.

4.3. Dzieci stanęły na obwodzie tarczy karuzeli, która obracała się z prędkością kątową $1,2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Jedno dziecko pozostało na brzegu tarczy, a pozostała czwórka przebiegła na jej środek. Oblicz wartość siły odśrodkowej odczuwanej wtedy przez dziecko stojące na brzegu karuzeli.

4.4. Dziecko, które zostało na brzegu karuzeli, ma na nogach obuwie sportowe. Współczynnik tarcia między jego butem a podłogą tarczy wynosi 0,8. Czy tarcie o takim współczynniku wystarczy, aby dziecko nie zostało zrzucone przez siłę odśrodkową?

Zadanie 5. Bateria na równi

Janek sfilmował aparatem telefonicznym staczającą się z równi baterię w kształcie walca. Następnie na podstawie filmu sporządził tabelę pomiarów drogi przebytej przez baterię i czasu, w którym droga ta została pokonana. Niepewność pomiaru drogi wynosiła 0,02 cm, a czasu 0,05 s.

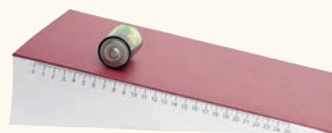
t [s]	0	0,17	0,33	0,50	0,67	0,83	1,00	1,17	1,33	1,50	1,67	1,83	2,00
s [cm]	0	0,4	1,1	2,1	3,5	5,3	7,4	9,8	12,6	15,4	18,7	22,2	26,0

5.1. Naskicuj wykres drogi s pokonanej przez baterię od czasu t z uwzględnieniem i zaznaczeniem niepewności pomiarowych. Przyjmij, że bateria staczała się z równi bez poślizgu.

5.2. Narysuj wykres $s(t^2)$. Zaznacz niepewności pomiarowe.

5.3. Na podstawie wykresu wyznacz przyspieszenie baterii wraz z niepewnością pomiarową.

5.4. Janek zastąpił baterię szpulką o takiej samej masie co bateria. Jak będzie wyglądać wykres $s(t^2)$ dla szpulki w porównaniu do analogicznego wykresu dla baterii. Odpowiedź uzasadnij.



$$= 60.897\,356\,28\,s \approx 6.09 \cdot 10^7\,s$$

15 JUL 2004

1.2.5. a) $g = 9,92 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, b) $\frac{\Delta g}{g} = 0,04$, $\Delta g = 0,39 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$,
 c) $g = (9,92 \pm 0,39) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $\frac{|g - g_t|}{g_t} = 0,011$

1.3. Proporcjonalność prosta

1.3.1. Uzupełniony wiersz tabeli:

Siła rozciągająca sprężynę F_c [N]	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
---	---	-----	-----	-----	-----	-----

Wykres zależności $F_c(\Delta x)$:



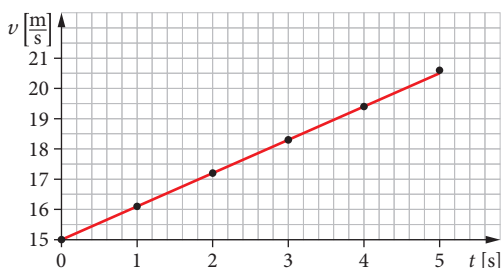
Gdy siła F_c wzrasta n razy to również wydłużenie Δx wzrasta n razy, więc siła F_c jest wprost proporcjonalna do wydłużenia Δx .

1.3.2. Współczynnik kierunkowy

$a = \frac{21\,000 \text{ J}}{3 \text{ m}} = 7000 \text{ N}$ jest to siła, jaką stale działa lina na samochód. Funkcja liniowa ma postać $W = 7000x$.

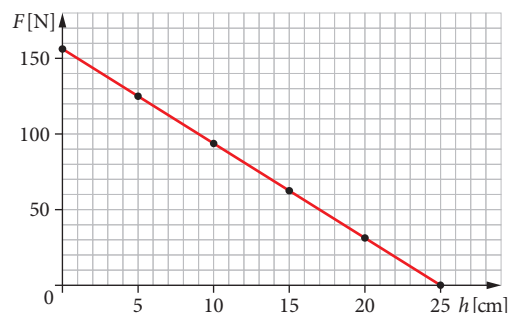
1.3.3. Prędkości przeliczone na $\frac{\text{m}}{\text{s}}$:

czas t [s]	0	1	2	3	4	5
prędkość v [$\frac{\text{km}}{\text{h}}$]	54	58	62	66	70	74
prędkość v [$\frac{\text{m}}{\text{s}}$]	15,0	16,1	17,2	18,3	19,4	20,6



Wykres $v(t)$ to funkcja liniowa, rosnąca $y = ax + b$. Współczynnik kierunkowy $a = 1,1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ to wartość przyspieszenia samochodu, współczynnik $b = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ to prędkość samochodu w chwili $t_0 = 0 \text{ s}$. Funkcja, która opisuje zależność prędkości od czasu ma postać: $v = 1,1t + 15$.

1.3.4.

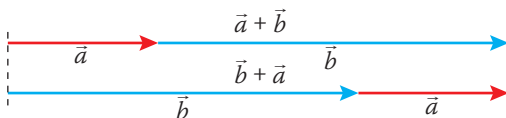


Wykres $F(h)$ ilustruje funkcję liniową malejącą $y = -ax + b$. Zależności siły wyporu od wysokości wynurzenia styropianowego klocka opisuje zależność: $F = -625h + 156,25$.

2. Ruch prostoliniowy

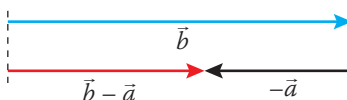
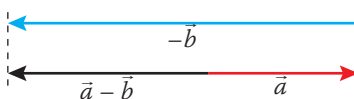
2.1. Jak opisać położenie ciała

2.1.1. Wektory są zwrócone w tę samą stronę, zatem jeśli przyjmimy oś układu zwróconą w prawo, to współrzędne wektorów wynoszą:



$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = [3 \text{ cm} + 7 \text{ cm}] = [10 \text{ cm}],$$

$$\vec{d} = \vec{b} + \vec{a} = [7 \text{ cm} + 3 \text{ cm}] = [10 \text{ cm}]$$

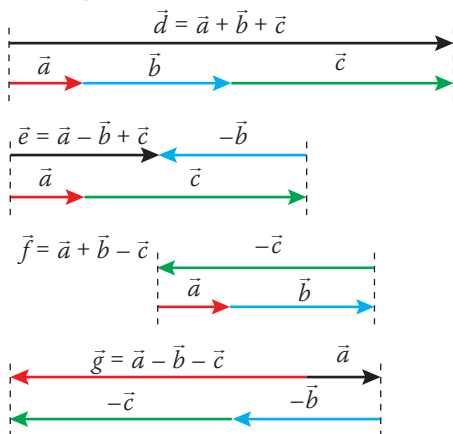


$$\vec{e} = \vec{a} - \vec{b} = [3 \text{ cm} - 7 \text{ cm}] = [-4 \text{ cm}],$$

$$\vec{f} = \vec{b} - \vec{a} = [7 \text{ cm} - 3 \text{ cm}] = [4 \text{ cm}]$$

W wyniku dodawania współrzędne mają jednakową wartość bez względu na kolejność dodawanych wektorów, w wyniku odejmowania współrzędne mają różne znaki, co oznacza, że odejmowanie nie jest przemienne.

2.1.2. a)



b) Wszystkie wektory są zwrócone zgodnie, zatem jeśli przyjmiemy oś układu zwróconą w prawo, to współrzędne wektorów wynoszą:

$$\vec{d} = [2 \text{ cm} + 4 \text{ cm} + 6 \text{ cm}] = [12 \text{ cm}],$$

$$\vec{e} = [2 \text{ cm} - 4 \text{ cm} + 6 \text{ cm}] = [4 \text{ cm}],$$

$$\vec{f} = [2 \text{ cm} + 4 \text{ cm} - 6 \text{ cm}] = 0,$$

$$\vec{g} = [2 \text{ cm} - 4 \text{ cm} - 6 \text{ cm}] = [-8 \text{ cm}]$$

Długości wektorów ułożonych wzdłuż osi układu współrzędnych są równe wartościom bezwzględnych współrzędnych wektorów:

$$|\vec{d}| = |12 \text{ cm}| = 12 \text{ cm}, |\vec{e}| = |4 \text{ cm}| = 4 \text{ cm},$$

$$|\vec{f}| = 0, |\vec{g}| = |-8 \text{ cm}| = 8 \text{ cm}$$

$$2.1.3. x_1 = [1 \text{ cm}], x_2 = [5 \text{ cm}], x_3 = [9 \text{ cm}]$$

$$2.1.4. \text{Długość łodzi } d = |x_r - x_{dz}| = |1,5 \text{ m} - (-11,9 \text{ m})| = 13,4 \text{ m}$$

2.1.5. a) w układzie współrzędnych jednostką jest 1 m: $y_p = 30 \text{ m}$, $y_s = 27,6 \text{ m}$, $y_t = 25,2 \text{ m}$,

b) Samochód można traktować jako punkt materialny, np. gdy porusza się ruchem prostoliniowym (wówczas każdy punkt pojazdu przebędzie taką samą drogę) lub gdy przebyta droga jest o wiele dłuższa niż pojazd. W punkcie a) samochodu nie można potraktować jak punktu materialnego, ponieważ wektor położenia jest inny dla różnych części samochodu, a przebyta droga jest krótka w stosunku do długości samochodu.

$$2.1.6. a) y_s = 0 \text{ cm}, b) y_p = -76 \text{ cm},$$

$$c) y_h = -76 \text{ cm} + 55 \text{ cm} = -21 \text{ cm}$$

$$2.1.7. a) y_{\text{wzgl stołu}} = 45 \text{ cm},$$

$$b) y_{\text{wzgl podł}} = 45 \text{ cm} + 76 \text{ cm} = 121 \text{ cm}$$

2.2. Opis ruchu prostoliniowego

$$2.2.1. a) \Delta x = x_k - x_0 = 10 \text{ m} - 0 \text{ m} = 10 \text{ m}, \Delta s = 3l = 30 \text{ m},$$

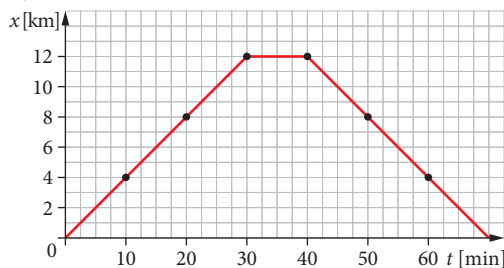
$$b) \Delta x = x_k - x_0 = 5 \text{ m} - (-5 \text{ m}) = 10 \text{ m}, \Delta s = 3l = 30 \text{ m}$$

$$2.2.2. x_k = 2 \text{ m}, \Delta x = 2 \text{ m}, \Delta s = 6 \text{ m}$$

2.2.3. a)

Nr słupka kilometrowego	5	9	13	17	17	13	9	5
Współrzędna położenia rowerzysty x [km]	0	4	8	12	12	8	4	0
Czas jazdy rowerzysty [min]	0	10	20	30	40	50	60	70

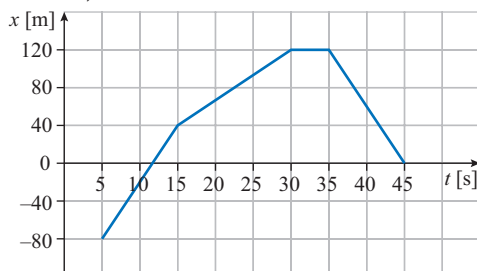
b)



$$c) \Delta x_1 = 12 \text{ km}, s_1 = 12 \text{ km}, \Delta x_2 = 0 \text{ km}, s_2 = 0 \text{ km}, \Delta x_3 = 0 \text{ km}, s_3 = 24 \text{ km}$$

$$2.2.4. a) x_{15} = 600 \text{ m}, \Delta x_{15} = 600 \text{ m}, x_{20} = 600 \text{ m}, \Delta x_{20} = 600 \text{ m}, x_{25} = 0 \text{ m}, \Delta x_{25} = 0 \text{ m}, x_{30} = -300 \text{ m}, \Delta x_{30} = -300 \text{ m}, b) |\Delta x_{\text{cal}}| = 300 \text{ m}, \Delta s = 1500 \text{ m}$$

2.2.5. a)



$$b) \Delta x = x_k - x_p = 0 \text{ m} - (-80 \text{ m}) = 80 \text{ m} \Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4 = 80 \text{ m}$$

$$2.2.6. \Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = -20 \text{ m}, x = x_1 + \Delta x = 10 \text{ m} - 20 \text{ m} = -10 \text{ m}, s = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3| = 70 \text{ m}$$

2.3. Prędkość w ruchu prostoliniowym

$$2.3.1. \text{ a) } (4l - 7l) \cdot 15 = \\ = (4 \cdot 0,4 \text{ m} - 7 \cdot 0,4 \text{ m}) \cdot 15 = -18 \text{ m},$$

$$\text{b) } v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-18 \text{ m}}{0,94 \text{ min}} = -1,15 \frac{\text{km}}{\text{h}},$$

$$\text{c) } s_{\text{cał}} = (4l + 7l) \cdot 15 = 66 \text{ m}$$

$$v_{\text{sr}} = \frac{s_{\text{cał}}}{t_c} = \frac{66 \text{ m}}{0,94 \text{ min}} = 4,2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$2.3.2. \text{ a) } \Delta x = 5l - 4l = 0,5 \text{ km}$$

$$\text{b) } v = \frac{\Delta x}{5t_1 + 4t_2} = \frac{0,5 \text{ km}}{5 \cdot 0,1 \text{ h} + 4 \cdot 0,25 \text{ h}} = 0,33 \frac{\text{km}}{\text{h}},$$

$$v_{\text{sr}} = \frac{s_{\text{cał}}}{t_c} = \frac{5l + 4l}{5t_1 + 4t_2} = \frac{4,5 \text{ km}}{1,5 \text{ h}} = 3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$2.3.3. \text{ a) } \text{Czas biegu } t_b = 6 \text{ min}, \\ \text{czas marszu } t_m = 4 \text{ min}$$

b) Całkowite przemieszczenie dla $t = 30 \text{ min}$ odczytujemy z wykresu: $\Delta x = 1200 \text{ m}$.

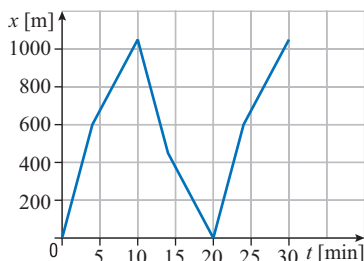
$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1200 \text{ m}}{30 \text{ min}} = 0,67 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

c) Całkowitą drogę odczytujemy z wykresu: 3 odcinki po 1200 m to 3600 m. Całkowity czas ruchu to 30 min (1800 s).

Średnia wartość prędkości:

$$v_{\text{sr}} = \frac{s}{t} = \frac{3600 \text{ m}}{1800 \text{ s}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2.3.4. a)



$$\text{b) } v_{\text{sr}} = \frac{3(s_1 + s_2)}{t_c} = \frac{3(v_b t_b + v_m t_m)}{3(t_b + t_m)} = 1,75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$2.3.5. v_{\text{sr}} = \frac{3(s_1 + s_2)}{t_c} = \frac{3(v_b t_b + v_m t_m)}{3(t_b + t_m)} = 2,38 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$2.3.6. v_{\text{sr}} = \frac{s}{\frac{0,5s}{v_1} + \frac{0,5s}{v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} \approx 2,73 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$2.3.7. v_{\text{sr}} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2}$$

Ponieważ $t_1 = t_2$,

$$v_{\text{sr}} = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_1}{t_1 + t_1} = \frac{v_1 + v_2}{2} = 2,75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$2.3.8. t_2 = \frac{l_1 + l_2}{v_{\text{sr}}} - t_1 = 2,25 \text{ h} = 2 \text{ h } 15 \text{ min}$$

$$v_{2\text{sr}} = \frac{l_2}{t_2} = \frac{180 \text{ km}}{2,25 \text{ h}} = 80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

2.4. Ruch jednostajny prostoliniowy

$$2.4.1. \text{ większą niż } 1224 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

2.4.2. Wcześniej koncert usłyszy słuchacz radiowy. Dźwięk dotrze do niego po $t_1 = \frac{x_1}{v_f} = 1,7 \text{ ms}$,

a do uczestnika koncertu – po $t_2 = \frac{x_2}{v_{\text{dz}}} = 150 \text{ ms}$.

2.4.3. pokonanie kanału pociągami:

$$t_{\text{po}} = 12,75 \text{ min}, \text{ promem: } t_{\text{pr}} = 2,04 \text{ h}$$

$$2.4.4. \text{ a) } x_0 = -50 \text{ m}, v = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{b) } 0 = 50 \text{ m} - 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t, t = \frac{50 \text{ m}}{4 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 12,5 \text{ s}$$

$$\text{c) } x_k = -50 \text{ m} + 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 25 \text{ s} = 50 \text{ m},$$

$$s = \Delta x = x_k - x_0 = 50 \text{ m} - (-50 \text{ m}) = 100 \text{ m}$$

2.4.5. a) $x_0 = 200 \text{ m}$, $v_x = -8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ – rowerzysta jedzie przeciwnie do zwrotu wybranej osi x

$$\text{b) } 0 = 200 \text{ m} - 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t, t = \frac{200 \text{ m}}{8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 25 \text{ s}$$

$$\text{c) } t = \frac{s}{v} = \frac{400 \text{ m}}{8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 50 \text{ s},$$

$$x_k = 200 \text{ m} - 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 50 \text{ s} = -200 \text{ m}$$

2.4.6. a) $x_0 = -200 \text{ m}$, $v_x = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ – bieg zgodnie z wybraną osią x

$$\text{b) } s = v_x \cdot t = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3 \cdot 60 \text{ s} = 900 \text{ m},$$

$$x_k = -200 \text{ m} + 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 180 \text{ s} = 700 \text{ m}$$

$$2.4.7. x_{0A} = 0 \text{ m}, v_A = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{20 \text{ m}}{10 \text{ s}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$x_{0B} = 30 \text{ m}, v_B = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{30 \text{ m}}{10 \text{ s}} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

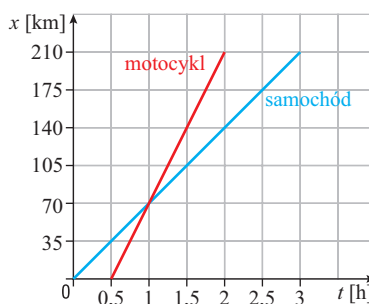
półprosta B ma większy kąt nachylenia do osi t niż półprosta A, prędkość ciała B jest większa niż ciała A.

$$x_A = 2t, x_B = 30 + 3t$$

Przy takim zapisie musimy zaznaczyć, że wielkości są podane w jednostkach układu SI.

$$2.4.8. \text{ a) } s = v_1 t_s = 70 \text{ km}, t_s = \frac{v_2 t_1}{v_2 - v_1} = 1 \text{ h},$$

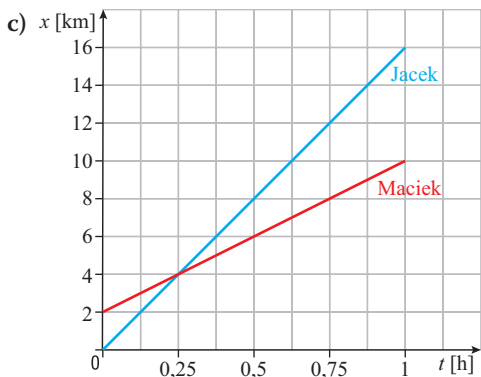
$$\text{b) } \text{równania prostych na wykresie: } x_s = 70 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t, \\ x_m = -70 \text{ km} + 140 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t$$



2.4.9. w układzie odniesienia związanym z początkowym położeniem Jacka:

a) $x_J(t) = 16 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t$, $x_M(t) = 2 \text{ km} + 8 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t$,

b) $t = 15 \text{ min}$, $x = 4 \text{ km}$, spotkanie jest przy słupku kilometrowym z liczbą: $3 \text{ km} + 4 \text{ km} = 7 \text{ km}$,



w układzie odniesienia związanym z początkowym położeniem Macia:

a) $x_J(t) = -2 \text{ km} + 16 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t$, $x_M(t) = 8 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t$,

b) $t = 15 \text{ min}$, $x = 2 \text{ km}$, spotkanie jest przy słupku kilometrowym z liczbą: $5 \text{ km} + 2 \text{ km} = 7 \text{ km}$

2.4.10. a) samochód 1: $x_1 = 40 \text{ km} + 120 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t$,
samochód 2: $x_2 = 180 \text{ km} - 90 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t$,

b) współrzędne punktu S = (40, 120) to odpowiednio czas (40 min) i miejsce minięcia się samochodów (120 km),

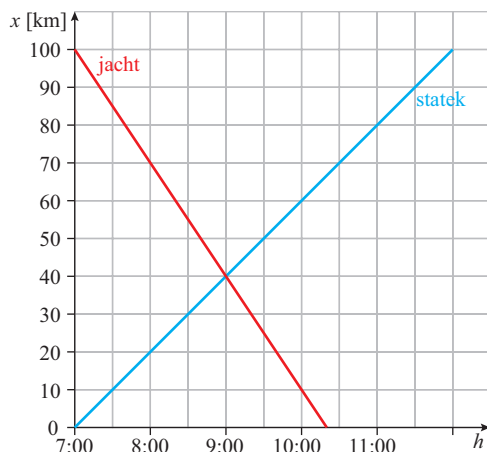
c) $x_1 = x_2 = x$ i $t = 40 \text{ min}$. Podstawiając t do równania ruchu dla samochodu 1. lub 2., otrzymujemy $x = 120 \text{ km}$. Uzyskane obliczeniowo wielkości są takie same, jak współrzędna punktu przecięcia wykresów.

2.4.11. przykładowo dla układu odniesienia związanego z Kołobrzegiem:

a) dla statku: $x_1 = 20 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t$,

dla jachtu: $x_2 = 100 \text{ km} - 30 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t$,

b)



c) Jednostki miną się 40 km od Kołobrzegu o godzinie 9:00.

