

Marcin Kurczab
Elżbieta Kurczab
Elżbieta Świda

MATEMATYKA

Podręcznik do liceów i techników

ZAKRES PODSTAWOWY

1



OFICyna
EDUKACYJNA
KRZYSZTOF PAZDRO

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców: dr Grażyny Komarzyniec, dr. Tomasza Karolaka, dr hab. Magdaleny Trysińskiej.

Zakres kształcenia: podstawowy

Etap edukacyjny: III

Typ szkoły: szkoły ponadpodstawowe

Rok dopuszczenia: 2019

Numer dopuszczenia/numer ewidencyjny w wykazie: 972/1/2019

Podręcznik zgodny z programem „Matematyka. Solidnie od podstaw. Program nauczania w liceach i w technikach. Zakres podstawowy”

Projekt okładki i strony tytułowej

Bożena Sawicka

Projekt graficzny, rysunki, skład i łamanie

Eryk Krawczyński

Redaktor

Tomasz Szwed

Fotografia na okładce: *Spirala w drodze na wyższy poziom*

Autor: Radosław Schmidt

Międzynarodowy Konkurs Fotograficzny „Matematyka w obiektywie”

www.mwo.usz.edu.pl

Druk i oprawa

Druk-Serwis Sp. z o.o.

ul. Tysiąclecia 8b, 06-400 Ciechanów

Wydrukowano na papierze *One Bulk* 65 g

www.antalisp.pl

© Copyright by Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro Sp. z o.o.

Warszawa 2019 r.

Wydanie I, Warszawa 2019 r.

Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro Sp. z o.o.

ul. Kościańska 4, 01-695 Warszawa

pazdro@pazdro.com.pl

www.pazdro.com.pl

ISBN 978-83-7594-171-5

Spis treści

Wstęp	6
-------------	---

1. Zbiory liczbowe. Liczby rzeczywiste

Zbiór. Działania na zbiorach	7
Zbiory liczbowe. Oś liczbowa	14
Prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych	20
Przedziały	25
Zbiór liczb naturalnych i zbiór liczb całkowitych	30
Przypomnienie i uzupełnienie wiadomości o równaniach	38
Rozwiązywanie równań metodą równań równoważnych	42
Nierówność z jedną niewiadomą. Rozwiązywanie nierówności metodą nierówności równoważnych	47
Procenty	56
Punkty procentowe	63
Przybliżenia, błąd bezwzględny i błąd względny, szacowanie	66
Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 1.	70

2. Wyrażenia algebraiczne

Potęga o wykładniku naturalnym	73
Pierwiastek arytmetyczny. Pierwiastek stopnia nieparzystego z liczby ujemnej	78
Działania na wyrażeniach algebraicznych	81
Wzory skróconego mnożenia stopnia 2.	85
Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym	91
Potęga o wykładniku wymiernym	95
Potęga o wykładniku rzeczywistym	100
Określenie logarytmu	102
Zastosowanie logarytmów	106
Zdanie. Zaprzeczenie zdania	109
Zdania złożone. Zaprzeczenia zdań złożonych	112
Definicja. Twierdzenie. Dowód twierdzenia	116
Przekształcanie wzorów	123
Średnie	127
Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 2.	131

3. Funkcje i ich własności

Pojęcie funkcji. Funkcja liczbowa. Sposoby opisywania funkcji	134
Wykres funkcji	141
Dziedzina funkcji liczbowej	147
Zbiór wartości funkcji liczbowej. Najmniejsza i największa wartość funkcji	150
Miejsce zerowe funkcji	154
Monotoniczność funkcji	159

Funkcje różnowartościowe	164
Odczytywanie własności funkcji na podstawie jej wykresu	168
Zastosowanie wiadomości o funkcjach do opisywania, interpretowania i przetwarzania informacji wyrażonych w postaci wykresu funkcji	172
Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 3.	176

4. Funkcja liniowa

Proporcjonalność prosta	179
Funkcja liniowa. Wykres i miejsce zerowe funkcji liniowej	182
Znaczenie współczynnika kierunkowego we wzorze funkcji liniowej	188
Własności funkcji liniowej – zadania różne	194
Zastosowanie własności funkcji liniowej w zadaniach praktycznych	200
Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 4.	205

5. Układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi	208
Układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi. Graficzne rozwiązywanie układów równań	212
Rozwiązywanie układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi metodą podstawiania	217
Rozwiązywanie układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi metodą przeciwnych współczynników	222
Zastosowanie układów równań do rozwiązywania zadań	226
Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 5.	233

6. Podstawowe własności wybranych funkcji

Funkcja kwadratowa	235
Funkcja kwadratowa – zastosowania	242
Proporcjonalność odwrotna	248
Funkcja wykładnicza	254
Funkcja logarytmiczna	260
Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 6.	264

7. Geometria płaska – pojęcia wstępne. Trójkąty

Punkt, prosta, odcinek, półprosta, kąt, figura wypukła, figura ograniczona	266
Wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie, odległość punktu od prostej, odległość między prostymi równoległymi, symetralna odcinka, dwusieczna kąta	273
Dwie proste przecięte trzecią prostą. Suma kątów w trójkącie	278
Wielokąt. Wielokąt foremny. Suma kątów w wielokącie	282
Twierdzenie Talesa	288
Podział trójkątów. Nierówność trójkąta. Odcinek łączący środki boków w trójkącie	292

Twierdzenie Pitagorasa. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa	299
Wysokości w trójkącie. Środkowe w trójkącie	304
Przystawanie trójkątów	311
Podobieństwo trójkątów	316
Podobieństwo trójkątów – zastosowanie w zadaniach	323
Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 7.	328
8. Trygonometria kąta ostrego	
Określenie sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa w trójkącie prostokątnym	330
Wartości sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa kątów 30° , 45° i 60° ...	337
Zależności między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta ostrego	339
Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 8.	346
Skorowidz ważniejszych terminów	348
Odpowiedzi do zadań	350
Wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych	392

Wstęp

Nasz podręcznik adresowany jest do uczniów, którzy ukończyli ośmioletnią szkołę podstawową i teraz rozpoczynają naukę matematyki w klasie pierwszej liceum lub technikum w zakresie podstawowym. Składa się on z ośmiu rozdziałów.

Nowe zagadnienia są precyzyjnie wyjaśniane, a tematy zawierają dużą liczbę przykładów o wzrastającym stopniu trudności. W podręczniku prezentujemy m.in. ciekawe przykłady zastosowań matematyki w różnych dziedzinach życia.

Ważne definicje i twierdzenia zostały oznaczone kolorowymi ramkami z jasno-szarym tłem. Inne istotne informacje, które ułatwiają rozwiązywanie zadań i na które warto zwrócić uwagę, zostały oznaczone jasnobłękitnym tłem. Praca z naszym podręcznikiem umożliwi również powtórzenie najważniejszych zagadnień z zakresu szkoły podstawowej.

Każdy temat kończy się zestawem zadań do samodzielnego rozwiązania, zatytułowanym *Sprawdź, czy rozumiesz*. Na końcu każdego rozdziału znajdują się zadania powtórzeniowe zatytułowane *Sprawdź, czy umiesz*. Wszystkie zadania na dowodzenie zostały oznaczone symbolem **D**. Ułatwi to szybkie odnalezienie tego typu zadań, które odgrywają bardzo ważną rolę w procesie uczenia się matematyki. W przypadku trudności z rozwiązaniem jakiegoś zadania, warto powtórnie przeczytać i przeanalizować temat, którego dotyczy to zadanie.

Pamiętaj, że ani rozwiązań, ani odpowiedzi do zadań nie należy umieszczać w podręczniku.

Na końcu podręcznika znajdują się odpowiedzi do większości zadań. Tam również umieściliśmy skorowidz ważniejszych terminów.

Życzymy sukcesów w uczeniu się matematyki!

Autorzy

1. Zbiory liczbowe.

1.1. Liczby rzeczywiste

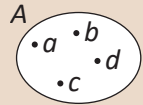
Zbiór. Działania na zbiorach

Pojęcie zbioru

Zbiór, w języku potocznym, ma wiele odpowiedników, np.: kolekcja, zestaw, grupa, komplet. Intuicyjnie rozumiemy zbiór właśnie jako kolekcję przedmiotów (elementów) w pewien sposób wyróżnionych: zbiór samochodów na osiedlowym parkingu, zbiór znaczków pewnego kolekcjonera itp.

Zbiór, w matematyce, należy do tak zwanych pojęć pierwotnych, czyli takich, których się nie definiuje.

Zbiory oznaczać będziemy dużymi literami: $A, B, C, D, \dots$, natomiast elementy zbiorów – małymi literami: $a, b, c, d, \dots$



My zajmować się będziemy głównie **zbiorami liczbowymi**, to znaczy takimi, których elementami są liczby.

Zbiór możemy opisać przez podanie warunku, który spełniają jego elementy:

A – zbiór ocen, które uczeń liceum może otrzymać z matematyki.

Jeśli zbiór ma niewiele elementów, to możemy wypisać wszystkie jego elementy:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Elementy zbioru liczbowego wypisujemy między nawiasami klamrowymi $\{ \}$, oddzielając je przecinkami. Każdą liczbę wypisujemy tylko jeden raz.

Rozważmy B – zbiór wszystkich numerów (z dziennika) uczniów 24-osobowej klasy Ia.

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\}$$

Zauważ, że w zbiorze B istnieje reguła wypisywania kolejnych elementów: liczby zaczynają się od 1, każda kolejna liczba jest o jeden większa od poprzedniej, ostatnią liczbą jest 24. W takim wypadku można zastosować zapis skrócony:

$$B = \{1, 2, 3, \dots, 23, 24\}$$

Polega on na tym, że wypisujemy co najmniej trzy początkowe elementy, wskazujące regułę, po czym następują trzy kropki, oznaczające „i tak dalej”. Na końcu wypisujemy ostatnią liczbę lub kilka ostatnich liczb.

Kolejnym sposobem opisanie zbioru jest zastosowanie zapisu:

$$A = \{x: x \text{ jest oceną, którą uczeń liceum może otrzymać z matematyki}\}.$$

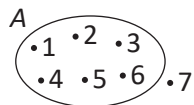
Zapis ten czytamy: „zbiór A jest zbiorem takich elementów x , że x jest oceną, którą uczeń liceum może otrzymać z matematyki”.

Jeśli liczby 1 i 2 są elementami zbioru A , to mówimy, że liczby 1 i 2 należą do zbioru A , co zapisujemy:

$$1 \in A \text{ oraz } 2 \in A.$$

Liczba 7 nie jest elementem zbioru A , czyli liczba 7 nie należy do zbioru A , co zapisujemy:

$$7 \notin A.$$



Zbiór, którego liczba elementów wyraża się liczbą naturalną, nazywamy **zbiorem skończonym**; w przeciwnym wypadku o zbiorze powiemy, że jest **zbiorem nieskończonym**. Szczególnym przypadkiem zbioru skończonego jest **zbiór pusty**, czyli taki, do którego nie należy żaden element. Zbiór pusty oznaczamy symbolem $\emptyset$.

Między zbiorami mogą zachodzić różne zależności. Omówimy dwa przykłady takich zależności: kiedy dwa zbiory są równe i kiedy jeden zbiór jest podzbiorem drugiego.

Definicja 1.

Zbiory A i B są równe wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element należący do zbioru A należy do zbioru B i każdy element należący do zbioru B należy do zbioru A . Równość zbiorów A i B zapisujemy $A = B$.

Zapis $A \neq B$ oznacza, że zbiory A i B nie są równe.

Przykład 1.

Mamy dane zbiory A i B :

A – zbiór cyfr potrzebnych do zapisania liczby 1137

B – zbiór cyfr potrzebnych do zapisania liczby 33371

Ponieważ $A = \{1, 3, 7\}$ i $B = \{3, 7, 1\}$, więc $A = B$.

Definicja 2.

Zbiór A jest **podzbiorem** zbioru B , wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru A jest elementem zbioru B . Zapisujemy to tak: $A \subset B$.

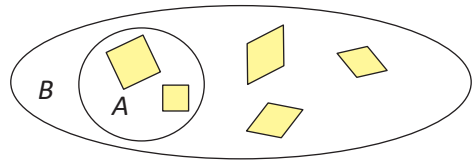
Jeśli zbiór A jest podzbiorem zbioru B , to mówimy też, że zbiór A **zawiera się** w zbiorze B .

Przykład 2.

Oznaczmy:

A – zbiór kwadratów

B – zbiór rombów



Zbiór A jest podzbiorem zbioru B , ponieważ każdy kwadrat jest rombem, (zobacz rysunek powyżej).

Należenie do zbioru jest zależnością między elementem a zbiorem.

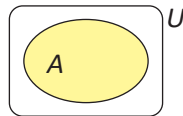
Natomiast zawieranie się zbiorów jest zależnością między zbiorem a zbiorem.

Jeśli $P = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, to piszemy:

$$\begin{array}{ll} 2 \in P & \{2\} \subset P \\ 3 \in P & \{2, 3\} \subset P \end{array}$$

Podzbiorem każdego zbioru A jest ten sam zbiór A i podzbiorem każdego zbioru A jest zbiór pusty, czyli $A \subset A$ i $\emptyset \subset A$.

Zbiory, które rozpatrujemy, są podzbiorem pewnego zbioru, nazywanego przestrzenią, np. zbiory liczbowe rozpatrujemy jako podzbiory zbioru liczb rzeczywistych. Przestrzeń oznaczamy literą U .

**Działania na zbiorach**

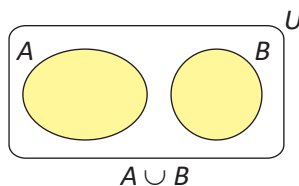
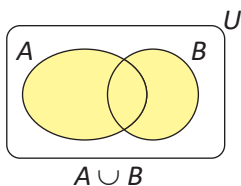
Na zbiorach można wykonywać działania. Omówimy niektóre z nich: wyznaczanie sumy, różnicy, iloczynu zbiorów oraz znajdowanie dopełnienia zbioru.

Definicja 3.

Sumą zbiorów A oraz B nazywamy zbiór tych elementów, które należą do co najmniej jednego z tych zbiorów. Sumę zbiorów A i B zapisujemy $A \cup B$.

Jeśli element należy do co najmniej jednego ze zbiorów A oraz B , to mówimy, że należy do zbioru A lub do zbioru B .

$x \in A \cup B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in A$ lub $x \in B$



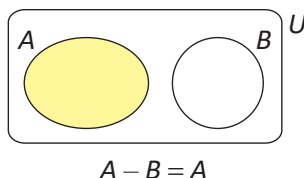
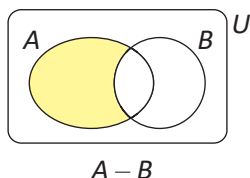
Przykład 3.

- a) Jeśli $A = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{1, 2, 4\}$, to wtedy $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.
 b) Jeśli $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 5\}$, to wtedy $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Definicja 4.

Różnicą zbiorów A oraz B nazywamy zbiór tych elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B . Różnicę zbiorów A i B zapisujemy $A - B$ lub $A \setminus B$.

$x \in A - B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in A$ i $x \notin B$

**Przykład 4.**

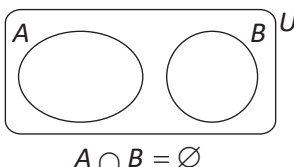
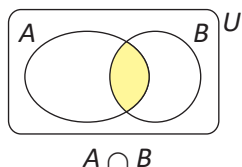
- a) Jeśli $A = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{1, 2, 4\}$, to wtedy $A - B = \{3, 6\}$.
 b) Jeśli $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 5\}$, to wtedy $A - B = A$.

Definicja 5.

Częścią wspólną (iloczynem) zbiorów A oraz B , nazywamy zbiór tych elementów, które należą jednocześnie do zbioru A i do zbioru B . Iloczyn zbiorów A i B zapisujemy $A \cap B$.

Jeśli element x należy jednocześnie do zbioru A i do zbioru B , to zapisujemy: $x \in A$ i $x \in B$.

$x \in A \cap B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in A$ i $x \in B$



Zbiory A i B nazywamy **zbiorami rozłącznymi** wtedy i tylko wtedy, gdy $A \cap B = \emptyset$.

Przykład 5.

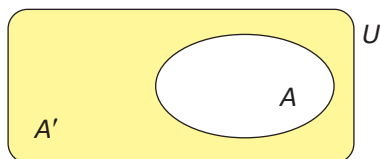
- a) Jeśli $A = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{1, 2, 4\}$, to wtedy $A \cap B = \{1, 2\}$
 b) Jeśli $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 5\}$, to wtedy $A \cap B = \emptyset$. Te zbiory są rozłączne.

Definicja 6.

Niech A będzie dowolnym zbiorem w przestrzeni U , $A \subset U$.

Dopełnieniem zbioru A do przestrzeni U nazywamy zbiór tych elementów przestrzeni U , które nie należą do zbioru A . Dopełnienie zbioru A zapisujemy symbolem A' , czytaj: A prim.

$x \in A'$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in U$ i $x \notin A$



Element należy do dopełnienia zbioru A tylko wtedy, gdy należy do różnicy $U - A$.
Zatem $A \cap A' = \emptyset$ oraz $A \cup A' = U$.

Przykład 6.

- Niech U oznacza zbiór uczniów klasy Ia, A – zbiór dziewcząt w tej klasie. Zatem A' jest to zbiór chłopców w klasie Ia.
- Niech U oznacza zbiór foteli w sali teatralnej, A – zbiór foteli zajętych przez widzów. Zatem A' jest to zbiór foteli wolnych w tej sali teatralnej.
- Niech $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, zatem $A' = \{1\}$.

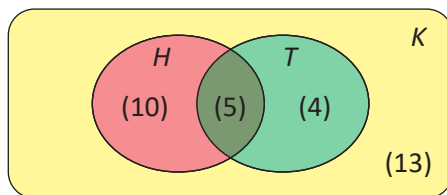
Przykład 7.

W klasie, która liczy 32 uczniów, 9 uczniów należy do koła teatralnego i 15 uczniów należy do koła historycznego. Do żadnego z tych kół nie należy 13 uczniów tej klasy.

- Ilu uczniów z tej klasy należy jednocześnie do koła teatralnego i historycznego?
- Ilu uczniów należy tylko do koła historycznego?

Ad a) Zauważmy, że jeśli 13 uczniów nie należy do żadnego koła zainteresowań, to do co najmniej jednego z tych kół należy 19 uczniów ($32 - 13 = 19$). Z drugiej strony $9 + 15 = 24$; w tej sumie uczniowie należący jednocześnie do koła teatralnego i historycznego liczeni byli dwukrotnie. A to znaczy, że do obu kół należy 5 uczniów ($24 - 19 = 5$).

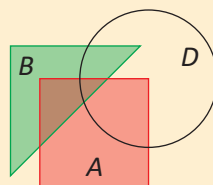
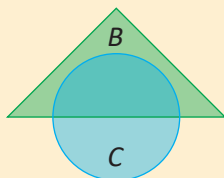
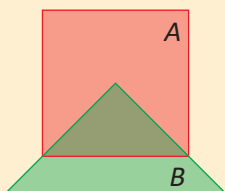
Ad b) Tylko do koła historycznego należy 10 uczniów ($15 - 5 = 10$).



Rozwiązanie zadania można zilustrować diagramem, w którym K oznacza zbiór uczniów danej klasy, H – zbiór uczniów należących do koła historycznego, T – zbiór uczniów należących do koła teatralnego. Liczby uczniów w poszczególnych zbiorach zapisane są w nawiasach.

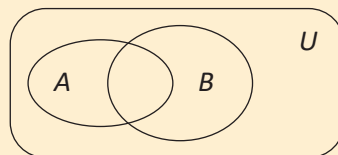
Sprawdź, czy rozumiesz

- Dany jest zbiór opisany słownie. Zapisz ten zbiór poprzez wypisanie jego elementów:
 - A – zbiór naturalnych dzielników liczby 20
 - B – zbiór liczb przeciwnych do liczb podanych w zbiorze $\{4, 5, 0, -1, 3, -7\}$
 - C – zbiór liczb mających postać $k\sqrt{5}$, jeśli $k \in \{-2, -1, 0, 17, 100\}$
 - D – zbiór wszystkich kwadratów liczb całkowitych jednocyfrowych
 - E – zbiór liczb mających postać $\frac{4}{n}$, gdzie n jest liczbą należącą do zbioru $\{1, 2, 3, 4, \dots, 100\}$
 - F – zbiór liczb mających postać -3^n , gdzie n jest liczbą należącą do zbioru $\{0, 2, 4, 6, \dots\}$.
- Opisz słowami następujące zbiory:
 - $A = \{10, 20, 30, 40, \dots, 90\}$
 - $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$
 - $C = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$
 - $D = \{12, 16, 20, 24, \dots, 96\}$
 - $E = \{1, 8, 27, 64, \dots, 1000\}$
 - $F = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \dots, 3\}$.
- Dany jest zbiór A , gdzie $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
 - Wypisz wszystkie podzbiory jednoelementowe, dwuelementowe i trzyelementowe zbioru A .
 - Podaj podzbiór czteroelementowy zbioru A .
 - Ile jest wszystkich podzbiorów zbioru A ?
- Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$, jeśli:
 - $A = \{-2, -1, 0, 1, 5\}$, $B = \{1, 3, 8\}$
 - $A = \{5, 7, 9, 11\}$, $B = \{7, 9\}$
 - $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
 - $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
 - $A = \{-1, -2, -3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$
 - $A = \{5, 4, 3, 2, 1\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Na rysunku przedstawione są figury geometryczne i relacje zachodzące między nimi, gdzie A – kwadrat, B – trójkąt, C – koło, D – okrąg. Na osobnych rysunkach w zeszycie przedstaw zbiory zapisane nad rysunkiem.
 - $A \cup B$, $A - B$, $B - A$
 - $B \cap C$, $B - C$, $C - B$
 - $(A \cap B) \cup D$, $(D \cup A) - B$



- Podaj przykład dwóch niepustych zbiorów A i B , dla których:
 - $B \subset (A \cap B)$
 - $A \cup B = B$.

7. Podaj przykład dwóch takich zbiorów X i Y , że zbiór X ma 5 elementów, zbiór Y ma 7 elementów, a zbiór $X \cap Y$ ma 2 elementy. Narysuj diagram ilustrujący takie zbiory. Ile elementów należy do zbioru $X \cup Y$?
8. Podaj przykład dwóch takich zbiorów X i Y , że zbiór X ma 4 elementy, zbiór Y ma 5 elementów, a zbiór $X \cup Y$ ma 6 elementów. Narysuj diagram ilustrujący takie zbiory. Ile elementów należy do zbioru $X \cap Y$?
9. W ramach SKS na siatkówkę chodzi dwa razy więcej uczniów niż na koszykówkę, łącznie 35 osób. Wiedząc, że tylko 7 osób uczęszcza na zajęcia obydwu dyscyplin sportowych, oblicz, ilu uczniów chodzi na zajęcia koszykówki.
10. Parking ma 20 miejsc, na których stoją tylko samochody białe lub czeskie samochody i wszystkie miejsca są zajęte. Wiedząc, że stoi tam 8 czeskich samochodów białych i 7 czeskich samochodów w innym kolorze oblicz, ile białych samochodów stoi na parkingu.
11. Do pewnego czteroletniego liceum uczęszcza 480 uczniów. Każdy z nich uczy się co najmniej jednego z języków: hiszpańskiego i niemieckiego, przy czym 360 uczniów danej szkoły uczy się języka niemieckiego oraz 240 uczniów uczy się języka hiszpańskiego. Wiedząc, że tylko wszyscy uczniowie klas językowych uczą się obu tych języków, oblicz:
- ilu uczniów tej szkoły uczęszcza do klas językowych;
 - ile klas tego liceum przypada na jeden rocznik, jeżeli nabór do tej szkoły jest co roku taki sam, na każdy rocznik przypada tylko jedna klasa językowa i wszystkie klasy mają jednakową liczbę uczniów.
12. Dane są zbiory A i B zawarte w przestrzeni U . Wyznacz zbiory A' , B' , $A' \cup B$, $B' \cap A$, $A' - B'$, jeśli:
- $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 15, 20\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{0, 5, 10, 15, 20\}$
 - $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 9, 16, 25\}$, $A = \{1, 4, 9, 16, 25\}$, $B = \{1, 9, 25\}$.
13. Dana jest przestrzeń $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, w której zawierają się zbiory A i B . Wyznacz zbiory A' , B' , $A' \cup B'$, $(A \cap B)'$, $A' \cap B'$, $(A \cup B)'$. Które z wyznaczonych zbiorów są równe?
- $A = \{0, 3, 6, 9\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
 - A – zbiór naturalnych dzielników liczby 8, B – zbiór liczb jednocyfrowych podzielnych przez 4.
14. Na rysunku poniżej dane są niepuste zbiory A i B , zawarte w przestrzeni U . Wykonaj odpowiednie rysunki i uzasadnij, że prawdziwe są równości:
- $(A \cup B)' = A' \cap B'$
 - $(A \cap B)' = A' \cup B'$.



Zbiory liczbowe. Oś liczbowa

Podzbiory zbioru liczb rzeczywistych

W zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$ możemy wyróżnić pewne podzbiory.

Zbiór wszystkich liczb naturalnych oznaczamy literą $\mathbf{N}$.

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$$

Zbiór $\mathbf{N}$ jest nieskończony, nie ma w nim liczby największej, jest natomiast liczba najmniejsza zero.

Suma dwóch dowolnych liczb naturalnych jest liczbą naturalną oraz iloczyn dwóch dowolnych liczb naturalnych jest liczbą naturalną. Powiemy, że w zbiorze $\mathbf{N}$ wykonalne jest dodawanie i mnożenie. Jeśli odejmiemy dwie liczby naturalne lub podzielimy liczbę naturalną przez inną liczbę naturalną różną od zera, to wynik nie zawsze będzie liczbą naturalną. Odejmowanie i dzielenie nie jest wykonalne w zbiorze $\mathbf{N}$.

W zbiorze $\mathbf{N}$ wyróżniamy podzbiór liczb naturalnych dodatnich, który oznaczamy $\mathbf{N}_+$.

$$\mathbf{N}_+ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

Oczywiście prawdziwa jest równość

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_+ \cup \{0\}$$

Zbiór liczb całkowitych oznaczamy literą $\mathbf{Z}$.

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

Zbiór $\mathbf{Z}$ jest zbiorem nieskończonym, nie ma w nim liczby najmniejszej ani największej. Dlatego między klamrami na początku i na końcu są trzy kropki.

Suma, iloczyn i różnica dowolnych liczb całkowitych jest liczbą całkowitą. Iloraz dwóch liczb całkowitych może nie być liczbą całkowitą. W zbiorze $\mathbf{Z}$ wykonalne jest dodawanie, odejmowanie i mnożenie. Dzielenie nie jest wykonalne.

W zbiorze $\mathbf{Z}$ wyróżniamy podzbiór liczb całkowitych ujemnych $\mathbf{Z}_-$ i podzbiór liczb całkowitych dodatnich $\mathbf{Z}_+$.

$$\mathbf{Z}_- = \{\dots, -6, -5, -4, -3, -2, -1\} \quad \mathbf{Z}_+ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\}$$

Oczywiście prawdziwa jest równość

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbf{Z}_+$$

Zbiór liczb wymiernych oznaczamy literą $\mathbf{Q}$. Zbiór $\mathbf{Q}$ to zbiór takich liczb, które można przedstawić w postaci ułamka $\frac{p}{q}$, gdzie p oraz q są liczbami całkowitymi i q jest różne od zera, co zapisujemy:

$$\mathbf{Q} = \left\{ x : x = \frac{p}{q} \text{ i } p, q \in \mathbf{Z} \text{ i } q \neq 0 \right\}$$

W zbiorze $\mathbf{Q}$ wykonalne jest dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie przez liczby różne od zera.

ułamka. Oto przykłady liczb wymiernych:

$$0, \text{ ponieważ } 0 = \frac{0}{7} \qquad -752,94, \text{ ponieważ } -752,94 = \frac{-75294}{100}$$

nik ułamka podzielimy przez jego mianownik, to otrzymamy **rozwiązanie dziesiątne** ułamka:

$$\frac{-1}{7} = -0,14285714285714285714285714285714... = -0,(142857)$$

W przypadku pierwszym i trzecim otrzymaliśmy rozwinięcie dziesiętne skończone, a w drugim i czwartym – rozwinięcie dziesiętne nieskończone, okresowe.

Okres rozwinięcia dziesiątowego jest to najmniejsza, powtarzająca się po przecinku grupa cyfr.

Dla ułamka $\frac{5}{9}$ okres składa się tylko z cyfry 5, natomiast okres ułamka $\frac{-1}{7}$ ma sześć cyfr: 142857.

Rozwinięcie dziesiętne każdej liczby wymiernej jest skończone lub nieskończone okresowe.

Stwierdzenie, czy rozwinięcie dziesiętne ułamka jest skończone czy nieskończone okresowe, metodą dzielenia licznika przez mianownik tego ułamka, czasem wymaga trochę cierpliwości, np.:

Okres rozwinięcia dziesiętnego nieskończonego pierwszego ułamka ma aż 28 cyfr, a rozwinięcie dziesiętne drugiego ułamka jest skończone, ale po przecinku ma 16 cyfr.

Zastanów się, jak bez wykonywania dzielenia stwierdzić, czy ułamek ma rozwinięcie dziesiętne skończone, czy nieskończone okresowe.

Przykład 1.

Wyznamy ułamek zwykły o rozwinięciu dziesiętnym $0,125125125\dots$

$$0,125125125\dots = x \quad / \cdot 1000$$

$$125,125125125\dots = 1000x$$

$$125 + \underbrace{0,125125125\dots}_x = 1000x$$

$$125 + x = 1000x \quad / - x$$

$$125 = 999x \quad / : 999$$

$$\text{czyli} \quad x = \frac{125}{999}$$

Szukany ułamek zwykły to $\frac{125}{999}$.

Po pomnożeniu danej liczby przez 1000, otrzymujemy liczbę, mającą takie same cyfry po przecinku, w tej samej kolejności co dana liczba.

Kolejny zbiór, który teraz omówimy, to zbiór liczb niewymiernych. Ten zbiór oznaczamy $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$.

Zbiór $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$ jest zbiorem tych wszystkich liczb rzeczywistych, które nie są wymierne.

Liczby niewymiernej nie można przedstawić w postaci ułamka, którego licznik i mianownik jest liczbą całkowitą. Zbiór liczb niewymiernych jest nieskończony. Choć trudno to sobie wyobrazić, jest on nawet liczniejszy niż zbiór liczb wymiernych.

Znasz już przykłady liczb niewymiernych:

π (czytaj: pi) – stała matematyczna, wyrażająca stosunek długości okręgu do długości jego średnicy;

$\sqrt{2}$ – liczba wyrażająca np. stosunek długości przekątnej kwadratu do długości jego boku;

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ – liczba wyrażająca np. stosunek wysokości trójkąta równobocznego do długości jego boku.

Rozwinięcia dziesiętne liczb niewymiernych są nieskończone i nieokresowe.

$$\pi = 3,141592653589793238462643383279\dots$$

$$\sqrt{2} = 1,414213562373095048801688724209\dots$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866025403784438646763723170752\dots$$

Wykonując działania arytmetyczne na liczbach niewymiernych, możemy otrzymać wynik, który jest liczbą niewymierną, ale także wynik, który jest liczbą wymierną.

Przykład 2.

Wiemy, że $a = \sqrt{2} - 1$, $b = \sqrt{2} + 1$, $c = -\sqrt{2}$. Wyznamy $a + c$, $a \cdot b$, $a \cdot c$, $a - b$.

$$a + c = \sqrt{2} - 1 + (-\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} = -1 \quad \text{liczba wymierna}$$

$$a \cdot b = (\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{2} + 1) = 2 + \sqrt{2} - \sqrt{2} - 1 = 1 \quad \text{liczba wymierna}$$

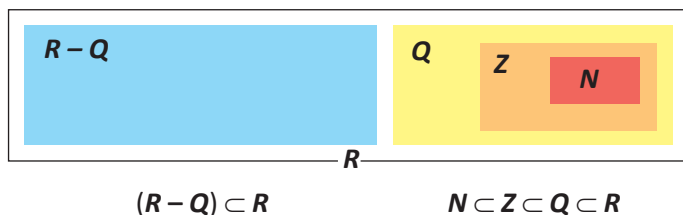
$$a \cdot c = (\sqrt{2} - 1) \cdot (-\sqrt{2}) = -2 + \sqrt{2} \quad \text{liczba niewymierna}$$

$$a - b = (\sqrt{2} - 1) - (\sqrt{2} + 1) = \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} - 1 = -2 \quad \text{liczba wymierna}$$

Podaj przykład dwóch liczb niewymiernych, których iloraz jest liczbą wymierną, oraz innych dwóch liczb niewymiernych, których iloraz jest liczbą niewymierną.

Sumą zbioru liczb wymiernych i zbioru liczb niewymiernych jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$. Możemy więc powiedzieć, że dopełnieniem zbioru liczb wymiernych w przestrzeni $\mathbf{R}$ jest zbiór liczb niewymiernych.

Zależności między omówionymi zbiorami przedstawia poniższy diagram:



Wartość bezwzględna

Definicja 1.

Wartością bezwzględną liczby rzeczywistej a nazywamy:

- liczbę a , jeśli a jest liczbą nieujemną,
- liczbę przeciwną do a , jeśli a jest liczbą ujemną.

Wartość bezwzględną liczby a zapisujemy $|a|$, wówczas

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{jeśli } a \geq 0 \\ -a, & \text{jeśli } a < 0 \end{cases}$$

Przykład 3.

$$|5| = 5 \quad |0| = 0 \quad |-3| = 3 \quad |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1 \quad (\sqrt{2} - 1 > 0) \quad |2 - \sqrt{6}| = -2 + \sqrt{6}$$

$$(2 - \sqrt{6} < 0; \text{liczbą przeciwną do liczby } 2 - \sqrt{6} \text{ jest liczba } -(2 - \sqrt{6}) = -2 + \sqrt{6})$$

Wartość bezwzględna danej liczby i liczby do niej przeciwnej są równe:

$$|-6| = |6| = 6 \geq 0, \quad |\sqrt{2}| = |-\sqrt{2}| = \sqrt{2} \geq 0 \text{ itd., czyli ogólnie:}$$

$$|a| = |-a| \text{ dla dowolnej liczby rzeczywistej } a;$$

$$|a| \geq 0 \text{ dla dowolnej liczby rzeczywistej } a.$$

Oś liczbowa

Geometryczną interpretacją zbioru liczb rzeczywistych jest oś liczbowa.

Oś liczbowa jest to prosta, na której zaznaczono strzałką zwrot dodatni, punkt zero-wy i jednostkę. Zwrot dodatni wskazuje kierunek, w którym wzrastają liczby.



Każdej liczbie rzeczywistej odpowiada na osi liczbowej tylko jeden punkt i każdemu punktowi na osi odpowiada tylko jedna liczba rzeczywista.

Strukturę zbioru liczb rzeczywistych dobrze oddaje struktura prostej (osi liczbowej), np.:

- między dwiema różnymi liczbami rzeczywistymi istnieje nieskończenie wiele liczb rzeczywistych – między dwoma różnymi punktami prostej znajduje się nieskończenie wiele punktów;
- nie ma najmniejszej liczby rzeczywistej ani największej liczby rzeczywistej – prosta nie ma początku ani końca;
- dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych a, b albo $a < b$, albo $b < a$ – dowolne dwa różne punkty A, B , leżące na prostej, są uporządkowane na jeden z dwóch sposobów: $A B$ albo $B A$.

Ostatnia wymieniona cecha liczb rzeczywistych mówi nam, że dowolne liczby rzeczywiste a, b można porównywać, to znaczy określać, która z nich jest większa, która mniejsza, albo stwierdzać, że liczby są równe:

$$a < b \text{ albo } a = b, \text{ albo } a > b$$

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Odpowiedz na pytania:
 - a) Czy istnieje liczba rzeczywista, która jest jednocześnie wymierna i niewymierna?
 - b) Czy istnieje liczba naturalna, która nie jest dodatnia?
 - c) Czy istnieje właściwy podzbiór zbioru liczb naturalnych $\mathbf{N}$ (czyli podzbiór różny od zbioru $\mathbf{N}$), w którym wykonalne są dwa działania: dodawanie i mnożenie? Jeśli tak, to podaj przykład takiego zbioru.
2. Podaj przykład dwóch liczb niewymiernych, których:
 - a) suma, iloczyn i iloraz jest liczbą wymierną, a różnica jest liczbą niewymierną;
 - b) iloczyn i iloraz jest liczbą wymierną, a suma i różnica jest liczbą niewymierną.
3. Rozpatrujemy trzy działania: dodawanie, odejmowanie i mnożenie. Które z tych działań są wykonalne w zbiorze:
 - a) $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \dots\}$
 - b) $\{\dots, -10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$
 - c) $\{3, 9, 27, 81, 243, \dots\}$
 - d) liczb rzeczywistych dodatnich

- e) $\{x: x = b\sqrt{2}, \text{ gdzie } b \in \mathbf{Z}\}$
 f) liczb niewymiernych ujemnych.
4. Wykonaj działania na zbiorach:
- a) $\mathbf{N} \cup \mathbf{Z}$ b) $\mathbf{Z} \cap \mathbf{Q}$ c) $\mathbf{N} \cap \mathbf{Z}$ d) $\mathbf{Z} - \mathbf{Q}$
 e) $\mathbf{N} \cup \mathbf{Q}$ f) $\mathbf{Z} - \mathbf{R}$ g) $\mathbf{R} \cap \mathbf{Q}$ h) $\mathbf{R} - \mathbf{R}_-$
5. Zaznacz na osobnych osiach liczbowych podane zbiory. Następnie opisz te zbiory symbolicznie.
 A – zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych
 B – zbiór liczb rzeczywistych mniejszych od 2
 C – zbiór liczb rzeczywistych nie mniejszych od $3\frac{1}{4}$
 D – zbiór liczb rzeczywistych nie większych od 5,5
6. Opisz słowami następujące zbiory:
- a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 99\}$ b) $B = \{\dots, -8, -6, -4, -2\}$
 c) $C = \{1, 2, 4, 8, 16, \dots, 1024\}$ d) $D = \{\dots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16, \dots\}$.
7. Wypisz elementy zbioru:
- a) $A = \{x: x = 2k \text{ i } k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$ b) $B = \{x: x = -n \text{ i } n \in \mathbf{N}\}$
 c) $C = \left\{x: x = \frac{1}{n} \text{ i } n \in \mathbf{N}_+\right\}$ d) $D = \{x: x = -2k + 1 \text{ i } k \in \mathbf{Z}_-\}$.
8. Podaj rozwinięcia dziesiętne liczb wymiernych:
- a) $1\frac{2}{3}$ b) $\frac{1563}{-60}$ c) $\frac{-5}{12}$ d) $\frac{128}{125}$ e) $\frac{18}{11}$ f) $3\frac{4}{7}$
9. Przedstaw poniższe liczby wymierne w postaci ułamków zwykłych:
- a) 0,(225) b) 0,(18) c) 2,(4) d) 5,4(3) e) 1,2(13) f) -0,1(234).
10. Sprawdź, czy poniższe równości są prawdziwe:
- a) $0,(8) - 0,8 = 0,0(8)$ b) $0,(5) - 0,3 = 0,(2)$
 c) $0,(5) - 0,(3) = 0,(2)$ d) $0,(7) - 0,77 = 0$.
11. Która z liczb jest większa: 0,3 czy 0,2(9)?
12. Porównaj liczby niewymierne a i b , nie używając kalkulatora:
- a) $a = \sqrt{2} - 1$, $b = 1 + \sqrt{2}$ b) $a = -\sqrt{3}$, $b = -1,5\sqrt{3}$
 c) $a = -2\sqrt{5}$, $b = -\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$ d) $a = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2)$ $b = 3(\sqrt{3} - 2)$
 e) $a = 2(1 - \pi)$, $b = \pi - 1$ f) $a = 4\sqrt{5}$, $b = 2\sqrt{20}$.
13. Jaką liczbą: wymierną czy niewymierną, jest liczba:
- a) $|1 - \pi| - \pi$ b) $|\sqrt{3} - 2| + \sqrt{3}$ c) $\sqrt{2} - |\sqrt{8} - \sqrt{2}|$ d) $\sqrt{5} - |\sqrt{5} - 3|$?

Prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych

W zbiorze liczb rzeczywistych R wykonalne są cztery działania arytmetyczne: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie przez liczbę różną od zera. Poniżej przypomnimy prawa dodawania i mnożenia w zbiorze liczb rzeczywistych.

Przemienność dodawania $a + b = b + a$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b	Przemienność mnożenia $a \cdot b = b \cdot a$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b
Łączność dodawania $(a + b) + c = a + (b + c)$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c	Łączność mnożenia $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c
Element neutralny dodawania $a + 0 = a$ dla dowolnej liczby rzeczywistej a	Element neutralny mnożenia $a \cdot 1 = a$ dla dowolnej liczby rzeczywistej a
Element przeciwny Dla każdej liczby rzeczywistej a istnieje do niej liczba przeciwna $-a$, oraz $a + (-a) = 0$	Element odwrotny Dla każdej liczby rzeczywistej $a, a \neq 0$, istnieje odwrotność tej liczby $\frac{1}{a}$, oraz $a \cdot \frac{1}{a} = 1$
Rozdzielność mnożenia względem dodawania $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c	

Stosowanie praw działań ułatwia obliczenia.

Przykład 1.

Wykonamy obliczenia, stosując prawa działań:

a) $235,78 + 146,5 + 14,22$ b) $0,75 \cdot \frac{2}{7} \cdot 8$

Ad a)
 $235,78 + 146,5 + 14,22 =$ stosujemy prawo przemienności dodawania
 $= 146,5 + (235,78 + 14,22) =$ stosujemy prawo łączności dodawania
 $= 146,5 + 250 = 396,5$

Ad b)
 $0,75 \cdot \frac{2}{7} \cdot 8 =$ stosujemy prawo przemienności mnożenia
 $= \frac{2}{7} \cdot (0,75 \cdot 8) =$ stosujemy prawo łączności mnożenia
 $= \frac{2}{7} \cdot 6 = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}$

Przykład 2.

Podamy liczbę przeciwną do danej liczby i odwrotność danej liczby.

dana liczba	liczba przeciwna do danej liczby	odwrotność danej liczby
4	-4	$\frac{1}{4}$
$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	-1,5
0,75	-0,75	$1\frac{1}{3}$
$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Przykład 3.

Wykonamy obliczenia, stosując prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania:

a) $15 \cdot 402$

b) $0,4 \cdot 123,5 + 0,6 \cdot 123,5$

Ad a)

$$15 \cdot 402 = 15 \cdot (400 + 2) = 15 \cdot 400 + 15 \cdot 2 = 6000 + 30 = 6030$$

Ad b)

$$0,4 \cdot 123,5 + 0,6 \cdot 123,5 = 123,5 \cdot (0,4 + 0,6) = 123,5 \cdot 1 = 123,5$$

Zauważ, że odejmowanie i dzielenie nie jest ani przemienne, ani łączne.

Prawdziwe jest natomiast prawo rozdzielności mnożenia względem odejmowania:

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c .

Przypomnijmy umowę dotyczącą kolejności wykonywania działań.

- Najpierw wykonujemy działania w nawiasach, które nie zawierają innych nawiasów.
- Jeśli nawiasy nie występują i mamy do wykonania kilka działań, to najpierw wykonujemy potęgowanie i pierwiastkowanie, potem mnożenie i dzielenie w takiej kolejności, w jakiej są zapisane, a na końcu – dodawanie i odejmowanie w kolejności ich występowania, czyli od lewej strony do prawej.

Przykład 4.

$$\text{a)} \quad 4 \cdot 5^2 + 16 : 8 - (3 + \sqrt{25})^2 = 4 \cdot 25 + 2 - (3 + 5)^2 = 100 + 2 - 8^2 = 102 - 64 = 38$$

$$\text{b)} \quad -6^2 + 3\sqrt{(-7)^2} = -36 + 3\sqrt{49} = -36 + 3 \cdot 7 = -36 + 21 = -15$$

$$\text{c)} \quad 4^{(2^3)} = 4^{2 \cdot 2 \cdot 2} = 4^8 = 65\,536$$

Wiesz, że liczby rzeczywiste można porównywać. Aby porównać dwie liczby, wystarczy zbadać, jaka jest ich różnica. Mamy bowiem:

$$a = b \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad a - b = 0$$

$$a < b \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad a - b < 0$$

$$a > b \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad a - b > 0$$

Nierówności $a < b$ i $c < d$ mają ten sam zwrot. Ten sam zwrot mają również nierówności $a > b$ i $c > d$. Natomiast nierówności $a < b$ i $c > d$ mają zwroty przeciwne, podobnie jak nierówności $a > b$ i $c < d$. Nierówności $a < b$ i $c > d$ nazywamy **nierównościami ostrymi**.