2.5. Ruch prostoliniowy jednostajnie zmienny

2.5.1. $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{18 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3 \text{ s}} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$,

$\Delta s_1 = \frac{1}{2} \cdot 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \text{ s}^2 = 3 \text{ m}$, $\Delta s_3 = 5 \Delta s_1 = 15 \text{ m}$,

lub: $s_3 - s_2 = 27 \text{ m} - 12 \text{ m} = 15 \text{ m}$

2.5.2. $a_{\text{sr}} = \frac{v}{\Delta t} \approx 3,27 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $s = \frac{v \Delta t}{2} \approx 118 \text{ m}$

2.5.3. $a = \frac{v_1 + v_2}{\Delta t} = 900 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

2.5.4. $a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2s} \approx 5,18 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $t = \frac{2s}{v_1 + v_2} \approx 2,47 \text{ s}$

2.5.5. a)



b) $s = \frac{1}{2} a t_1^2 + v t_2 + \left(v t_3 - \frac{1}{2} a t_3^2 \right)$ lub $s = \frac{1}{2} (a + b) h$,
gdzie a i b to podstawy trapezu utworzonego przez wykres

droga $s = s_1 + s_2 + s_3 = 21 \text{ m}$

liczba pięter $= \frac{21 \text{ m}}{3 \text{ m}} = 7$

2.5.6. a) $a = \frac{2s_1}{t_1^2} = \frac{2 \cdot 14,7}{3,50^2} \text{ m} = 2,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$v = a t_1 = 2,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3,5 \text{ s} = 8,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

b) $s_2 = v t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{s_2}{v} = \frac{100 \text{ m} - 14,7 \text{ m}}{8,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 10,15 \text{ s}$

$t_{\text{cał}} = t_1 + t_2 = 13,65 \text{ s}$

$$c) t_3 = \frac{2s}{v} = \frac{2 \cdot 9,45 \text{ m}}{8,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 2,25 \text{ s}$$

$$2.5.7. a = \frac{2l}{(2t - t_1)t_1} \approx 3,66 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$v = \frac{2l}{2t - t_1} \approx 12,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$2.5.8. v_{dz} = \frac{h}{t - \sqrt{\frac{2h}{g}}} = 360 \frac{\text{m}}{\text{s}}, v_k = \sqrt{2hg} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$2.5.9. a) a = \frac{v_1^2}{2s_1} = \frac{(350 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2 \cdot 7000 \text{ m}} = 8,75 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$b) \text{ dla } r_1 = 6378 \text{ km} + 17 \text{ km} = 6395 \text{ km},$$

$$g_1 = 9,745 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \text{ dla } r_2 = 6378 \text{ km} + 10 \text{ km} = 6388 \text{ km},$$

$$g_2 = 9,77 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, g_{sr} = \frac{g_1 + g_2}{2} = 9,76 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$\frac{|a - g_{sr}|}{g_{sr}} 100\% = 10\%$$

$$c) t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{a}} = 40 \text{ s}, t_2 = \frac{s_2}{v_2} = 600 \text{ s},$$

$$t_3 = \frac{h_2 - s_2}{v_3} = 667 \text{ s}, t_{cał} = 1307 \text{ s} = 21 \text{ min } 46,8 \text{ s}$$

$$2.5.10. v = \sqrt{2hg} \approx 24,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}, t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 2,47 \text{ s}$$

$$2.5.11. v = \sqrt{2(h_2 - h_1)g} = 3,13 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$t = 2\sqrt{\frac{2h_2}{g}} - \sqrt{\frac{2(h_2 - h_1)}{g}} \approx 0,79 \text{ s}$$

$$2.5.12. h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} + h = 3,22 \text{ m},$$

$$v = \sqrt{2h_{max}g} = 7,95 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2.5.13. a) Odstęp czasu między uderzeniami są takie same.

b) **Wskazówka.** Wysokości nad podłogą, na których umieszczono ołowiane obciążniki, zdefiniowane są następująco:

$$h_n = \frac{g(\Delta t)^2}{2} n^2, h_{n-1} = \frac{g(\Delta t)^2}{2} (n-1)^2,$$

$$h_{n+1} = \frac{g(\Delta t)^2}{2} (n+1)^2, \text{ gdzie } \Delta t - \text{odstęp czasu między kolejnymi uderzeniami o podłogę.}$$

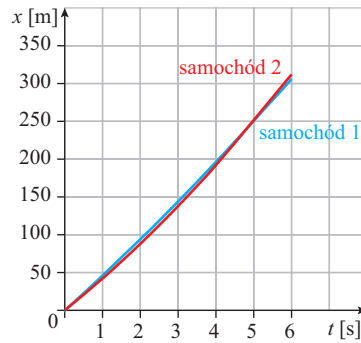
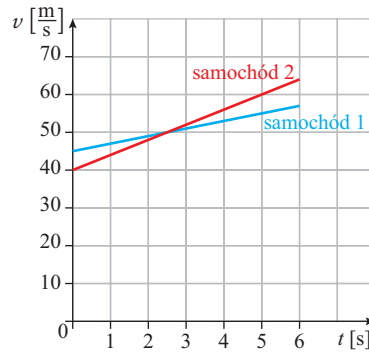
$$2.5.14. a) t_s = \frac{2(v_{01} - v_{02})}{a_2 - a_1} = 5 \text{ s},$$

$$s = v_{01}t_s + \frac{a_1 t_s^2}{2} = 250 \text{ m}$$

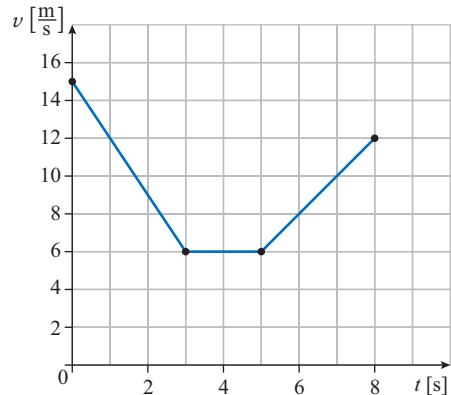
$$b) v_1 = v_{01} + a_1 t_s = 55 \frac{\text{m}}{\text{s}}, v_2 = v_{02} + a_2 t_s = 60 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

c) Na wykresach $v(t)$ jest przedstawiona zależność $v(t) = v_0 + at$ (równanie współrzędnej prędkości) $v_1 = 45 + 2 \cdot t, v_2 = 40 + 4 \cdot t$.

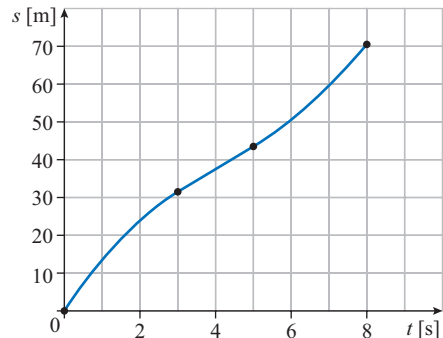
Na wykresach $s(t)$ jest przedstawiona zależność $s(t) = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ (równanie ruchu): $s_1 = 45 \cdot t + t^2, s_2 = 40 \cdot t + 2 \cdot t^2$.



2.5.15. a)



b)



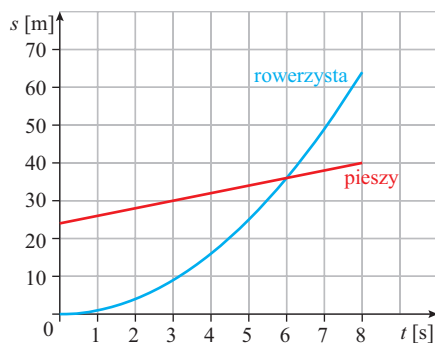
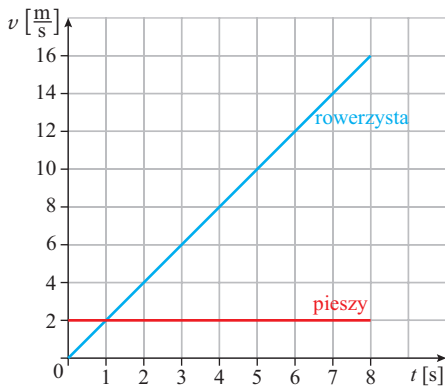
2.5.16. Przyjmujemy początek układu współrzędnych w miejscu, gdzie stał Janek, a oś skierowaną w kierunku jego ruchu.

a) $x_r = x_p$, czyli $\frac{1}{2}at_s^2 = d + vt_s$, stąd $t_s = 6$ s,

$$x_r = \frac{1}{2}at_s^2 = 36 \text{ m},$$

b) na wykresach: $v_r = 2t$, $v_p = 2$, $x_r = t^2$,

$$x_p = 24 + 2 \cdot t$$



Klasyka fizyki B. Mendel i J. Mendel

$$2.1. v_1 = \frac{s_1}{\Delta t_1} = 80 \frac{\text{km}}{\text{h}}, v_2 = \frac{s_2}{\Delta t_2} = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}}, v_2 > v_1$$

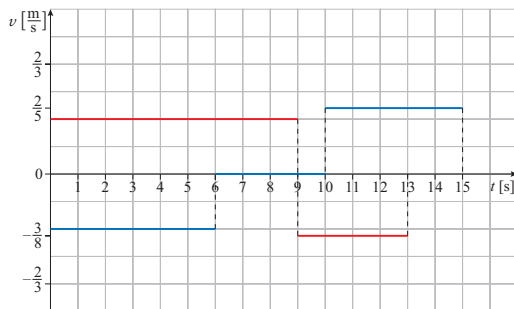
$$2.2. n = \frac{v\Delta t - l}{a} = 110$$

$$2.3. v_{WR} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = 58,3 \frac{\text{km}}{\text{h}},$$

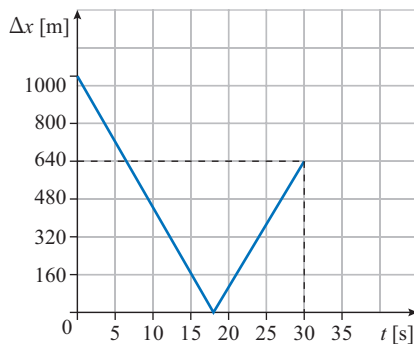
$$v_{RW} = \frac{v_1 + v_2}{2} = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$2.4. t = \Delta t_0 \frac{n+1}{n} = 50 \text{ s}$$

2.5.



2.6.



2.7. a) $\frac{t_1}{t_2} = \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{2}$. Dłużej opadał drugi skoczek.

b) Drugi skoczek opadał dwa razy dłużej.

$$2.8. a) h_w = \frac{v_0^2}{2g} = 20 \text{ m},$$

$$b) t_w = \frac{v_0}{g} = 2 \text{ s},$$

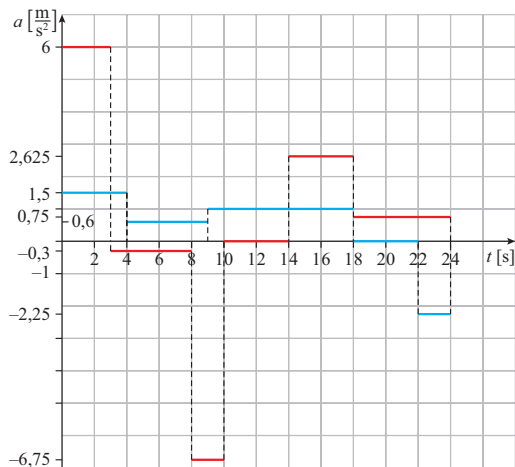
c) W czasie wznoszenia $v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, w czasie spadania $v = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$$2.9. a_I = -0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, a_{II} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, a_{III} = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, a_{IV} = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



$$2.10. a = \frac{v_0(n-1)}{\Delta t}$$

2.11. Oba samochody poruszały się ruchem jednostajnie zmiennym we wszystkich wyróżnionych przedziałach czasu. Przedział czasu i przyspieszenie w tym czasie: dla wykresu czerwonego: $(0 \text{ s}, 3 \text{ s}) 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $(3 \text{ s}, 8 \text{ s}) -0,3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $(8 \text{ s}, 10 \text{ s}) -6,75 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $(10 \text{ s}, 14 \text{ s}) 0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $(14 \text{ s}, 18 \text{ s}) 2,625 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $(18 \text{ s}, 24 \text{ s}) 0,75 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; dla wykresu niebieskiego: $(0 \text{ s}, 4 \text{ s}) 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $(4 \text{ s}, 9 \text{ s}) 0,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $(9 \text{ s}, 18 \text{ s}) 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $(18 \text{ s}, 22 \text{ s}) 0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $(22 \text{ s}, 24 \text{ s}) -2,25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



2.12. $\Delta t = 2t = 2 \text{ min}$

2.13. $t = \frac{v}{g} \approx 1 \text{ s}$

2.14. $v_k = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

2.15. $t = \frac{v_1}{g} + \sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{v_1^2}{g^2}} = 7,9 \text{ s}$

2.16. $F_W = 0$

2.17. $H = 2g\Delta t^2 = 19,62 \text{ m}$

2.18. a) $\Delta y = 2v_0 t$, **b)** $\Delta y = 2 \frac{v_0^2}{g}$

2.19. $\frac{t_2}{t_1} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} = 2$

Zadania maturalne

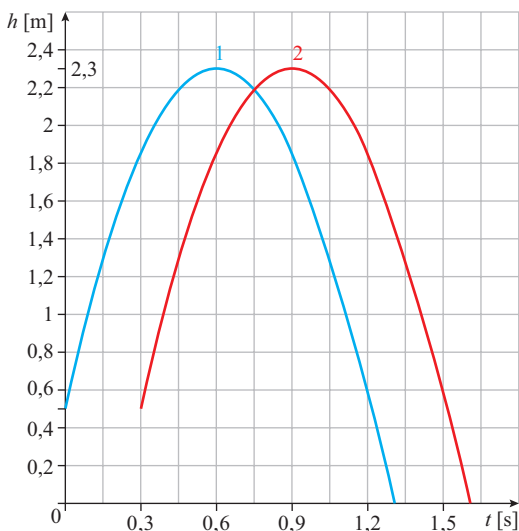
Zadanie 1.

1.1. Wskazówka. Należy uwzględnić wysokość nad poziomem kortu. $h_{\text{max}} = 0,5 \text{ m} + \frac{v_0^2}{2g} = 2,3 \text{ m}$

1.2. $t = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{2h_{\text{max}}}{g}} = 1,30 \text{ s}$

1.3. $y_1(t_s) = y_2(t_s) \Rightarrow$
 $\Rightarrow 0,5 + 6t_s - 5t_s^2 = 0,5 + 6(t_s - 0,3) - 5(t_s - 0,3)^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow t_s = 0,75 \text{ s}, y_1(t_s) = h_s = 2,19 \text{ m}$

1.4.



1.5. $v_1 = v_0 - gt_s = -1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$,
 $v_2 = v_0 - g(t_s - t_0) = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Piłki poruszają się z taką samą prędkością, ale wektory ich prędkości mają przeciwne zwroty. Pierwsza piłka porusza się w dół, a druga w górę.

1.6. $v_{\text{wzg}}(t) = gt_0 = \text{const} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, ruch jednostajny

Zadanie 2.

2.1. Wskazówka. Pamiętaj o zamianie jednostek. $t_d = \frac{2(v_1 - v_2)}{a} = 12 \text{ s}$

2.2. $v_r = v_2 + at_d = 55 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

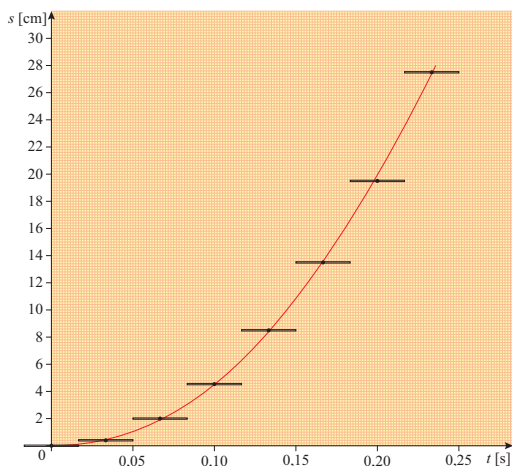
2.3. $s_r = v_2 t_d + \frac{1}{2} at_d^2 = 480 \text{ m}$

2.4. $t \approx \frac{2\Delta v}{a_0 + a_k}$, $t_2 \approx 2 \text{ s}$, $t_4 \approx 4,6 \text{ s}$. Na drugim biegu samochód szybciej osiągnie prędkość $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

2.5. $s = \frac{v_k^2 - v_p^2}{2a_{sr}} \approx 43 \text{ m}$

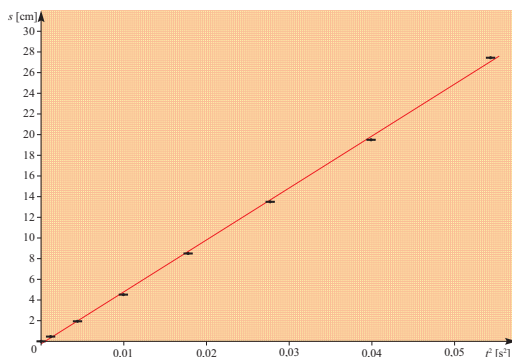
Zadanie 3.

3.1.



3.2. W ruchu jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej i z przyspieszeniem wynoszącym g podstawowe równanie na drogę ma postać: $s = \frac{1}{2}gt^2$, stąd $g = \frac{2s}{t^2}$.

3.3.



3.4. Wartość tablicowa to $9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Otrzymany w doświadczeniu przedział wartości mieści się między $g_{\min} = 9,83 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ i $g_{\max} = 10,01 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, dla $\Delta g = \pm 0,09 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

3.5. Wartość tablicowa nie mieści się w tym przedziale, jednak w fizyce przyjmuje się, że jeżeli wartość tablicowa mieści się w przedziale $g_{3\min} = 9,65 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ i $g_{3\max} = 10,19 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, czyli przy uwzględnieniu $\pm 3 \cdot 0,09 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, to otrzymany wynik jest zgodny z wartością tablicową. W przypadku naszego doświadczenia wartość tablicowa mieści się w przedziale ($g_{3\min}$, $g_{3\max}$), więc możemy przyjąć, że wynik uzyskany doświadczalnie i wartość tablicowa są zgodne.

Ruch krzywoliniowy

3.1. Ruch krzywoliniowy

3.1.1. $|\vec{a}| = 7 \text{ cm}$, $|\vec{b}| = 3 \text{ cm}$

3.1.2.

a) $\vec{r}_p = [-200 \text{ m}, -100 \text{ m}]$, $\vec{r}_D = [200 \text{ m}, 300 \text{ m}]$

$$|\vec{r}_p| = \sqrt{(-200 \text{ m})^2 + (-100 \text{ m})^2} = 223,6 \text{ m}$$

$$|\vec{r}_D| = \sqrt{(200 \text{ m})^2 + (300 \text{ m})^2} = 360,6 \text{ m}$$

b) $\Delta \vec{r} = [200 \text{ m} - (-200 \text{ m}), 300 \text{ m} - (-100 \text{ m})] = [400 \text{ m}, 400 \text{ m}]$

$$|\vec{r}| = \sqrt{(400 \text{ m})^2 + (400 \text{ m})^2} = 565,7 \text{ m}$$

3.1.3. $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = [6, 0]$, $|\vec{c}| = 6$

3.1.4. $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = [7, 0]$, $|\vec{d}| = 7$

3.1.5. $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = [0, 4]$, $|\vec{c}| = 4$; $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = [4, 0]$, $|\vec{d}| = 4$

3.1.6. a) Położenie pionka białego: (E, 5) i czarnego: (F, 4).

b) Współrzędne położenia pionka białego:

$\vec{r}_b = [5, 5]$, współrzędne położenia pionka

czarnego: $\vec{r}_c = [6, 4]$, długość wektora położenia dla pionka białego: $|\vec{r}_b| = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$,

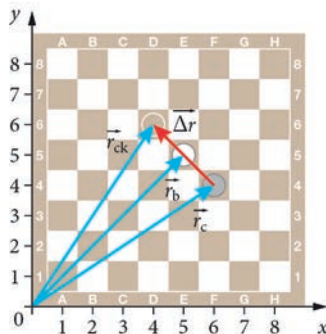
długość wektora położenia dla pionka czarnego: $|\vec{r}_c| = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$

c) Współrzędne położenia końcowego pionka czarnego: $\vec{r}_{ck} = [4, 6]$,

wektor przemieszczenia pionka czarnego ma współrzędne: $\Delta \vec{r}_c = [4 - 6, 6 - 4] = [-2, 2]$,

długość wektora przemieszczenia:

$$|\Delta \vec{r}_c| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$



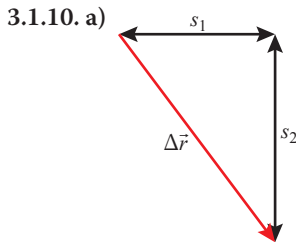
3.1.7. a) współrzędne wektora położenia $[0,4; 1,4]$, jego długość to 1,46, b) $s_5 = 0,4 + 1,4 = 1,8$, c) $|\vec{r}| = \sqrt{0,4^2 + 1,4^2} = 1,46$

3.1.8. $|\vec{v}_{sr}| = 0 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $v = \frac{s_1 + s_2 + \sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{t_1 + t_2 + t_{sz} + t_3} \approx 1,24 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

3.1.9. Uwaga. Wielkości fizyczne muszą mieć takie same jednostki. W naszym rozwiązaniu użyliśmy km i h, dlatego najpierw zamieniliśmy jednostkę prędkości $v_2 = 36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

$$s_1 = 0,4s, s_2 = 0,6s, |\vec{v}_{sr}| = \frac{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{v_1 + \frac{s_2}{v_2}} = 32,4 \frac{\text{km}}{\text{h}},$$

$$v_{srw} = \frac{s_1 + s_2}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}} = 45 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$



b) $|\Delta \vec{r}| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2} = 50 \text{ km}$,

$$|\Delta \vec{v}_{sr}| = \frac{|\Delta \vec{r}|}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}} \approx 38,5 \frac{\text{km}}{\text{h}},$$

c) $v_{srw} = \frac{s_1 + s_2}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}} = 53,8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

3.1.11. $v_1 = v(1 - 0,2) \cos \alpha = 3,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

3.1.12. Prędkość wznoszenia się samolotu

$$v_y = v \sin \alpha = 50,4 \frac{\text{km}}{\text{h}}, \text{ odległość od lotniska}$$

$$s = v \cos \alpha \cdot t = 47,6 \text{ km}, \text{ wysokość}$$

$$h = v_y t = 8,39 \text{ km}.$$

Poprawne jest też przyjęcie, że odległość szukaną w zadaniu to odległość w linii prostej między lotniskiem a samolotem, wtedy $s = vt = 48,3 \text{ km}$.