Jeśli a jest mniejsze od b lub a jest równe b , to powiemy, że a jest nie większe od b i zapiszemy $a \leq b$. Jeśli c jest większe od d lub c jest równe d , to powiemy, że c jest nie mniejsze od d i zapiszemy $c \geq d$. Nierówności $a \leq b$ i $c \geq d$ nazywamy **nierównościami nieostrymi**; nierówności te mają przeciwne zwroty.

Czasami będziemy też mówili o nierówności podwójnej:

$$a < b < c$$

Zapis taki oznacza, że spełnione są jednocześnie dwie nierówności:

$$a < b \quad \text{i} \quad b < c$$

Analogicznie można określić inne nierówności podwójne:

$$a \leq b \leq c, \quad a \leq b < c, \quad a < b \leq c \quad \text{oraz} \quad a > b > c, \quad a > b \geq c, \quad a \geq b > c, \quad a \geq b \geq c$$

Przykład 5.

Podamy przykład dwóch liczb całkowitych a , b , dla których spełniona jest nierówność podwójna

$$\frac{3}{17} < \frac{a}{b} < \frac{4}{17}$$

Rozszerzamy ułamki $\frac{3}{17}$ i $\frac{4}{17}$, na przykład mnożąc liczniki i mianowniki przez liczbę 2.

$$\text{Otrzymujemy wówczas} \quad \frac{6}{34} < \frac{a}{b} < \frac{8}{34}.$$

Z ostatniej nierówności wynika, że możemy przyjąć: $a = 7$, $b = 34$.

Podaj przykład innej pary liczb a, b , które również spełniają nierówność z przykładu 5.

Prawdziwe są następujące twierdzenia.

Twierdzenie 1.

Niech a, b, c oznaczają dowolne liczby rzeczywiste.

- a) $a = b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a + c = b + c$
- b) $a = b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a - c = b - c$
- c) jeśli $a = b$ i $c \neq 0$, to $a \cdot c = b \cdot c$ i $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

Twierdzenie 2.

Niech a, b, c oznaczają dowolne liczby rzeczywiste.

- a) $a < b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a + c < b + c$
- b) $a < b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a - c < b - c$
- c) jeśli $a < b$ i $c > 0$, to $a \cdot c < b \cdot c$ i $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
- d) jeśli $a < b$ i $c < 0$, to $a \cdot c > b \cdot c$ i $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

Zwróć szczególną uwagę na dwa ostatnie podpunkty twierdzenia 2. Mówią one o tym, że nierówność można pomnożyć lub podzielić stronami przez liczbę różną od zera, przy czym: jeśli pomnożymy lub podzielimy przez liczbę dodatnią, to nie zmieniamy zwrotu nierówności na przeciwny, jeśli natomiast pomnożymy lub podzielimy przez **liczbę ujemną**, to **zmieniamy zwrot nierówności na przeciwny**.

Na przykład mamy: $1 < 2$ oraz $1 \cdot 3 < 2 \cdot 3$ ale $1 \cdot (-3) > 2 \cdot (-3)$

Twierdzenie 2. dotyczy nierówności $a < b$. Analogiczne twierdzenia dotyczące nierówności $a > b$, $a \leq b$, $a \geq b$ oczywiście są również prawdziwe.

Przykład 6.

Pokażemy, że liczba $\frac{1}{2-\sqrt{5}}$ jest większa od liczby $\frac{3}{2-\sqrt{5}}$.

Niech $a = 1$, $b = 3$, $c = 2 - \sqrt{5}$. Wówczas $a < b$ oraz $c < 0$. Na mocy twierdzenia 2d)

otrzymujemy $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$, czyli $\frac{1}{2-\sqrt{5}} > \frac{3}{2-\sqrt{5}}$.

Sprawdź, czy rozumiesz

- Podaj liczbę przeciwną oraz odwrotność danej liczby:
 a) $-2,375$ b) $0,008$ c) $\sqrt{3}$ d) $-0,2\sqrt{5}$
- Oblicz, stosując prawo łączności dodawania:
 a) $2\frac{15}{17} + 6\frac{4}{19} + \frac{15}{19}$ b) $3,2 + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$ c) $21\frac{1}{4} + 2,49 + 1,21$
- Oblicz, stosując prawo łączności mnożenia:
 a) $0,12 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{10}{3}$ b) $3\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot 6$ c) $4,4 \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{14}{9} \cdot 9$
- Oblicz, stosując przemienność dodawania:
 a) $\frac{1}{7} + 2,5 + \frac{6}{7}$ b) $0,25 + 1\frac{7}{8} + 0,75$ c) $32,8 + 2,79 + (-0,8)$
- Oblicz, stosując przemienność mnożenia:
 a) $4\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{3}{14}$ b) $\frac{\pi}{13} \cdot 3\frac{1}{3} \cdot \frac{0,13}{2}$ c) $-1\frac{3}{7} \cdot 2\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{10} \cdot 4$
- Oblicz, stosując prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania:
 a) $100 \cdot \left(0,27 + \frac{3}{20}\right)$ b) $21 \cdot \left(1\frac{2}{3} + \frac{8}{7}\right)$ c) $43 \cdot 1\frac{2}{9} + 43 \cdot \frac{7}{9}$
 d) $\frac{15}{7} \cdot 15,1 - 2\frac{1}{7} \cdot 1,1$ e) $32,4 \cdot 110$ f) $87\frac{1}{25} \cdot 100$
- Wyłącz wspólny czynnik poza nawias:
 a) $6 + 3\sqrt{2}$ b) $-0,5\sqrt{5} + \frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\pi}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{5}{12}$
- Skróć ułamki:
 a) $\frac{10 - 2\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{-3\pi + 6}{-3}$ c) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ d) $\frac{0,5 + 1,5\pi}{-0,5}$
- Podaj przykład liczb całkowitych a i b , dla których spełniona jest nierówność:
 a) $\frac{4}{11} < \frac{a}{b} < \frac{5}{11}$ b) $\frac{-2}{13} < \frac{a}{b} < \frac{-1}{13}$ c) $1,05 < \frac{a}{b} < 1,06$
- Podaj przykład dwóch liczb: wymiernej x oraz niewymiernej y , które spełniają nierówność:
 a) $-\sqrt{5} < x < y < -2$ b) $0 < x < y < 1$ c) $8 < x < y < \sqrt{65}$
- Sprawdź (nie używając kalkulatora), czy prawdziwe są dane poniżej nierówności. Odpowiedź uzasadnij, powołując się na odpowiednie twierdzenia.
 a) $\frac{4}{1-\sqrt{2}} < \frac{3}{1-\sqrt{2}}$ b) $\frac{2}{3-\sqrt{5}} > \frac{1}{3-\sqrt{5}}$ c) $\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2} > \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2}$

Przedziały

Przedziały ograniczone

Definicja 1.

Przedziałem otwartym o końcach a, b ($a < b$) nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, które są większe od a i jednocześnie mniejsze od b .

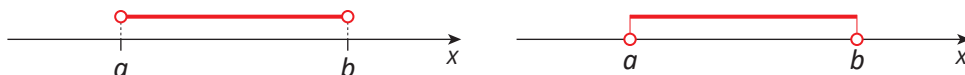
Przedział otwarty o końcach a, b zapisujemy (a, b) . Mamy:

$$x \in (a, b) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a < x < b$$

Na osi liczbowej przedział otwarty zaznaczamy następująco:



Końce a, b przedziału są oznaczone kółkami niezamalowanymi dla zaznaczenia, że nie należą one do przedziału (a, b) . Przedział (a, b) można też zaznaczać na osi tak:



W przedziale otwartym nie ma liczby największej ani najmniejszej.

Definicja 2.

Przedziałem domkniętym o końcach a, b ($a < b$) nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, które są nie mniejsze od a (czyli większe od a lub równe a) i jednocześnie nie większe od b (czyli mniejsze od b lub równe b).

Przedział domknięty o końcach a, b zapisujemy $\langle a, b \rangle$. Mamy:

$$x \in \langle a, b \rangle \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a \leq x \leq b$$

Na osi liczbowej przedział domknięty zaznaczamy tak:



W tym wypadku końce a, b oznaczone są kółkami zamalowanymi, by zaznaczyć, że należą one do przedziału. W przedziale $\langle a, b \rangle$ najmniejszą liczbą jest a , natomiast największą liczbą jest b . Wyróżniamy jeszcze:

$\langle a, b \rangle$ – przedział lewostronnie domknięty (nazywany też prawostronnie otwartym)



W przedziale tym najmniejszą liczbą jest a , nie ma za to liczby największej.

(a, b) – przedział lewostronnie otwarty (nazywany też prawostronnie domkniętym).



Z kolei w tym przedziale nie ma najmniejszej liczby, natomiast największą liczbą jest b . Omówione cztery rodzaje przedziałów należą do grupy przedziałów ograniczonych.

Przykład 1.

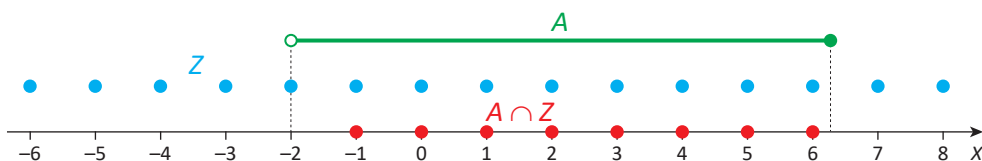
Wyznamy wszystkie liczby całkowite należące do przedziału $A = (-2, 2\pi)$.

Do przedziału $(-2, 2\pi)$ należą wszystkie liczby rzeczywiste, które są większe od -2 i jednocześnie nie większe od 2π . Ponieważ $2\pi \approx 6,28$, więc wśród liczb rzeczywistych należących do przedziału A znajdują się następujące liczby całkowite: $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Liczby wyznaczone w przykładzie 1. jednocześnie spełniają dwa warunki: należą do przedziału $(-2, 2\pi)$ i są całkowite, więc możemy zapisać

$$(-2, 2\pi) \cap \mathbb{Z} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

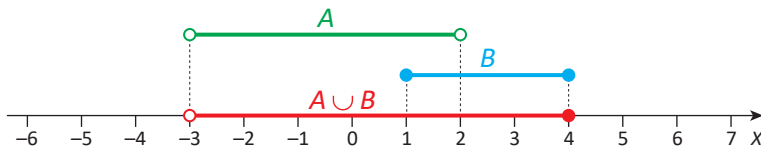
co ilustruje rysunek poniżej:



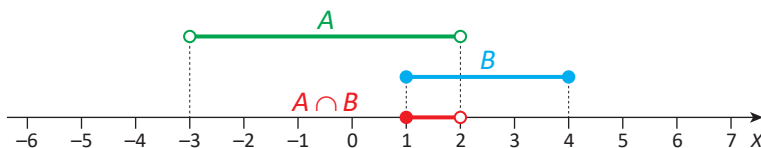
Przykład 2.

Dane są przedziały: $A = (-3, 2)$ i $B = \langle 1, 4 \rangle$. Wyznamy zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ i $B - A$.

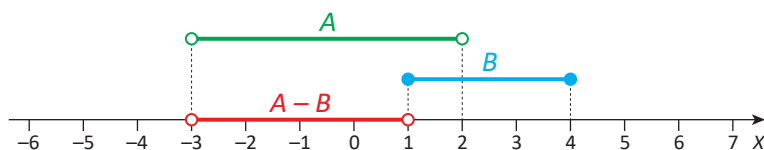
Zaznaczamy na jednej osi zbiory A i B .



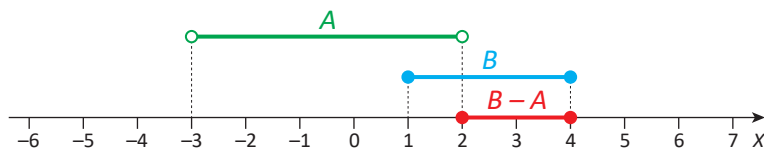
$$A \cup B = (-3, 4)$$



$$A \cap B = \langle 1, 2 \rangle \text{ Zauważ, że } 2 \notin A \cap B, \text{ ponieważ } 2 \notin A.$$



$A - B = (-3, 1)$ Zauważ, że $1 \notin A - B$, ponieważ $1 \in B$.



$B - A = [2, 4)$ Zauważ, że $2 \in B - A$, ponieważ $2 \in B$ i $2 \notin A$.

Przedziały nieograniczone

Definicja 3.

Przedziałem lewostronnie otwartym nieograniczonym nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych większych od a .

Przedział lewostronnie otwarty nieograniczony oznaczamy $(a, +\infty)$. Zapisujemy:

$x \in (a, +\infty)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x > a$

Przedział ten zaznaczamy na osi liczbowej tak:



Podobnie definiuje się następujące przedziały nieograniczone:

$\langle a, +\infty)$ – przedział lewostronnie domknięty nieograniczony



$(-\infty, a)$ – przedział prawostronnie otwarty nieograniczony



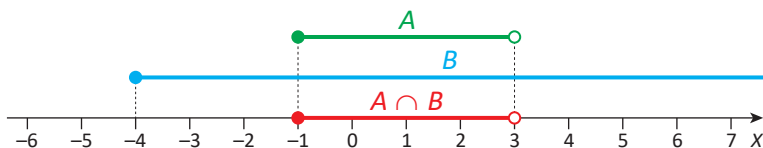
$(-\infty, a]$ – przedział prawostronnie domknięty nieograniczony



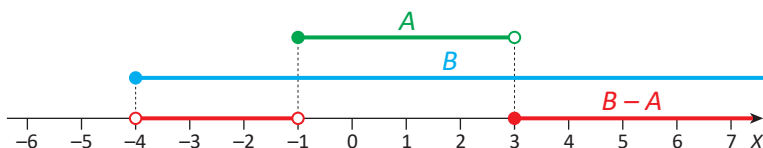
UWAGA: Symbol $+\infty$ (plus nieskończoność) nie oznacza żadnej liczby rzeczywistej. Wskazuje, że np. w przedziale $(a, +\infty)$ znajdują się tylko liczby rzeczywiste większe od a . Odpowiednio symbol $-\infty$ (minus nieskończoność) nie oznacza żadnej liczby rzeczywistej. Wskazuje, że np. w przedziale $(-\infty, a)$ znajdują się tylko liczby rzeczywiste mniejsze od a . Przedział nieograniczony $(-\infty, +\infty)$ będziemy rozumieli jako zbiór wszystkich liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$.

Przykład 3.

Dane są przedziały: $A = (-1, 3)$ i $B = (-4, +\infty)$ zawarte w przestrzeni $\mathbf{R}$. Wyznamy zbiory: $A \cap B$, $B - A$ i A' .



$A \cap B = A$, bo zbiór A jest podzbiorem zbioru B .



$B - A = (-4, -1) \cup (3, +\infty)$.



$A' = (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Zaznacz na osobnych osiach liczbowych i zapisz za pomocą przedziałów zbiory A, B, C, D, E, F , jeśli:

$$A = \{x: x \in \mathbf{R} \text{ i } -1 \leq x \leq 4\} \quad B = \{x: x \in \mathbf{R} \text{ i } 0 < x < 3\} \quad C = \{x: x \in \mathbf{R} \text{ i } x > 2\}$$

$$D = \{x: x \in \mathbf{R} \text{ i } -5 < x \leq 1\} \quad E = \{x: x \in \mathbf{R} \text{ i } 7 \leq x < 20\} \quad F = \{x: x \in \mathbf{R} \text{ i } x \leq 6\}.$$

2. Podaj przykład:

- a) trzech liczb niewymiernych, należących do przedziału $(2, 4)$;
b) czterech liczb wymiernych, należących do przedziału $\langle \sqrt{2}, \sqrt{3} \rangle$.

3. Podaj przykład liczby należącej do danego przedziału i jednocześnie takiej, aby liczba przeciwna do niej też należała do tego przedziału:

a) $\left(-3, \frac{1}{2}\right)$

b) $\left(-\frac{1}{6}, 1\frac{1}{3}\right)$.

4. Podaj przykład liczby należącej do danego przedziału i jednocześnie takiej, aby jej odwrotność też należała do tego przedziału:

a) $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$

b) $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

5. Zaznacz na osi liczbowej przedziały A i B ; następnie wyznacz zbiór $A \cup B$, jeśli:

a) $A = (-4, 3)$, $B = \langle 0, 5 \rangle$

b) $A = (-\infty, 1)$, $B = \langle 5, +\infty \rangle$

c) $A = (-\infty, 4)$, $B = (-\infty, 6)$

d) $A = \langle -1, 8 \rangle$, $B = (8, +\infty)$

e) $A = \langle -3, 3 \rangle$, $B = \left(-\pi, 4\frac{1}{2}\right)$

f) $A = \left(-2\frac{1}{3}, 2\right)$, $B = \langle \sqrt{2}, 7 \rangle$.

6. Zaznacz na osi liczbowej przedziały A i B ; następnie wyznacz zbiór $A \cap B$, jeśli:

a) $A = (-3, 5)$, $B = \langle -2, 9 \rangle$

b) $A = (-\infty, 2\pi)$, $B = \langle -1, +\infty \rangle$

c) $A = (-\infty, 2)$, $B = (-\infty, 6)$

d) $A = \langle -3, 7 \rangle$, $B = \langle 7, +\infty \rangle$

e) $A = (-6, 4)$, $B = (1, 4)$

f) $A = (0, 4)$, $B = \langle 5, 8 \rangle$.

7. Zaznacz na osi liczbowej przedziały A i B ; następnie wyznacz zbiory $A - B$ oraz $B - A$, jeśli:

a) $A = (0, 5)$, $B = \langle 3, 7 \rangle$

b) $A = (-3, +\infty)$, $B = \langle -2, 4 \rangle$

c) $A = (-\infty, 2)$, $B = (-2, 2)$

d) $A = \langle -1, 9 \rangle$, $B = \langle 7, +\infty \rangle$

e) $A = (-5, 8)$, $B = \langle 0, 3 \rangle$

f) $A = (-6, 4)$, $B = (-\infty, 4)$.

8. Dany jest przedział P , $P = \langle -2, 5 \rangle$. Podaj przykład dwóch przedziałów A i B :

a) ograniczonych, dla których $A \cap B = P$;

b) nieograniczonych, dla których $A \cap B = P$;

c) nieograniczonego A i ograniczonego B , dla których $B - A = P$;

d) nieograniczonych, dla których $A - B = P$.

9. Podaj elementy zbioru:

a) $(-3, 5) \cap \mathbf{N}$

b) $\langle -2, 3 \rangle \cap \mathbf{Z}$

c) $(4, +\infty) \cap \mathbf{N}$

d) $(-\infty, 2) \cap \mathbf{Z}$

e) $\mathbf{N}_+ \cap \langle -1, 6 \rangle$

f) $\mathbf{Z}_- \cap \langle -1, +\infty \rangle$.

10. Zapisz różnicę zbiorów jako sumę przedziałów:

a) $(-3, 0) - \{-1\}$

b) $(2, +\infty) - \{\sqrt{2}, \sqrt{5}\}$

c) $\mathbf{R} - \{2\}$

d) $\mathbf{R} - \{0, 1\}$

e) $\mathbf{R}_+ - \langle 4, 5 \rangle$

f) $(-\infty, 2) - \mathbf{N}$.

11. Dany jest zbiór A w przestrzeni $\mathbf{R}$. Zapisz zbiór A' , jeśli:

a) $A = \langle -3, +\infty \rangle$

b) $A = (-\infty, 7)$

c) $A = \mathbf{R}_+$.

12. Dany jest zbiór A w przestrzeni $\mathbf{R}$. Zapisz za pomocą sumy przedziałów dopełnienie zbioru A , jeśli:

a) $A = (-4, 5)$

b) $A = \langle -2, 3 \rangle$

c) $A = \langle \sqrt{3}, \pi \rangle \cup (5, +\infty)$.

Zbiór liczb naturalnych i zbiór liczb całkowitych

Zbiór liczb naturalnych

Przypomnijmy: zbiór liczb naturalnych to zbiór $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$. Najmniejszą liczbą naturalną jest 0, a kolejne liczby naturalne różnią się o jeden.

Jeżeli w wyniku podzielenia liczby naturalnej n przez liczbę naturalną m różną od zera otrzymamy liczbę naturalną, wówczas mówimy, że liczba n jest podzielna przez m .

Definicja 1.

Liczba naturalna n jest podzielna przez liczbę naturalną m różną od zera wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba naturalna k , dla której $n = m \cdot k$. Liczbę m nazywamy **dzielnikiem** liczby n , zaś o liczbie n mówimy wówczas, że jest **wielokrotnością** liczby m .

Przykład 1.

Liczby n , $n + 1$, $n + 2$ są to kolejne liczby naturalne, z których najmniejszą jest liczba n . Wyznamy sumę tych liczb:

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$$

Widzimy, że sumę trzech kolejnych liczb naturalnych można przedstawić w postaci iloczynu liczby 3 i liczby naturalnej $n + 1$, a to znaczy, że taka suma jest podzielna przez 3, dla dowolnej liczby naturalnej n .

Przykład 2.

Zbiór liczb naturalnych podzielnych przez 5

$$\{0, 5, 10, 15, 20, 25, \dots\}$$

jest nazywany zbiorem naturalnych wielokrotności liczby 5. Można go opisać następująco:

$$\{n: n = 5k \text{ i } k \in \mathbf{N}\}$$

Definicja 2.

Liczbą pierwszą nazywamy każdą liczbę naturalną n większą od 1, której jedynymi dzielnikami są 1 oraz n .

Liczbą złożoną nazywamy każdą liczbę naturalną n większą od 1, która nie jest liczbą pierwszą.

Liczby 0 oraz 1 nie są ani liczbami pierwszymi, ani liczbami złożonymi.

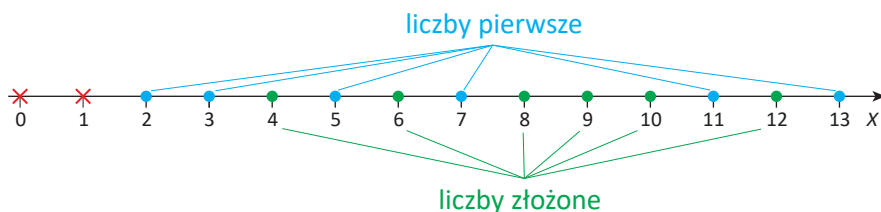
Najmniejszą liczbą pierwszą jest liczba 2. Liczbami pierwszymi są też:

3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ...

Liczbę złożone to:

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, ...

Poniższy rysunek ilustruje tę sytuację:



Liczbę złożoną można rozłożyć na czynniki pierwsze, tzn. przedstawić ją w postaci iloczynu liczb pierwszych. Przedstawienie to nazywamy **rozkładem liczby na czynniki pierwsze**, na przykład, $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Okazuje się, że jest tylko jeden rozkład danej liczby na czynniki pierwsze. Czynniki pierwsze tego rozkładu mogą być zapisane w dowolnej kolejności.

Przykład 3.

Dzielnikami naturalnymi liczby 24 są: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

Bardzo przydatna w rachunkach jest znajomość cech podzielności liczb naturalnych. Przedstawiamy je w tabeli poniżej.

liczba k	cecha podzielności przez liczbę k
2	cyfrą jednoścí liczby naturalnej jest 0, 2, 4, 6, 8
3	suma cyfr liczby naturalnej jest podzielna przez 3
4	dwie ostatnie cyfry liczby naturalnej są zerami lub tworzą liczbę podzielną przez 4
5	cyfrą jednoścí liczby naturalnej jest 0 lub 5
6	liczba naturalna jest podzielna jednocześnie przez 2 i przez 3
8	trzy ostatnie cyfry liczby naturalnej są zerami lub tworzą liczbę podzielną przez 8
9	suma cyfr liczby naturalnej jest podzielna przez 9
10	cyfrą jednoścí liczby naturalnej jest 0

Przykład 4.

a) Liczba 2 375 148:

- jest podzielna przez 3, bo suma jej cyfr wynosi 30, a 30 jest liczbą podzielną przez 3,
- jest podzielna przez 2, bo jej cyfrą jedności jest 8,
- jest podzielna przez 4, bo jej dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę 48, która jest podzielna przez 4,
- jest podzielna przez 12, bo jest podzielna przez 4 i przez 3.

b) Liczba 12 460:

- jest podzielna przez 2, bo jej cyfrą jedności jest 0,
- jest podzielna przez 5, bo jej cyfrą jedności jest 0,
- jest podzielna przez 10, bo jest podzielna przez 2 i przez 5,
- jest podzielna przez 4, bo jej dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę 60, która jest podzielna przez 4,
- jest podzielna przez 20, bo jest podzielna przez 4 i przez 5.

Ważną umiejętnością jest znajdowanie największego wspólnego dzielnika oraz najmniejszej wspólnej wielokrotności liczb naturalnych.

Definicja 3.

1) Dane są liczby naturalne a, b , z których co najmniej jedna jest różna od zera.

Największym wspólnym dzielnikiem liczb a, b nazywamy największą liczbę naturalną, która jest dzielnikiem każdej z liczb a, b ; oznaczamy ją $NWD(a, b)$.

2) Dane są liczby naturalne a, b , obie różne od zera.

Najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb a, b nazywamy najmniejszą liczbę naturalną różną od zera, która jest podzielna przez a i przez b ; oznaczamy ją $NWW(a, b)$.

Przykład 5.

Znajdziemy $NWD(28, 96)$ i $NWW(28, 96)$.

Wyznaczamy rozkład liczb 28 i 96 na czynniki pierwsze i znajdujemy czynniki wspólne dla obu rozkładów:

$$28 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \qquad 96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

Iloczyn wspólnych czynników pierwszych obu liczb jest ich największym wspólnym dzielnikiem.

$$NWD(28, 96) = 2 \cdot 2 = 4$$

Aby wyznaczyć najmniejszą wspólną wielokrotność, mnożymy wszystkie czynniki pierwsze z rozkładu jednej z liczb (np. 28) i te czynniki pierwsze z rozkładu drugiej liczby (96), które nie występują w rozkładzie pierwszej lub występują mniejszą liczbę razy.

$$NWW(28, 96) = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 672$$

Zauważ, że $NWD(28, 96) \cdot NWW(28, 96) = 28 \cdot 96$. Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.

Dla dowolnych liczb naturalnych dodatnich a, b , prawdziwa jest równość

$$NWD(a, b) \cdot NWW(a, b) = a \cdot b$$

UWAGA: Jeśli liczba naturalna n jest podzielna przez liczby naturalne a oraz b , to jest też podzielna przez $NWW(a, b)$, na przykład: jeśli liczba n jest podzielna przez 8 i przez 12, to jest też podzielna przez $NWW(8, 12)$, czyli przez 24.

Przykład 6.

Zegar pokazuje godzinę 10^{00} . Którą godzinę będzie pokazywał za 246 godzin?

Zauważ, że w 246 godzinach mieści się 10 pełnych dób, bo $24 \cdot 10 = 240$. Zatem po upływie 240 godzin zegar znowu wskaże godzinę 10^{00} . Po upływie kolejnych 6 godzin na zegarze pojawi się godzina 16^{00} .

W przykładzie tym wykonaliśmy dzielenie z resztą.

$$246 = 24 \cdot 10 + 6$$

W wyniku podzielenia liczby 246 przez 24 otrzymaliśmy iloraz 10 i resztę 6.

Twierdzenie 2.

Dla liczb naturalnych n i m , $m \neq 0$ istnieje tylko jedna para liczb naturalnych q i r , dla której $n = m \cdot q + r$, gdzie $r < m$.

Liczbę q z twierdzenia 2. nazywa się **ilorazem**, a liczbę r – **resztą**.

Przykład 7.

Jakie reszty możemy otrzymać w wyniku podzielenia liczb naturalnych przez 5?

Reszta jest liczbą naturalną mniejszą od dzielnika. Zatem w wyniku podzielenia liczby naturalnej przez 5 możemy otrzymać następujące reszty:

$$0, 1, 2, 3, 4.$$

Przykład 8.

Podamy w postaci ogólnej liczbę, która w wyniku podzielenia przez 7 daje resztę 3.

Niech p będzie szukaną liczbą. Wówczas w wyniku podzielenia liczby p przez 7 otrzymujemy iloraz n ($n \in \mathbf{N}$) oraz resztę 3, czyli

$$p : 7 = n \text{ r. } 3, \quad \text{skąd}$$

$$p = 7 \cdot n + 3, \text{ gdzie } n \in \mathbf{N}$$

Podaj w postaci ogólnej liczbę, która w wyniku podzielenia przez 6 daje resztę 4.

Przykład 9.

Obliczmy, jaką resztę z dzielenia przez 4 daje suma trzech kolejnych liczb naturalnych niepodzielnych przez 4.

Trzy liczby, których dotyczy przykład, dają przy dzieleniu przez 4 reszty 1, 2 oraz 3. Można więc zapisać je następująco: $4n + 1$, $4n + 2$ i $4n + 3$, gdzie $n \in \mathbf{N}$. Obliczamy:

$$(4n + 1) + (4n + 2) + (4n + 3) = 12n + 6 = 4(3n + 1) + 2 = 4k + 2,$$

gdzie $n \in \mathbf{N}$ oraz $k = 3n + 1$

Liczba k jest pewną liczbą naturalną. Zatem reszta z dzielenia przez 4 sumy tych trzech liczb jest równa 2.

Zbiór liczb całkowitych

Przypomnijmy: zbiór liczb całkowitych to zbiór $\mathbf{Z}$, gdzie

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Zauważ, że zbiór liczb całkowitych to suma zbioru liczb naturalnych i zbioru liczb przeciwnych do liczb naturalnych

Definicja 4.

Liczba całkowita a jest podzielna przez liczbę całkowitą b różną od zera tylko wtedy, gdy istnieje liczba całkowita k , dla której $a = k \cdot b$. Mówimy wtedy, że liczba b jest dzielnikiem liczby a .

Przykład 10.

- Liczba 12 jest podzielna przez liczbę (-4) , bo istnieje liczba całkowita (-3) , dla której $12 = (-3) \cdot (-4)$
- Liczba (-540) jest podzielna przez liczbę 12, bo istnieje liczba całkowita (-45) , dla której $-540 = (-45) \cdot 12$

Wśród liczb całkowitych rozróżniamy liczby parzyste i nieparzyste.

Definicja 5.

Liczbę całkowitą nazywamy **liczbą parzystą** wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 2; w przeciwnym wypadku mówimy, że jest **liczbą nieparzystą**.

Liczby parzyste $\dots, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots$

Liczby nieparzyste $\dots, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$

Liczba całkowita parzysta p jest podzielna przez 2, zatem istnieje taka liczba całkowita k , dla której $p = 2k$. Liczbę całkowitą parzystą zapisujemy symbolicznie jako $2k$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.

Podobnie liczbę całkowitą:

- podzielną przez 5 zapisujemy jako $5k$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$,
- podzielną przez 2 i przez 3, czyli podzielną przez 6, jako $6k$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$,
- podzielna przez 4 i przez 3, czyli podzielna przez 12, jako $12k$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.

Przykład 11.

- a) Wśród kolejnych trzech liczb całkowitych: jedna jest podzielna przez 3 i co najmniej jedna jest parzysta.

Wniosek: Iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielny przez $3 \cdot 2$, czyli przez 6.

- b) Wśród czterech kolejnych liczb całkowitych: co najmniej jedna jest podzielna przez 3, dwie liczby są parzyste, wśród nich jedna jest podzielna przez 4.

Wniosek: Iloczyn czterech kolejnych liczb całkowitych jest podzielny przez $3 \cdot 2 \cdot 4$, czyli przez 24.

Wykaż, że iloczyn pięciu kolejnych liczb całkowitych jest podzielny przez 120.

Kolejne liczby całkowite różnią się o 1. Przed liczbą parzystą $2k$ oraz po tej liczbie występuje liczba nieparzysta. Zatem liczbę nieparzystą możemy zapisać symbolicznie w postaci $2k - 1$ lub $2k + 1$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Zauważ, że liczby $2k - 1$ oraz $2k + 1$ są kolejnymi liczbami nieparzystymi.

Przykład 12.

Sprawdźmy, czy suma dwóch kolejnych liczb całkowitych nieparzystych może być równa 254.

Oznaczmy kolejne liczby całkowite nieparzyste przez $2k - 1$ oraz $2k + 1$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Wówczas

$$(2k + 1) + (2k - 1) = 2k + 2k + 1 - 1 = 4k$$

Rozpatrywana suma przyjmuje postać $4k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, a zatem jest podzielna przez 4. Natomiast liczba 254 nie jest podzielna przez 4 ($254 = 4 \cdot 63 + 2$), więc nie jest sumą dwóch kolejnych liczb całkowitych nieparzystych.

W zbiorze liczb całkowitych można wykonywać dzielenie z resztą.

Twierdzenie 3. O dzieleniu z resztą

Dla liczb całkowitych a i b , $b \neq 0$ istnieje tylko jedna para liczb całkowitych q i r , dla której $a = b \cdot q + r$, gdzie $0 \leq r < |b|$.

Liczbę q z twierdzenia 3. nazywa się **ilorazem**, a liczbę r – **resztą**; symbol $|b|$ oznacza wartość bezwzględną liczby b .

Reszta z dzielenia liczb całkowitych jest równa 0 lub jest liczbą całkowitą dodatnią.

Przykład 13.

$$\begin{array}{ll} -13 : 5 = \textcolor{blue}{-3} \text{ r. } \textcolor{red}{2} & \text{bo } (-3) \cdot 5 + 2 = -13 \text{ i } 0 \leq 2 < 5 \\ 13 : (-5) = \textcolor{blue}{-2} \text{ r. } \textcolor{red}{3} & \text{bo } (-2) \cdot (-5) + 3 = 13 \text{ i } 0 \leq 3 < 5 \end{array}$$

Przykład 14.

W tabeli poniżej przedstawiono reszty z dzielenia liczb całkowitych od (-5) do 5 przez 2 , 3 i 4 .

liczba k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
reszta z dzielenia k przez 2	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
reszta z dzielenia k przez 3	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
reszta z dzielenia k przez 4	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1

Przykład 15.

Obliczymy resztę z dzielenia przez 4 liczby mającej postać $4n - 1$, gdzie $n \in \mathbf{Z}$.

Oczywiście ta reszta nie jest równa (-1) , ponieważ zgodnie z twierdzeniem 3. reszta z dzielenia wyraża się liczbą naturalną. Przekształćmy wyrażenie $4n - 1$.

$$4n - 1 = 4[(n - 1) + 1] - 1 = 4(n - 1) + 4 - 1 = 4(n - 1) + 3$$

Wyrażenie $(n - 1)$ oznacza liczbę całkowitą (bo $n \in \mathbf{Z}$), zatem $4(n - 1)$ oznacza liczbę całkowitą podzielną przez 4 , więc $4(n - 1) + 3$ oznacza liczbę całkowitą, która przy dzieleniu przez 4 daje resztę 3 .

Reszta z dzielenia przez 4 liczby mającej postać $4n - 1$, gdzie $n \in \mathbf{Z}$, jest równa 3 .

Sprawdź, czy rozumiesz

- Liczby a i b rozłóż na czynniki pierwsze. Następnie wyznacz $NWD(a, b)$ oraz $NWW(a, b)$.
 - $a = 294, b = 210$
 - $a = 312, b = 260$
 - $a = 158, b = 316$
 - $a = 648, b = 1620$
- Na podstawie odpowiednich cech podzielności liczb naturalnych podaj, które z podanych liczb $2, 3, 4, 5, 6, 8, 9$ są dzielnikami liczby:
 - 40 008
 - 556 812
 - 209 370
 - 45 000.
- Litera X oznacza w liczbie $8015X$ cyfrę jedności. Podaj, które cyfry można wpisać w miejsce X , aby liczba ta była podzielna:
 - przez 9
 - przez 5
 - przez 4
 - przez 3 i nie była podzielna przez 6
 - przez 8 .
- Liczba 425 jest podzielna przez 17 , zaś $n \in \mathbf{N}$. Oceń, czy podane poniżej liczby są również podzielne przez 17 :
 - $42\,500 + 17$
 - $425 + 50$
 - $17^2 + 3 \cdot 425$
 - $4250 - 34 \cdot 25$
 - $425 - 17n$
 - $170n - 850$.
- Liczby x i y są liczbami pierwszymi większymi od 2 . Jaką liczbą: pierwszą czy złożoną, jest liczba $x \cdot y$ oraz liczba $x + y$?

6. Wypisz wszystkie liczby całkowite nie mniejsze niż (-7) i jednocześnie nie większe niż 10. Ile jest wśród nich liczb:
- a) naturalnych b) pierwszych c) złożonych
d) parzystych e) nieparzystych f) podzielnych przez 3?
7. Wypisz elementy zbioru:
- a) $A = \{x: x = 7k \text{ i } k \in \mathbf{Z}\}$ b) $B = \{x: x = 4n \text{ i } n \in \mathbf{N}\}$
c) $C = \{x: x = 2n + 1 \text{ i } n \in \mathbf{N} \text{ i } n \leq 5\}$ d) $D = \{x: x = 3k + 2 \text{ i } k \in \mathbf{Z} \text{ i } -4 \leq k \leq 1\}$
e) $E = \{x: x = 4k + 3 \text{ i } k \in \mathbf{Z} \cap (-5, 0)\}$ f) $F = \{x: x = 5k + 2 \text{ i } k \in \mathbf{Z}\}$.
8. Zapisz:
- a) trzy kolejne liczby naturalne, z których największą jest liczba n ;
b) trzy kolejne liczby parzyste, z których najmniejszą jest $2k$;
c) trzy kolejne liczby nieparzyste, z których największą jest $2k + 1$;
d) w postaci ogólnej liczbę naturalną, która w wyniku dzielenia przez 6 daje resztę 5;
e) w postaci ogólnej liczbę całkowitą, która w wyniku dzielenia przez 5 daje resztę 3;
f) w postaci ogólnej dwie kolejne liczby naturalne, które w wyniku dzielenia przez 3 dają resztę 1.
9. Liczba k jest całkowita. Podaj resztę z dzielenia liczby a przez liczbę b , jeśli:
- a) $a = 5k + 7$, $b = 5$ b) $a = 4k - 2$, $b = 4$ c) $a = 8k - 2$, $b = 8$
d) $a = 6k + 4$, $b = 3$ e) $a = 10k + 9$, $b = 5$ f) $a = 12k - 7$, $b = 3$.
10. Ile jest równa reszta z podzielenia przez 6 sumy trzech kolejnych liczb całkowitych:
- a) nieparzystych b) parzystych c) niepodzielnych przez 4?
11. Czy suma czterech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 4? Odpowiedź uzasadnij.
12. Czy suma czterech kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 8? Odpowiedź uzasadnij.
13. Liczba naturalna a w wyniku podzielenia przez 5 daje resztę 3, zaś liczba naturalna b w wyniku podzielenia przez 5 daje resztę 4. Jaką resztę otrzymamy w wyniku podzielenia przez 5 liczby:
- a) $2a$ b) $3b$ c) $a + b$ d) $a - b$ e) $3b - 2a$ f) $2a - 3b$?
14. Dane są dwie kolejne liczby całkowite a i b , gdzie $a < b$. Liczba a w wyniku podzielenia przez 4 daje resztę 2. Wyznacz resztę z podzielenia liczby $5(a + b)$:
- a) przez 40 b) przez 20 c) przez 8 d) przez 4.
15. Wyznacz wszystkie naturalne liczby n , dla których:
- a) liczba $\frac{8}{n+1}$ jest naturalna b) liczba $\frac{-5}{2n+1}$ jest całkowita.

Przypomnienie i uzupełnienie wiadomości o równaniach

Dwa wyrażenia, z których co najmniej jedno zawiera literę x , połączone znakiem $=$, tworzą równanie z jedną niewiadomą x .

Dziedziną równania z jedną niewiadomą nazywamy zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych, dla których wyrażenia tworzące równanie mają sens liczbowy.

Przykład 1.

Wyznamy dziedziny przykładowych równań z jedną niewiadomą:

a) Dziedziną równania $2x - 3 = 8$, z niewiadomą x , jest zbiór liczb rzeczywistych. Odejmowanie i mnożenie są działaniami wykonalnymi w całym zbiorze $\mathbf{R}$.

b) Dziedziną równania $\frac{a}{a+2} = 5$, z niewiadomą a , jest zbiór $\mathbf{R} - \{-2\}$.

Ułamek $\frac{a}{a+2}$ ma sens liczbowy dla wszystkich liczb rzeczywistych, z wyjątkiem liczby -2 , dla której mianownik ułamka przyjmuje wartość 0 .

c) Dziedziną równania $\sqrt{z} = z + 3$, z niewiadomą z , jest zbiór $\langle 0, +\infty \rangle$. Pierwiastek kwadratowy można obliczyć tylko z liczb nieujemnych, czyli wyrażenie $\sqrt{z}$ ma sens tylko dla takich liczb.

d) Dziedziną równania $\frac{4}{m-1} = \frac{1}{m}$ z niewiadomą m jest zbiór $\mathbf{R} - \{0, 1\}$.

Ułamek $\frac{4}{m-1}$ nie ma sensu liczbowego, jeśli $m = 1$. Natomiast ułamek $\frac{1}{m}$ nie ma sensu liczbowego, jeśli $m = 0$. Tak więc dziedzinę równania tworzą wszystkie liczby rzeczywiste różne od 0 i różne od 1 .

Liczba spełnia równanie z jedną niewiadomą, jeśli po podstawieniu tej liczby do równania w miejsce niewiadomej otrzymamy równość arytmetyczną prawdziwą.

Przykład 2.

Sprawdzimy, czy liczby -1 oraz -2 spełniają równanie $2 - x^3 = -3x$.

Po podstawieniu liczby -1 w miejsce x do lewej strony równania, a następnie do jego prawej strony, otrzymujemy odpowiednio:

$$L = 2 - (-1)^3 = 2 - (-1) = 3 \quad \text{oraz} \quad P = -3 \cdot (-1) = 3, \quad \text{więc} \quad L = P.$$

Jeśli $x = -1$, to obie strony równania mają taką samą wartość. To znaczy, że liczba -1 spełnia dane równanie. Jeśli w miejsce x wstawimy do obu stron równania liczbę -2 , to otrzymamy:

$$L = 10 \quad P = 6 \quad (\text{sprawdź!}).$$

Wówczas $L \neq P$, czyli liczba -2 nie spełnia równania $2 - x^3 = -3x$.

Definicja 1.

Rozwiązaniem równania z jedną niewiadomą nazywamy każdą liczbę rzeczywistą, należącą do dziedziny równania, która spełnia to równanie.

Definicja 2.

Rozwiązać równanie z jedną niewiadomą, to wyznaczyć zbiór wszystkich liczb spełniających dane równanie lub wykazać, że nie istnieją liczby spełniające to równanie.

Przykład 3.

Rozwiążemy równanie $\frac{8}{x-3} = 4$.

Najpierw wyznaczmy dziedzinę równania. Mianownik ułamka występujący po lewej stronie równania nie może być równy 0, czyli $x - 3 \neq 0$. Dziedziną równania jest zbiór $R - \{3\}$, co będziemy zapisywać w następujący sposób:

$$D = R - \{3\} \quad \text{albo} \quad x \in R - \{3\}.$$

Aby wyznaczyć rozwiązania danego równania, przeprowadzimy następujące rozumowanie.

Wiemy, że istnieje tylko jedna liczba rzeczywista, przez którą można podzielić liczbę 8, żeby otrzymać iloraz 4. Tą liczbą jest 2. Zatem wyrażenie $x - 3$ może przyjąć tylko jedną wartość równą 2. Zapisujemy $x - 3 = 2$. Jedyną liczbą spełniającą ostatnie równanie jest liczba 5. Liczba 5 należy do dziedziny wyjściowego równania. Spraw-

dzamy, czy 5 spełnia równanie $\frac{8}{x-3} = 4$. Mamy:

$$L = \frac{8}{5-3} = \frac{8}{2} = 4 \quad P = 4 \quad L = P.$$

Jedynym rozwiązaniem równania jest liczba 5.

Może się zdarzyć, że równanie ma więcej niż jedno rozwiązanie.

Przykład 4.

Rozwiążemy równania: a) $x(x+2) = 0$

b) $x^2 = 9$.

Ad a) Dziedziną równania jest zbiór liczb rzeczywistych, zapisujemy $D = \mathbf{R}$, ponieważ dodawanie i mnożenie jest wykonalne w zbiorze $\mathbf{R}$.

Iloczyn dwóch liczb jest równy 0 tylko wtedy, gdy co najmniej jedna z tych liczb jest równa 0. Zatem

$$x(x+2) = 0, \text{ czyli } x = 0 \text{ lub } x+2 = 0, \text{ skąd}$$

$$x = 0 \text{ lub } x = -2$$

Sprawdź, że liczby 0 oraz -2 spełniają równanie $x(x+2) = 0$.