3.1.13. $v_p = \sqrt{v_j^2 + v_w^2} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\tan \alpha = \frac{v_j}{v_w}$, $\alpha = 37^\circ$

3.1.14.

a) $s = 3 \cdot 2\pi R = 37,70 \text{ m}$, $v_{sr} = 1,92 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

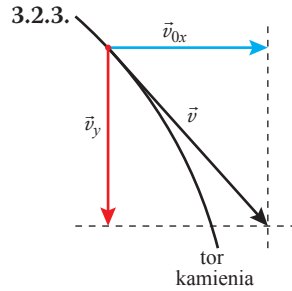
b) $|\vec{v}_{sr}| = \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \frac{0 \text{ m}}{19,86 \text{ s}} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

3.2. Rzut poziomy i ukośny

3.2.1. a) $v_{0x} = v_y$, $t = \frac{v_{0x}}{g} = 4 \text{ s}$,

b) $x = 40t = 160 \text{ m}$ i $y = 5t^2 = 80 \text{ m}$

3.2.2. $v_0 = \sqrt{2Hg} = 4,95 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_k = \sqrt{4Hg} \approx 7,00 \frac{\text{m}}{\text{s}}$



$$v^2 = v_{0x}^2 + v_y^2, \text{ z treści wiemy, że } v = nv_{0x},$$

$$(nv_{0x})^2 = v_{0x}^2 + v_y^2 \Rightarrow v_{0x} = \frac{v_y}{\sqrt{n^2 - 1}} = \frac{gt}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

$$v_{0x} = 4,39 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

3.2.4. a) $l = v_0 t \Rightarrow t = \frac{l}{v_0}$, $t = 0,5 \text{ s}$,

$$v = \sqrt{v_0^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}, v = 7,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) $y = \frac{gt^2}{2}$, $y = 1,25 \text{ m}$, $h = H - y = 0,55 \text{ m}$

c) $Z \leq l \Rightarrow v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}} \leq l$, $v_0 \leq \sqrt{\frac{gl^2}{2H}}$, $v_0 \leq 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

3.2.5. $v_0 = l \sqrt{\frac{g}{2d}} \approx 221 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

3.2.6. a) $t = \frac{l}{v_0} \approx 0,17 \text{ s}$, b) $d = \frac{gl^2}{2v_0^2} \approx 144 \text{ mm}$

3.2.7. $\frac{Z_K}{Z} = \sqrt{\frac{g_Z}{g_K}} \approx 2,46$, $\frac{Z_M}{Z} = \sqrt{\frac{g_Z}{g_M}} \approx 1,63$

3.2.8. $v = \sqrt{v_0^2 + 2Hg} \approx 49,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} = 0,743$, stąd $\alpha \approx 37^\circ$

3.2.9. a) $v_0 = l \sqrt{\frac{g}{8(H-h)}} = 22,3 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$,

b) $d = \frac{l}{2} \left(\sqrt{\frac{H}{H-h}} - 1 \right) \approx 9,08 \text{ m}$. Piłka będzie autowa, dotknie boiska 0,08 m za linią końcową.

3.2.10. $t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = 2,83 \text{ s}$,

$$H_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 39,3 \text{ m},$$

$$Z = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = 272 \text{ m}$$

3.2.11. $Z = d$, $\sin 2\alpha = \frac{Z \cdot g}{v_0^2}$,

$$\sin 2\alpha = \frac{2,72 \text{ m} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{(5,2 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2} = 1,0059 \approx 1, \text{ stąd}$$

$$2\alpha = 90^\circ, \alpha = 45^\circ$$

3.2.12. $\tan \varphi = \frac{v_{0x}}{v_y} = \frac{v_0 \cos \alpha}{v_0 \sin \alpha - gt}$, gdzie $t = \frac{l}{v_0 \cos \alpha}$,

$$\varphi = 48^\circ, v = \sqrt{(v_{0x})^2 + (v_y)^2} =$$

$$= \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + \left(v_0 \sin \alpha - \frac{gl}{v_0 \cos \alpha} \right)^2} \approx 38,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$3.2.13. v_0 = \sqrt{\frac{xg}{\sin 2\alpha}} \approx 13,0 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \approx 2,31 \text{ s}$$

3.2.14. a) $Z = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}} \approx 6,4 \text{ m}$. Rzutka nie wpadnie do koła.

b) rzutka wpadnie do koła:

$$Z = v_0 \cos \alpha \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} + \sqrt{\frac{2H}{g} + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2}} \right) \approx 21,3 \text{ m}$$

$$3.2.15. h = d \tan \alpha \approx 57,7 \text{ m}$$

3.2.16. a) równania położenia rzutki:

$$x_2(t) = v_{02} t \cos \alpha, y_2(t) = v_{02} t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2},$$

równania położenia pocisku: $x_1(t) = v_{01} t$,

$$y_1(t) = H - \frac{gt^2}{2}, \text{ warunki konieczne do zajęcia}$$

zdarzenia: $x_1(t_z) = x_2(t_z)$ i $y_1(t_z) = y_2(t_z)$,

$$\text{stąd } v_{01} = v_{02} \cos \alpha \text{ i } t_z = \frac{H}{v_{01} \tan \alpha}.$$

b) Do zderzenia powinno dojść nad ziemią, czyli

$$y_1 = y_2 > 0, \text{ stąd } \tan \alpha > \frac{1}{v_{01}} \sqrt{\frac{gH}{2}} \Rightarrow \alpha > 30^\circ,$$

c) $45^\circ > 30^\circ$, co oznacza, że rzutka może zostać trafiona, jeżeli jej prędkość $v_{02} = \frac{v_{01}}{\cos \alpha} \approx 19,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

3.3. Prędkość w różnych układach odniesienia

$$3.3.1. \text{ a) } v = v_{\text{ch}} + v_{\text{p}} = 3,4 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$\text{ b) } v = v_{\text{ch}} - v_{\text{p}} = 0,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

3.3.2. gdy kolarze jadą w tę samą stronę:

$$v = v_2 - v_1 = 36 \frac{\text{km}}{\text{h}} - 30 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 6 \frac{\text{km}}{\text{h}},$$

gdy kolarze jadą naprzeciw siebie:

$$v = v_1 + v_2 = 30 \frac{\text{km}}{\text{h}} + 36 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 66 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$3.3.3. \text{ a) } v_{k1} = v_1 + v_r = 2,3 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_{k2} = v_{k3} = v_2 + v_r = 1,8 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_{k4} = -v_1 + v_r = -0,7 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

b) kaczką 1. zbliża się do kaczkę 2. z prędkością

$$v_{12} = v_1 - v_2 = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \text{ kaczką 3. zbliża się do}$$

$$\text{kaczkę 4. z prędkością } v_{34} = v_1 + v_2 = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

c) Kaczki wyruszyły naprzeciw siebie i spotkają się, kiedy drogi pokonane przez obie kaczki dadzą w sumie odległość między wyspami, czyli

$$t = \frac{d}{v_1 + v_2} = 4 \text{ s}.$$

$$3.3.4. \text{ a) } v_z = v_1 + v_2 = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}},$$

$$\text{ b) } v_{w-p} = v_1 + v_3 = 95 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$3.3.5. v_{wz} = v_m - v_c \Rightarrow \frac{l}{t} = \frac{s_m}{t} - \frac{s_c}{t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l = s_m - s_c \Rightarrow s_c = s_m - l = 60 \text{ m} - 15 \text{ m} = 45 \text{ m}$$

$$3.3.6. t = \frac{d}{v_2 + v_3 - v_1} \approx 0,21 \text{ s}$$

3.3.7. a) **Wskazówka.** Pamiętaj, że koła nie są do niczego przymocowane, czyli poruszają z prędkością wody w rzece i pokonają $s_k = v_r \cdot t$.

Zespół płynący z bazy 1: do koła

$$t_{11} = \frac{s}{v_m} = 13,3 \text{ s}, \text{ do bazy } t_{12} = \frac{s - v_r t_{11}}{v_m - v_r} = 20 \text{ s};$$

zespół płynący z bazy 2: do koła $t_{21} = \frac{s}{v_m} = 13,3 \text{ s}$,

$$\text{do bazy } t_{22} = \frac{s - v_r t_{21}}{v_m + v_r} = 8,9 \text{ s}. \text{ Oba zespoły dotrą}$$

do koła jednocześnie. Pierwsza powróci do bazy załoga z bazy 2.

b) Czas pokonywania trasy do koła i z powrotem:

$$\text{zespół z bazy 1. } t_1 = \frac{s}{v_m + v_r} + \frac{s}{v_m - v_r} = 27,8 \text{ s};$$

$$\text{zespół z bazy 2. } t_2 = \frac{s}{v_m - v_r} + \frac{s}{v_m + v_r} = 27,8 \text{ s}.$$

Obie załogi wykonają zadanie w tym samym czasie.

3.3.8. a) i b) **Sposób I.** Rozwiązujemy układ

czterech równań, korzystamy z równań na drogę i prędkość w ruchu jednostajnie przy-

$$\text{spieszonym: } s = v_{0a} t + \frac{1}{2} a_a t^2; v_{ka} = v_{0a} + a_a t;$$

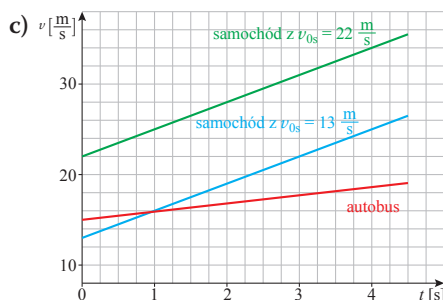
$$s + l = v_{0s} + \frac{1}{2} a_s t^2; v_{ks} = v_{0s} + a_s t.$$

Sposób II. Rozwiązujemy układ dwóch równań, korzystamy ze względności ruchu:

$$l = (v_{0s} - v_{0a}) t + \frac{1}{2} (a_s - a_a) t^2; v_{ks} = v_{0s} + a_s t.$$

Otrzymujemy: $t = 1 \text{ s}$ dla $v_{0s} = 22 \frac{\text{m}}{\text{s}}$,

$$t = 4 \text{ s dla } v_{0s} = 13 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



Otrzymaliśmy dwa wyniki, ponieważ w opisaną sytuację samochód osobowy może osiągnąć prędkość końcową v_{ks} , rozpoczynając manewr z różnymi prędkościami początkowymi v_{0s} .

$$3.3.9. v_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{s_2}{t_2} + \frac{s_1}{t_1} \right) = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{s_2}{t_2} - \frac{s_1}{t_1} \right) = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}, t_{\text{wyp}} = \frac{(l_1 + l_2) t_1}{s_1} = 1,2 \text{ s},$$

$$t_{\text{wym}} = \frac{(l_1 + l_2) t_2}{s_2} = 0,24 \text{ s}$$

3.3.10. $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \approx 2470 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Boeing porusza się względem toru ruchu drona pod kątem $\alpha = 90^\circ + \beta$, gdzie $\text{tg}\beta = \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow \beta = 69^\circ$, czyli $\alpha = 159^\circ$.

3.3.11. $v_y = v \sin \alpha \approx 4,33 \frac{\text{m}}{\text{s}}, h = v t \sin \alpha \approx 1300 \text{ m}$

3.3.12. a) Kierunek poruszania się antylopy względem brzegu obliczamy z funkcji trygonometrycznej: $\text{tg}\alpha = \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow \alpha = 9,64^\circ$,
 $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \approx 3,04 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

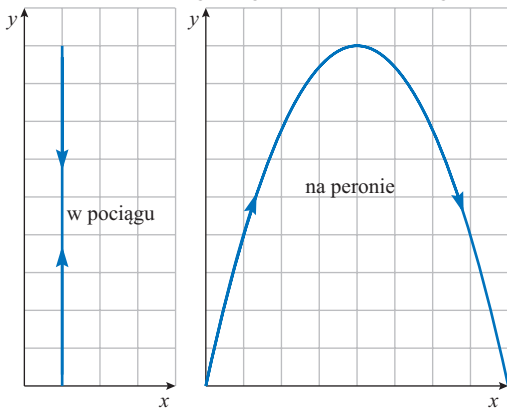
b) Antylopa i krokodyl pokonują tę samą odległość względem brzegu, czyli $v_k = v_1 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$,
 $x_k = v_1 t = v_1 \frac{d}{v_2} = 216 \text{ m}$ (krokodyl pokonuje drogę w czasie, gdy antylopa pokonuje rzekę na odcinku długości d).

3.3.13. $\cos \alpha = \frac{v_1}{v_2} \Rightarrow \alpha = 78^\circ$

3.3.14. $v_k = \frac{v}{\text{tg}\alpha} \approx 41,6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

3.3.15. Wskazówka. Tor ruchu samochodu jest linią prostą dla obu obserwatorów. Przy czym dla obserwatora w samochodzie drugi samochód pokonuje odcinki toru w tę i z powrotem, a dla obserwatora na poboczu drugi samochód cały czas się oddala.

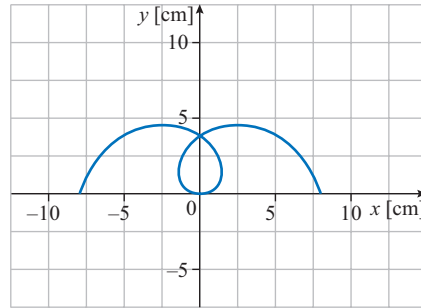
3.3.16. Obserwator w pociągu widzi rzut pionowy do góry. Obserwator na peronie widzi złożenie rzutu pionowego w górę i ruchu pociągu.



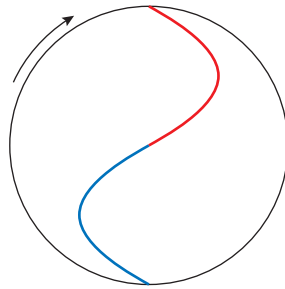
3.3.17. Obserwator w wagonie – rysunek I (spadek swobodny ciała), obserwator na łączce – rysunek III (złożenie spadku swobodnego i ruchu pociągu, czyli rzut poziomy z prędkością początkową równą prędkości pociągu).

3.3.18. Powstawanie „pętli” wynika z tego, że obserwowany ruch jest złożeniem ruchu planety i Ziemi wokół Słońca. Tor planety byłby pozbawiony „pętli”, gdybyśmy np. układ współrzędnych związali ze Słońcem.

3.3.19. Wskazówka. Wykorzystaj sposób postępowania przedstawiony w przykładzie 2. W czasie $\Delta t = 0,25 \text{ s}$ mrówka przejdzie 1 cm , a płyta obróci się o $22,5^\circ$.



3.3.20. Wskazówka. Kiedy płyta wykona pół obrotu, mucha będzie przelatywać nad jej środkiem. Kiedy wykona pełen obrót, mucha będzie się znajdować po drugiej stronie płyty względem miejsca, nad którym rozpoczęła lot nad płytą.



3.4. Ruch po okręgu

3.4.1. $f = \frac{n}{t} \approx 48 \text{ Hz}, T = \frac{t}{n} \approx 0,021 \text{ s}$

3.4.2. $T = \frac{t}{n} = 20 \text{ s}$

3.4.3. $\Delta\varphi = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}, \omega_{\text{sr}} = \frac{5\pi}{3} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

3.4.4. $\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t, \Delta\varphi = 10\pi \text{ rad}$

3.4.5. $\Delta t = T = 20 \text{ s}, \omega = \frac{2\pi}{T} = 0,314 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

3.4.6. $T = \frac{2\pi}{\omega} = 25 \text{ s}$

3.4.7. $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{200 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{2\pi \text{ rad}} \approx 31,8 \text{ Hz}$

3.4.8. $f = \frac{v}{\pi d} \approx 8,85 \text{ Hz}$

$$3.4.9. T = \frac{2\pi r}{v} \approx 0,058 \text{ s}$$

$$3.4.10. \frac{v_1}{v_2} = \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{T_2}{T_1} = 24, \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{T_2}{T_1} = 12$$

$$3.4.11. \text{a)} f = \frac{n}{t} = 0,2 \text{ Hz}, T = \frac{t}{n} = 5 \text{ s},$$

$$\text{b)} \omega = \frac{2\pi n}{t} \approx 1,26 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, v = \frac{2\pi R n}{t} \approx 2,51 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$\text{c)} \Delta\omega = \frac{2\pi\Delta n}{t} \approx 0,63 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$3.4.12. f_2 = \frac{n_1}{t} \cdot \frac{z_1}{z_2} = 4,8 \frac{\text{obr}}{\text{s}}$$

$$3.4.13. v = 2\pi R f_1 \frac{z_1}{z_2} \approx 9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$3.4.14. \omega = \frac{2l}{td} \approx 1,9 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$3.4.15. \varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega}{\Delta t} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{min}^2} \approx 2,8 \cdot 10^{-3} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$3.4.16. \varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{2\pi(f_2 - f_1)}{\Delta t} = 16,76 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$3.4.17. \varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t \cdot r} = \frac{2\Delta v}{\Delta t \cdot d} = -0,76 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$3.4.18. \text{a)} \Delta v = \varepsilon r t = 81 \frac{\text{km}}{\text{h}},$$

$$\text{b)} n = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\frac{\varepsilon t^2}{2}}{2\pi} = \frac{\varepsilon t^2}{4\pi} = 477,5$$

3.5. Przyspieszenie dośrodkowe

$$3.5.1. a_d = \frac{v^2}{R} = 1262 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$3.5.2. a_d = \frac{2\pi^2 d n^2}{t^2} \approx 38,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$3.5.3. v = \sqrt{a_d R} = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$3.5.4. R = \frac{a_d}{4\pi^2 f^2} = 5 \text{ m},$$

$$\text{gdzie } f = \frac{15}{60} \text{ Hz} = 0,25 \text{ Hz}$$

3.5.5. **Uwaga.** W treści zadania podane są średnice, a nie promienie.

$$\Delta a = \omega^2 \frac{d_2 - d_1}{2} = 1,09 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$3.5.6. f_k = \sqrt{3} f$$

$$3.5.7. x = r \left(1 - \frac{a_w}{a_z}\right) = 1,4 \text{ m}$$

$$3.5.8. a_d = \frac{4\pi^2 R \cos\varphi}{T^2}, \text{ np. dla miejscowości}$$

położonej na szerokości geograficznej $\varphi = 50^\circ$, $a_d \approx 2 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$, gdzie T – okres obrotu Ziemi

$$3.5.9. \omega = \sqrt{\frac{a_d}{R}} = 0,8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \alpha = \omega t = 4 \text{ rad} = 229,2^\circ$$

$$3.5.10. v_2 = v_1 + \varepsilon R \Delta t = 86,4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$3.5.11. t = \sqrt{\frac{r}{a}} = 20 \text{ s}$$

$$3.5.12. a_s = \frac{v^2}{2s} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, a_d = \frac{a_s^2 t_1^2}{R} = 4,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$a_c = \sqrt{a_s^2 + a_d^2} \approx 4,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$3.5.13. t = \sqrt{\frac{2R}{a_s}} \approx 1,41 \text{ s}$$

Klasyka Fizyki

3.1. Czas spadania wszystkich kamieni jest taki sam, bo prędkość początkowa każdego z kamieni w kierunku pionowym była równa zero.

$$3.2. x = (v_1 + v_2) \sqrt{\frac{2h}{g}} = 542 \text{ m}$$

$$3.3. v_0 = \frac{l}{\Delta t} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$3.4. t = \frac{v_0}{g} = 2 \text{ s}$$

$$3.5. \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\sin 2\alpha_2}{\sin 2\alpha_1}}$$

$$3.6. \text{a)} t = \frac{l}{v_1 + v_2} = 2 \text{ s}, \text{ b)} y = h - \frac{gt^2}{2} = 80,38 \text{ m}$$

$$3.7. f_m = \frac{2n}{t_1 + t_2} = 80 \frac{1}{\text{s}}$$

$$3.8. v = \frac{2\pi R}{T} \approx 30 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

3.9. c, e

$$3.10. a_d = 2g$$

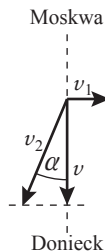
$$3.11. a_d = 4g$$

Zadania maturalne

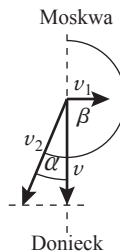
Zadanie 1.

1.1. Wzdłuż równoleżnika: Skopje–Rzym i Kopenhaga–Moskwa $\alpha = 0^\circ$, wzdłuż południka: Rzym–Kopenhaga i Moskwa–Donieck $\sin\alpha = \frac{v_1}{v_2} \Rightarrow \alpha = 5,7^\circ$ (rys. a).

a)



b)



1.2. **Wskazówka.** Azymut to kąt między północnym kierunkiem (zwrotem) południka a kierunkiem lotu liczony zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

Na trasach azymut wynosi odpowiednio:

Skopje–Rzym: 270° , Rzym–Kopenhaga:

$$\sin\alpha = \frac{v_1}{v_2} \Rightarrow \alpha = 5,7^\circ, \text{ azymut} = 354,3^\circ,$$

Kopenhaga–Moskwa: 90° , Moskwa–Donieck:

$$\sin\alpha = \frac{v_1}{v_2} \Rightarrow \alpha = 5,7^\circ, \text{ azymut} = 185,7^\circ \text{ (rys. b).}$$

1.3. Skopje–Rzym: $v = v_2 - v_1 = 720 \frac{\text{km}}{\text{h}}$,
 Rzym–Kopenhaga i Moskwa–Donieck:
 $v = \sqrt{v_2^2 - v_1^2} = 796 \frac{\text{km}}{\text{h}}$,
 Kopenhaga–Moskwa: $v = v_2 + v_1 = 880 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

1.4. $t \approx \frac{1540 \text{ km}}{880 \frac{\text{km}}{\text{h}}} \approx 1,75 \text{ h}$

Uwaga. Wynik zależy od dokładności odczytu odległości z mapy. Przyjmij pewną tolerancję.

Zadanie 2.

2.1. $t_1 = \frac{l}{v} = 3,87 \text{ s}$

2.2. $x = \frac{(v_1 + v)t}{2} = 41 \text{ m}$

2.3. $t_3 = \frac{2(l-x)}{v+v_1} \approx 1,02 \text{ s}$

2.4. $v_4 = \sqrt{2al + (0,5v)^2} = 2,09 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 75,2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$,
 taka prędkość nie jest bezpieczna

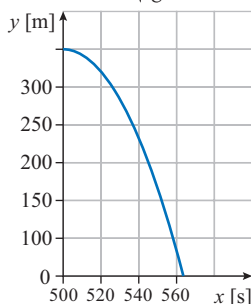
Zadanie 3.