Równanie $x(x+2) = 0$ ma dwa rozwiązania: 0 oraz -2 .

Wszystkie rozwiązania tego równania tworzą zbiór rozwiązań $\{-2, 0\}$. Informację o wszystkich rozwiązaniach możemy zapisać też tak: $x \in \{-2, 0\}$.

Ad b) $D = \mathbf{R}$. Istnieją dwie liczby, których kwadrat jest równy 9. Te liczby to 3 i -3 . Zatem zbiór rozwiązań równania $x^2 = 9$ jest dwuelementowy: $\{-3, 3\}$.

Definicja 3.

Równaniem tożsamościowym nazywamy równanie, które jest spełnione przez każdą liczbę należącą do dziedziny tego równania.

Przykład 5.

Pokażemy, że równanie $x^2 = x(x-1) + x$ jest równaniem tożsamościowym.

Dziedziną tego równania jest zbiór $\mathbf{R}$, czyli $D = \mathbf{R}$. Niech a oznacza dowolną liczbę rzeczywistą. Sprawdzamy, czy liczba a spełnia dane równanie.

$$L = a^2 \quad P = a(a-1) + a = a^2 - a + a = a^2 \quad \text{zatem} \quad L = P.$$

Równanie jest spełnione przez każdą liczbę rzeczywistą. To znaczy, że jest równaniem tożsamościowym. Zapisujemy krótko: $x \in \mathbf{R}$.

Aby pokazać, że równanie nie jest tożsamościowe, wystarczy znaleźć co najmniej jedną liczbę należącą do dziedziny równania, która nie spełnia tego równania.

Przykład 6.

Równanie $\sqrt{x^2} = x$ nie jest równaniem tożsamościowym.

Dziedziną równania jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$, bo $x^2 \geq 0$ dla każdej liczby $x \in \mathbf{R}$.

Jeśli np. $x = -1$, to $L = \sqrt{(-1)^2} = 1$, zaś $P = -1$, więc $L \neq P$.

Liczba -1 nie spełnia danego równania.

Definicja 4.

Równaniem sprzecznym nazywamy równanie, którego nie spełnia żadna liczba należąca do dziedziny równania.

Przykład 7.

Równaniami sprzecznymi są, na przykład, równania: $x^4 = -1$, $\sqrt{x} = -2$, $\frac{3}{x} = 0$ (spróbuj to uzasadnić).

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Podaj dziedzinę danego równania. Następnie sprawdź, czy liczby podane obok równania spełniają to równanie.

a) $4x^2 = 36$ $-3; 3$

b) $(x^2 - 3)(x - 5) = 0$ $-\sqrt{3}; \sqrt{3}; 5$

c) $\frac{4}{x-3} = x-3$ $5; 1$

d) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} = 1$ $\frac{11}{20} \quad \frac{-1}{4}; 0; \frac{1}{3}$

e) $\sqrt{4x} = x-3$ $1; 9$

f) $\sqrt{x} = x$ $0; 1; 4$

2. Dane jest równanie z niewiadomą x . Wyznacz wartość liczby a , dla której podana obok równania liczba jest jego rozwiązaniem.

a) $ax^2 = 20$; -2

b) $\sqrt{x+1} = 3a$; 35

c) $a + x = 3x - 10$; 1

d) $-x^2 - ax = x^3$; -3

e) $3x + a = (x+1)5x$; -2

f) $(2x - a^2)(x - 3) = 2$; 5

3. Rozwiąż równania. Pamiętaj o określeniu dziedziny równania.

a) $x^2 = 1$

b) $x^2 = -4$

c) $x^2 = 5$

d) $x^2 = 0$

e) $\sqrt{x} = 0$

f) $\sqrt{x} = -1$

4. Rozwiąż równania. Pamiętaj o określeniu dziedziny równania.

a) $\frac{6}{x} = 2$

b) $\frac{7}{x+2} = 1$

c) $\frac{5}{x-3} = -2,5$

5. Rozwiąż równania:

a) $x(x-3) = 0$

b) $(2x+8)(x-7) = 0$

c) $5(x+1)^2 = 0$

d) $2(x-10)^2 = 0$

e) $-3x^2 = 0$

f) $x^2(4x-1) = 0$.

6. Podaj przykład równania, którego dziedziną jest zbiór $\mathbf{R}$, a zbiorem rozwiązań jest zbiór A , jeśli:

a) $A = \{3\}$

b) $A = \{-1, 2\}$

c) $A = \{4, 5, 6\}$

d) $A = \emptyset$

e) $A = \mathbf{R}$

f) $A = \{0, 7, -7\}$.

7. Czy dane równanie jest tożsamościowe? Odpowiedź uzasadnij.

a) $-x(4-2x) = 2(x^2-2x)$

b) $x(x+3) - 5x = -2(x-0,5x^2)$

c) $\frac{10x+5x^2}{5} = x^2 + 2x$

d) $\frac{x-1}{2} = \frac{2}{x-1}$

- D** 8. Uzasadnij, że poniższe równania są sprzeczne:

a) $x^2 + 1 = x^2 - 1$

b) $2x(x-3) - 2x^2 = 5 - 6x$.

Rozwiązywanie równań metodą równań równoważnych

Często stosowaną metodą rozwiązywania równań jest metoda polegająca na równoważnym przekształcaniu równań. Polega ona na tym, że zastępujemy dane równanie prostszym równaniem, ale w taki sposób, aby dziedzina i zbiór rozwiązań równania przed przekształceniem i po przekształceniu były takie same.

Definicja 1.

Dwa równania określone w tej samej dziedzinie **są równoważne** wtedy i tylko wtedy, gdy mają takie same zbiory rozwiązań w tej dziedzinie.

Metodą polegającą na równoważnym przekształcaniu równań rozwiążemy następujące równanie:

$$5(x - 2) - 8x = 2 + x.$$

Należy pamiętać, że zawsze rozwiązanie równania należy do dziedziny równania. W naszym przypadku dziedziną równania jest zbiór liczb rzeczywistych, $D = \mathbf{R}$.

Twierdzenie 1.

Jeśli po jednej stronie lub po obu stronach równania wykonamy działania albo przeprowadzimy redukcję wyrazów podobnych, to otrzymamy równanie równoważne danemu.

Po pomnożeniu wyrażenia $(x - 2)$ przez 5 otrzymamy wyrażenie $5x - 10$:

$$5x - 10 - 8x = 2 + x.$$

Redukujemy wyrazy podobne po lewej stronie równania:

$$-3x - 10 = 2 + x.$$

Twierdzenie 2.

Jeżeli do obu stron równania dodamy lub od obu stron odejmiemy tę samą liczbę lub to samo wyrażenie, które nie zmienia dziedziny równania, to otrzymamy równanie równoważne danemu.

Zgodnie z twierdzeniem 2. możemy do obu stron równania dodać liczbę 10 oraz od obu stron równania odjąć wyrażenie x :

$$\begin{aligned} -3x - 10 &= 2 + x & / +10 - x \\ -3x - 10 + 10 - x &= 2 + x + 10 - x. \end{aligned}$$

Po zredukowaniu wyrazów podobnych otrzymujemy:

$$-4x = 12.$$

W ten sposób otrzymaliśmy równanie równoważne danemu, ale znacznie prostsze. Wyrażenie z niewiadomą x znajduje się tylko po jednej stronie tego równania, a po drugiej stronie mamy tylko liczbę rzeczywistą.

Twierdzenie 3.

Jeśli obie strony równania pomnożymy lub podzielimy przez tę samą liczbę różną od zera lub przez to samo wyrażenie, które nie zmienia dziedziny równania i którego wartość nie jest równa zero, to otrzymamy równanie równoważne danemu.

Dzielimy obie strony równania przez -4 :

$$\begin{aligned}-4x &= 12 \quad /: (-4) \\ x &= -3\end{aligned}$$

Jedyną liczbą spełniającą ostatnie równanie jest liczba -3 . Zatem -3 jest również jedynym rozwiązaniem wszystkich poprzednich równań.

Sprawdźmy, czy liczba (-3) rzeczywiście spełnia równanie

$$5(x - 2) - 8x = 2 + x.$$

$$L = 5 \cdot (-3 - 2) - 8 \cdot (-3) = -25 + 24 = -1 \quad P = 2 + (-3) = -1, \quad \text{więc}$$

$$L = P.$$

Jedynym rozwiązaniem równania $5(x - 2) - 8x = 2 + x$ jest liczba -3 .

UWAGA: Sprawdzenie wykonaliśmy po to, aby przekonać się, że rozwiązanie równania $x = -3$ jest również rozwiązaniem równania $5(x - 2) - 8x = 2 + x$.

Sprawdzenie robimy też czasem po to, żeby upewnić się, że rozwiązując równanie, nie popełniliśmy błędu rachunkowego. Ale tak naprawdę metoda równań równoważnych nie wymaga od nas sprawdzania, czy otrzymane liczby są rozwiązaniami danego równania.

UWAGA: Pamiętaj, że wartość wyrażenia, przez które mnożymy lub dzielimy obydwie strony równania, nigdy nie może być równa 0 (twierdzenie 3). Na przykład, nie można stron równania $x^2 = x$ podzielić przez x . Otrzymalibyśmy wówczas nowe równanie $x = 1$, którego jedynym rozwiązaniem jest liczba 1. Tymczasem równanie $x^2 = x$ spełniają dwie liczby: 0 oraz 1. Zatem równania $x^2 = x$ oraz $x = 1$ nie są równoważne w zbiorze $\mathbf{R}$.

Równania, które po przekształceniach równoważnych można sprowadzić do postaci $ax + b = 0$, gdzie a i b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi, zaś x jest niewiadomą, nazywamy **równaniami liniowymi**. Dziedziną równania liniowego jest zbiór $\mathbf{R}$. Zastanowimy się teraz, ile rozwiązań może mieć równanie liniowe.

Przykład 1.

Rozwiążemy równanie $2\left(\frac{x}{3}-1\right)=10-\frac{2}{3}x$.

Mamy

$$2\left(\frac{x}{3}-1\right)=10-\frac{2}{3}x \quad /: 2 \quad \text{stosujemy twierdzenie 3.}$$

$$\frac{x}{3}-1=5-\frac{1}{3}x \quad /+\frac{1}{3}x+1 \quad \text{stosujemy twierdzenie 2. i twierdzenie 1.}$$

$$\frac{2}{3}x=6 \quad / \cdot \frac{3}{2} \quad \text{stosujemy twierdzenie 3.}$$

$$x=9$$

Dane równanie liniowe ma tylko jedno rozwiązanie; tym rozwiązaniem jest liczba 9.

Przykład 2.

Rozwiążemy równanie $\sqrt{8}x+3=2(x\sqrt{2}+1)+1$.

Mamy

$$\sqrt{4 \cdot 2}x+3=2(x\sqrt{2}+1)+1 \quad \text{stosujemy twierdzenie 1.}$$

$$2\sqrt{2}x+3=2\sqrt{2}x+3$$

$$2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}x=3-3 \quad \text{stosujemy twierdzenie 2.}$$

$$0=0.$$

Rozwiązaniem ostatniego równania jest każda liczba rzeczywista; bo dla dowolnej liczby rzeczywistej a otrzymujemy:

$$L=0 \quad P=0 \quad \text{skąd} \quad L=P.$$

Dane równanie jest tożsamościowe i ma nieskończenie wiele rozwiązań. Zbiorem rozwiązań tego równania jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$.

Przykład 3.

Rozwiążemy równanie $\frac{x+2}{5}-\frac{x-1}{2}=1-0,3x$.

Mamy

$$\frac{x+2}{5}-\frac{x-1}{2}=1-0,3x \quad / \cdot 10 \quad \text{stosujemy twierdzenie 3.}$$

$$10 \cdot \frac{x+2}{5} - 10 \cdot \frac{x-1}{2} = 10 - 3x$$

stosujemy twierdzenie 1.

$$2 \cdot (x+2) - 5 \cdot (x-1) = 10 - 3x$$

$$2x + 4 - 5x + 5 = 10 - 3x$$

$$-3x + 9 = 10 - 3x \quad / + 3x - 9$$

$$0 = 1$$

stosujemy twierdzenie 2.

Po przekształceniach równoważnych otrzymaliśmy sprzeczność.

Zbiór rozwiązań równania $\frac{x+2}{5} - \frac{x-1}{2} = 1 - 0,3x$ jest zbiorem pustym.

Powyższe trzy przykłady pokazują, że równanie liniowe może mieć jedno rozwiązanie albo może być równaniem tożsamościowym i mieć nieskończenie wiele rozwiązań, albo może nie mieć rozwiązań. W dalszej części nauki matematyki przekonasz się, że innych możliwości nie ma.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Rozwiąż równania:

a) $3x - 4(x+1) = 8$

b) $3x = 2x$

c) $0,02x = 0,5x + 0,16$

d) $0,2x \cdot (x+11) = \frac{x^2}{5} - 33$

e) $\frac{2x}{3} + 1 = \frac{1}{6}(6+4x)$

f) $\frac{2}{9}(2+6x) - 2\frac{1}{2} = 1\frac{1}{3}x - \frac{5}{6}$

2. Rozwiąż równania:

a) $\frac{5x}{3} = \frac{2x+1}{6}$

b) $\frac{x-1}{4} = \frac{1-x}{2}$

c) $\frac{4x+3}{3} - 2(x+4) = \frac{2}{5}$

d) $5 - \frac{4-x}{4} = \frac{3+2,5x}{2}$

e) $\frac{x+3}{0,1} = 10 - \frac{5x+4}{0,4}$

f) $\frac{5x-11}{0,4} - (x-1) = \frac{11x-1}{1,2}$

3. Rozwiąż równania:

a) $\sqrt{3}(x+\sqrt{3}) = -3$

b) $x\sqrt{8} + \sqrt{2} = \sqrt{18} - \sqrt{2}x$

c) $2(\sqrt{5}x-4) = x\sqrt{80} + 2$

d) $\frac{2}{3}\left(x\sqrt{27} - 1\frac{2}{3}\right) = 2(\sqrt{3}x-1)$

e) $\sqrt{2}(x+5) + 2x = 2(x-\sqrt{18})$

f) $2(\sqrt{12}x-1) = -4(0,5-\sqrt{3}x)$

4. Sprawdź, czy podane równania są równoważne:

a) $x^2 = 4$ oraz $x - 2 = 0$

b) $2x - 14 = x$ oraz $x + 6 = 20$

c) $3x^2 = 3x$ oraz $2x = 2$

d) $x^4 = 1$ oraz $x + 1 = 0$

e) $x(x - 2) = 0$ oraz $2x - x^2 = 0$

f) $\sqrt{x} = x$ oraz $\sqrt{x} = 1$

5. (Zadanie Bhâskary* o pszczołach) Piąta część pszczelej gromadki usiadła na kwiatach magnolii, trzecia część tej gromadki – na kwiatach lotosu, potrojona różnica drugiej z tych liczb i pierwszej odleciała ku drzewom jaśminu. Jedna tylko pszczołka – zwabiona słodko pachnącym kwieciem koniczyzny – krążyła nad nim. Ile pszczół było w tej gromadce?

* Bhâskara (1114 – 1185) matematyk hinduski, autor dzieła poświęconego arytmetyce, *Lilavati* („czarująca”).

6. Dziadek rozdzielił orzechy między dwóch wnuków. Młodszemu dał $\frac{1}{3}$ wszystkich

orzechów i dołożył do nich jeszcze 3 orzechy. Starszemu wnukowi dał $\frac{1}{3}$

pozostałych orzechów i dołożył ostatnie 6 orzechów. Ile orzechów miał dziadek i jak je rozdzielił?

7. Wyznacz trzy kolejne liczby nieparzyste, których suma jest równa 231.

8. Czy istnieją cztery kolejne liczby naturalne, podzielne przez 3, których suma jest równa 780? Odpowiedź uzasadnij.

9. Suma czterech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 5 jest równa 150. Wyznacz te liczby.

10. Oblicz długość boku kwadratu, którego przekątna jest o 2 cm dłuższa od boku.

11. Oblicz długość boku trójkąta równobocznego, którego wysokość jest o 3 cm krótsza od boku.

12. Jeśli dwa równoległe boki kwadratu pozostawimy bez zmiany, a pozostałe dwa zmniejszymy o 1 cm, to otrzymamy prostokąt, którego pole będzie o 3 cm^2 mniejsze od pola danego kwadratu. Oblicz długość boku danego kwadratu.

13. Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny, którego przyprostokątne mają długość a . Jeżeli jedną przyprostokątną pozostawimy bez zmiany, a drugą zwiększymy o 10, to pole trójkąta zwiększy się o 20. Oblicz a .

14. Janek zazwyczaj wychodzi z domu rano o stałej porze i przychodzi do szkoły o godzinie 7⁴⁰. Dzisiaj wyszedł 5 minut wcześniej, ale szedł dwa razy wolniej i dotarł do szkoły o godzinie 7⁵⁰. O której godzinie Janek wyszedł dzisiaj z domu?

Nierówność z jedną niewiadomą. Rozwiązywanie nierówności metodą nierówności równoważnych

Dwa wyrażenia, z których co najmniej jedno zawiera literę x , połączone jednym ze znaków $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, tworzą nierówność z jedną niewiadomą x .

Poniżej znajdują się cztery przykładowe nierówności z niewiadomą x :

$$2 - x > 8 \qquad \frac{-3}{x-7} \leq x^2 \qquad 9x^2 + 5 < x^3 - 1 \qquad (x-1)(x+2) \geq 6$$

Dziedziną nierówności z jedną niewiadomą nazywamy zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych, dla których wyrażenia tworzące nierówność mają sens liczbowy.

Przykład 1.

- a) Dziedziną nierówności $3x + 6 > 2(x - 3)$ jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$.
- b) Dziedziną nierówności $\frac{4}{x+2} \leq 1$ jest zbiór $\mathbf{R} - \{-2\}$.
- c) Dziedziną nierówności $\sqrt{x} \geq \frac{1}{x-1}$ jest zbiór $(0, 1) \cup (1, +\infty)$, ponieważ wyrażenie $\sqrt{x}$ ma sens liczbowy tylko dla liczb dodatnich lub zera, a wyrażenie $\frac{1}{x-1}$ ma sens liczbowy dla liczb różnych od 1.

Liczba spełnia nierówność z jedną niewiadomą, jeśli po podstawieniu tej liczby do nierówności w miejsce niewiadomej otrzymamy nierówność arytmetyczną prawdziwą.

Przykład 2.

- a) Liczba 1 spełnia nierówność $x^2 - 2x < 3$, bo po podstawieniu jej w miejsce x otrzymamy nierówność arytmetyczną
- $$1^2 - 2 \cdot 1 < 3, \text{ czyli } -1 < 3,$$
- która jest prawdziwa.
- b) Liczba 4 nie spełnia nierówności $x^2 - 2x < 3$, bo po podstawieniu jej w miejsce x otrzymamy nierówność arytmetyczną
- $$4^2 - 2 \cdot 4 < 3, \text{ czyli } 8 < 3,$$
- która jest fałszywa.

Definicja 1.

Rozwiązaniem nierówności z jedną niewiadomą nazywamy każdą liczbę rzeczywistą, należącą do dziedziny nierówności, która spełnia tę nierówność.

Definicja 2.

Rozwiązać nierówność z jedną niewiadomą, to wyznaczyć zbiór wszystkich liczb spełniających daną nierówność lub wykazać, że nie istnieją liczby spełniające tę nierówność.

Przykład 3.

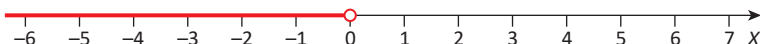
Wyznamy zbiór rozwiązań nierówności: a) $\frac{4}{x} < 0$ b) $x^2 > 0$.

Ad a) Dziedziną nierówności $\frac{4}{x} < 0$ jest zbiór $\mathbf{R} - \{0\}$. Licznik ułamka występującego

po lewej stronie nierówności jest liczbą dodatnią. Zatem ułamek $\frac{4}{x}$ jest liczbą

ujemną tylko wtedy, gdy mianownik jest ujemny, czyli $x < 0$. Nierówność $\frac{4}{x} < 0$

jest więc spełniona przez wszystkie liczby ujemne (i żadne inne). Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(-\infty, 0)$, który zaznaczamy na osi liczbowej:



$$\frac{4}{x} < 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x \in (-\infty, 0)$$

Ad b) Dziedziną nierówności $x^2 > 0$ jest zbiór $\mathbf{R}$. Z własności działań na liczbach rzeczywistych wiemy, że kwadrat dowolnej liczby dodatniej jest liczbą dodatnią. Podobnie kwadrat dowolnej liczby ujemnej jest dodatni. Tylko kwadrat liczby 0 nie jest liczbą dodatnią ($0^2 = 0$). Zatem zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 > 0$ jest zbiór $\mathbf{R} - \{0\}$. Możemy także zapisać: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.



$$x^2 > 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

Podobnie jak równania, nierówności często rozwiązujemy metodą polegającą na równoważnym przekształcaniu tych nierówności.

Definicja 3.

Dwie nierówności określone w tej samej dziedzinie są **równoważne** wtedy i tylko wtedy, gdy mają takie same zbiory rozwiązań w tej dziedzinie.

Nierównością liniową nazywamy nierówność, którą można zastąpić nierównością równoważną mającą postać:

$$ax + b < 0 \text{ albo } ax + b > 0 \quad \text{nierówności ostre}$$

$$ax + b \leq 0 \text{ albo } ax + b \geq 0 \quad \text{nierówności nieostre}$$

gdzie a i b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi, zaś x jest niewiadomą.

Podamy twierdzenia o równoważnym przekształcaniu nierówności, które następnie zastosujemy do rozwiązywania nierówności liniowych.

Poniższe twierdzenie jest związane z własnością nierówności arytmetycznej omówioną w twierdzeniu 2c) i 2d), str. 23.

Twierdzenie 1.

- Jeżeli obie strony nierówności pomnożymy lub podzielimy przez tę samą **liczbę dodatnią** lub przez to samo wyrażenie, które nie zmienia dziedziny nierówności i które przyjmuje tylko wartości dodatnie dla liczb z dziedziny, to otrzymamy nierówność równoważną danej.
- Jeżeli obie strony nierówności pomnożymy lub podzielimy przez tę samą **liczbę ujemną** lub przez to samo wyrażenie, które nie zmienia dziedziny nierówności i które przyjmuje tylko wartości ujemne dla liczb z dziedziny, oraz **zmienimy zwrot nierówności** na przeciwny, to otrzymamy nierówność równoważną danej.

Przykład 4.

Rozwiążemy nierówności liniowe: a) $2x \leq 10$ b) $-2x \leq 6$ c) $(3 - \pi)x > 3 - \pi$

Dziedziną nierówności jest zbiór $\mathbb{R}$.

Ad a) Zgodnie z twierdzeniem 1a) dzielimy obie strony nierówności $2x \leq 10$ przez 2:

$$2x \leq 10 \quad / : 2$$

$$x \leq 5$$

Otrzymaliśmy nierówność równoważną danej, której zbiorem rozwiązań jest przedział $(-\infty, 5]$. Jest to również zbiór rozwiązań nierówności $2x \leq 10$.



$$2x \leq 10 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x \in (-\infty, 5]$$

Ad b) Na podstawie twierdzenia 1b) dzielimy obie strony nierówności $-2x \leq 6$ przez liczbę -2 , **zmieniamy zwrot nierówności** na przeciwny i otrzymujemy $x \geq -3$. To znaczy, że zbiorem rozwiązań nierówności $-2x \leq 6$ jest przedział $[-3, +\infty)$.

$$-2x \leq 6 \quad / : (-2)$$

$$x \geq -3$$



$$-2x \leq 6 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x \in [-3, +\infty)$$

Ad c) Chcemy podzielić strony nierówności przez liczbę $(3 - \pi)$. Ale zauważ, że $(3 - \pi)$ jest **liczbą ujemną**! Na podstawie twierdzenia 1b) **zmieniamy zwrot nierówności** na przeciwny:

$$\begin{aligned}(3 - \pi)x &> 3 - \pi & / : (3 - \pi) \\ x &< 1\end{aligned}$$



$$(3 - \pi)x > 3 - \pi \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x \in (-\infty, 1)$$

Kolejne twierdzenie nawiązuje do twierdzenia 2a) i 2b), str. 23.

Twierdzenie 2.

Jeśli do obu stron nierówności dodamy lub od obu stron nierówności odejmiemy tę samą liczbę lub to samo wyrażenie, które nie zmienia dziedziny nierówności, to otrzymamy nierówność równoważną danej.

Przykład 5.

Rozwiążemy nierówność liniową $3 - x < 7$, której dziedziną jest zbiór $\mathbf{R}$.

Na podstawie twierdzenia 2. od obu stron nierówności odejmujemy liczbę 3:

$$\begin{aligned}3 - x &< 7 & / - 3 \\ 3 - x - 3 &< 7 - 3 \\ -x &< 4 & / : (-1) \quad \text{zmieniamy zwrot nierówności na przeciwny} \\ x &> -4\end{aligned}$$



Zbiorem rozwiązań nierówności $3 - x < 7$ jest przedział $(-4, +\infty)$.

Twierdzenie 3.

Jeśli po jednej stronie lub po obu stronach nierówności wykonamy działania albo przeprowadzimy redukcję wyrazów podobnych, to otrzymamy nierówność równoważną danej.

Przykład 6.

Rozwiążemy nierówność $6(x + 4)x + 13 > 2(3x^2 - 1) - 6x$, której dziedziną jest zbiór $\mathbf{R}$.

Zgodnie z twierdzeniem 3. porządkujemy strony nierówności:

$$\begin{aligned}6(x + 4)x + 13 &> 2(3x^2 - 1) - 6x \\ 6x^2 + 24x + 13 &> 6x^2 - 2 - 6x\end{aligned}$$

Na podstawie twierdzenia 2. od stron równania odejmujemy $6x^2$, odejmujemy liczbę 13 i dodajemy do stron równania $6x$:

$$6x^2 - 6x^2 + 24x + 6x + 13 - 13 > 6x^2 - 6x^2 - 6x + 6x - 2 - 13$$

Następnie na podstawie twierdzenia 3. redukujemy wyrazy podobne i otrzymujemy nierówność równoważną danej.

$$30x > -15 \quad / : 30$$

stosujemy twierdzenie 1a

$$x > -\frac{1}{2}$$



Zbiorem rozwiązań nierówności $6(x+4)x + 13 > 2(3x^2 - 1) - 6x$ jest przedział $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$.

Teraz omówimy przykłady nierówności tożsamościowych oraz nierówności sprzecznych.

Definicja 4.

Nierównością tożsamościową nazywamy nierówność, która jest spełniona przez każdą liczbę należącą do dziedziny tej nierówności.

Przykład 7.

Pokażemy, że nierówności: a) $x^2 \geq -3$ oraz b) $\frac{4x+3}{2} < 2(x+1)$ są tożsamościowe.

Dziedziną obydwu nierówności jest zbiór $\mathbf{R}$.

Ad a) Po podstawieniu do nierówności $x^2 \geq -3$ w miejsce x dowolnej liczby rzeczywistej otrzymamy po lewej stronie liczbę dodatnią lub równą 0, która jest większa od liczby -3 . Prawdziwa jest nierówność $L > P$, więc jest również prawdziwa nierówność $L \geq P$. Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 \geq -3$ jest zbiór $\mathbf{R}$.

Ad b) Rozwiązujemy nierówność liniową:

$$\frac{4x+3}{2} < 2(x+1) \quad / \cdot 2$$

$$4x+3 < 4(x+1)$$

$$4x+3 < 4x+4 \quad / -4x-3$$

$$0 < 1, \text{ czyli } 0 < 1$$

Otrzymaliśmy nierówność arytmetyczną prawdziwą, niezależnie od tego, jaką liczbę rzeczywistą podstawilibyśmy w miejsce x . Zbiorem rozwiązań nierówności jest zbiór $\mathbf{R}$.

Definicja 5.

Nierównością sprzeczną nazywamy nierówność, której nie spełnia żadna liczba należąca do dziedziny tej nierówności.

Przykład 8.

Pokażemy, że nierówności: a) $x^2 + 1 < 0$ oraz b) $2x + 3 - \frac{x-12}{5} > 1,8(x+3)$ są spreczne.

Dziedziną obydwu nierówności jest zbiór $\mathbf{R}$.

Ad a) Zauważamy, że wyrażenie po lewej stronie nierówności dla każdej liczby rzeczywistej przyjmuje wartość co najmniej równą 1 (kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest większy od 0 lub równy 0). Suma kwadratu i liczby 1 jest większa od 1 lub równa 1).

Nie istnieje liczba, która spełniałaby nierówność $x^2 + 1 < 0$.

Ad b) Rozwiązujemy nierówność:

$$2x + 3 - \frac{x-12}{5} > 1,8(x+3) \quad / \cdot 5 \quad \text{stosujemy twierdzenie 1a}$$

$$10x + 15 - (x - 12) > 9(x + 3) \quad \text{stosujemy twierdzenie 3.}$$

$$10x + 15 - x + 12 > 9x + 27$$

$$9x + 27 > 9x + 27 \quad / -9x \quad \text{stosujemy twierdzenie 2.}$$

$$27 > 27$$

Zastępując daną nierówność nierównościami równoważnymi, otrzymaliśmy nierówność arytmetyczną fałszywą. To znaczy, że żadna liczba rzeczywista nie spełnia danej nierówności.

Zbiór rozwiązań nierówności jest zbiorem pustym.

Przykład 9.

Rozwiążemy nierówność podwójną: $-x + 1 < 2(x + 3) \leq -4x + 15$.

Przypomnijmy: jeżeli a, b, c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, to

$a < b \leq c$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a < b$ i jednocześnie $b \leq c$.

Dziedziną nierówności podwójnej jest zbiór $\mathbf{R}$.

Aby wyznaczyć zbiór rozwiązań nierówności podwójnej $-x + 1 < 2(x + 3) \leq -4x + 15$, wystarczy rozwiązać dwie nierówności liniowe:

$$-x + 1 < 2(x + 3) \quad \text{oraz} \quad 2(x + 3) \leq -4x + 15,$$

a następnie znaleźć część wspólną zbiorów rozwiązań tych nierówności.

Rozwiązujemy pierwszą nierówność:

$$-x + 1 < 2(x + 3)$$

$$-x + 1 < 2x + 6 \quad / -2x - 1$$

$$-3x < 5 \quad / : (-3)$$

$$x > -1\frac{2}{3}$$



$$x \in \left(-1\frac{2}{3}, +\infty\right)$$

Rozwiązujemy drugą nierówność:

$$2(x + 3) \leq -4x + 15$$

$$2x + 6 \leq -4x + 15 \quad / + 4x - 6$$

$$6x \leq 9 \quad / : 6$$

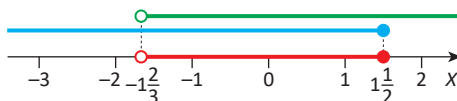
$$x \leq 1\frac{1}{2}$$



$$x \in \left(-\infty, 1\frac{1}{2}\right]$$

Zbiorem rozwiązań nierówności podwójnej jest część wspólna przedziałów:

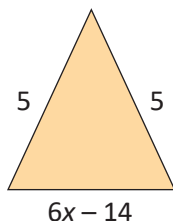
$$\left(-1\frac{2}{3}, +\infty\right) \text{ i } \left(-\infty, 1\frac{1}{2}\right]$$



Zbiorem rozwiązań nierówności podwójnej jest przedział $\left(-1\frac{2}{3}, 1\frac{1}{2}\right]$.

Przykład 10.

Liczby 5, 5, $6x - 14$ są długościami boków trójkąta równoramiennego. Do jakiego przedziału należy liczba x ?



Długości boków wyrażają się liczbami dodatnimi. Zatem

$$6x - 14 > 0$$

$$6x > 14 \quad / : 6$$

$$(1) \quad x > 2\frac{1}{3}$$

Ponadto w trójkącie suma długości dowolnych dwóch boków jest większa od długości boku trzeciego.

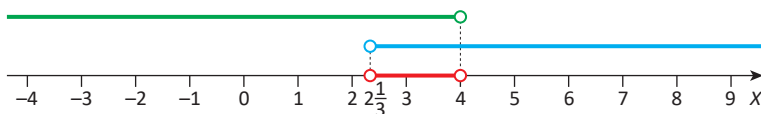
Rozpatrywany przez nas trójkąt jest trójkątem równoramiennym, w którym ramiona mają długość 5. W przypadku trójkąta równoramiennego wystarczy zapisać jedną nierówność: suma długości ramion jest większa od długości podstawy (dlaczego?)

$$5 + 5 > 6x - 14 \quad \text{skąd}$$

$$24 > 6x \quad / : 6$$

(2) $4 > x$

Teraz wyznaczamy część wspólną zbiorów rozwiązań nierówności (1) i (2).



$$x \in \left(2\frac{1}{3}, 4\right)$$

Liczba x należy do przedziału $\left(2\frac{1}{3}, 4\right)$.

Przykład 11.

Suma czterech kolejnych liczb niepodzielnych przez 5 jest mniejsza od 80. Wyznamy czwórkę największych takich liczb.

Cztery kolejne liczby niepodzielne przez 5 możemy zapisać tak:

$$5n + 1, 5n + 2, 5n + 3, 5n + 4, \text{ gdzie } n \in \mathbf{N}.$$

Rozwiązujemy nierówność:

$$(5n + 1) + (5n + 2) + (5n + 3) + (5n + 4) < 80$$

$$20n + 10 < 80 \quad \text{skąd} \quad 20n < 70 \quad / : 20$$

$$(*) \quad n < 3,5$$

Największą liczbą naturalną spełniającą nierówność (*) jest liczba 3. Wyznamy największe cztery liczby niepodzielne przez 5, których suma jest mniejsza od 80:

$$5 \cdot 3 + 1 = 16 \quad 5 \cdot 3 + 2 = 17 \quad 5 \cdot 3 + 3 = 18 \quad 5 \cdot 3 + 4 = 19$$

Szukane liczby to: 16, 17, 18, 19.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Sprawdź, czy liczby podane obok nierówności spełniają tę nierówność:

a) $x - 4 \geq 2(x - 1)$ $-2; 0$

b) $3(x - 1) \geq 6x - 5$ $5; -2$

c) $(x - 1)^2 < 5$ $3; \frac{1}{2}$

d) $(x - 3)(x - 1) \leq x^2 - \frac{3}{4}$ 20

2. Podaj przykłady trzech liczb, które spełniają daną nierówność:

a) $2x < x$

b) $x^2 < 1$

c) $\frac{1}{x} \geq 2$

d) $\frac{4}{2-x} \leq 0$

3. Rozwiąż nierówność i przedstaw zbiór rozwiązań na osi liczbowej:

a) $2x > 1$

b) $-3x \geq 12$

c) $-4x < -x$

d) $5 - x \leq 0$

e) $\frac{x}{-3} \leq 1$

f) $-2(1 + x) \geq 2$

g) $\frac{4x}{-5} > -3$

h) $\frac{-2x}{7} < -2x$

4. Rozwiąż nierówność i przedstaw zbiór rozwiązań na osi liczbowej:

a) $3(x - 7) \leq 7x + 3$

b) $2 - (4x - 1) > 3 + x$

c) $x - (1 - x) \leq 2x + 5$

d) $4x - x^2 \geq x(9 - x) + 2$

e) $x - 2(x + 4) > 3 - x$

f) $3 - 4x(1 - x) < 4x^2 + 5$

5. Rozwiąż nierówność:

a) $\frac{2-4x}{2} > -1$ b) $\frac{3x-1}{-1} \geq -3$ c) $\frac{3x+6}{-3} < \frac{x}{3}$ d) $\frac{-2x+9}{0,5} \leq \frac{-x}{0,1}$

6. Rozwiąż nierówność:

a) $x - \frac{2(x+1)}{3} \geq x-1$ b) $x - \frac{3(x-1)}{6} > 3x+3$

c) $\frac{5-4x}{3} + x > -2x + \frac{1}{4}$ d) $x - \frac{3(x+2)}{4} > 1+x$

e) $\frac{3}{4}x - \frac{4x+1}{2} \leq -x - \frac{3}{8}$ f) $\frac{2+x}{3} - \frac{3-x}{6} < 1$

7. Rozwiąż nierówność podwójną:

a) $5x \leq x+8 < 10+3x$

b) $5x < 4(x-5) + 2 \leq 7x$

c) $1-3x \leq -4x \leq 5+x$

d) $2(1-x) \leq -2(x-3) < 5(x-2) + 2$

e) $-3(1-2x) < 6x-2 < 2(3x+4)$

f) $\frac{x}{3} < 3-5x \leq 2 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)$

8. Rozwiąż nierówność:

a) $x - \sqrt{2}x < \sqrt{2} - 1$

b) $2x + \sqrt{5} \geq \sqrt{5}x + 2$

c) $4 - 2\sqrt{3} \geq 2x - x\sqrt{3}$

d) $4x + 1 > \pi x$

9. Liczby 1, 3, a są długościami boków trójkąta. Wyznacz liczbę a wiedząc, że jest to liczba naturalna.

10. Liczby $2x-2$, $x+1$, $2x+2$ są długościami boków trójkąta. Do jakiego przedziału należy liczba x ?

11. Iloczyn pewnej liczby pierwszej przez liczbę o 1 większą jest mniejszy od kwadratu tej liczby pierwszej powiększonego o 3. Jaka to liczba?

12. Iloraz pewnej liczby naturalnej x przez liczbę 3 pomniejszony o 2 jest nie większy od szóstej części różnicy liczb x i 10. Jaka to liczba? Podaj wszystkie możliwe rozwiązania.

13. Iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych nieparzystych jest nie mniejszy od kwadratu liczby większej i nie większy od sumy liczby 6 i kwadratu liczby większej. Wyznacz te liczby nieparzyste. Podaj wszystkie możliwe rozwiązania.

14. Wyznacz cztery kolejne liczby naturalne niepodzielne przez 5, jeżeli suma tych liczb jest większa od 50 i jednocześnie mniejsza od 80.

15. Jeżeli jeden bok kwadratu długości x pozostawimy bez zmiany, a drugi wydłużymy o 5, to pole powstałego prostokąta będzie większe od pola kwadratu co najwyżej o 15 i co najmniej o 6. Wyznacz wszystkie możliwe wartości x będące liczbami naturalnymi.

Procenty

Sprawne posługiwanie się procentami jest ważną umiejętnością w życiu człowieka.

1 procent (1%) pewnej wielkości to $\frac{1}{100}$ tej wielkości.

$p\%$ liczby a to $\frac{p}{100} \cdot a$

1% liczby 128 to $0,01 \cdot 128 = 1,28$

260% liczby 250 to $2,6 \cdot 250 = 650$

$33\frac{1}{3}\%$ liczby 321 to $\frac{1}{3} \cdot 321 = 107$.

Przykład 1.

W Polsce występuje ponad 600 gatunków kręgowców, w tym: 360 gatunków ptaków, 116 gatunków ryb, 98 gatunków ssaków, 18 gatunków płazów, 9 gatunków gadów (dane wg *Ilustrowanego atlasu Polski*).

- Jaki procent wszystkich gatunków kręgowców stanowią ssaki?
- O ile procent więcej jest w Polsce gatunków płazów niż gadów?
- O ile procent mniej jest w Polsce gatunków gadów niż płazów?
- Jakim procentem liczby gatunków ptaków jest liczba gatunków gadów?

Ad a) Obliczmy najpierw, ile jest w Polsce wszystkich gatunków kręgowców:

$$360 + 116 + 98 + 18 + 9 = 601 \text{ (gatunków)}$$

Następnie dzielimy liczbę gatunków ssaków przez liczbę wszystkich gatunków kręgowców. Otrzymany ułamek wyrażamy w procentach (mnożymy ułamek przez 100 i dopisujemy symbol %):

$$\frac{98}{601} \approx 0,163, \text{ czyli } 16,3\%$$

Liczba gatunków ssaków stanowi ok. 16,3% liczby gatunków kręgowców.

Ad b) Obliczamy, o ile gatunków więcej jest w Polsce płazów niż gadów. Otrzymany wynik dzielimy przez liczbę gatunków gadów; wynik wyrażamy w procentach:

$$\frac{18-9}{9} = 1, \text{ czyli } 100\%$$

W Polsce jest o 100% więcej gatunków płazów niż gadów. (Inaczej mówiąc: w Polsce jest dwa razy więcej gatunków płazów niż gadów.)

Ad c) Obliczamy, o ile gatunków mniej jest w Polsce gadów niż płazów. Otrzymany wynik dzielimy przez liczbę gatunków płazów; wynik wyrażamy w procentach:

$$\frac{18-9}{18} = 0,5, \text{ czyli } 50\%$$

W Polsce jest o 50% mniej gatunków gadów niż płazów. (Inaczej mówiąc: w Polsce liczba gatunków gadów jest o połowę mniejsza niż liczba gatunków płazów.)

Ad d) Dzielimy liczbę gatunków gadów przez liczbę gatunków ptaków; wynik wyrażamy w procentach:

$$\frac{9}{360} = 0,025, \text{ czyli } 2,5\%$$

W Polsce liczba gatunków gadów stanowi 2,5% liczby gatunków ptaków.

Przykład 2.

Cenę pewnego towaru podwyższono o 20%, a następnie nową cenę obniżono o 20%. Jakim procentem ceny początkowej była cena końcowa?

Niech x oznacza pierwotną cenę towaru.

Po podwyżce cena towaru wynosiła:

$$x + 0,2x = 1,2x$$

(100% początkowej ceny + 20% początkowej ceny = 120% początkowej ceny)

Po obniżce cena towaru wynosiła:

$$1,2x - 0,2 \cdot (1,2x) = 0,8 \cdot (1,2x)$$

(100% ceny po podwyżce – 20% ceny po podwyżce = 80% ceny po podwyżce)

$$0,8 \cdot (1,2x) = 0,96x$$

Cena końcowa towaru stanowiła 96% ceny początkowej.

Przykład 3.

Młody kierowca chciał ubezpieczyć swój pierwszy samochód. Agent ubezpieczeniowy naliczył dwie zwwyżki i jedną zniżkę od podstawowej stawki ubezpieczenia OC: 25% zwwyżki za młody wiek kierowcy, 15% zwwyżki za wiek samochodu powyżej 10 lat i 10% zniżki za jednorazową opłatę składki. O ile procent wzrosła stawka ubezpieczenia OC w stosunku do stawki podstawowej?

Niech x oznacza stawkę podstawową ubezpieczenia OC. Stawka rzeczywista (po dwóch zwwyżkach i jednej zniżce) wyniosła:

$$0,9 \cdot 1,15 \cdot 1,25x = 1,29375x$$

Stawka rzeczywista ubezpieczenia OC była wyższa od stawki podstawowej o ok. 29,4%.

Zauważ, że na końcowy wynik nie ma wpływu kolejność, w jakiej naliczane są zwwyżki i zniżki podstawowej stawki ubezpieczeniowej.

Przykład 4.

Cena towaru z 23-procentowym VAT-em wynosi 713,40 zł. Jaka byłaby cena tego towaru, gdyby VAT wyniósł 7%, zamiast 23%?

Niech x oznacza cenę towaru bez VAT-u. Wówczas cena towaru wraz z 23-procentowym VAT-em wynosi $1,23x$. Cena ta jest równa 713,40 zł. Otrzymujemy więc równanie:

$$1,23x = 713,4 \quad / : 1,23$$

$$x = 580 \text{ (zł)}$$

Cena towaru bez VAT-u wynosi 580 zł. Wraz z 7-procentowym VAT-em cena tego towaru byłaby równa:

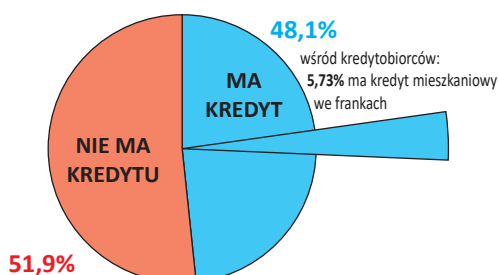
$$1,07 \cdot 580 = 620,6 \text{ (zł)}$$

Cena towaru z 7-procentowym VAT-em wyniosłaby 620,60 zł.

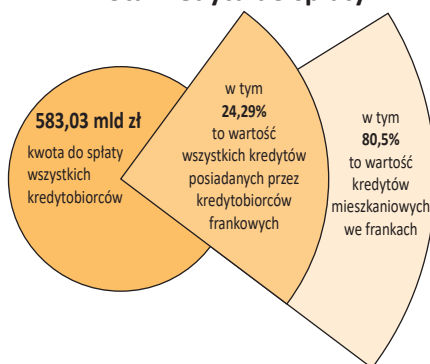
Przykład 5.

Diagramy poniżej przedstawiają wybrane informacje dotyczące kredytów posiadanych przez dorosłych Polaków (dane wg BIK z grudnia 2017 r.)

Ile procent dorosłych Polaków ma kredyt?