3.1. $\tan \alpha = \frac{h}{s} \Rightarrow \alpha = 31^\circ$

3.2. $v = v_b \sqrt{1 + \left(\frac{s}{h}\right)^2} \approx 9,72 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

3.3. $t = \frac{h}{v_b} = 60 \text{ s}$

3.4. $x = v_b s \sqrt{\frac{2}{gh}} \approx 65 \text{ m}$



4. Oddziaływania

4.1. Oddziaływania. Dodawanie sił i rozkładanie sił na składowe

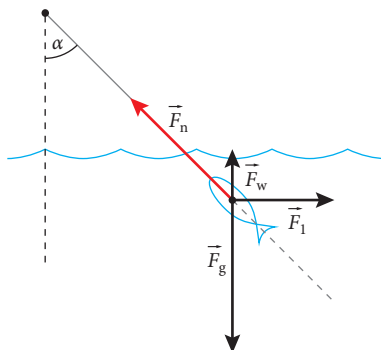
4.1.1. B, C

4.1.2. oddziaływania jądrowe silne: C, D, oddziaływania elektrostatyczne: A, B

4.1.3. $F_w = 10 \text{ N}$, wektor siły wypadkowej leży wzdłuż kierunku na którym leży wektor siły F_2 .

4.1.4. $F_w = 5 \text{ N}$, $\sin \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha \approx 53^\circ$

4.1.5. a) Pozostałe siły to: siła grawitacji, siła wyporu i siła naprężenia żyłki.

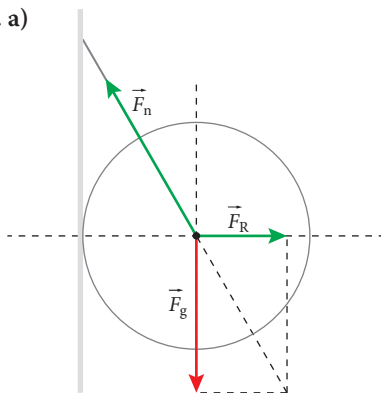


b) $\tan \alpha = \frac{F_1}{F_g - F_w} \Rightarrow F_g - F_w = \frac{F_1}{\tan \alpha}$, $\tan 45^\circ = 1$,
 $F_g = F_1 + F_w = 0,45 \text{ N}$,

$F_g = mg \Rightarrow m = \frac{F_g}{g} = 0,045 \text{ kg} = 45 \text{ g}$

Siła naprężenia żyłki: $F_n = \sqrt{2} F_1 = 0,42 \text{ N}$

4.1.6. a)

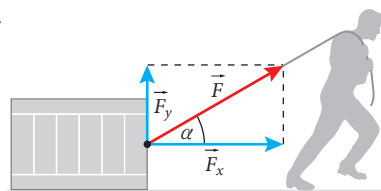


Na piłkę działają siły: $\vec{F}_g$ – ciężkości, $\vec{F}_n$ – naprężenia linki, $\vec{F}_R$ – siła reakcji ze strony ściany.

b) $\sin \alpha = \frac{\frac{d}{2}}{\frac{d}{2} + l} = 0,5 \Rightarrow \alpha = 30^\circ$

c) $\tan \alpha = \frac{F_R}{F_g} \Rightarrow F_R = F_g \tan \alpha$, $F_R = 15 \text{ N} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 8,7 \text{ N}$

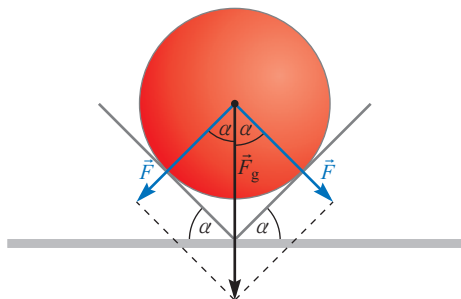
4.1.7.



$F_n = F_g - F_y$, $F_y = F \sin \alpha$

$$F_n = mg - F \sin \alpha = 820 \text{ N}$$

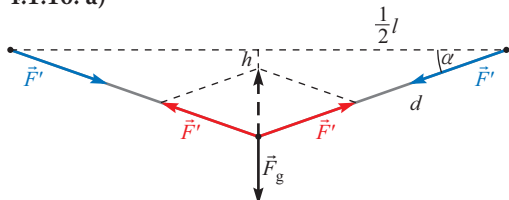
$$4.1.8. F = \frac{mg}{2 \cos \alpha} = 50,3 \text{ N}$$



$$4.1.9. a) N = \frac{F_g}{2 \cdot \sin \alpha} = 400 \text{ N} > F_n \text{ linka zerwie się,}$$

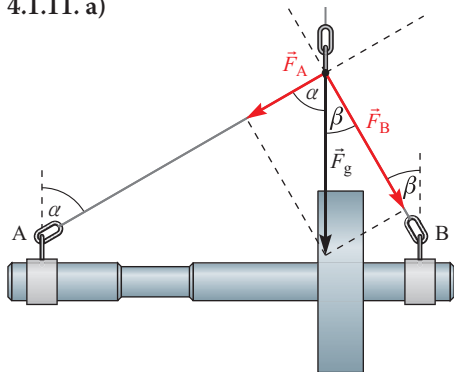
$$b) N = \frac{F_g}{2 \cdot \sin \beta} = 283 \text{ N}$$

4.1.10. a)



$$b) \Delta F = \frac{mg}{2\sqrt{1 - \left(\frac{l}{l + \Delta l}\right)^2}} - F = 550 \text{ N}$$

4.1.11. a)



$$b) F_A = mg \cos \alpha = 1472 \text{ N}, F_B = mg \cos \beta = 2549 \text{ N}$$

4.2. Zasady dynamiki Newtona

$$4.2.1. a = \frac{F_1 - F_2}{m_1 + m_2} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, F_n = m_2 a + F_2 = 2,7 \text{ N}$$

4.2.2.



$$F_3 = m_w a, F_2 - F_3 = m_w a \Rightarrow F_2 = 2m_w a,$$

$$F_1 - F_2 = m_w a \Rightarrow F_1 = 3m_w a,$$

$$F - F_1 = m_1 a \Rightarrow F = a(m_1 + 3m_w) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{F}{m_1 + 3m_w} = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$F_3 = 0,5 \text{ N}, F_2 = 2m_w a = 1 \text{ N}, F_1 = 3m_w a = 1,5 \text{ N},$$

$$F_1:F_2:F_3 = 3:2:1$$

$$4.2.3. a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} = 0,75 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$4.2.5. 1. F, 2. P, 3. P, 4. P, 5. F, 6. P$$

$$4.2.6. F_N = m(a + g) = 17\,715 \text{ N}$$

$$4.2.7. a = \frac{F\sqrt{2}}{m} - g = 0,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

4.2.8. Przy podnoszeniu sztangi z przyspieszeniem siła działająca na ręce zawodnika jest większa niż ciężar sztangi. Kiedy zawodnik opuszcza sztangę z przyspieszeniem, siła działająca na ręce zawodnika jest mniejsza niż ciężar sztangi. W momencie, gdy zawodnik trzyma nad głową sztangę, siła działająca na jego ręce jest równa ciężarowi sztangi.

$$4.2.9. a) a_1 = 0, F_1 = mg = 196,2 \text{ N},$$

$$b) a_2 = g \frac{M - m}{M + m} = 3,27 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$F_2 = \frac{2gMm}{M + m} = 261,6 \text{ N},$$

$$c) a_3 = \frac{Mg + Ma_0 - mg}{M + m} = 4,60 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$F_3 = \frac{Mm(2g + a_0)}{M + m} = 288,3 \text{ N}$$

$$4.2.10. v = \sqrt{v_0^2 + 2as} = 9 \frac{\text{m}}{\text{s}}, t = \frac{v - v_0}{g \sin \alpha} = 1,6 \text{ s}$$

$$4.2.11. v_0 = \sqrt{v^2 - 2gs \sin \alpha} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$t = \frac{v - v_0}{g \sin \alpha} = 2 \text{ s}$$

$$4.2.12. h = \frac{v_0^2}{2g} = 1,27 \text{ m}$$

$$4.2.13. s = v_0 t - \frac{at^2}{2}, \text{ gdzie } v_k = v_0 - at, v_k = 0, F = ma$$

Z rozwiązania równań:

$$s = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2 \frac{F}{m}} = \frac{mv_0^2}{2F} = 22,5 \text{ m}$$

4.3. Siła tarcia

$$4.3.1. s = \frac{v^2}{2\mu g} = 20,2 \text{ m}$$

$$4.3.2. v_0 = \sqrt{2s\mu_s g} = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$4.3.3. \mu_s = \frac{v^2}{2sg} = 0,64$$

4.3.5. Ruch jednostajny: $4F + F_o = F_N$.

Ruch przyspieszony: $4F + F_N - F_o = ma$.

$$a = \frac{8F}{m} = 0,64 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$F_N = F_o + 4F = 16\,640 \text{ N} = 16,64 \text{ kN}$$

$$\mathbf{4.3.6.} \quad v_0 = \sqrt{2s\mu g} = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\mathbf{4.3.7.} \quad a = \mu g, v_k = v_0 - at, \text{ gdzie } v_k = 0,$$

$$t = \frac{v_0}{a} = \frac{v_0}{\mu g} = 3 \text{ s}$$

$$\mathbf{4.3.8.} \quad F = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu \sin\alpha} = 110,4 \text{ N}$$

$$\mathbf{4.3.9.} \quad a = \frac{F_w}{m} = \frac{F_x - F_T}{m} = \frac{F \cos\alpha - \mu(mg - F \sin\alpha)}{m} =$$

$$= \frac{F(\cos\alpha + \mu \sin\alpha)}{m} - \mu g = 2,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\mathbf{4.3.10.} \quad F_N = 0,8mg = 550 \text{ N},$$

$$F_d = \frac{m}{\mu}(g - a) = 785 \text{ N}$$

$$\mathbf{4.3.11.} \quad a = \frac{F}{m_1 + m_2} - \mu g = 1,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$F_N = \frac{m_2}{m_1 + m_2} F = 166,7 \text{ N}$$

$$\mathbf{4.3.12.} \quad a = g(\cos\alpha - \mu \sin\alpha) = 5,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$v = at = 3,85 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\mathbf{4.3.13.} \quad t = \frac{v}{g(\sin\alpha - \mu \cos\alpha)} = 0,27 \text{ s},$$

$$s = \frac{v^2}{2g(\sin\alpha - \mu \cos\alpha)} = 0,20 \text{ m}$$

$$\mathbf{4.3.14.} \quad \mu = \tan\alpha = 0,087$$

$$\mathbf{4.3.15.} \quad h = \frac{v_0^2 \sin\alpha}{2g(\sin\alpha + \mu \cos\alpha)} = 1,36 \text{ m}$$

$$\mathbf{4.3.16.} \quad t = \frac{2s}{v} = 20 \text{ s},$$

$$F_0 = m(g \sin\alpha - \frac{v^2}{2s}) = 2440 \text{ N}$$

$$\mathbf{4.3.17.} \quad F = mg(\sin\alpha + \mu \cos\alpha) = 70,4 \text{ kN}$$

$$\mathbf{4.3.18.} \quad F_n = mgs \sin\alpha - \mu mg \cos\alpha - ma = 35,7 \text{ N}$$

$$\mathbf{4.3.19.} \quad F = \frac{ma + mg(\sin\alpha + \mu \cos\alpha)}{\cos\beta + \mu \sin\beta} = 40,8 \text{ N}$$

$$\mathbf{4.3.20.} \quad v_w = v - \frac{2F_o}{m}t = 2,46 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\mathbf{4.3.22. a)} \quad \mu_k = \frac{F_T}{F_N} = \frac{F_{gx}}{F_{g/y}} = \frac{F_g \sin\alpha}{F_g \cos\alpha} = \tan\alpha$$

$\tan\alpha = \frac{h}{l}$ z porównania wzorów, otrzymamy:

$$\mu_k = \frac{h}{l}, \text{ co należało dowieść}$$

b) Uzupełnione dane:

$\mu_k = \frac{h}{l}$
0,331; 0,329; 0,329; 0,312; 0,311; 0,322

średnia wartość współczynnika tarcia kinetycznego = 0,322

$$\mathbf{c)} \quad \Delta\mu_k = \frac{\mu_{k \max} - \mu_{k \min}}{2\sqrt{n}} = \frac{0,331 - 0,311}{2\sqrt{5}} = 0,004,$$

gdzie n – liczba pomiarów, $\mu_k = 0,322 \pm 0,004$

$$\text{Błąd względny: } \frac{\Delta\mu_k}{\mu_k} 100\% = \frac{0,004}{0,322} 100\% = 1,2\%$$

4.4. Siła dośrodkowa

$$\mathbf{4.4.1.} \quad F_d = \frac{mv^2}{R} = 0,0015 \text{ N}$$

$$\mathbf{4.4.2.} \quad F_d = 2\pi^2 md \left(\frac{n}{t}\right)^2 = 1,64 \text{ N}$$

$$\mathbf{4.4.3.} \quad f = \sqrt{\frac{F}{4\pi^2 mR}} = \sqrt{\frac{986 \text{ N}}{4\pi^2 \cdot 50 \text{ kg} \cdot 2 \text{ m}}} = 0,5 \text{ Hz}$$

$$\mathbf{4.4.4.} \quad R = \frac{F_d}{4\pi^2 m \left(\frac{n}{t}\right)^2} = \frac{5,5 \text{ N}}{4\pi^2 \cdot 5 \text{ kg} \cdot \left(\frac{5}{60 \text{ s}}\right)^2} = 4 \text{ m}$$

$$\mathbf{4.4.5.} \quad \omega = \sqrt{\frac{F}{mR}} = 24,26 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\mathbf{4.4.6.} \quad k = \frac{mv^2}{xR} = 80 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\mathbf{4.4.7.} \quad v = \sqrt{\mu_{\max} gR} = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\mathbf{4.4.8.} \quad f_{\max} = \sqrt{\frac{\mu g}{4\pi^2 R}} \approx 0,32 \text{ Hz}$$

$$\mathbf{4.4.9.} \quad R = \frac{\mu g}{4\pi^2 f^2} = 0,6 \text{ m}$$

4.4.10. Droga hamowania wyniesie

$$s_1 = \frac{v^2}{2\mu g} = 16,4 \text{ m} < d. \text{ Minimalny promień}$$

$$\text{skrętu } R = \frac{v^2}{\mu g} = 32,8 \text{ m} > d$$

$$\mathbf{4.4.11.} \quad \tan\alpha = \frac{v^2}{Rg} \approx 0,2 \Rightarrow \alpha \approx 11^\circ$$

$$\mathbf{4.4.12.} \quad \tan\alpha = \frac{F_{ts}}{F_R} = \frac{\mu_{s \max} \cdot mg}{mg} = \mu_{s \max} = 0,51,$$

$$\frac{mv^2}{R} = \mu_{s \max} \cdot mg \Rightarrow R = \frac{v^2}{\mu_{s \max} \cdot g} = 72 \text{ m}$$

$$\mathbf{4.4.13. a)} \quad F_1 = \frac{mv^2}{R} \approx 1297,8 \text{ N},$$

$$\mathbf{b)} \quad F_2 = \frac{mv^2}{r \cos \frac{\alpha}{2}} = 4796 \text{ N}$$

4.4.14. W najniższym punkcie toru siła nacisku:

$$F_{N1} = 4\pi^2 m R f^2 + mg \cos\alpha = 271 \text{ N}.$$

W najwyższym punkcie toru siła nacisku:

$$F_{N2} = 4\pi^2 m R f^2 - mg \cos\alpha = 203 \text{ N}.$$

$$\mathbf{4.4.15.} \quad \cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 l} \Rightarrow \alpha = 35^\circ$$

4.4.16. a)

$$\frac{F}{f^2} \left[\frac{\text{N}}{\text{Hz}^2} \right]$$

$$0,346; 0,308; 0,320; 0,305; 0,327$$

$$\left(\frac{F}{f^2} \right)_{\text{sr}} = 0,321 \frac{\text{N}}{\text{Hz}^2},$$

$$\Delta \left(\frac{F}{f^2} \right) = \frac{\left(\frac{F}{f^2} \right)_{\text{max}} - \left(\frac{F}{f^2} \right)_{\text{min}}}{2\sqrt{n}} = 0,009 \frac{\text{N}}{\text{Hz}^2},$$

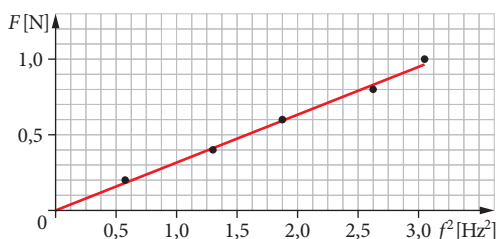
$$\frac{F}{f^2} = (0,321 \pm 0,009) \frac{\text{N}}{\text{Hz}^2}$$

b) $\frac{F}{f^2} = 4\pi^2 mR = 0,316 \frac{\text{N}}{\text{Hz}^2}$, otrzymana

teoretyczna wartość $\frac{F}{f^2}$ należy do przedziału wartości otrzymanych doświadczalnie (punkt a)

$\left(\frac{F}{f^2} \right)_{\text{dos}} \in (0,312 \frac{\text{N}}{\text{Hz}^2}, 0,330 \frac{\text{N}}{\text{Hz}^2})$, więc wynik doświadczenia potwierdza zależność teoretyczną.

c) Linia trendu wykresu jest linią prostą, co potwierdza zależność $F \sim f^2$

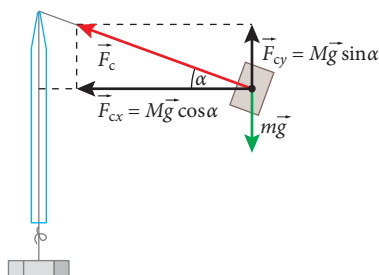
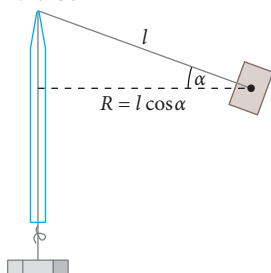


d) Mając do dyspozycji wykres zależności $F(f^2)$, możemy wyznaczyć współczynnik kierunkowy prostej $\text{tg} \alpha = \frac{F}{f^2} = 0,317 \frac{\text{N}}{\text{Hz}^2}$. Wartość teoretycz-

na wyrażenia wynosi $\frac{F}{f^2} = 0,316 \frac{\text{N}}{\text{Hz}^2}$.

W związku z tym, że wyniki tylko nieznacznie się różnią możemy kolejny raz potwierdzić słuszność wzoru na wartość siły dośrodkowej.

4.4.17.



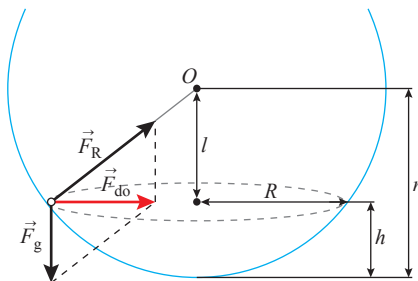
Składowa $F_{cx} = Mg \cos \alpha$ zgodnie z II zasadą dynamiki nadaje masie m przyspieszenie dośrodkowe $a_d = 4\pi^2 f^2 R$, gdzie $R = l \cos \alpha$, $F_{cx} = m a_d$, $Mg \cos \alpha = 4\pi^2 f^2 l m \cos \alpha \Rightarrow f^2 = \frac{M}{4\pi^2 m} \frac{1}{L}$

4.4.18. $l = \sqrt{r^2 - R^2} = 6 \text{ cm}$,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = 12,8 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$F_N = F_R = \frac{mgr}{l} = \frac{mgr}{\sqrt{r^2 - R^2}} \approx 0,083 \text{ N}$$

lub $F_N = F_R = \sqrt{F_g^2 + F_{do}^2} = F_g \sqrt{1 + \frac{R^2}{l^2}} \approx 0,083 \text{ N}$



4.5. Siły bezwładności

4.5.1. $\Delta F = 2ma = 0,8 \text{ N}$

4.5.2. $a = \frac{F}{m} - g = -1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Przyspieszenie skierowane jest w dół. Winda może poruszać się w górę ruchem jednostajnie opóźnionym, lub w dół ruchem jednostajnie przyspieszonym.