Kwota kredytu do spłaty



- Oblicz, jaki procent dorosłych Polaków ma kredyt mieszkaniowy we frankach szwajcarskich i ilu jest takich Polaków, jeśli przyjmiemy, że dorosłych Polaków jest 31,5 mln.
- Jaka jest wartość (w zł) kredytów mieszkaniowych zaciągniętych we frankach szwajcarskich?
- Wśród wszystkich kredytobiorców wartość kredytów konsumpcyjnych stanowi 26,09% całej kwoty do spłaty. Natomiast wśród kredytobiorców frankowych wartość kredytów konsumpcyjnych stanowi tylko 5,22% ich całkowitego zadłużenia. Oblicz, jaki procent zadłużenia stanowią kredyty konsumpcyjne w grupie kredytobiorców nie mających kredytów frankowych.

Ad a) Z pierwszego diagramu możemy odczytać, że spośród 48,1% Polaków mających kredyt 5,73% ma kredyt mieszkaniowy we frankach. Zatem

$$5,73\% \cdot 0,481, \text{ czyli ok. } 2,756\%$$

dorosłych Polaków ma kredyt we frankach. Polaków mających taki kredyt jest więc

$$2,756\% \cdot 31,5 \text{ mln, czyli ok. } 0,868 \text{ mln.}$$

Ad b) Z drugiego diagramu możemy odczytać, że 24,29% z całego zadłużenia Polaków (czyli z 583,03 mld zł), to zadłużenie kredytobiorców frankowych. Całkowite zadłużenie tych kredytobiorców jest więc równe

$$24,29\% \cdot 583,03 \text{ mld zł, czyli ok. } 141,6 \text{ mld zł.}$$

Z tej kwoty 80,5% to wartość kredytów mieszkaniowych we frankach. Stąd wartość kredytów mieszkaniowych we frankach jest równa

$$80,5\% \cdot 141,6 \text{ mld zł,} \quad \text{czyli} \quad \text{ok. 114 mld zł.}$$

Ad c) Wartość kredytów konsumpcyjnych wszystkich kredytobiorców jest równa

$$26,09\% \cdot 583,03 \text{ mld zł,} \quad \text{czyli} \quad \text{ok. 152,1 mld zł.}$$

Natomiast wartość kredytów konsumpcyjnych kredytobiorców frankowych wynosi

$$5,22\% \cdot 0,2429 \cdot 583,03 \text{ mld zł,} \quad \text{czyli} \quad \text{ok. 7,39 mld zł.}$$

Z tego wynika, że wartość kredytów konsumpcyjnych w grupie kredytobiorców nie mających kredytów frankowych jest równa

$$152,1 \text{ mld zł} - 7,39 \text{ mld zł,} \quad \text{czyli} \quad 144,71 \text{ mld zł,}$$

a całkowite zadłużenie w tej grupie kredytobiorców wynosi

$$583,03 \text{ mld zł} - 141,6 \text{ mld zł,} \quad \text{czyli} \quad 441,43 \text{ mld zł.}$$

Teraz możemy obliczyć jaki procent zadłużenia stanowią kredyty konsumpcyjne w grupie kredytobiorców nie mających kredytów frankowych:

$$\frac{144,71}{441,43} \cdot 100\% \approx 32,78\%$$

Przykład 6.

Pan Kowalski postanowił wpłacić do banku swoje oszczędności na rok. Bank A oferuje przy rocznej lokacie oprocentowanie 9% w stosunku rocznym z kapitalizacją co miesiąc. Bank B po roku dopisuje do stanu konta 9% odsetek. Który bank powinien wybrać pan Kowalski, by korzystniej ulokować swój kapitał?

Rozważmy propozycję banku A:

Oprocentowanie roczne wynosi 9% z kapitalizacją miesięczną, zatem po każdym miesiącu dolicza się do stanu konta $\frac{1}{12} \cdot 9\%$, czyli 0,75% odsetek. Załóżmy, że pan

Kowalski chce wpłacić do banku kwotę x zł.

Po 1. miesiącu stan jego konta wyniesie	$1,0075x$
Po 2. miesiącu stan jego konta wyniesie	$1,0075 \cdot (1,0075x) = 1,0075^2x$
Po 3. miesiącu stan jego konta wyniesie	$1,0075 \cdot (1,0075^2x) = 1,0075^3x$
(...)	
Po 12. miesiącu stan jego konta wyniesie	$1,0075^{12}x \approx 1,0938x$

Rozważmy propozycję banku B:

Bank B dopisuje do stanu konta 9% odsetek, zatem po roku oszczędzania na koncie pana Kowalskiego znalazłaby się kwota $1,09x$.

Okazuje się, że bank A proponuje korzystniejsze warunki oszczędzania. Przy wpłacie kwoty 10 000 zł na rok w banku A odsetki wyniosą 938 zł, natomiast w banku B – 900 zł.

Przykład 7.

Właściciel zakładu produkcyjnego zdecydował o przejściu z ośmiogodzinnego dnia pracy na siedmiogodzinny.

- O ile procent zmniejszy się wartość dziennej produkcji, jeśli pracownicy nie zwiększą wydajności pracy?
- O ile należałoby zwiększyć wydajność pracy, aby wartość dziennej produkcji nie uległa zmianie?

Niech a oznacza wartość dziennej produkcji w zakładzie w ciągu ośmiogodzinnego dnia pracy.

Ad a) Wówczas:

$\frac{a}{8}$ – wartość dziennej produkcji w ciągu 1 godziny (tzw. wydajność pracy)

$\frac{7a}{8}$ – wartość dziennej produkcji po przejściu na siedmiogodzinny dzień pracy, bez zmiany wydajności

$a - \frac{7a}{8} = \frac{a}{8}$ – o tyle zmniejszy się wartość dziennej produkcji po przejściu na siedmiogodzinny dzień pracy, bez zmiany wydajności

$$\frac{\frac{a}{8}}{a} \cdot 100\% = \frac{1}{8} \cdot 100\% = 12,5\%$$

O 12,5% procent zmniejszy się wartość dziennej produkcji, jeśli pracownicy nie zwiększą wydajności pracy.

Ad b) Oznaczmy dodatkowo przez x nową, zwiększoną wydajność, mającą gwarantować, że produkcja zakładu w ciągu siedmiogodzinnego dnia pracy nie zmniejszy się. Wówczas:

$$a = 7x \quad \text{wartość produkcji} = \text{liczba godzin} \cdot \text{wydajność}$$

$$x = \frac{a}{7}$$

Otrzymaliśmy, że wydajność pracy powinna się zwiększyć z $\frac{a}{8}$ do $\frac{a}{7}$, czyli o

$$\frac{\frac{a}{7} - \frac{a}{8}}{\frac{a}{8}} \cdot 100\% = \frac{a \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8} \right)}{\frac{a}{8}} \cdot 100\% = \frac{1}{7 \cdot 8} \cdot 100\% = \frac{1}{7} \cdot 100\% = 14\frac{2}{7}\%$$

Wydajność pracy należy podnieść o $14\frac{2}{7}\%$.

Sprawdź, czy rozumiesz

- Oblicz:
 - 12% liczby 35
 - 4,5% liczby 400
 - 0,85% liczby 2500.
- Wyznacz liczbę, której:
 - 325% jest równe 6,5
 - 0,2% jest równe 10
 - 47,5% jest równe 152.
- Jakim procentem:
 - liczby 218 jest liczba 141,7
 - liczby 25 jest liczba 170
 - liczby a jest liczba b ?
- Zasady płacenia podatku dochodowego od osób fizycznych w Polsce od stycznia 2018 roku podaje poniższa tabela, w której x oznacza roczny dochód podatnika, zaś p – podatek dochodowy.

x – dochód (w zł)	p – podatek dochodowy (w zł)
1 – 8 000	$p = 0$
8 001 – 13 000	$p = 18\% x - K_1^*$ $K_1 = 1440 - 883,98 \cdot (x - 8000) : 5000$
13 001 – 85 528	$p = 18\% \text{ dochodu} - 556,02$
85 529 – 127 000	$p = 15\,395,04 + 32\% (x - 85\,528) - K_2^*$ $K_2 = 556,02 - 556,02 \cdot (x - 85\,528) : 41\,472$
od 127 001	$p = 15\,395,04 + 32\% (x - 85\,528)$

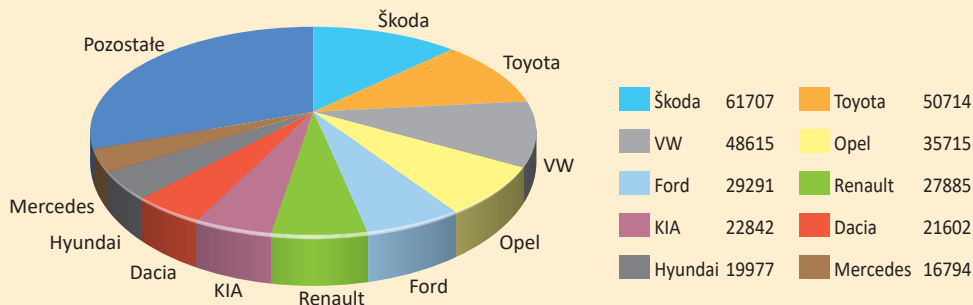
* K_1, K_2 – kwoty obniżające podatek

Oblicz wysokość podatku (w zaokrągleniu do 1 zł), jaki zapłaciłyby osoby (niekorzystające z żadnych ulg) o rocznych dochodach:

- 11 500 zł
 - 25 000 zł
 - 97 800 zł
 - 193 200 zł
 - 110 000 zł
 - 8800 zł.
- Ile procent całego dochodu stanowi podatek w każdym przypadku?
- Liczba a jest o 32% większa od liczby b . Wyznacz:
 - liczbę a , jeśli $b = 25$
 - liczbę b , jeśli $a = 310,2$.
 - Kasia i Monika zbierają płyty CD z ulubionymi nagraniami. Monika ma 34 płyty, a Kasia – 51 płyt. O ile procent więcej płyt ma Kasia niż Monika? O ile procent mniej płyt ma Monika niż Kasia?
 - Liczba a stanowi 20% liczby b .
 - O ile procent liczba a jest mniejsza od liczby b ?
 - O ile procent liczba b jest większa od liczby a ?
 - Lód ma o 10% większą objętość od wody, z której powstał. O ile procent objętość wody jest mniejsza od objętości lodu, z którego powstała?
 - W pewnej szkole sportowej 40% uczniów stanowią dziewczęta, 60% – chłopcy. 15% dziewcząt tej szkoły uczestniczy w zajęciach koszykówki, zaś 25% chłopców trenuje pływanie.
 - Jaki procent wszystkich uczniów stanowią dziewczęta trenujące koszykówkę, a jaki procent – chłopcy trenujący pływanie?
 - O ile procent mniej jest dziewcząt trenujących koszykówkę niż chłopców, trenujących pływanie?

10. W 2017 roku sprzedano w Polsce rekordową (do tej pory) liczbę nowych samochodów, równą 483 tysiące. Poniższy diagram ilustruje wyniki sprzedaży dziesięciu najlepiej sprzedających się marek oraz pozostałych aut.

Sprzedaż nowych samochodów w Polsce w 2017 r.



- Jaki procent sprzedaży nowych aut stanowią samochody marki skoda?
 - Jaki procent sprzedaży aut stanowią auta spoza pierwszej dziesiątki?
 - O ile procent więcej sprzedano nowych toyot niż nowych fordów?
 - O ile procent mniej sprzedano nowych aut z grupy od 6. do 10. miejsca niż aut z grupy od 1. do 5. miejsca?
- Wyniki podaj z dokładnością do 1 promila.
- Kilogram kawy ziarnistej wraz z 23% podatkiem VAT kosztuje 73,80 zł. Ile kosztowałyby ta kawa, gdyby podatek VAT wynosił 8%?
 - Sprzedaż owoców cytrusowych i bananów w 2018 roku była objęta 8-procentowym podatkiem VAT. O ile procent więcej kosztowałyby te owoce, gdyby podatek VAT wynosił 23%?
 - W ciągu jednego sezonu cena swetra została obniżona dwukrotnie: najpierw o 10%, a następnie o 20%. Oblicz, ile kosztuje sweter po obu obniżkach, jeżeli przed obniżkami kosztował:
 - 136 zł
 - a zł.
 - W ciągu roku pani Beata dwa razy otrzymała podwyżkę wynagrodzenia: najpierw o 20%, a po pół roku jeszcze o 5%. Oblicz, jakie było miesięczne wynagrodzenie pani Beaty przed podwyżkami, jeżeli po obu podwyżkach zarabia miesięczne
 - 4032 zł
 - z zł.
 - Cenę pewnego towaru obniżono najpierw o 20%, a po pewnym czasie podniesiono o 20%. Czy cena końcowa jest równa cenie początkowej? Odpowiedź uzasadnij, wykonując odpowiednie obliczenia.
 - Po dwukrotnej obniżce ceny, za każdym razem o ten sam procent, jego cena końcowa stanowi 49% ceny początkowej. O ile procent dokonywano każdorazowo obniżki ceny towaru?

- a) 15% b) 15 p.p.?

Ad a) Wzrost poparcia o 15% oznaczałby wzrost o 0,15. Zatem

$$1,15 \cdot 20\% = 23\%$$

Poparcie dla partii P byłoby równe 23%.

Ad b) Wzrost poparcia o 15 p.p. oznaczałby nominalny wzrost poparcia z 20% do 35%, bo

$$20 + 15 = 35$$

Poparcie dla partii P byłoby równe 35%.

Niewielkie zmiany bankowych stóp procentowych wyraża się też w punktach bazowych.

$$1 \text{ punkt bazowy} = \frac{1}{100} \text{ punktu procentowego.}$$

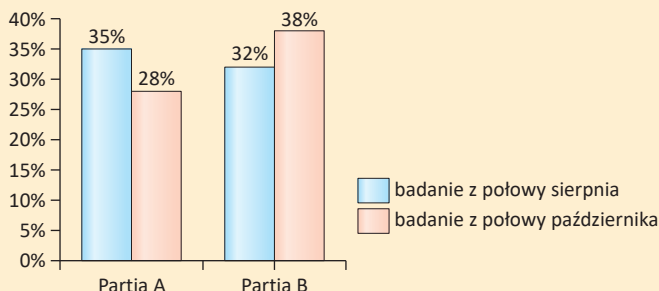
Przykład 2.

Bank obniżył oprocentowanie lokaty z 4% do 3,25%. Powiemy wówczas, że oprocentowanie lokaty obniżono o 75 punktów bazowych czyli o $\frac{3}{4}$ punktu procentowego.

Sprawdź, czy rozumiesz

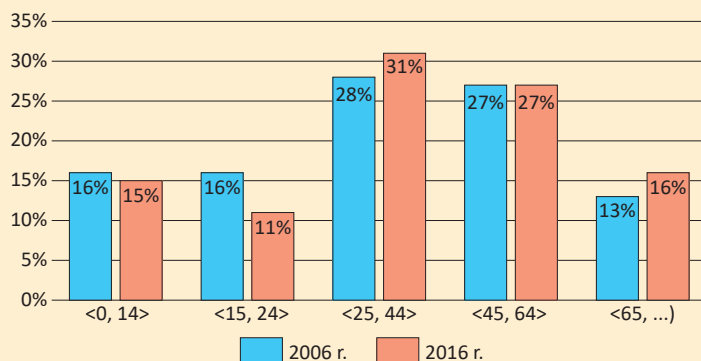
1. Stopa bezrobocia w grudniu 2017 roku wynosiła 6,60%, zaś w styczniu 2018 roku wzrosła o 30 punktów bazowych.
 - a) Ile wynosiła stopa bezrobocia w styczniu 2018 roku?
 - b) O ile procent wzrosła stopa bezrobocia?
2. Preferencje wyborcze, dotyczące dwóch partii, przedstawia poniższy wykres.

Poparcie dla partii A i partii B



Wyraż w procentach i w punktach procentowych zmianę poparcia dla partii A oraz zmianę poparcia dla partii B.

3. Bankowa stopa lombardowa (ustalana przez Radę Polityki Pieniężnej) została podwyższona z poziomu 6% do poziomu 6,25%.
- a) Przedstaw zmianę stopy lombardowej w punktach bazowych i w punktach procentowych.
- b) Przedstaw zmianę stopy lombardowej w procentach.
4. Rada Polityki Pieniężnej (RPP) obniżyła 9 października 2014 roku referencyjną stopę procentową NBP o 50 punktów bazowych do 2 procent, zaś stopę lombardową o 100 punktów bazowych do 3 procent. Natomiast 5 marca 2015 roku RPP obniżyła obydwie stopy procentowe o kolejne 50 punktów bazowych.
- a) Ile były równe stopy procentowe przed tymi dwiema zmianami, a ile po tych zmianach?
- b) O ile procent zmalały te stopy procentowe od 8 października 2014 roku do 6 marca 2015 roku?
5. Wykres poniżej przedstawia strukturę wieku w Polsce w latach 2006 i 2016 z udziałem procentowym poszczególnych grup wiekowych (w latach) w całej społeczności.

Struktura wieku Polaków w 2006 r. i w 2016 r.

Na podstawie danych GUS

- a) Które grupy wiekowe stanowiły mniejszy procent całego społeczeństwa w roku 2016 w porównaniu z 2006 rokiem i o ile punktów procentowych?
- b) Wyraż w punktach procentowych i w procentach zmianę wielkości od roku 2006 do roku 2016 dwóch grup: osób w wieku od 25 do 44 lat oraz osób w wieku 65 lat i więcej.
- c) O ile punktów procentowych i o ile procent więcej w 2016 roku stanowiły wszystkie osoby mające co najmniej 25 lat niż osoby mające mniej niż 25 lat?

Przybliżenia, błąd bezwzględny i błąd względny, szacowanie

Przybliżanie to znajdowanie liczby, która jest „bliska” innej liczbie. Jest ono zwykle obarczone pewnym błędem.

Poznamy teraz pojęcie błędu bezwzględnego oraz błędu względnego.

Przykład 1.

Podczas teleturnieju zapytano uczestników o szacunkową długość rzeki Warty. Odpowiedzi uczestników A, B, C oraz rzeczywistą długość Warty podaje poniższa tabela.

A	B	C	rzeczywista długość rzeki Warty
810 km	805 km	812 km	808,2 km

Uczestnicy A i C oszacowali długość Warty z nadmiarem, zaś uczestnik B podał jej przybliżoną długość z niedomiarem. Wszyscy popełnili błąd przybliżenia.

Definicja 1.

Błędem bezwzględnym przybliżenia nazywamy wartość bezwzględną różnicy między wartością rzeczywistą r (dokładną) a wartością przybliżoną p (szacunkową), czyli liczbę $|r - p|$.

Obliczymy, jaki błąd bezwzględny przybliżenia popełnili nasi uczestnicy:

Uczestnik A popełnił błąd przybliżenia równy

$$|808,2 - 810| = 1,8 \text{ (km)}$$

Uczestnik B popełnił błąd przybliżenia równy

$$|808,2 - 805| = 3,2 \text{ (km)}$$

Uczestnik C popełnił błąd przybliżenia równy

$$|808,2 - 812| = 3,8 \text{ (km)}$$

Zatem najmniejszy błąd bezwzględny popełnił uczestnik A.

Przykład 2.

Rodzice Wojtka zmierzili długość boków prostokątnej działki: ojciec zmierzył długość działki, zaś mama – jej szerokość. Poniższa tabela przedstawia wyniki pomiarów działki wykonanych przez rodziców Wojtka oraz jej rzeczywiste wymiary.

	wymiary według pomiarów	wymiary rzeczywiste
długość działki	53,7 m	54,8 m
szerokość działki	30,1 m	29,0 m

Które z rodziców dokonało dokładniejszego pomiaru?

Obliczymy błąd bezwzględny przybliżenia pomiaru, wykonanego przez każde z rodziców:

błąd pomiaru taty:

$$|54,8 - 53,7| = 1,1 \text{ (m)}$$

błąd pomiaru mamy:

$$|29 - 30,1| = 1,1 \text{ (m)}$$

Okazuje się, że w obu przypadkach błąd bezwzględny jest taki sam.

Czy pomiary z przykładu 2. są tak samo dokładne? Otóż nie! Aby dowiedzieć się, które z rodziców wykonało swoją pracę dokładniej, należy obliczyć jeszcze jedną wielkość, tzw. błąd względny przybliżenia.

Definicja 2.

Błędem względnym przybliżenia nazywamy liczbę równą $\frac{|r-p|}{|r|}$, gdzie $|r-p|$ jest błędem bezwzględnym przybliżenia, zaś $|r|$ jest wartością bezwzględną wielkości rzeczywistej.

Błąd procentowy to błąd względny, wyrażony w procentach, czyli $\frac{|r-p|}{|r|} \cdot 100\%$.

Błąd procentowy informuje nas, jakim procentem wartości rzeczywistej jest błąd bezwzględny.

Obliczymy błędy procentowe pomiarów wykonanych przez rodziców Wojtka.

Dla taty:

błąd bezwzględny 1,1 (m)

błąd względny $\frac{|1,1|}{|54,8|} = 0,0200729... \approx 0,02$

błąd procentowy $0,02 \cdot 100\% = 2\%$

Dla mamy:

błąd bezwzględny 1,1 (m)

błąd względny $\frac{|1,1|}{|29|} = 0,037931... \approx 0,04$

błąd procentowy $0,04 \cdot 100\% = 4\%$

Okazuje się, że mniejszy błąd w pomiarach popełnił ojciec.

Przybliżenie dziesiętne jest to przybliżenie danej liczby przez ułamek dziesiętny, mający ustaloną (skończoną) liczbę cyfr po przecinku.

Na przykład ułamek $\frac{9}{13} = 0,692307692307\dots$ możemy przybliżyć następująco:

przybliżenie z dokładnością do:	przybliżenie z niedomiarem	bezwzględny błąd przybliżenia z niedomiarem	przybliżenie z nadmiarem	bezwzględny błąd przybliżenia z nadmiarem
jedności	0	0,6923...	<u>1</u>	0,3076...
jednej dziesiątej	0,6	0,0923...	<u>0,7</u>	0,0076...
jednej setnej	<u>0,69</u>	0,0023...	0,70	0,0076...
jednej tysięcznej	<u>0,692</u>	0,0003...	0,693	0,0006...

W tabeli zostały podkreślone przybliżenia – z ustaloną liczbą cyfr po przecinku – dla których bezwzględny błąd przybliżenia jest mniejszy.