4.5.3. $a = 0,2g \approx 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

4.5.4. $F = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = 167 \text{ N}$

4.5.5. $t = \frac{v}{\mu g} = 1,9 \text{ s}$

4.5.6. $a_0 = a + \mu g = 7,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

4.5.7. Siła bezwładności działająca na skrzynię:

$$F_b = \frac{m(v_1 - v_2)}{\Delta t} = 667 \text{ N}, \text{ maksymalna siła tarcia}$$

statycznego: $F_{T\text{max}} = mgu = 589 \text{ N} < F_b$, skrzynia przesunie się w kierunku jazdy. Naprężenie tylnej liny to $F_b - F_{T\text{max}} = 78 \text{ N}$

$$4.5.8. \operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{2gs} \Rightarrow \alpha = 4^\circ 41'$$

4.5.9. Współczynnik sprężystości liny $k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

a) Stan nieważkości skoczek odczuje na wysokości od 50 m do 40 m nad ziemią, niedociążenie od 40 m do $h' = h - l_0 - \frac{mg}{k} = 33 \text{ m}$ nad ziemią, przeciążenia na wysokościach mniejszych od 33 m nad ziemią.

b) Maksymalne przeciążenie odpowiada sytuacji, gdy lina jest maksymalnie napięta

$$mg(l_0 + x_{\max}) = \frac{kx_{\max}^2}{2}, \text{ stąd } x_{\max} = 20,4 \text{ m},$$

$$a = \frac{kx_{\max}}{m} \approx 3g.$$

4.5.10.

$$v = \sqrt{(1 + 0,4)gR} = 74,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Nieważkość, gdy $F_R = 0 \Rightarrow F_g = F_{\text{od}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow v = \sqrt{gR} = 62,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$4.5.11. R = \frac{mv^2}{F_R - F_g}, \text{ gdzie } F_R = kmg,$$

$$R = \frac{mv^2}{kmg - mg} = \frac{mv^2}{(k-1)mg} = \frac{v^2}{(k-1)g} = 10 \text{ m}$$

$$4.5.12. f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} = 0,70 \text{ Hz}$$

4.5.13. Siła naciągu w najwyższym punkcie toru

$$\text{ruchu } F_{N1} = \frac{(m_d + m_s)g \cos \alpha}{2} = 74,8 \text{ N},$$

w najniższym punkcie toru ruchu:

$$F_{N2} = \frac{m_d + m_s}{2} \left(g + \frac{v^2}{l} \right) = 302 \text{ N}$$

$$4.5.14. F_{\text{od}} = \frac{mv^2}{R} = 46,3 \text{ N}$$

$$4.5.15. F_N = 4\pi^2 m R f^2 = 158 \text{ N}$$

$$4.5.16. T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R}{g \operatorname{tg} \alpha}} = 2,05 \text{ s}, \text{ gdzie}$$

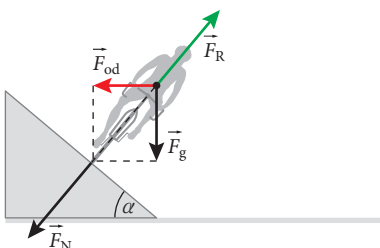
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{\sqrt{L^2 - R^2}} = 0,577 = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ z podobieństwa}$$

$$\text{trójkątów wynika równość } \frac{F_n}{F_g} = \frac{L}{\sqrt{L^2 - R^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_n = mg \frac{L}{\sqrt{L^2 - R^2}} \approx 2,27 \text{ N}$$

$$4.5.17. f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\mu R}} = 1,6 \text{ Hz}$$

4.5.18. a)



$$b) \operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{\text{od}}}{F_g} = \frac{\frac{mv^2}{r}}{mg} = \frac{v^2}{gr} \Rightarrow v = \sqrt{gr \operatorname{tg} \alpha}$$

$$v = \sqrt{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 30 \text{ m} \cdot 0,84} = 15,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

4.5.19. strzał na zachód, odchylenie w dół:

$$\Delta x_w = \frac{a_w t^2}{2} = \frac{2\pi v t^2}{T} = 3,6 \text{ cm}$$

strzał na południe, odchylenie na zachód:

$$\Delta x_s = \frac{a_s t^2}{2} = \frac{2\pi v t^2 \sin \varphi}{T} = 3,1 \text{ cm},$$

gdzie T – okres obrotu Ziemi

4.5.20. Siła Coriolisa jest skierowana na wschód i ma wartość $F_C = 2mv\omega \sin \varphi = 21 \text{ N}$, gdzie ω to prędkość kątowa Ziemi. Siła odśrodkowa ma kierunek prostopadły do osi obrotu Ziemi i skierowana jest od powierzchni Ziemi. Siła nacisku na tory:

$$F = \sqrt{(mg - m\omega^2 r \cos \varphi)^2 + (2mv\omega \sin \varphi)^2} \approx 98 \text{ kN}$$

gdzie $r = R_z \cos \varphi$, R_z – promień Ziemi.

4.5.21. Wskazówka. We wzorze ω to prędkość kątowa Ziemi, a φ szerokość geograficzna.

$$\Delta x = \frac{2}{3} \omega \sqrt{\frac{2H_p^3}{g}} \cos \varphi = 1,6 \text{ cm}$$

Klasyka fizyki

4.1. A

$$4.2. F_{0-10} = 8 \text{ N}, F_{10-30} = 0 \text{ N}, F_{30-50} = -4 \text{ N}$$

$$4.3. v = \frac{F \Delta t}{m} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$4.4. F = m \left(g + \frac{2h}{t^2} \right) = 5 \text{ N}$$

$$4.5. F_0 = F - \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2s} = 100 \text{ kN}$$

$$4.6. a = g \sin \alpha + \frac{F}{m} \cos \alpha = 10,1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$4.7. a = \frac{F}{m} (\cos \alpha - \mu \sin \alpha) - g$$

$$4.8. x = \frac{lm_1}{m_1 + m_2} = 3 \text{ cm}$$

$$4.9. c), F = m(a + 0,1g) = 3000 \text{ N}$$

$$4.10. F \geq mg \left(\frac{\sin \alpha}{\mu} - \cos \alpha \right) = 16 \text{ N}$$

$$4.11. s = \frac{v_0^2}{4g \sin \alpha} \approx 20 \text{ m}$$

$$4.12. m = \frac{\Delta F}{2g} = 250 \text{ g}$$

$$4.13. R = \frac{2v^2}{g} = 127 \text{ m}$$

$$4.14. m = 2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = 244 \text{ kg}$$

$$4.15. \Delta m = \frac{4mh}{g(\Delta t)^2 - 2h} = 10,4 \text{ g}$$

Zadania maturalne

Zadanie 1.

1.1. rys. a) Siła ciężkości działa pionowo w dół, równoważy ją siła reakcji podłoża. Siłę F równoważy siła tarcia działająca przeciwnie do kierunku ruchu wózka.

rys. b) Siła ciężkości działa pionowo w dół. Siłę F należy rozłożyć na składowe. Składową poziomą równoważy siła tarcia (o innej wartości niż w punkcie a). Składowa pionowa zwiększa nacisk wózka na podłoże. Siła reakcji podłoża równoważy siłę ciężkości i pionową składową siły F .

$$1.2. F_T = \mu mg \approx 39 \text{ N}$$

$$1.3. F_T = \mu(mg + F_1 \sin \alpha), \text{ wózek jedzie ze stałą prędkością, więc } F_1 \cos \alpha = \mu F_1 \sin \alpha + \mu mg \Rightarrow F_1 = \frac{\mu mg}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}, \text{ stąd } F_T = 60 \text{ N}$$

Zadanie 2.

2.1. Stopy zawodnika działają na podłoże siłą nacisku. Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki na stopy zawodnika działa siła reakcji podłoża, dzięki której zawodnik może się odbić.

$$2.2. v = \frac{F - mg}{m} t = 2,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

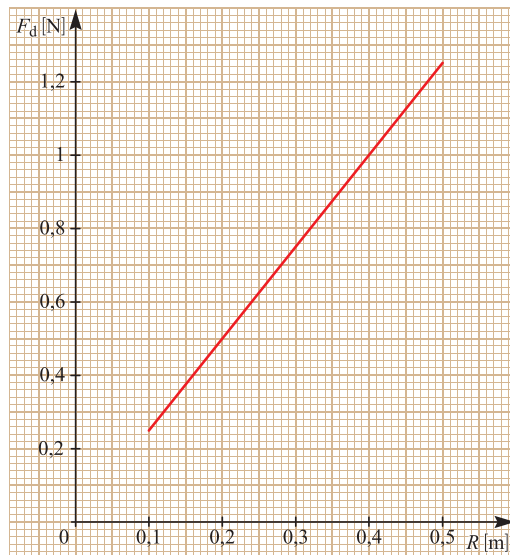
$$2.3. h = \frac{v^2}{2g} = 1,17 \text{ m}$$

$$2.4. H = h + 1,05 \text{ m} = 2,22 \text{ m} \text{ (rekordy świata: mężczyźni 2,45 m, kobiety 2,09 m)}$$

Zadanie 3.

$$3.1. \omega = \sqrt{\frac{g\mu}{R_1}} = 3,87 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$3.2. F_d = m\omega^2 R$$



3.3. Taki kształt toru powstaje po złożeniu dwóch ruchów: jednostajnie prostoliniowego wzdłuż promienia tarczy i jednostajnego po okręgu.

$$3.4. t = \frac{2s}{\omega R_2} = 0,08 \text{ s}$$

Zadanie 4.

$$4.1. F_0 \approx 800 \text{ N}, F_{N1} = 640 \text{ N}, F_{N2} = 800 \text{ N}, F_{N3} = 960 \text{ N}$$

$$4.2. a_1 = \frac{mg - F_{N1}}{m} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, a_3 = \frac{mg - F_{N3}}{m} = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$4.3. v = a_1 \Delta t = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$4.4. h = h_0 - \frac{a_1 t_1^2}{2} - vt_2 - vt_3 + \frac{a_3 t_3^2}{2} = 54 \text{ m}$$

5. Praca, moc, energia

5.1. Praca i moc jako wielkość fizyczna

5.1.1. Na przemieszczenie ruchem jednostajnym drewnianego klocka po poziomy stole: siła $\vec{F}$ wykonała pracę 0,18 J, siła grawitacji $\vec{F}_g$ i siła reakcji podłoża $\vec{F}_R$ nie wykonywała pracy, natomiast praca siły tarcia kinetycznego $\vec{F}_T$ była ujemna i wynosiła -0,18 J.

5.1.2. Przy przetaczaniu wagonika na odcinku 100 m pierwszy robotnik wykonał pracę 34,64 kJ, a drugi robotnik pracę 28,28 kJ.

$$5.1.3. W = F \cdot s \cdot \cos\alpha = 36,4 \text{ MJ}$$

$$5.1.4. \text{a)} W_{\Delta x} = \frac{12 \text{ m} + 5 \text{ m}}{2} 10 \text{ N} = 85 \text{ J},$$

$$\text{b)} W_{\Delta x} = \frac{2 \text{ m} \cdot 10 \text{ N}}{2} = 75 \text{ J}$$

$$5.1.5. W = 0$$

5.1.6. Gdy nie ma tarcia, nie ma potrzeby by na kontener działała dodatkowa siła zewnętrzna w kierunku jego ruchu. Zatem w tym przypadku nie wykonano pracy. Gdy kontener porusza się z przyspieszeniem, działa na niego różna od zera siła, która wykonuje pracę:

$$W = m \cdot a \cdot s = 31,25 \text{ J}$$

$$5.1.7. W = \mu \cdot m \cdot g \cdot s = 1080 \text{ J}$$

$$5.1.8. \text{a)} F = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu \sin\alpha} = 32,9 \text{ N},$$

$$\text{b)} W = F s \cos\alpha = 6,98 \text{ kJ}$$

$$5.1.9. \text{a)} F = \frac{\mu mg}{\cos\alpha - \mu \sin\alpha} \approx 613 \text{ N},$$

$$\text{b)} W = F s \cos\alpha = \frac{\mu mgs}{1 - \mu \tan\alpha} \approx 15,3 \text{ kJ}$$

$$5.1.10. W = mgs(\sin\alpha + \mu \cos\alpha) = 11\,265 \text{ J}$$

$$5.1.11. F_{\text{op}} = F_g - ma = m(g - a),$$

$$h = \frac{at^2}{2} \Rightarrow a = \frac{2h}{t^2} = 6,61 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$W = F_{\text{op}} \cdot h \cdot \cos 180^\circ = -mh(g - a) = 10\,170 \text{ J}$$

$$5.1.12. W = \frac{P}{v} s = 1,54 \text{ MJ}$$

$$5.1.13. P = \frac{W}{t} = \frac{mv^2}{2t} = 417 \text{ W}$$

$$5.1.14. P_{\text{sr}} = F \cdot v_{\text{sr}} = F \cdot \frac{at}{2} = F \cdot \frac{F \cdot t}{2m} =$$

$$= \frac{F^2 \cdot t}{2m} = 11 \text{ kW}, \text{ gdzie } a = \frac{F}{m},$$

$$P_{\text{ch}} = F \cdot v = F \cdot at = F \cdot \frac{F}{m} \cdot t = \frac{F^2 \cdot t}{m} = 22 \text{ kW}$$

$$5.1.15. P_1 = 0,05mg \cdot v, P_2 = (mgs\sin\alpha + 0,05mg) \cdot v,$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{mgv(\sin\alpha + 0,05)}{0,05mgv} = \frac{\sin\alpha}{0,05} + 1 = 6,176$$

5.2. Pojęcie energii. Energia potencjalna grawitacji. Energia kinetyczna

$$5.2.1. m = \frac{W}{g\Delta h} = 30 \text{ kg}$$

$$5.2.2. W = \Delta E_p = mg\Delta h = mg(h + h_1 - h_0) = 1334 \text{ J}$$

$$5.2.3. \Delta E_p = mg(h_2 - h_1) = mg\left(\frac{c}{2} - \frac{a}{2}\right) = 0,04 \text{ J}$$

$$5.2.4. W = \Delta E_p = mg \cdot 0,5\Delta h = 30 \text{ kJ}$$

$$5.2.5. F_T = \frac{mv^2}{2s} = 24 \text{ kN}$$

$$5.2.6. \text{a)} W = \frac{mv^2}{2} = 14,7 \text{ J}, \text{ b)} W_0 = n_0 W = 324 \text{ kJ},$$

c) $P = \frac{W_0}{t} = 3,75 \text{ W}$, d) $\frac{W_c}{W_0} = \frac{n_c}{n_0} = 0,92$, około 92% całkowitej pracy zostało wykorzystane na rzuty celne

$$5.2.7. W = m\left[g\Delta h + \frac{v_2^2}{2}\right] - \frac{v_1^2}{2} = 36 \text{ MJ}$$

$$5.2.8. \text{a)} W_1 = \frac{1}{8}mv^2 = 40 \text{ kJ},$$

$$\text{b)} W_2 = \frac{3}{8}mv^2 = 120 \text{ kJ},$$

$$\text{c)} \frac{W_1}{W_2} = \frac{1}{3}, \frac{s_1}{s_2} = \frac{1}{3}$$

Stosunek pracy wykonanej przez silnik i dróg pokonanych przez samochód jest taki sam, jeżeli w ruchu jednostajnie przyspieszonym prędkość zmieniała się o taką samą wartość.

$$5.2.9. v = \sqrt{2 \cdot 0,4gs} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$5.2.10. s = \frac{v^2}{2\mu g} = 51,4 \text{ m}$$

$$5.2.11. P = \frac{\frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2 + 0,5gs)}{\frac{2s}{v_1 + v_2}} \approx 51,8 \text{ kW}$$

$$5.2.12. Pt = \Delta E_k, 2Pt = mv^2, m = dV, q = \frac{V}{t},$$

$$v = \sqrt{\frac{2P}{dq}} = 17,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$5.2.13. P = \frac{\Delta E_p}{t}, Pt = mgh, \text{ gdzie } m = dV,$$

$$Pt = dVgh, V = \frac{Pt}{dgh} = 0,183 \text{ m}^3 = 183 \text{ litry wody}$$

5.3. Zasada zachowania energii

$$5.3.1. v = \sqrt{2gh} = 22,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

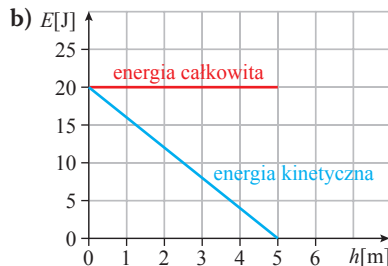
$$5.3.2. h = \frac{v_0^2}{4g} = 0,9 \text{ m}$$

$$5.3.3. v_0 = \sqrt{2g(h_2 - h_1)} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$5.3.4. v = \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$E_k = mgl(1 - \cos\alpha) = 0,02 \text{ J}$$

$$5.3.5. \text{a)} m = \frac{E_p}{gh} = 0,4 \text{ kg},$$



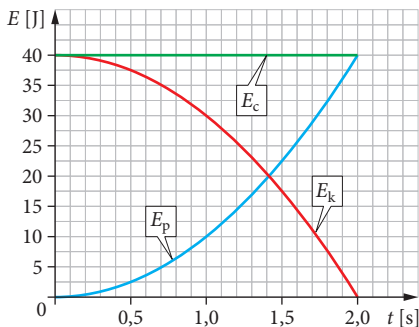
$$\text{c)} h_1 = \frac{v_0^2}{4g} = 2,5 \text{ m}, \text{ d)} h_1 = \frac{v_0^2}{10g} = 1 \text{ m}$$

5.3.6. Energia kinetyczna: $E_k = \frac{mv^2}{2}$, $v = gt$,
 $E_k = \frac{mg^2 t^2}{2}$ (energia kinetyczna jest kwadratową funkcją czasu.)

Energia potencjalna:

$$E_p = mg(h - H), H = \frac{gt^2}{2}, E_p = mgh - \frac{mg^2 t^2}{2}$$

(energia potencjalna zależy od t^2).



c) Całkowita energia mechaniczna to suma energii kinetycznej i potencjalnej: $E_c = E_k + E_p$,

$$E_c = \frac{mg^2 t^2}{2} + mgh - \frac{mg^2 t^2}{2} = mgh$$

Energia całkowita ma stałą wartość niezależną od czasu.

5.3.7. a) $W_1 = mgh = 50 \text{ kJ}$,

b) $W_2 = m(g + a)h = 54 \text{ kJ}$,

c) $F_1 = mg = 5 \text{ kN}$; $F_2 = m(g + a) = 5,4 \text{ kN}$

5.3.8. $W = m(g + a)\frac{at^2}{2} \approx 1,60 \text{ MJ}$

5.3.9. a) $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 14,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$,

b) $\Delta E_W = 0,6E_k = 0,6 \frac{mv^2}{2} = 259 \text{ J}$

5.3.10. $\mu = \frac{2gh - v^2}{2sg \cos \alpha} = 0,35$

5.3.11. a) $v = \sqrt{\frac{3}{2}gh} = 7,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$,

b) $F_t = \frac{1}{4}mg = 172 \text{ N}$

5.3.12. $P = \frac{dVgh}{\eta t} = 272,5 \text{ kW}$

5.3.13. $V = \frac{Pt}{\eta dgh} = 525\,000 \text{ m}^3$

5.4. Energia potencjalna sprężystości

5.4.1. a) $k = \frac{2W}{x^2} = 200 \frac{\text{N}}{\text{m}}$,

b) $E_{ps1} = \frac{1}{2}kx_1^2 = 0,16 \text{ J}$, $E_{ps2} = \frac{1}{2}kx_2^2 = 0,64 \text{ J}$,

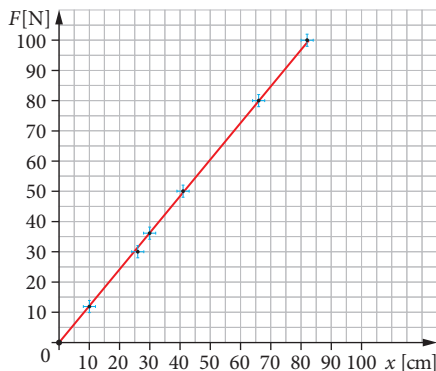
c) $W_2 = \frac{1}{2}k[x_5^2 - x_4^2] = 0,4 \text{ J}$

5.4.2. $F = kx = 25 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0,72 \text{ m} = 18 \text{ N}$,

$E_{ps} = \frac{1}{2}kx^2 = 6,48 \text{ J}$

5.4.3. $W = \frac{mg(\Delta x)^2}{2\Delta l} = 0,05 \text{ J}$

5.4.4. a)



b) Średnia wartość współczynnika sprężystości wynosi $k = 120 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

5.4.5. $W = \frac{1}{2}kx^2$, $W = 67,5 \text{ J}$,

$\frac{1}{2}mv^2 = 0,85 \cdot \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow v = x\sqrt{0,85 \frac{k}{m}} = 55,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

5.4.6. $k = \frac{mv^2}{x^2} = 80 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

5.4.7. $H = \frac{x_1^2}{2x} + d - x_1 = 1,75 \text{ m} < 2,8 \text{ m}$

5.5. Pęd ciała. Zasada zachowania pędu

5.5.1. $v_t = \frac{m_z v_z}{m_z + m_1} = 2,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

5.5.2. $v = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)v_1 + m_3 v_2}{m_1 + m_2} = 2,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

5.5.3. $v' = \frac{m_z v_z - mv}{m_z + m} \approx -0,11 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Żaglówka

zacznie się cofać, jednak ze względu na opory ruchu szybko się zatrzyma.

5.5.4. Rozpatrujemy sytuację w układzie odniesienia związanym z brzegiem. Pęd rybaka co do wartości jest równy pędowi łodzi. Zwróćmy uwagę, że rybak nie zeskoczył z łodzi, a zatem łódź, przemieszczając się względem brzegu unosi także rybaka. W pędzie łodzi należy uwzględnić więc również masę rybaka.

$$v_t = (m_r + m_l) = m_r v_r$$

Dla ruchu jednostajnego, zapiszemy:

$$\frac{s}{t}(m_r + m_l) = \frac{l}{t}m_r \Rightarrow s = \frac{m_r}{m_r + m_l}l \approx 0,94 \text{ m}.$$

5.5.5. Ustalmy kierunek osi x zgodny ze zwrotem prędkości piłki.

a) prędkość Darka $v_D = \frac{mv_g}{F_D} = 0,61 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, zwrot wektora prędkości jest przeciwny do zwrotu osi x ; prędkość Konrada $v_K = \frac{mv}{m + \frac{F_K}{g}} = 0,70 \frac{\text{m}}{\text{s}}$,

zwrot wektora prędkości jest zgodny ze zwrotem osi x ,

b) $s = \frac{v_D^2}{2g\mu} = 0,64 \text{ m}$

5.5.6. $v_p = \frac{(1 - 0,766)m_r v_r}{m_p} \approx 53 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 191 \frac{\text{km}}{\text{h}}$,

$\frac{v_p}{v} = 0,71$

5.5.7. a) $v = \frac{2mv_0}{3M} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

b) $s = \frac{v^2}{2\mu g} = 68 \text{ cm}$. Pudełko spadnie z podestu.

c) $\mu \geq \frac{v^2}{2gl} \approx 0,45$

5.5.8. $F = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = 464 \text{ N}$, $n = \frac{m\Delta v}{Mg\Delta t} \approx 9,46$

5.5.9. $v'_d = v_p \frac{m_p}{m_d} \approx 2,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $s = \frac{v_p^2 m_p^2}{0,4m_d^2 g} \approx 2,1 \text{ m}$

5.5.10. a) $F = \frac{mv_p^2}{2l} = 656 \text{ kN}$,

b) $M = m \frac{v_p}{v_a} = 1200 \text{ kg}$

5.5.11. a) $F = \frac{m_k v_k^2}{2l} = 4700 \text{ N}$,

b) $p_g = p_c - m_k v_k = 9,2 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$,

$\frac{p_g}{p_c} = 1 - \frac{m_k v_k}{p_c} \approx 0,23$,

c) $v' = \frac{p_c}{m_m} = 5,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Na odrzut karabinu składają się pęd pocisku i pęd gazów. Można zmniejszyć pęd gazów poprzez wycięcie bocznych otworów w lufie.

5.5.12. a) $t = \frac{2l}{v_p} = 5,5 \text{ ms}$, b) $v_k = \frac{m_p v_p}{0,8m_k} = 5,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

5.5.13. a) $p_g = m_k v_0 - m_p v_p = 3,7 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$,

b) $Ft = m_p v_p = 18,8 \text{ N} \cdot \text{s}$

5.5.14. $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ gdzie, zmiana pędu: $\Delta p = d \cdot \Delta V$,

prędkość: $v = \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{\Delta V}{S \cdot \Delta t}$, objętość: $\Delta V = S \cdot \Delta l$,

$F = \frac{d}{S} \left(\frac{\Delta V}{\Delta t} \right)^2 = 1200 \text{ N}$,

$p = \frac{F}{S} = 1\,600\,000 \text{ Pa} = 1,6 \text{ MPa}$

5.5.15. $p = dv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{p}{d}} = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

5.5.16. $F = \frac{2m_p v_p \cos \frac{\alpha}{2}}{t} \approx 700 \text{ N}$

5.5.17. $F_c = u \frac{\Delta m}{\Delta t} = 15 \text{ MN}$,

$a = \frac{F_c - m_c g}{m_c} = \frac{\frac{\Delta m}{\Delta t} u - \left(m - \frac{\Delta m}{\Delta t} t \right) g}{m - \frac{\Delta m}{\Delta t} t} \approx 17,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

5.5.18. $u = \frac{mg}{\frac{\Delta m}{\Delta t}} \approx 1990 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

5.5.19. $a_0 = \frac{\frac{\Delta m}{\Delta t} u_g - mg}{m} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$,

$a_k = \frac{\frac{\Delta m}{\Delta t} u_g - 0,2mg}{0,2m} = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

5.6. Zderzenia niesprężyste i sprężyste

5.6.1. $\Delta Q = \left| \frac{m_1^2 v_{01}^2}{2(m_1 + m_2)} - \frac{m_1 v_{01}^2}{2} \right| = 3,75 \text{ J}$

5.6.2.

$\Delta Q = \left| \frac{(m_1 v_{01} + m_2 v_{02})^2}{2(m_1 + m_2)} - \frac{m_1 v_{01}^2 + m_2 v_{02}^2}{2} \right| = 0,15 \text{ J}$

$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 5,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

5.6.3. $\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_{02} + v_{wsp}}{v_{01} - v_{wsp}} = 12$

5.6.4. $v_{wsp} = \frac{mv_{01}}{2m} = \frac{v_{01}}{2}$,

$\frac{Q}{E_{k0}} = \frac{\frac{mv_{01}^2}{2} - \frac{2mv_{wsp}^2}{2}}{\frac{mv_{01}^2}{2}} = \frac{1}{2}$

5.6.5. a)

$m_1 v - m_2 v = (m_1 + m_2) V \Rightarrow V = \frac{v(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$

$V = 13 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 46,8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

b) $\frac{E_w}{E_k} = \frac{\frac{v^2}{2}(m_1 + m_2) - \frac{V^2}{2}(m_1 + m_2)}{\frac{v^2}{2}(m_1 + m_2)} = 1 - \frac{V^2}{v^2}$

$\frac{E_w}{E_k} = 0,25$, $\frac{E_w}{E_k} = 25\%$

5.6.6. Sprawdzamy zasadę zachowania energii:

$E_{k0} = \frac{1}{2} m_1 v_{01}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{02}^2 = 33 \text{ m [J]}$

$E_k = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = 34 \text{ m [J]}$

Kulki po zderzeniu sprężystym nie mogą się poruszać z tymi prędkościami.

5.6.7. $u_1 = v_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$u_2 = v_1 \frac{2m_1}{m_1 + m_2} = 9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Obydwie kule będą się poruszać zgodnie ze zwrotem pierwszej kuli przed zderzeniem.

5.6.8. $u_1 = v_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = -2,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$u_2 = v_1 \frac{2m_1}{m_1 + m_2} = 0,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Kulka pierwsza po zderzeniu zmieni zwrot prędkości na przeciwny, a druga będzie się poruszać zgodnie ze zwrotem pierwszej kuli przed zderzeniem.

5.6.9. Korzystamy ze wzorów:

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_{01} + 2m_2v_{02}}{m_1 + m_2},$$

$$v_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_{02} + 2m_1v_{01}}{m_1 + m_2} \text{ i otrzymujemy:}$$

$$\text{a) } v_1 = \frac{(m - m)v_{01}}{2m} = 0, v_{2c} = \frac{2mv_{01}}{2m} = v_{01}$$

$$\text{b) } v_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_{01}}{m_1 + m_2} = \frac{(7 - 1)m}{8m}v_{01} = 0,75v_{01},$$

$$v_2 = \frac{2m_1v_{01}}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 7m}{8m}v_{01} = 1,75v_{01}$$

$$\text{c) } v_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_{01}}{m_1 + m_2} = \frac{(1 - 9)m}{10m}v_{01} = -0,8v_{01},$$

$$v_2 = \frac{2m_1v_{01}}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 1m}{10m}v_{01} = 0,2v_{01}$$

$$5.6.10. \frac{E_{k2}}{E_{k01}} = \frac{\frac{1}{2}mv_{01}^2}{\frac{1}{2}mv_{01}^2} = \frac{8}{9}$$

$$5.6.11. v_3 = \frac{4m_1m_2v_{01}}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)} = 0,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$5.6.12. \text{a) } v_{0r} = \frac{v}{2} \left(1 + \frac{m}{M}\right) = 86 \frac{\text{km}}{\text{h}},$$

$$\text{b) } v_{sr} = \frac{(n-1)l}{t} = 28 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$5.6.13. v_p = \frac{m+M}{m} \sqrt{2gh} = 521 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

5.6.14. Masa wahadła z pociskiem w środku:

$$M = \frac{mv}{\sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)}} = 1 \text{ kg}$$

Masa samego wahadła $M_w = M - m = 992 \text{ g}$

$$5.6.15. v_1 = \sqrt{2gl} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}, m_1 = \frac{1}{3}m_2 = 0,02 \text{ kg}$$

5.6.16. $v_1 = v_{01} \cos\alpha = 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, kula porusza się równolegle do płaszczyzny stycznej kuli,

$v_2 = v_{01} \sin\alpha = 0,69 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, kula porusza się prostopadle do v_1 , wszystkie prędkości są w jednej płaszczyźnie

$$5.6.17. \text{a) } \tan\alpha = \frac{p'_1}{p_1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}p_1}{p_1} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

$$\text{b) } \sin\alpha = \frac{p_1}{p'_2}, \frac{p_1^2}{2m} = \frac{p'^2_1}{2m} + \frac{p'^2_2}{2m_x},$$

$$p'_2 = \frac{p_1}{\cos\alpha} = 2 \frac{\sqrt{3}}{3} p_1, \frac{p_1^2}{2m} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}p_1\right)^2}{2m} + \frac{\left(2\frac{\sqrt{3}}{3}p_1\right)^2}{2m_x},$$

$$m_x = 2m = 900 \text{ g}$$

$$5.6.18. \vec{p}_2^2 = \vec{p}^2 + \vec{p}_1^2, p = 2 \text{ kg} \cdot 60 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 120 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$p_1 = 0,5 \text{ kg} \cdot 180 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 90 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$p_2 = \sqrt{p^2 + p_1^2} = \sqrt{22500} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} = 150 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$p_2 = mv_2 \Rightarrow v_2 = \frac{p_2}{m_2} = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\sin\alpha = \frac{p_1}{p_2} = 0,6 \Rightarrow \alpha \approx 37^\circ,$$

odłamek o masie m_2 tworzy z poziomem kąt 37°

$$5.6.19. p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = 10 \cdot 10^4 \text{ kg} \frac{\text{km}}{\text{h}},$$

$$v = \frac{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}{m_1 + m_2} = 38,5 \frac{\text{km}}{\text{h}},$$

$$\sin\alpha = \frac{p_2}{p} = 0,8 \Rightarrow \alpha = 53^\circ$$

Klasyka fizyki

$$5.1. \text{b), } a = \frac{W}{mh} - g = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$5.2. \text{d), } W = \frac{mg^2}{2}(t_2^2 - t_3^2) = 150 \text{ J}$$

5.3. **Wskazówka.** Praca to iloczyn siły działającej w kierunku ruchu i pokonanej drogi. Policz pracę dla poszczególnych przypadków.

$$5.4. \text{c), } W = mg(h + f\sqrt{l^2 - h^2}) = 15,3 \text{ kJ}$$

$$5.5. \text{b), } W_0 = \frac{m}{2}(2gh - v^2) = 100 \text{ J}$$

$$5.6. h = \frac{v_0^2}{4g} = 2,06 \text{ m}$$

$$5.7. h = \frac{3}{4}H$$

5.8. **Wskazówka.** Energia kinetyczna $E_k = \frac{mv^2}{2}$ zależy od kwadratu prędkości.

$$5.9. \text{c), } E_k = \frac{(Ft)^2}{2m} = 0,8 \text{ J}$$

$$5.10. F = \frac{(1-k)P}{v} = 24 \text{ kN}$$

$$5.11. \Delta x = \frac{ml}{M+m} = 1,5 \text{ m}$$

$$5.12. \text{d), } v_4 = v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

5.13.

$$\Delta E_k = (E_{k1} + E_{k2}) - E_{k3} = \frac{m_1m_2(v_1 + v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} = 24 \text{ J}$$

$$5.14. F_o = \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{gh}{x} = 176,6 \text{ kN}$$

Zadania maturalne

Zadanie 1.

$$1.1. t_s = 2,93 \text{ s}$$

$$1.2. \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{H-h_1}{H-h_2}} = 1,22$$

$$1.3. E_k = \frac{m_c v^2}{2} = \frac{m_c (gt)^2}{2} = 800 \text{ J},$$

$$E_p = m_c g \left(h - \frac{gt^2}{2} \right) = 800 \text{ J}$$

$$1.4. F_o = m_c(g - a) = 8 \text{ N}$$

$$1.5. W = \frac{m_c}{2}(2gh - v_k^2) = 1400 \text{ J}$$

$$1.6. W_{\max} = Mgh = 80 \text{ MJ}$$

Zadanie 2.

$$2.1. E_{\text{hmax}} = \frac{mv_0^2}{2} = 400 \text{ J}$$

$$2.2. v_2 = \sqrt{2gh + 4v_0^2 \cos^2 \alpha} = 286 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$2.3. \tan \beta = \frac{\sqrt{2gh}}{2v_0 \cos \alpha} = 0,157$$

$$2.4. \frac{t_1}{t_2} = 1,9$$

$$2.5. \Delta E = mv_0^2 \cos^2 \alpha = 400 \text{ J}$$

Zadanie 3.

$$3.1. \text{przed zderzeniem: } v_1 = \sqrt{2gl} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}, v_1 = 0,$$

$$\text{po zderzeniu: } v_{12} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{2gl} = \frac{4}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$3.2. \text{przed zderzeniem: } v_1 = 0, v_2 = \sqrt{2gl} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

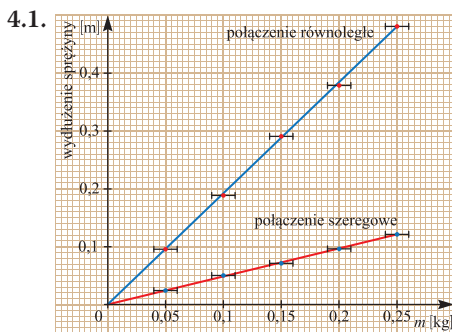
$$\text{po zderzeniu: } v_{1k} = \frac{2v_2 m_2}{m_1 + m_2} = 5,33 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_{2k} = \frac{(m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2} = \frac{4}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$3.3. v = \frac{m_p + m_k}{m_p} \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)} = 175 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$3.4. h = \frac{E_{k\text{max}}}{mg} = 0,8 \text{ m}$$

$$3.5. v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2E_{k\text{max}}}{m}} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Zadanie 4.

$$4.2. k_1 \approx 10,2 \frac{\text{N}}{\text{m}}, k_2 \approx 10,3 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$4.3. \frac{W_{sz}}{W_r} = \frac{\frac{1}{2} k_{sz} \Delta x^2}{\frac{1}{2} k_r \Delta x^2} = \frac{1}{4}$$

$$4.4. \Delta x = x_{sz} - x_r = \frac{3Q}{4k_r} = \frac{3}{2} \text{ m}$$

$$4.5. m = \frac{k_1 + k_2}{g} \Delta x = 0,6 \text{ kg}$$

$$4.6. v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2} = 0,25 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$\Delta x = \sqrt{\frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}{4k}} = 0,11 \text{ m}$$

6. Bryła sztywna**6.1. Ruch postępowy i obrotowy bryły sztywnej. Środek masy**

$$6.1.1. a = \varepsilon r = 15 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot 0,8 \text{ m} = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$f = \frac{\varepsilon \cdot \Delta t}{2\pi} \approx 9,55 \text{ Hz}$$

$$6.1.2. \varepsilon = \frac{a}{r} = \frac{\frac{\Delta v}{\Delta t}}{r} = \frac{v_2 - v_1}{\frac{d}{2} \cdot \Delta t} \approx 1,47 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$6.1.3. r = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{a}{\frac{\Delta \omega}{\Delta t}} = \frac{a \cdot \Delta t}{\Delta \omega} = 0,9 \text{ m}$$

$$6.1.4. d = \frac{vt}{\pi} = 127,3 \text{ m}, \omega = \frac{2\pi}{t} = 3,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$6.1.5. v_1 = \frac{\pi n d}{t} = 161,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}, v_2 = \frac{\pi n d}{4t} = 40,3 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{2\pi n}{t} = 2,09 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$6.1.6. v = Lf = 7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$6.1.7. \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t} = 2,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2},$$

$$a_r = \varepsilon \frac{d}{2} = 1,625 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, a_x = \varepsilon x = 1,25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$6.1.8. x_{\text{SM}} = \frac{1}{m_p + m_{\text{ch}}} (m_p x_p + m_{\text{ch}} x_{\text{ch}})$$

gdzie: $x_p = 0$ i $x_{\text{ch}} = d = 19\,640 \text{ km}$ określają odpowiednio położenie środków mas m_p i m_{ch} .

$$x_{\text{SM}} \approx 2152 \text{ km}$$

Środek masy układu Pluton-Charon znajduje się w odległości 2152 km od środka Plutona. Promień Plutona to 1151 km, więc środek masy układu Pluton-Charon jest w odległości około 2 promieni Plutona od środka Plutona.

$$6.1.9. x_{\text{SM}} = \frac{m_1 \frac{l}{2} + m_2 (l + R)}{m_1 + m_2} = 0,55 \text{ m od wolnego końca belki}$$

$$6.1.10. x = \frac{m_1 l + 2m_2 l}{2(m_1 + m_2)} = 2,75 \text{ m}$$

$$6.1.11.$$

$$s = \left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} \right) = (-1 \text{ m}; 6 \text{ m}),$$

$$d = \sqrt{2} \text{ m}$$

$$6.1.12.$$

$$s = \left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} \right) = (4,5; 2)$$

6.1.14. Palce spotykają się w środku masy kija, położenie tego punktu nie zależy od początkowego położenia palców.

6.2. Moment siły. I zasada dynamiki dla ruchu obrotowego

6.2.1. $\vec{M}_A = 0$, ponieważ $r = 0$,

$M_B = r \cdot F \cdot \sin 150^\circ = 12,5 \text{ Nm}$ zwrot przed kartkę,

$M_C = r \cdot F \cdot \sin \alpha = 1,3 \text{ m} \cdot 25 \text{ N} \cdot \sin 45^\circ =$

$= -16,26\sqrt{2} \text{ Nm}$ zwrot za kartkę,

$\vec{M}_D = 0$, ponieważ $\alpha = 180^\circ$, a $\sin 180^\circ = 0$.

Zwróć uwagę, że jeśli wstawimy do wzoru kąt taki, jakby był mierzony w układzie współrzędnych względem osi x zwróconej w prawo, automatycznie otrzymamy moment siły ze znakiem plus lub minus. Dzięki temu od razu wiadomo, że momenty sił $\vec{M}_B$ i $\vec{M}_C$ mają przeciwne zwroty.

6.2.2. $M = Fa = 120 \text{ Nm}$, wektor momentu siły jest prostopadły do płaszczyzny rysunku i wychodzi przed kartkę

6.2.3.

$$M = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} (F_1 \sin(\alpha_1 + \beta) + F_2 \sin(\alpha_2 + \beta)) =$$

$= 503 \text{ N} \cdot \text{m}$, gdzie $\tan \beta = \frac{b}{a}$, wektor momentu siły jest prostopadły do płaszczyzny rysunku i wychodzi przed kartkę

6.2.4. W pierwszym przypadku moment siły $\vec{M}$ – skierowany jest prostopadle do płaszczyzny kartki i ma zwrot za kartkę, więc szpulka będzie się obracała zgodnie z ruchem wskazówek zegara, w drugim przypadku $\vec{M}$ – skierowany jest prostopadle do płaszczyzny kartki i ma zwrot przed kartkę, więc szpulka będzie się obracała przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, w trzecim przypadku $\vec{M}$ – skierowany jest prostopadle do płaszczyzny kartki i ma zwrot przed kartkę, więc szpulka będzie się obracała przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

6.2.5. $R_1 = \frac{F_2}{F_1} R_2 = 8 \text{ cm}$

6.2.6. $F = \frac{2mg(l - \frac{d}{2})}{d} = 22,8 \text{ kN}$

6.2.7. $F = mg \frac{d}{L} \cdot \frac{1}{\tan \alpha} \approx 425 \text{ N}$

6.2.8. a) $\frac{F_1}{F_2} = \frac{2 \cos \beta}{\sin \alpha} = 2$, **b)** $F = \frac{F_1 R_1}{R_2} = 490 \text{ N}$

6.2.9. b) $F_{\text{prawa}} = \frac{1}{2} (F_1 + F_2 + F_3) = 550 \text{ N}$,

$F_{\text{lewa}} = F_{\text{prawa}} = 550 \text{ N}$,

c) $\Delta F_{\text{prawa}} = F_3 - F_2 = -100 \text{ N}$,

$\Delta F_{\text{lewa}} = F_2 - F_3 = 100 \text{ N}$

6.2.10. $F_{\text{tył}} = \frac{3}{4} F_c$, $F_{\text{przód}} = \frac{1}{4} F_c$

6.2.11. $F_2 = mg \frac{\frac{l}{2} - x_1}{x_2} = 265 \text{ N}$,

$F_1 = F_2 - mg = 216 \text{ N}$

6.3. Środek ciężkości i energia potencjalna bryły sztywnej

6.3.1. Łatwiej chwycić książkę w sytuacji z podpunktu b), ponieważ środek ciężkości nie zmienia swojego położenia tak jak w przypadku a).

6.3.2. Platforma zachowa równowagę, gdy środek masy platforma-osoby będzie w środku platformy. Gdyby platformę równoważyła jedna osoba, byłoby tylko jedno możliwe położenie. Przy większej liczbie osób możliwych położeń jest wiele, w tym również takie gdy jedna osoba znajduje się po stronie początkowo wychylonej w dół, pod warunkiem, że osoba wchodząca na stronę platformy wychyloną początkowo w górę stanie odpowiednio daleko od punktu podparcia platformy.

6.3.3. $W_1 = 0,9 \text{ J}$, $W_2 = 1,8 \text{ J}$

6.3.4. a) równowaga trwała dla kąta $\alpha = \pi$, nietrwała dla kątów $\alpha = 0$ i 2π , **b)** $W = \Delta E_p$, $W = 8 \text{ J}$,

c) $l = \frac{\Delta E_p}{mg} = 1 \text{ m}$

6.3.5. a) Rys. 1 i 3 równowaga trwała, rys. 2. – równowaga nietrwała. **b)** $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$,

c) $W = \Delta E_p = mg \frac{a\sqrt{2}}{2} - mg \frac{a}{2} =$
 $= mg \frac{a}{2} (\sqrt{2} - 1) = 1,71 \text{ J}$

6.3.6. $F_g \frac{b}{2} = F_b \frac{c}{2}$,

$\frac{b}{c} = \frac{ma}{mg} \Rightarrow a = g \cdot \frac{b}{c} = 6,54 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

6.3.7. $F_g \frac{l}{2} = F_{\text{od}} h$, $F_g = mg$ i $F_{\text{od}} = m \frac{v^2}{R}$,

$v = \sqrt{gR \cdot \frac{l}{2h}} = 54,08 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Obliczona dopuszczalna prędkość wynosi $54,07 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jadąc z prędkością $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ samochód się nie przewróci.

6.3.8. Z podobieństwa trójkątów, mamy:

$\frac{d}{h} = \frac{F_g \sin \alpha}{F_g \cos \alpha} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{d}{h} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 26,6^\circ$

Gdy kąt nachylenia równi będzie większy niż $26,6^\circ$, beczka się przewróci.

6.4. Energia kinetyczna w ruchu obrotowym

6.4.1. a) Stosujemy wzór Steinera:

$$I'_1 = I_0 + md^2, d = \frac{1}{2}l, I'_1 = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3}$$

b) $d = \frac{1}{2}l - \frac{1}{3}l = \frac{1}{6}l$ stosujemy wzór Steinera

$$I'_2 = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{6}\right)^2 = \frac{ml^2}{9}$$

c) Traktujemy ciężarki, jak ciała punktowe o momencie bezwładności $I = mr^2$

Moment bezwładności ciężarka z lewej strony osi obrotu $r = \frac{2}{3}l$, zatem $I_{k1} = m\left(\frac{2}{3}l\right)^2 = \frac{4}{9}ml^2$

Moment bezwładności kulki z prawej strony osi obrotu $r = \frac{1}{3}l$, zatem $I_{k2} = m\left(\frac{1}{3}l\right)^2 = \frac{1}{9}ml^2$

Moment bezwładności całkowity:

$$I_{\text{cał}} = I'_2 + I_{k1} + I_{k2} = \frac{ml^2}{9} + \frac{4ml^2}{9} + \frac{ml^2}{9} = \frac{2ml^2}{3}$$

$$6.4.2. I_{O'} = \frac{5}{3}ml^2 \approx 0,83 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$6.4.3. \text{ a) } v = \sqrt{\frac{10}{7}gh} = 4,43 \frac{\text{m}}{\text{s}}, t = \frac{2s}{v} = 1,26 \text{ s},$$

$$\text{ b) } F_0 = \frac{mgh}{d} = 0,7 \text{ N}$$

$$6.4.4. \text{ a) } E_c = \frac{3}{4}mv_0^2 = 0,024 \text{ J},$$

$$\text{ b) } \frac{E_{\text{post}}}{E_c} = \frac{\frac{1}{2}mv_0^2}{\frac{3}{4}mv_0^2} = \frac{2}{3}, \frac{E_{\text{obr}}}{E_c} = \frac{\frac{1}{4}mv_0^2}{\frac{3}{4}mv_0^2} = \frac{1}{3}$$

$$6.4.5. \text{ a) } v_{\min} = \sqrt{\frac{10}{7}gh_1} = 1,98 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$\text{ b) } \omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{10g(h_1 - h_2)}{7}} = 57,2 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$6.4.6. \text{ a) ogólnie: } v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{I}{R^2}}},$$

$$v_{\text{pełny}} = 2\sqrt{\frac{gh}{3}} = 1,98 \frac{\text{m}}{\text{s}}, v_{\text{pusty}} = \sqrt{gh} = 1,72 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

Pusty walec osiągnie mniejszą prędkość, ponieważ ma on większy moment bezwładności.

b) $v_0 = \sqrt{2gh} = 2,43 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, ciało osiągnie większą prędkość niż walec z punktu a, ponieważ energia potencjalna na górze równi jest wykorzystana tylko do wprawienia ciała w ruch postępowy

$$\text{ c) } t_{\text{pełny}} = \frac{2s}{v_{\text{pełny}}} = 1,2 \text{ s}, t_{\text{pusty}} = \frac{2s}{v_{\text{pusty}}} = 1,40 \text{ s}$$

$$6.4.7. M\alpha = \frac{I_0\omega^2}{2}, \alpha = \frac{\frac{1}{2}mR^2\left(2\pi\frac{n}{t}\right)^2}{2M} = 29,3 \text{ rad}$$

$$\text{ Liczba obrotów } N = \frac{\alpha}{2\pi} = 4,7$$

$$6.4.8. M\alpha = \frac{I_0\omega^2}{2} \Rightarrow M = \frac{I_0\omega^2}{2\alpha}$$

$$M = \frac{I_0 4\pi^2 f^2}{2 \cdot 2\pi N} = \frac{I_0 \pi f^2}{N} = 512 \text{ Nm}$$

$$6.4.9. P = \frac{m(R\omega)^2}{4t} = 225 \text{ W}$$

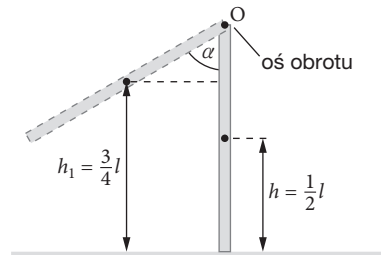
$$6.4.10. \text{ a) } W = F \cdot l = 4 \text{ J},$$

$$\text{ b) } f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2Fl}{I}} = 33,6 \text{ Hz},$$

$$\text{ c) } E_0 = 2\pi^2 I f^2 = 35,5 \text{ J}, \text{ gdzie } f = \frac{n}{t}, t = 60 \text{ s}$$

$$6.4.11. \omega = \sqrt{\frac{3g}{H}} = 2,33 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, v = \sqrt{3gH} = 12,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$6.4.12. mgh_1 = \frac{I\omega^2}{2} + mgh, v = \sqrt{\frac{3}{2}gl} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



$$6.4.13. \text{ a) } v = 2\sqrt{\frac{gh}{3}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \text{ b) } \varepsilon = \frac{2g}{3r} = 204 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

6.4.14. $v_0 < \omega_0$, zawadniczka kręci obręczą do siebie

6.5. Druga zasada dynamiki w ruchu obrotowym

$$6.5.1. a = \frac{3}{2}g = 14,7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$6.5.2. \varepsilon = \frac{3RF}{ml^2} = 1,76 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$6.5.3. F = \frac{l\varepsilon}{R} = 48 \text{ N}, I = \frac{4}{3}ml^2 = 96 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$6.5.4. F = \frac{m\varepsilon d}{2} = 0,01 \text{ N}$$

$$6.5.5. F = \frac{2mR\omega}{3\Delta t} = 0,1 \text{ N}$$

$$6.5.6. \Delta t = \frac{2\pi I_0 n}{tM_t} = 120 \text{ s}, \text{ gdzie } t = 1 \text{ min}$$

$$6.5.7. F_N = \frac{I_0\omega}{\mu R \Delta t} = 3,7 \text{ kN}$$

$$6.5.8. M_T = \frac{2\pi I_0}{\Delta t} \cdot \frac{n}{t} = 8,5 \text{ N} \cdot \text{m}, \text{ gdzie } t = 1 \text{ min}$$

$$6.5.9. l = \frac{\omega m R^2}{F \cdot \Delta t} = 14 \text{ cm}$$

$$6.5.10. \frac{\omega}{\Delta t} = \frac{2Fl}{I} \Rightarrow I = \frac{2Fl}{\omega} \Delta t = 0,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$6.5.11. a = \frac{Mg - dgV}{M + \frac{m}{2}} = 1,96 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$N = Mg - dgV - Ma = 1,96 \text{ N}$$

$$6.5.12. a = \frac{g}{2} = 4,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = 0,64 \text{ s}$$

$$6.5.13. \varepsilon = \frac{2gr}{R^2 + 2r^2} = 19 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2},$$

$$N = \frac{1}{2}m(g - \varepsilon r) = 4,8 \text{ N}$$

$$6.5.14. l = \frac{Mgt^2(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{2M + m} = 3 \text{ m}$$

6.5.15. Zapisujemy równania, których potrzebujemy do wyznaczenia m_x :

$$\begin{cases} (m + m_x)g - F_{n2} = (m + m_x)a \\ F_{n1} - mg = ma \\ (F_{n2} - F_{n1})R = \frac{1}{2}MR^2\varepsilon \\ a = \varepsilon R \end{cases}$$

$$m_x = \frac{(2m + \frac{M}{2})a}{g - a} = 100 \text{ g}$$

$$6.5.16. \omega = \frac{8m_k v r}{mR^2} = 1,92 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

6.5.17. Przyspieszenie kuli $a = \frac{5}{7}g\sin\alpha$ nie zależy od jej promienia, stąd prędkość kuli (jej środka masy) też nie zależy od promienia.

$$6.5.18. \omega = \frac{3g\sin\alpha}{5R} t = 1,9 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$6.5.19. R = \frac{tgs\sin\alpha}{2\omega} = 0,49 \text{ m}$$

$$6.5.20. T = \frac{1}{3}mgs\sin\alpha = 163,5 \text{ N}$$

$$6.5.21. \sin\alpha = \frac{3\pi(f_2 - f_1)}{gt} \frac{d}{2} \Rightarrow \alpha \approx 24^\circ 50'$$

$$6.5.22. \tan\alpha < 2\mu_s \Rightarrow \alpha < 21^\circ 50'$$

$$6.5.23. \text{a) } t = \frac{2v_0}{7gu} = 1 \text{ s, b) } v_k = \frac{5}{7}v_0 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

6.6. Moment pędu bryły sztywnej

$$6.6.1. \text{a) } M = \frac{\Delta L}{\Delta t} = 10 \text{ Nm,}$$

$$\text{b) } \Delta L = I\Delta\omega \Rightarrow \Delta\omega = \frac{\Delta L}{I} = 80 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\Delta\omega = \varepsilon\Delta t \Rightarrow \varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$6.6.2. \text{a) } M = \frac{\Delta L}{\Delta t} = 2 \text{ Nm,}$$

$$\text{b) } L_0 = I\omega_0 \Rightarrow I = \frac{L_0}{\omega_0} = \frac{1}{2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$\text{c) } L_1 = I\omega_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{L_1}{I} = 24 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$6.6.3. f_2 = \frac{2r_1^2}{r_1^2 + r_2^2} \cdot \frac{n_1}{t_1} = 1,17 \text{ Hz, gdzie } t = 1 \text{ min}$$

$$6.6.4. I_1\omega_1 = I_2\omega_2, I_1 2\pi f_1 = I_2 2\pi f_2,$$

$$f_2 = \frac{I_1}{I_2} f_1 = \frac{2}{3} f_1 = 1,5 \text{ Hz}$$

$$6.6.5. \omega_2 = \frac{\frac{1}{8}MD^2 + I_{dz} + m_p r^2}{\frac{1}{8}MD^2 + I_{dz}} \cdot \frac{2\pi n_1}{t} = 1,11 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$6.6.6. f_2 = \frac{I_0 + 3MR^2 + 6m_p R^2}{I_0 + 3MR^2} \cdot \frac{\omega_1}{2\pi} = 0,068 \text{ Hz}$$

6.6.7. Całkowity moment pędu układu (względem Ziemi) pozostaje równy zeru:

$$MR^2\left(\frac{v}{R} - \omega\right) - \frac{1}{2}MR^2\omega = 0,$$

$$\text{Stąd: } \omega = \frac{mv}{\left(m + \frac{1}{2}M\right)R} = 0,45 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$6.6.8. \text{a) } \omega_k = \frac{M + 2m}{M} \omega_0 = 2,88 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$\text{b) } W = \frac{\omega_0^2}{2} mR^2 \left(1 + \frac{2m}{M}\right) = 191 \text{ J,}$$

c) siła Coriolisa

$$6.6.9. \omega_p = \frac{mrv}{I_p + mr^2} = \frac{2mrv}{MR^2 + 2mr^2} = 0,59 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$n = \frac{\omega_p t}{2\pi} = 5,6$$

$$6.6.10. T_1 = \frac{(10^4)^2}{f} = 39 \text{ dób, gdzie } f = 30 \text{ Hz}$$

$$6.6.11. T_1 = \frac{1000^2}{f} = 1,2 \text{ doby}$$

$$6.6.12. v_p = v_a \frac{r_a}{r_p} = 6,44 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

6.6.13. a) Zapisujemy zasadę zachowania momentu pędu dla chwili przebiecia belki (względem punktu jej zamocowania):

$$mv_1 l = mv_2 l + \frac{1}{3}Ml^2\omega.$$

Stąd wyznaczamy prędkość kątową:

$$\omega = \frac{3m(v_1 - v_2)}{Ml} = 3,6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$6.6.14. I_k \omega_0 = (I_k + mr^2) \omega_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_k = \frac{I_k \omega_0}{I_k + mr^2} = 2,89 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$6.6.15. \omega = \frac{3mvh}{(2M + 3m)R^2} = 9,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$6.6.16. \text{a) } I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = (I_1 + I_2)\omega_k$$

$$\omega_k = \frac{2I_2\omega_1 + I_2\frac{1}{4}\omega_1}{3I_2} = \frac{3}{4}\omega_1 = 15 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\text{b) } I_1\omega_1 - I_2\omega_2 = (I_1 + I_2)\omega_k$$

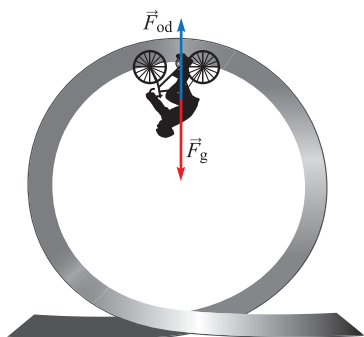
$$\omega_k = \frac{\frac{1}{4}I_2\omega_1 + I_2\frac{1}{2}\omega_1}{\frac{5}{4}I_2} = -\frac{1}{5}\omega_1 = -4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Koła zlepione obracają się tak, jak początkowo koło drugie czyli przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

$$6.6.17. f_2 = 4f_1$$

Zadanie 5.

5.1.



$$5.2. v_{\min} = \sqrt{gR} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$5.3. E_1 = \frac{(M + m_k)v_0^2}{2}, E_2 = \frac{(M + m_k)v^2}{2} + 2MgR$$

$$5.4. v_1 = \sqrt{\frac{Rg(5M + m_k)}{M + m_k}} = 17,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$5.5. v_1 = \sqrt{5Rg} = 17,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Zadanie 6.

$$6.1. \omega_1 = \frac{v}{R} = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

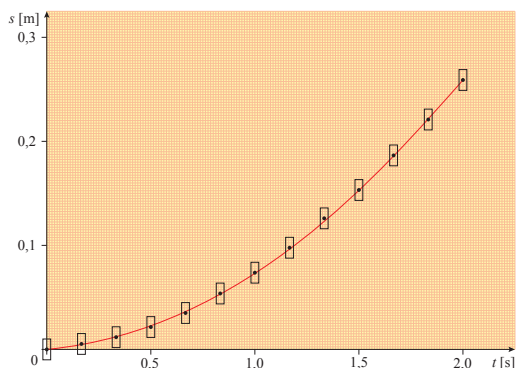
$$6.2. \omega_2 = \frac{M \frac{v}{R}}{M + 10m} = 0,47 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$6.3. F_{\text{odśr}} = m\omega^2 \left(\frac{M + 10m}{M + 2m} \right)^2 R = 725 \text{ N}$$

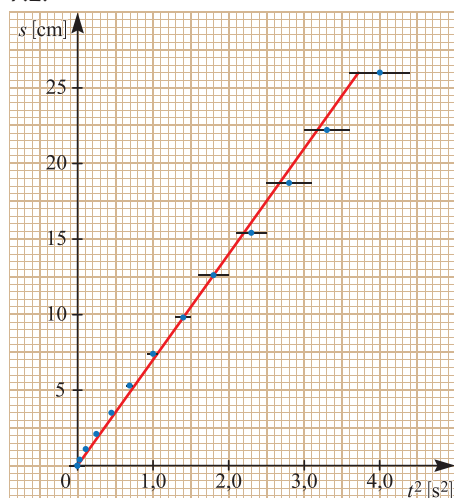
6.4. $T = \mu mg = 353 \text{ N}$. Dziecko nie utrzyma się na karuzeli, ponieważ siła odśrodkowa jest większa od siły tarcia.

Zadanie 7.

7.1.



7.2.



$$7.3. a = (0,130 \pm 0,003) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

7.4. Szpulka będzie staczała się z mniejszym przyspieszeniem, czyli wykres będzie pod mniejszym kątem do osi poziomej niż wykres dla baterii.

Dodatek matematyczny

Notacja wykładnicza

Notacja wykładnicza to zapis liczby w postaci:

$$x \cdot 10^n$$

gdzie x jest liczbą z przedziału od 1 do 10, a n jest wykładnikiem całkowitym.

Zamianę zapisu liczby na notację wykładniczą wykonuje się w dwóch krokach. Należy:

- ▶ przesunąć przecinek w liczbie tak, aby jej wartość mieściła się między 1 a 10,
- ▶ ustalić wykładnik potęgi liczby 10. Wykładnik potęgi n jest równy liczbie miejsc, o które musieliśmy przesunąć przecinek. Jeżeli przesuwalimy przecinek w lewo, to wykładnik potęgi jest dodatni, a jeżeli przesuwalimy przecinek w prawo, to wykładnik potęgi jest ujemny.

Na przykład:

$$3\,500\,000\,000\,000 = 3,5 \cdot 10^{12}$$

$$0,0000054 = 5,4 \cdot 10^{-6}$$

Wektory

Wektorem $\overrightarrow{P_0P}$ nazywamy uporządkowaną parę punktów o początku w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ i końcu w punkcie $P(x, y)$. Oznaczmy wektor symbolem $\vec{a}$. Współrzędne wektora $\vec{a}$ obliczamy, odejmując od współrzędnych końca współrzędne początku wektora:

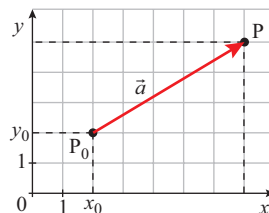
$$a_x = (x - x_0), \quad a_y = (y - y_0).$$

Wektor o wyznaczonych współrzędnych zapisujemy:

$$\vec{a} = [a_x, a_y].$$

Długość wektora obliczamy ze wzoru: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

Wektor przedstawiony na rysunku ma współrzędne $\vec{a} = [5j, 3j]$, a jego długość wynosi: $|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}j$, gdzie j oznacza jednostkę w układzie współrzędnych (np. 1 cm, 1 m).



■ Działania na wektorach

1. Dodawanie wektorów to dodawanie ich współrzędnych:

$$\vec{a} + \vec{b} = [a_x + b_x, a_y + b_y].$$

2. Odejmowanie wektorów to odejmowanie ich współrzędnych:

$$\vec{a} - \vec{b} = [a_x - b_x, a_y - b_y].$$

3. Mnożenie wektora przez liczbę:

$$\vec{b} = k\vec{a} = [ka_x, ka_y],$$

gdy $k > 0$ – zwrot wektora $\vec{b}$ jest zgodny ze zwrotem wektora $\vec{a}$,

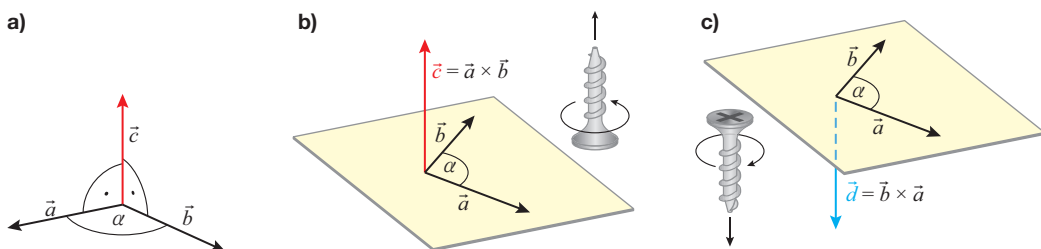
gdy $k < 0$ – zwrot wektora $\vec{b}$ jest przeciwny do zwrotu wektora $\vec{a}$.

4. Mnożenie wektorów

► **Iloczyn skalarny** dwóch wektorów $c = \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$ jest skalarą o wartości $c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$, gdzie kąt α jest kątem między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

► **Iloczyn wektorowy** dwóch wektorów $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ jest wektorem (rys. a), którego kierunek i zwrot określa reguła śruby prawoskrętnej (rys. b), a wartość $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$, gdzie kąt α jest kątem między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej iloczyn wektorowy $\vec{b} \times \vec{a}$ (rys. c) jest wektorem przeciwnym do $\vec{a} \times \vec{b}$, czyli $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ (porównaj rys. b i c).



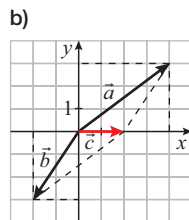
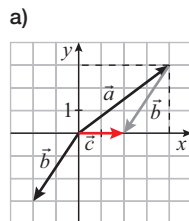
■ Przykłady działań na wektorach. Ilustracje geometryczne

1. Dodawanie wektorów: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.

► Metoda trójkąta

Wektor $\vec{b}$ należy przesunąć równolegle tak, aby jego początek znalazł się w końcu wektora $\vec{a}$.

Wektor $\vec{c}$ łączący początek wektora $\vec{a}$ z końcem wektora $\vec{b}$ nazywamy sumą wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (rys. a).

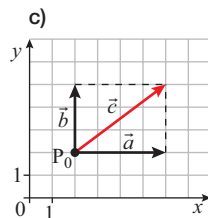


► Metoda równoległoboku

Wektor $\vec{b}$ należy przesunąć równolegle tak, aby jego początek znalazł się w początku wektora $\vec{a}$. Wektor $\vec{c}$ będący przekątną równoległoboku o bokach a, b jest sumą wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (rys. b).

2. Rozkładanie wektora na składowe

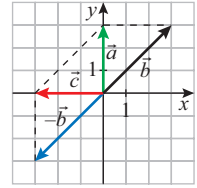
Jest to działanie odwrotne do dodawania wektorów. Mając dany wektor $\vec{c}$, należy znaleźć takie dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ o zadanych kierunkach i zwrotach, aby w sumie dały wektor $\vec{c}$ (rys. c).



3. Odejmowanie wektorów: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$.

Do wektora $\vec{a}$ należy dodać wektor przeciwny do wektora $\vec{b}$, czyli $-\vec{b}$ (rys. d).

d)

**Miara łukowa kąta – radiany**

Radian to jednostka miary łukowej kąta zaliczana do jednostek pomocniczych układu SI. Miara łukowa kąta pozwala wyrazić wielkość kąta za pomocą długości łuku okręgu. Kąt ma miarę jednego radiana, jeśli jest kątem środkowym opartym na łuku długości promienia, czyli kąt jednego radiana odpowiada łukowi okręgu o długości R (patrz rysunek poniżej).

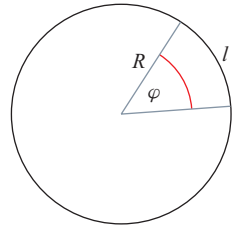
Kąt pełny (360°) ma zatem 2π radianów, a kąt półpełny (180°) ma π radianów. Kąt prosty (90°) ma $\frac{\pi}{2}$ radianów.

$$1 \text{ radian} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57,3^\circ.$$

Radiany oznacza się skrótem rad. Długość łuku okręgu l wiąże się z miarą łukową kąta φ w następujący sposób:

$$l = \varphi R, \text{ czyli } \varphi = \frac{l}{R},$$

gdzie R jest promieniem okręgu.

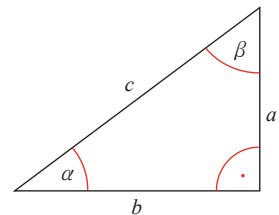


Gdy korzystamy ze wzoru $\varphi = \frac{l}{R}$, jednostki się skracają i otrzymujemy kąt jako wielkość bezwymiarową. Dlatego zamiast „kąt o mierze 0,2 rad” możemy napisać po prostu „kąt o mierze 0,2”. Jednostkę rad dopisujemy, by podkreślić, że mamy do czynienia z kątem.

Długość okręgu wynosi $2\pi R$, czyli obrót o 2π radianów odpowiada obiegowi okręgu.

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

Jeśli znane są kąty trójkąta prostokątnego, to niezależnie od długości poszczególnych boków stosunki tych boków są takie same. Stosunki odpowiednich boków w trójkącie prostokątnym nazywamy funkcjami trygonometrycznymi.



W trójkącie prostokątnym można wyznaczyć funkcje trygonometryczne kątów α i β .

Stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta α do długości przeciwprostokątnej to **sinus kąta α** , co zapiszemy:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}.$$

Stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do długości przeciwprostokątnej to **cosinus kąta α** , co zapiszemy:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}.$$

Stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta α do długości przyprostokątnej przyległej do kąta α to **tangens kąta α** , co zapiszemy:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}.$$

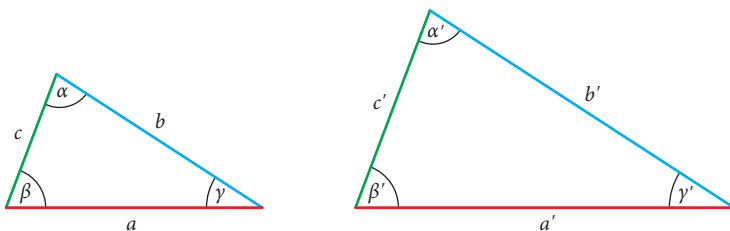
Analogicznie możemy wyznaczyć funkcje trygonometryczne kąta β :

$$\sin \beta = \frac{b}{c}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}.$$

Przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych wszystkich kątów możemy odczytać z tablic matematycznych lub obliczyć za pomocą kalkulatora wyposażonego w odpowiednie funkcje. Z kolei znając wartość funkcji trygonometrycznej, możemy odszukać w tablicach albo obliczyć na kalkulatorze wartość kąta.

Trójkąty podobne

Trójkąty podobne mają taki sam kształt, ale mogą różnić się wielkością.



Oznacza to, że:

- ▶ odpowiadające sobie kąty w trójkątach podobnych są takie same:

$$\alpha = \alpha' \quad \beta = \beta' \quad \gamma = \gamma'$$

- ▶ stosunek długości odpowiadających sobie boków jest równy:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = s$$

gdzie s jest skalą podobieństwa.

Tabele

Tabela 1. Wielokrotności i podwielokrotności jednostek

Przedrostek		Mnożnik	Przedrostek		Mnożnik	Przedrostek		Mnożnik	Przedrostek		Mnożnik
E	eksa	10 ¹⁸	M	mega	10 ⁶	d	decy	10 ⁻¹	n	nano	10 ⁻⁹
P	peta	10 ¹⁵	k	kilo	10 ³	c	centy	10 ⁻²	p	piko	10 ⁻¹²
T	tera	10 ¹²	h	hekto	10 ²	m	mili	10 ⁻³	f	femto	10 ⁻¹⁵
G	giga	10 ⁹	da	deka	10 ¹	μ	mikro	10 ⁻⁶	a	atto	10 ⁻¹⁸

Tabela 2. Jednostki wielkości fizycznych

	Wielkość fizyczna	Nazwa jednostki i jej symbol	Jednostka wyrażona w jednostkach układu SI
Jednostki podstawowe	masa (m)	kilogram, kg	[kg]
	długość (s, l, h)	metr, m	[m]
	czas (t, T)	sekunda, s	[s]
Jednostki pochodne	prędkość (v)	–	$[\frac{m}{s}]$
	przyspieszenie (a)	–	$[\frac{m}{s^2}]$
	prędkość kątowna (ω)	–	$[\frac{rad}{s}]$
	przyspieszenie kątowe (ϵ)	–	$[\frac{rad}{s^2}]$
	gęstość (d, ρ)	–	$[\frac{kg}{m^3}]$
	częstotliwość (f)	herc, Hz	$[\frac{1}{s}]$
	siła (F, Q)	niuton, N	$[kg \cdot \frac{m}{s^2}]$
	praca (W)	dżul, J	$[N \cdot m = kg \cdot \frac{m^2}{s^2}]$
	moc (P)	wat, W	$[\frac{J}{s} = kg \cdot \frac{m^2}{s^3}]$
	energia (E)	dżul, J	$[N \cdot m = kg \cdot \frac{m^2}{s^2}]$
	pęd (p)	–	$[kg \cdot \frac{m}{s}]$
	moment bezwładności (I)	–	$[kg \cdot m^2]$
	moment siły (M)	–	$[N \cdot m = kg \cdot \frac{m^2}{s^2}]$
	moment pędu (L)	–	$[kg \cdot \frac{m^2}{s}]$

Tabela 3. Współczynniki tarcia

Powierzchnie	f_s	f_k	Powierzchnie	f_s	f_k
Stal po lodzie	0,1	0,05	Opony po zaśnieżonym betonie	0,3	0,02
Stal po stali	0,6	0,4	Drewno po drewnie	0,5	0,3
Lina po drewnie	0,5	0,3	Lód po lodzie	0,1	0,02
Buty po lodzie	0,1	0,05	Szkło po szkłe	0,9	0,4
Opony po suchym betonie	1,0	0,75	Narta po śniegu	0,14	0,1
Opony po mokrym betonie	0,7	0,5	Metal po drewnie	0,55	0,35

Tabela 4. Ruch postępowy i obrotowy – zestawienie porównawcze

Jednowymiarowy ruch postępowy punktu materialnego		Ruch obrotowy bryły sztywnej wokół osi	
droga	s	kąt obrotu	α
prędkość liniowa	$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$	prędkość kątowna	$\omega = \frac{\Delta \alpha}{\Delta t}$
przyspieszenie liniowe	$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$	przyspieszenie kątowe	$\vec{\varepsilon} = \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t}$
równania ruchu postępowego	$v = v_0 + at$ $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$	równania ruchu obrotowego	$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$ $\alpha = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$
masa	m	moment bezwładności	$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$
siła	$\vec{F}$	moment siły	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
pierwsza zasada dynamiki ruchu postępowego	$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$	pierwsza zasada dynamiki ruchu obrotowego	$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$ $\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = 0$
druga zasada dynamiki ruchu postępowego	$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$	druga zasada dynamiki ruchu obrotowego	$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I}$
uogólniona postać drugiej zasady dynamiki ruchu postępowego	$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$	uogólniona postać drugiej zasady dynamiki ruchu obrotowego	$\vec{M} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}$
pęd ciała	$\vec{p} = m\vec{v}$	moment pędu bryły sztywnej	$\vec{L} = I\vec{\omega}$
prawo zachowania pędu dla ciała o masie m	jeżeli $\vec{F} = 0 \Rightarrow \Delta \vec{p} = 0$ czyli $\vec{p}_k = \vec{p}_0$	prawo zachowania momentu pędu dla bryły sztywnej	jeżeli $\vec{M} = 0 \Rightarrow \Delta \vec{L} = 0$ czyli $\vec{L}_k = \vec{L}_0$
prawo zachowania pędu dla układu ciał	$\vec{p}_{\text{ukł}} = \text{const.}$	prawo zachowania momentu pędu dla układu brył sztywnych	$\vec{L}_{\text{ukł}} = \text{const.}$

Tabela 5. Przykłady wybranych brył i ich momenty bezwładności

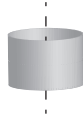
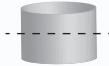
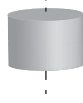
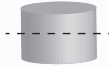
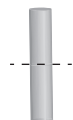
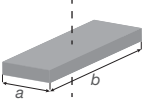
Rodzaj bryły	Oś obrotu	Moment bezwładności I	Rysunek
Obręcz lub rura o cienkiej ściance o promieniu R	prostopadła do przekroju poprzecznego i przechodząca przez środek rury	mR^2	
Obręcz o promieniu R	równoległa do przekroju poprzecznego i przechodząca przez środek obręczy	$\frac{1}{2}mR^2$	
Kula o promieniu R	przechodząca przez środek kuli	$\frac{2}{5}mR^2$	
Sfera o promieniu R	przechodząca przez środek sfery	$\frac{2}{3}mR^2$	
Pełny walec o promieniu R	zawierająca oś walca	$\frac{1}{2}mR^2$	
Pełny walec o promieniu R i wysokości l	prostopadła do osi walca i przechodząca przez jego środek	$\frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}ml^2$	
Cienki pręt o długości l	prostopadła do pręta i przechodząca przez jego środek	$\frac{1}{12}ml^2$	
Cienki pręt o długości l	prostopadła do pręta i przechodząca przez jego koniec	$\frac{1}{3}ml^2$	
Płyta prostokątna o wymiarach $a \times b$	prostopadła do powierzchni płyty i przechodząca przez jej środek	$\frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$	

Tabela 6. Wartości funkcji trygonometrycznych

Miara kąta α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	Miara kąta α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,6820	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,7660	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,7880	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,3270
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,8090	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,8290	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,2250	0,9744	0,2309	58°	0,8480	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,5150	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,8660	0,5000	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,8040
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,3090	0,9511	0,3249	63°	0,8910	0,4540	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,3420	0,9397	0,3640	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,2460
22°	0,3746	0,9272	0,4040	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,3420	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,4540	0,8910	0,5095	72°	0,9511	0,3090	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5000	0,8660	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,5150	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,8480	0,6249	77°	0,9744	0,2250	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,8290	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,8090	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,7880	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,7660	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,4301
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,3007
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,0811
43°	0,6820	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,6363
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,2900
45°	0,7071	0,7071	1,0000	90°	1,0000	0,0000	—

Kinematyka	
prędkość	$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$
przyspieszenie	$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$
prędkość kątowa	$\omega = \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$
prędkość w ruchu po okręgu	$v = \omega \cdot r$
przyspieszenie dośrodkowe	$a_d = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$
przyspieszenie kątowe	$\varepsilon = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$
przyspieszenie styczne	$a_{st} = \varepsilon \cdot r$
prędkość w ruchu jednostajnie zmiennym	$v = v_0 + a \cdot t$
droga w ruchu jednostajnie zmiennym	$s = \frac{1}{2}(v_0 + v_t) \cdot t = v_0 \cdot t + \frac{1}{2}a \cdot t^2$

Organia i fale	
ruch harmoniczny	$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$
	$v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)$
	$a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$
okres drgań masy na sprężynie i wahadła matematycznego	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$
częstotliwość i długość fali	$f = \frac{1}{T}, \lambda = v \cdot T$
załamanie fali	$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$
siatka dyfrakcyjna	$n \cdot \lambda = d \cdot \sin \alpha$
efekt Dopplera	$f = f_x \frac{v}{v \pm u_x}$

Dynamika	
pęd	$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$
II zasada dynamiki	$\frac{\Delta p}{\Delta t} = F; \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$
moment siły	$M = F \cdot r \cdot \sin \angle(\vec{r}; \vec{F})$
moment bezwładności	$I = \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2$
moment pędu punktu materialnego	$J = m \cdot v \cdot r \cdot \sin \angle(\vec{r}; \vec{v})$
moment pędu bryły sztywnej	$J = I \cdot \omega$
II zasada dynamiki ruchu obrotowego	$\frac{\Delta J}{\Delta t} = M; \varepsilon = \frac{M}{I}$
praca	$W = F \cdot s \cdot \cos \alpha$
moc	$P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$
energia kinetyczna	$E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$
energia kinetyczna ruchu obrotowego bryły sztywnej	$E_{kin} = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$

Siła ciężkości, siła sprężystości i siła tarcia	
prawo powszechnego ciążenia	$F_g = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$
natężenie pola grawitacyjnego	$\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}_g}{m}$
energia potencjalna grawitacji	$E_p = -G \frac{m_1 \cdot m_2}{r}$
zmiana energii potencjalnej grawitacji na małych wysokościach	$\Delta E_p = m \cdot g \cdot \Delta h$
prędkości kosmiczne (dla Ziemi)	$v_I = \sqrt{\frac{G \cdot M_Z}{R_Z}} = 7,9 \frac{\text{km}}{\text{s}}$
	$v_{II} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_Z}{R_Z}} = 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$
III prawo Keplera	$\frac{T^2}{R^3} = \frac{T^2}{R^3} = \text{const}$
siła sprężystości	$\vec{F}_s = -k \cdot \vec{x}$
energia potencjalna sprężystości	$E_{pot} = \frac{1}{2} k \cdot x^2$
siła tarcia kinetycznego	$T_k = \mu_k \cdot F_N$
siła tarcia statycznego	$T_s \leq \mu_s \cdot F_N$

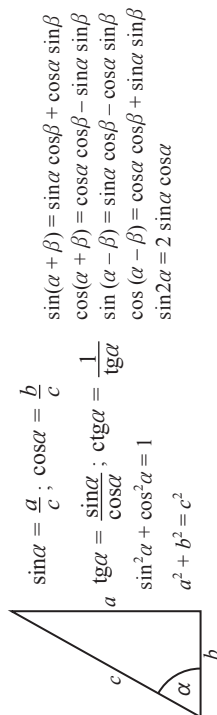
Przedrostki

mnożnik	10 ⁹	10 ⁶	10 ³	10 ²	10 ¹	10 ⁻¹	10 ⁻²	10 ⁻³	10 ⁻⁶	10 ⁻⁹	10 ⁻¹²
przedrostek	giga	mega	kilo	hekto	deka	decy	centy	mili	mikro	nano	piko
oznaczenie	G	M	k	h	da	d	c	m	μ	n	p

Optyka		Termodynamika		Pole magnetyczne	
kat graniczny	$\sin \alpha_{gr} = \frac{1}{n}$	gęstość	$\rho = \frac{m}{V}$	siła Lorentza	$F = q \cdot v \cdot B \cdot \sin \angle(\vec{v}; \vec{B})$
kat Brewstera	$\operatorname{tg} \alpha_B = n$	ciśnienie	$p = \frac{F}{S}$	siła elektrodynamiczna	$F = I \cdot l \cdot B \cdot \sin \angle(\vec{l}; \vec{B})$
równanie soczewki, zwierciadła	$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$	zmiana ciśnienia hydrostatycznego	$\Delta p = \rho \cdot g \cdot \Delta h$	pole przewodnika prostoliniowego	$B = \frac{\mu_0 \mu_r \cdot I}{2\pi \cdot r}$
soczewka	$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_{\text{soczewki}}}{n_{\text{otoczenia}}} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$	I zasada termodynamiki	$\Delta U = \bar{Q} + \bar{W}$	pole pętli (w jej środku)	$B = \frac{\mu_0 \mu_r \cdot I}{2 \cdot r}$
zwierciadło	$f = \frac{R}{2}$	praca siły parcia	$\bar{W} = -p \cdot \Delta V$	pole długiego solenoidu	$B = \mu_0 \mu_r \cdot \frac{n \cdot I}{l}$
Fizyka współczesna		ciepło właściwe	$c_w = \frac{Q}{m \cdot \Delta T}$	strumień pola magnetycznego	$\Phi = B \cdot S \cdot \cos \angle(\vec{B}; \vec{S})$
równoważność masy-energii	$E = m \cdot c^2$	ciepło molowe	$C = \frac{Q}{n \cdot \Delta T}$	SEM indukcji	$\mathcal{E} = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$
energia fotonu	$E = h \cdot f = \frac{h \cdot c}{\lambda}$	ciepło przemiany fazowej	$Q = m \cdot L$	SEM samoindukcji	$\mathcal{E} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}$
zjawisko fotoelektryczne	$h \cdot f = W + E_{k \max}$	średnia energia kinetyczna ruchu postępowego cząsteczek	$E_x = \frac{3}{2} k_B \cdot T$	SEM prądniczy	$\mathcal{E} = n \cdot B \cdot S \cdot \omega \cdot \sin \omega t$
długość fali de Broglie'a	$\lambda = \frac{h}{m \cdot v}$	równanie stanu gazu doskonałego (Clapeyrona)	$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$	wartości skuteczne prądu przemiennego	$U_{sk} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}, I_{sk} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$
poziomy energetyczny atomu wodoru	$E_n = -\frac{13,6 \text{ eV}}{n^2}$	ciepła molowe gazu doskonałego	$C_p = C_v + R$	transformator	$\frac{U_1}{U_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{I_2}{I_1}$
prawo Hubble'a	$v = H \cdot r$	sprawność silnika cieplnego	$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$	Prąd elektryczny	
Elektrostatyka		natężenie prądu		$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$	
prawo Coulomba	$F = k \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}; k = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0}$	pole jednorodne	$U = E \cdot d$	opór przewodnika	$R = \rho \cdot \frac{l}{S}$
natężenie pola	$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$	energia kondensatora	$W = \frac{1}{2} Q \cdot U = \frac{1}{2} C \cdot U^2$	prawo Ohma	$I = \frac{U}{R}$
napięcie	$U = \frac{W}{q}$	pojemność (pojemność kondensatora płaskiego)	$C = \frac{Q}{U} \left(C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d} \right)$	prawo Ohma dla obwodu	$I = \frac{\mathcal{E}}{R_z + R_w}$
łączenie oporników:		łączenie oporników:	$R_z = \sum_{i=1}^n R_i$	szeregowe	równoległe
				$\frac{1}{R_z} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$	

Stale i jednostki fizyczne i chemiczne	
przyspieszenie ziemskie	$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
masa Ziemi	$M_Z = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
średni promień Ziemi	$R_Z = 6370 \text{ km}$
stała grawitacji	$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$
liczba Avogadro	$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$
objętość 1 mola gazu doskonałego w warunkach normalnych	$V = 22,41 \frac{\text{dm}^3}{\text{mol}}$
uniwersalna stała gazowa	$R = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$
stała Boltzmanna	$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$
przenikalność elektryczna próżni	$\varepsilon = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$
stała elektryczna	$k = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} = 8,99 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$

x	$\log x$	x	$\log x$	x	$\log x$	x	$\log x$
0,01	-2,000	0,26	-0,585	0,51	-0,292	0,76	-0,119
0,02	-1,699	0,27	-0,569	0,52	-0,284	0,77	-0,114
0,03	-1,523	0,28	-0,553	0,53	-0,276	0,78	-0,108
0,04	-1,398	0,29	-0,538	0,54	-0,268	0,79	-0,102
0,05	-1,301	0,30	-0,523	0,55	-0,260	0,80	-0,097
0,06	-1,222	0,31	-0,509	0,56	-0,252	0,81	-0,092
0,07	-1,155	0,32	-0,495	0,57	-0,244	0,82	-0,086
0,08	-1,097	0,33	-0,481	0,58	-0,237	0,83	-0,081
0,09	-1,046	0,34	-0,469	0,59	-0,229	0,84	-0,076
0,10	-1,000	0,35	-0,456	0,60	-0,222	0,85	-0,071
0,11	-0,959	0,36	-0,444	0,61	-0,215	0,86	-0,066
0,12	-0,921	0,37	-0,432	0,62	-0,208	0,87	-0,060
0,13	-0,886	0,38	-0,420	0,63	-0,201	0,88	-0,056
0,14	-0,854	0,39	-0,409	0,64	-0,194	0,89	-0,051
0,15	-0,824	0,40	-0,398	0,65	-0,187	0,90	-0,046
0,16	-0,796	0,41	-0,387	0,66	-0,180	0,91	-0,041
0,17	-0,770	0,42	-0,377	0,67	-0,174	0,92	-0,036
0,18	-0,745	0,43	-0,367	0,68	-0,167	0,93	-0,032
0,19	-0,721	0,44	-0,357	0,69	-0,161	0,94	-0,027
0,20	-0,699	0,45	-0,347	0,70	-0,155	0,95	-0,022
0,21	-0,678	0,46	-0,337	0,71	-0,149	0,96	-0,018
0,22	-0,658	0,47	-0,328	0,72	-0,143	0,97	-0,013
0,23	-0,638	0,48	-0,319	0,73	-0,137	0,98	-0,009
0,24	-0,620	0,49	-0,310	0,74	-0,131	0,99	-0,004
0,25	-0,602	0,50	-0,301	0,75	-0,125	1,00	0,000



α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

α	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
$\sin \alpha$	0,0000	0,0872	0,1736	0,2588	0,3420	0,4226	0,5000	0,5736	0,6428	0,7071	0,7660	0,8192	0,8660	0,9063	0,9397	0,9659	0,9848	0,9962	1,000
$\cos \beta$	1,0000	0,9962	0,9848	0,9659	0,9397	0,9063	0,8660	0,8192	0,7660	0,7071	0,6428	0,5736	0,5000	0,4226	0,3420	0,2588	0,1736	0,0872	0,0000
$\operatorname{tg} \alpha$	0	0,0872	0,1736	0,2588	0,3420	0,4226	0,5000	0,5736	0,6428	0,7071	0,7660	0,8192	0,8660	0,9063	0,9397	0,9659	0,9848	0,9962	1,000

Zdjęcie na okładce: Getty Images/iStock/Getty Images Plus/DNY59

Rysunki: Ewelina Baran – s. 258, Adam Pocziwek – s. 224g, Artur Polakowski – s. 29, 36, 38g, 41, 44–45, 49, 55, 59–63, 66, 68–70, 72d, 80, 86, 96, 158, 164, 180, 203d, 207g, 208–209, 244d, Wioleta Przybylska – s. 131, 224gd, 229, 231s, Andrzej Dukata – pozostałe

Mapy: redakcja kartograficzna Nowa Era – s. 63, 111

Zdjęcia: Agencja Gazeta: Mateusz Skwarczek s. 235; **BE&W:** Alamy Stock Photo/Janusz Gniadek s. 95; **East News:** Jay Nemeth/Red Bull/SIPA s. 53; **Forum:** Łukasz Głowala s. 49; **Getty Images:** Caiaimage/Anthony Lee s. 33, Corbis - Christopher Morris s. 268, Sygma/John van Hasselt s. 134, Wolfgang Deuter s. 113, DigitalVision/Blackstation s. 68, Getty Images Sport/Mark Runnacles/Stringer s. 46, Science Source / Getty Images Plus/ Takeshi Takahara s. 130, Sygma/pitchal frederic s. 205, The Image Bank/Getty Images Plus/Britt Erlanson s. 87; **NASA:** s. 96, Marshall Space Flight Center s. 197; **Panthermedia:** Fedor Kondratenko s. 59 (ołowiane ciężarki), Paco Ayala s. 93; **Shutterstock:** Action Sports Photography s. 59 (wyścigi samochodów), Aleksey Korchemkin s. 269, Alex Emanuel Koch s. 124 (Slackline), Alexander Mozymov s. 124 (obraz), Beczynski s. 216, De Visu s. 245 (gimnastyka artystyczna), Denis Belitsky s. 24, Denovyi s. 138 (narciarz), Gaie Uchel s. 157 (rowerzyści), haveeseen s. 245 (power ball), Keattikorn s. 223, Laborant s. 91, Liusa s. 224, Marcel Jancovic s. 171, MikeBraune s. 144, Natursports s. 140, Peter Dean s. 184 (turbina), Phant s. 213, pryzmat s. 191, Ramona Heim s. 240, Romaset s. 253, Shaiith s. 4, sirtravelalot s. 232, testing s. 58, Tom Lester s. 121, TonyV3112 s. 163, Topseller s. 112, Wolfgang Kloehr s. 264, zhaoliang70 s. 164; **Thinkstock/Getty Images:** Comstock Images s. 106, s. 221, Digital Vision/Thomas Northcut s. 42, Hemera - Alea Nowak s. 255, Kirill Zdorov s. 124 (rama obrazu), iStockphoto - Evgeny Prokofyev s. 155, Gabor Racz s. 179, Ju-Lee s. 145, Ljupco s. 162 (wózek), Mark Goddard s. 138 (piramida), Matthew Dixon s. 157 (Wieża Eiffla), Pavle Marjanovic s. 184 (elektrownia wodna), Sebastian Kaulitzki s. 14, Serghei Starus s. 254, Jupiterimages s. 150, Pixland/Jupiterimages s. 139, Stockbyte s. 162 (skok wzwyż), TongRo Images s. 92; **Miłosz Budzyński:** s. 19, 225, 265; **Agnieszka Żak:** s. 17, 271.

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w podręczniku. Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.