Aby błąd powstały w trakcie przybliżania był możliwie najmniejszy, stosuje się następujące reguły zaokrąglania:

- Jeżeli pierwszą z odrzuconych cyfr jest 0, 1, 2, 3 lub 4, to ostatnią z zachowanych cyfr pozostawiamy bez zmiany (przybliżenie z niedomiarem).
- Jeżeli pierwszą z odrzuconych cyfr jest 5, 6, 7, 8 lub 9, to ostatnią z zachowanych cyfr zwiększamy o 1; gdyby tą ostatnią cyfrą była 9, to zastępujemy ją zerem i zwiększamy o 1 drugą cyfrę od końca (przybliżenie z nadmiarem).

Przykład 3.

Oszacujmy, a potem obliczmy dokładną wartość wyrażenia $0,5 \cdot 126,94 - 542 : 40$. Obliczmy też błąd procentowy naszego przybliżenia.

$0,5 \cdot 126,94$ jest to w przybliżeniu połowa liczby 127, czyli około 63,5.

$542 : 40$ to mniej niż 14; przyjmijmy więc, że otrzymamy około 13,5.

Możemy zatem spodziewać się, że wartość wyrażenia

$$0,5 \cdot 126,94 - 542 : 40$$

będzie wynosiła w przybliżeniu 50.

Przeprowadźmy teraz dokładne obliczenia:

$$0,5 \cdot 126,94 - 542 : 40 = 63,47 - 13,55 = 49,92$$

Okazuje się, że wartość wyrażenia jest „bliska” liczby 50.

Obliczmy błąd procentowy, jaki popełniliśmy, szacując wartość wyrażenia.

$$\frac{|49,92 - 50|}{|49,92|} \cdot 100\% \approx 0,2\%$$

Dokonując szacowania wyniku, popełniliśmy niewielki błąd.

Umiejętność szacowania przydaje się też w działaniach na liczbach niewymiernych.

Przykład 4.

Porównajmy bez użycia kalkulatora dwie liczby $\frac{\sqrt{7}-2}{8}$ i 0,13.

Oszacujmy liczbę $\frac{\sqrt{7}-2}{8}$. Zauważmy, że spełniona jest podwójna nierówność:

$$\sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9}$$

Mamy:

$$2 < \sqrt{7} < 3 \quad / - 2 \quad \text{następnie}$$

$$0 < \sqrt{7} - 2 < 1 \quad / : 8$$

$$0 < \frac{\sqrt{7}-2}{8} < 0,125, \text{ skąd otrzymujemy, że } \frac{\sqrt{7}-2}{8} < 0,13.$$

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Korzystając z rozwinięć dziesiętnych danych liczb niewymiernych, podaj przybliżenie dziesiętne poniższych liczb z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku:

a) $5\sqrt{2} + 1$

b) $2 - \sqrt{3}$

c) $3\sqrt{5} + 7$

d) $10\sqrt{13} - 0,1\sqrt{17}$

e) $\frac{\sqrt{13} + \sqrt{2}}{2}$

f) $\frac{\sqrt{17} - \sqrt{3}}{10}$

$$\sqrt{2} = 1,414213\dots$$

$$\sqrt{3} = 1,732050\dots$$

$$\sqrt{5} = 2,236067\dots$$

$$\sqrt{13} = 3,605551\dots$$

$$\sqrt{17} = 4,123105\dots$$

2. Oblicz błąd bezwzględny oraz błąd względny podanego przybliżenia:
- Powierzchnia boiska o wymiarach 50,4 m x 38,2 m wynosi w przybliżeniu 2000 m².
 - Zawodnik przebiegł pewien dystans w czasie 1 min 54 sek. i oszacował, że bieg trwał 2 minuty.
3. Dwóch przedsiębiorców A i B prognozowało obroty swojej firmy na rok 2018. Poniższa tabela podaje prognozy oraz rzeczywiste obroty firm.

	prognoza na 2018 r.	stan faktyczny
przedsiębiorca A	275 tys. zł	277,9 tys. zł
przedsiębiorca B	438 tys. zł	442,1 tys. zł

- Oblicz błąd bezwzględny przybliżenia (prognozy) dla obu przedsiębiorców.
 - Oblicz błąd procentowy i oceń, który z przedsiębiorców popełnił mniejszy błąd, prognozując obroty swojej firmy.
4. Sprawdź, nie używając kalkulatora, czy liczba $\frac{2\sqrt{3}+5}{7}$ należy do przedziału

$$\left(1, 1\frac{1}{2}\right).$$

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 1.

Test

- Wśród 11 uczniów znajduje się 7 osób, które trenują siatkówkę i 8 osób trenujących koszykówkę. Ilu co najmniej uczniów z tej grupy uprawia obydwie dyscypliny sportu?

A. 4 B. 3 C. 5 D. 7
- Niech zbiór $U = \{0, 1, 2, 3, \dots, 12\}$ będzie przestrzenią, w której zawarte są dwa podzbiory: A – zbiór liczb całkowitych nieujemnych jednocyfrowych, B – zbiór naturalnych dzielników liczby 12. Wówczas:

A. $9 \in A - B'$ B. $0 \in A' \cup B$ C. $5 \in A' \cap B$ D. $7 \in (B - A)'$
- Do przedziału $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ nie należy liczba:

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{\sqrt{7}}$ C. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- Niech $A = \langle -4, 5 \rangle$, $B = (-1, +\infty)$. Wówczas zbiór $A \cup B$ jest przedziałem:

A. $(-1, 5)$ B. $\langle -4, +\infty \rangle$ C. $\langle 5, +\infty \rangle$ D. $\langle -4, -1 \rangle$
- Jeśli $A = (-3, 7)$ oraz $B = \langle -5, 2 \rangle$, to zbiór $A - B$ jest zaznaczony na osi:

A. 

B. 

C. 

D. 
- Ile liczb wymiernych należy do zbioru $X = \left\{ \frac{3}{\pi}, -7, \sqrt{1}, 0, -\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{10}}{4} \right\}$?

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1
- Ile liczb pierwszych występuje w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby 210?

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6
- Iloczyn dwóch liczb naturalnych jest równy 2028, a ich najmniejsza wspólna wielokrotność wynosi 156. Zatem największy wspólny dzielnik tych liczb jest równy:

A. 78 B. 52 C. 26 D. 13

9. Liczba $-\frac{19}{2} + 2\pi$ jest równa:
A. $-0,5 \cdot (19 - \pi)$ B. $-0,5 \cdot (19 + 4\pi)$ C. $-0,5 \cdot (19 - 4\pi)$ D. $2(\pi - 19 \cdot 0,5)$
10. Działanie $0,111 \cdot 24 + 16 \cdot 0,222$ można zastąpić mnożeniem:
A. $56 \cdot 0,222$ B. $40 \cdot 0,333$ C. $14 \cdot 0,444$ D. $10 \cdot 0,888$
11. Liczba 1030507X, gdzie X jest cyfrą jedności, jest podzielna przez 4 i nie jest podzielna przez 9, jeżeli:
A. $X = 8$ B. $X = 6$ C. $X = 4$ D. $X = 2$
12. Nieprawdą jest, że suma trzech kolejnych liczb całkowitych parzystych jest zawsze podzielna przez:
A. 6 B. 4 C. 3 D. 2
13. Reszta z dzielenia liczby (-1436) przez liczbę 20 jest równa:
A. -16 B. 0,8 C. 4 D. 16
14. Dziedziną równania $\frac{6}{x+5} = \frac{x-2}{3}$ jest zbiór:
A. $R - \{2\}$ B. $R - \{-5, 2\}$ C. $R - \{-5\}$ D. R
15. Liczba 10 jest rozwiązaniem równania $\frac{2x+a}{2} = \frac{x}{5}$, jeżeli:
A. $a = -16$ B. $a = -8$ C. $a = -6,25$ D. $a = -3$
16. Dane są równania:
I. $3x - 1 = x + 3$ II. $(x - 2)(x + 2) = 0$ III. $x^2 = 4$ IV. $4x + 8 = 0$
Równania równoważne to:
A. II i IV B. I i II C. II i III D. I i IV
17. Jeśli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają zależność $a < b < 0 < c$, to:
A. $a \cdot b \cdot c < 0$ B. $\frac{a-b}{c} > 0$ C. $(a+b) \cdot c > 0$ D. $-c \cdot a > -c \cdot b$
18. Zbiorem rozwiązań nierówności $ax + 6 > 0$ z niewiadomą x jest przedział $(-\infty, 2)$.
Zatem:
A. $a > 3$ B. $a = 3$ C. $a < -3$ D. $a = -3$
19. Poparcie dla partii A wzrosło o 6 punktów procentowych i wówczas wynosiło 36%. O ile procent wzrosło poparcie dla tej partii?
A. o 30% B. o 24% C. o 20% D. o $16\frac{2}{3}\%$
20. Cenę pewnego towaru podwyższono o 20%, a następnie nową cenę jeszcze raz podwyższono o 20%. O ile procent wzrosła cena towaru w wyniku tych dwóch podwyżek?
A. o 36% B. o 40% C. o 44% D. o 144%

Zadania otwarte

21. Dane są zbiory $A = (-\infty, -3)$, $B = \langle -4, 7)$. Zaznacz na osi liczbowej zbiory:
 a) $A' \cap B'$ b) $A \cup B$ c) $A' \cap B$ d) $B' - A$
22. Wypisz elementy zbioru:
 a) $A = \{x: x \in \mathbf{N} \text{ i } x \leq 7\}$ b) $B = \{x: x \in \mathbf{Z} \text{ i } -3 \leq x < 4\}$
 c) $C = \{x: x = 2k - 1 \text{ i } k \in \mathbf{N} \cap (-2, 5)\}$ d) $D = \{x: x = 3k + 1 \text{ i } k \in \mathbf{Z}\}$
23. Dana jest liczba zapisana w postaci ogólnej $12k - 1$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$. Wyznacz resztę z dzielenia tej liczby przez:
 a) 2 b) 12 c) 4 d) 3
24. Jaką resztę daje suma pięciu kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 6 po podzieleniu przez:
 a) 30 b) 15 c) 10 d) 6?
25. Rozwiąż równania:
 a) $\sqrt{3}x + 7 = 2\sqrt{3}x + 1$ b) $x(x + 4)(x - 2) = 0$
 c) $\frac{x+2}{2} - \frac{3-2x}{4} = 1+x$ d) $3x - 9x(x - 1) = 6x - 3x(3x - 2)$
26. Rozwiąż nierówność $x - 4 \geq \sqrt{2}x - \sqrt{32}$. Następnie podaj najmniejszą liczbę pierwszą, która:
 a) spełnia daną nierówność b) nie spełnia danej nierówności.
27. Wyznacz zbiór rozwiązań nierówności $2 - \frac{3x-5}{4} > x - \frac{3x-2}{6}$.
 a) Podaj przykład liczby rzeczywistej dodatniej należącej do zbioru rozwiązań tej nierówności i takiej, że jej odwrotność też należy do zbioru rozwiązań nierówności;
 b) Które spośród liczb niewymiernych $\sqrt{10}$, $-\pi$, $\pi - 1$ spełniają tę nierówność?
28. Czy dana liczba jest całkowita? Odpowiedź uzasadnij.
 a) $|3 - \pi| - |\pi - 2|$ b) $2a|1 - a| - 2|a| \cdot a + 2(a + 1)$, jeśli $a \in (1, +\infty)$
29. Bank zmienił oprocentowanie lokat rocznych z 2,5% do 1,8% w stosunku rocznym. O ile punktów bazowych i o ile procent zmniejszyło się oprocentowanie tych lokat?
30. Na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie, cena jednej akcji pewnej spółki dwa dni z rzędu wzrosła o ten sam procent. Wówczas okazało się, że cena jednej akcji jest o 6,09% większa od ceny sprzed dwóch dni. O ile procent nastąpił dzienny wzrost wartości akcji danej spółki w ciągu tych dwóch dni?

2. Wyrażenia algebraiczne

Potęga o wykładniku naturalnym

Bakteria – pałeczka okrężnicy – rozmnaża się przez podział co 20 minut (w sprzyjających warunkach). Załóżmy, że w środowisku sprzyjającym rozwojowi tej bakterii znalazła się jedna bakteria. Ile – co najwyżej – bakterii będzie w tym środowisku po 140 minutach?

Policzmy:

- po 20 minutach 2
- po 40 minutach $2 \cdot 2 = 4$
- po 60 minutach $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
- po 80 minutach $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$
- po 100 minutach $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$
- po 120 minutach $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$
- po 140 minutach $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$

Wygodne zapisywanie iloczynów złożonych z takich samych czynników umożliwiają potęgi o wykładniku naturalnym.

Definicja 1.

- 1) **Potęga o wykładniku naturalnym n** , $n > 0$ i podstawie a , gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą, nazywamy liczbę

$$a^1 = a$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ czynników}}, \text{ jeśli } n > 1$$

- 2) **Potęga o wykładniku 0 (zero)** określamy następująco:

$$a^0 = 1$$

gdzie a jest liczbą rzeczywistą różną od zera.

UWAGA: Wyrażenie 0^0 nie ma określonej wartości liczbowej.

Korzystając bezpośrednio z definicji, możemy obliczyć:

$$\begin{aligned} (-3)^2 &= (-3) \cdot (-3) = 9 & \left(\frac{1}{4}\right)^3 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64} & 4,3^1 &= 4,3 \\ 0^5 &= 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0 & 5^0 &= 1 & (-47)^0 &= 1 \end{aligned}$$

Drugą potęgę liczby a nazywamy **kwadratem liczby a** , natomiast trzecią potęgę liczby a nazywamy **sześcianem liczby a** .

Ostatnią definicję możemy też stosować do wykonywania działań na potęgach. Wykonajmy na przykład dzielenie potęg o tych samych podstawach:

$$5^6 : 5^4 = \frac{5^6}{5^4} = \frac{5 \cdot 5 \cdot \overset{1}{\cancel{5}} \cdot \overset{1}{\cancel{5}} \cdot \overset{1}{\cancel{5}} \cdot \overset{1}{\cancel{5}}}{\cancel{5}_1 \cdot \cancel{5}_1 \cdot \cancel{5}_1 \cdot \cancel{5}_1} = 5^2 = 25$$

Pomnóżmy teraz dwie potęgi o takich samych wykładnikach. Dodatkowo skorzystamy z prawa przemienności mnożenia i prawa łączności mnożenia:

$$5^3 \cdot 2^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = (5 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 2) = (5 \cdot 2)^3 = 10^3 = 1000$$

Ze szkoły podstawowej znasz twierdzenie ułatwiające działania na potęgach.

Twierdzenie 1. Własności potęg o wykładnikach naturalnych

Jeśli m i n są liczbami naturalnymi, a i b są liczbami rzeczywistymi, to:

- 1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- 2) $a^m : a^n = a^{m-n}$, jeśli $m \geq n$ i $a \neq 0$
- 3) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- 4) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
- 5) $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, jeśli $b \neq 0$

Przykład 1.

Wykorzystamy własności potęgowania w poniższych obliczeniach:

- 1) $3^5 = 3^{2+3} = 3^2 \cdot 3^3 = 9 \cdot 27 = 243$
- 2) $(-7)^{11} : (-7)^9 = (-7)^{11-9} = (-7)^2 = 49$
- 3) $\left((\sqrt{2})^3\right)^2 = (\sqrt{2})^{3 \cdot 2} = \left((\sqrt{2})^2\right)^3 = 2^3 = 8$
- 4) $(-8)^5 \cdot (0,25)^5 = (-8 \cdot 0,25)^5 = (-2)^5 = -32$
- 5) $(-0,3)^{15} : (0,3)^{15} = (-0,3 : 0,3)^{15} = (-1)^{15} = -1$

Przykład 2.

Założmy, że mamy arkusz bardzo cienkiej bibułki grubości $\frac{1}{16}$ mm. Bibułkę składamy

na pół, następnie znowu na pół itd. Jaką grubość będzie mieć ten arkusz po 60-krotnym złożeniu?

Składanie arkusza na pół powoduje, że po każdym takim złożeniu grubość arkusza podwaja się:

- po pierwszym złożeniu liczba arkuszy jest równa 2
- po drugim złożeniu liczba arkuszy jest równa 4, bo $2^2 = 4$
- po trzecim złożeniu liczba arkuszy jest równa 8, bo $2^3 = 8$
- (...)
- po ostatnim złożeniu liczba arkuszy jest równa 2^{60} .

Obliczamy grubość tak złożonego arkusza:

$$\frac{1}{16} \cdot 2^{60} = \frac{2^{60}}{16} = \frac{2^{60}}{2^4} = 2^{56} \text{ (mm)}$$

Czy to dużo? Niewyobrażalnie dużo! Grubość tak złożonego arkusza byłaby ponad 481 razy większa niż średnia odległość Ziemi od Słońca! Składanie arkusza moglibyśmy więc wykonać tylko... teoretycznie.

Ostatnie twierdzenie pokazuje, że własności potęg dotyczą mnożenia, dzielenia i potęgowania potęg. Jak zatem postępować, jeśli mamy sumy lub różnice wyrażeń zawierających potęgi? W takich przypadkach możemy próbować następujących sposobów:

a) Jeśli mamy sumę, w której występują potęgi o takich samych podstawach – wyłączamy wspólny czynnik poza nawias, np:

$$4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5 = 4^5 \cdot (1 + 1 + 1 + 1) = 4^5 \cdot 4 = 4^6$$

$$\frac{1}{4} \cdot 6^7 - 9 \cdot 6^5 + 6^6 = 6^5 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot 6^2 - 9 + 6 \right) = 6^5 \cdot 6 = 6^6$$

b) Jeśli mamy sumę, w której występują potęgi o różnych podstawach, próbujemy sprowadzić potęgi do takiej samej podstawy, a następnie wyłączyć wspólny czynnik poza nawias, np.:

$$\begin{aligned} 11 \cdot 9^6 + 7 \cdot 27^4 + 9^7 &= 11 \cdot (3^2)^6 + 7 \cdot (3^3)^4 + (3^2)^7 = 11 \cdot 3^{12} + 7 \cdot 3^{12} + 3^{14} = \\ &= 3^{12} \cdot (11 + 7 + 3^2) = 3^{12} \cdot 27 = 3^{12} \cdot 3^3 = 3^{15} \end{aligned}$$

Przykład 3.

Obliczymy wartość wyrażenia $\frac{11 \cdot 3^{12} - 6 \cdot 3^{11}}{81^2 \cdot 243}$.

W liczniku ułamka wyłączamy poza nawias potęgę 3^{11} , a w mianowniku ułamka przedstawiamy liczby 81 i 243 jako potęgi liczby 3.

$$\frac{11 \cdot 3^{12} - 6 \cdot 3^{11}}{81^2 \cdot 243} = \frac{11 \cdot 3^{11} \cdot 3^1 - 6 \cdot 3^{11}}{(3^4)^2 \cdot 3^5} = \frac{3^{11} \cdot (33 - 6)}{3^8 \cdot 3^5} = \frac{3^{11} \cdot 27}{3^{13}} = \frac{3^{11} \cdot 3^3}{3^{13}} = \frac{3^{14}}{3^{13}} = 3$$

Wskaż prawa działań na potęgach, które zostały wykorzystane w powyższych obliczeniach.

Przykład 4.

Wykażemy, że liczba zapisana w postaci $8^5 + 4^8 + 6 \cdot 16^4$ jest podzielna przez 5.

Aby udowodnić, że dana liczba jest podzielna przez 5, wystarczy zapisać ją w postaci iloczynu liczb naturalnych, którego jednym z czynników będzie 5. W tym celu

sprowadzamy potęgi do takiej samej podstawy; będzie to liczba 2, ponieważ $8 = 2^3$, $4 = 2^2$, $16 = 2^4$. Następnie wyłączamy wspólny czynnik przed nawias.

$$8^5 + 4^8 + 6 \cdot 16^4 = (2^3)^5 + (2^2)^8 + 6 \cdot (2^4)^4 = 2^{15} + 2^{16} + 6 \cdot 2^{16} = 2^{15} \cdot (1 + 2 + 6 \cdot 2) = 2^{15} \cdot 15 = 2^{15} \cdot 3 \cdot 5$$

Dana liczba jest podzielna przez 5.

Przykład 5.

Doprowadzimy wyrażenia do najprostszej postaci:

$$\text{a) } 3(-x)^2(xy^3)^2 + 5x^3y^2y^4x - 2(x^2)^2y^6 \quad \text{b) } \frac{(x^3)^4 y^7}{(xy)^2 (x^2)^2 y^4}, \text{ gdzie } x \neq 0 \text{ i } y \neq 0$$

Po zastosowaniu odpowiednich własności potęgowania (jakich?) otrzymujemy:

Ad a)

$$3(-x)^2(xy^3)^2 + 5x^3y^2y^4x - 2(x^2)^2y^6 = 3x^2x^2y^6 + 5x^4y^6 - 2x^4y^6 = 3x^4y^6 + 5x^4y^6 - 2x^4y^6 = 6x^4y^6$$

Dane wyrażenie można zapisać w postaci $6x^4y^6$.

Ad b)

$$\frac{(x^3)^4 y^7}{(xy)^2 (x^2)^2 y^4} = \frac{x^{12} y^7}{x^2 y^2 x^4 y^4} = \frac{x^{12} y^7}{x^6 y^6} = x^6 y, \text{ gdzie } x \neq 0 \text{ i } y \neq 0$$

Dane wyrażenie można zapisać w postaci $x^6 y$, o ile $x \neq 0$ i $y \neq 0$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Porównaj liczby:

a) 5^0 i $(-5)^0$

b) -2^4 i $(-2)^4$

c) -5^3 i $(-5)^3$

d) $\frac{2^3}{3}$ i $\left(\frac{2}{3}\right)^3$

e) $\frac{-1}{4^3}$ i $\left(\frac{-1}{5}\right)^3$

f) $\frac{2}{-8^{10}}$ i $\frac{-2}{8^{11}}$

2. Oblicz, stosując własności potęg:

a) $(0,1)^4 \cdot (0,1)^2$

b) $\left(1\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)$

c) $(-3)^3 \cdot 3^2$

d) $19^8 : (-19)^6$

e) $(-0,6)^7 : (0,6)^6$

f) $(2,5)^6 : \left(\frac{5}{2}\right)^4$

g) $(-4)^{30}$

h) $(2^5)^2 : 2^{10}$

i) $0,001 \cdot (-10^2)^3$

3. Oblicz, stosując prawa działań na potęgach:

a) $(0,4)^8 \cdot 5^8$

b) $-6^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$

c) $4^3 : (0,8)^3$

d) $2^5 : \left(\frac{-1}{5}\right)^5$

e) $(0,1)^7 \cdot 10^8$

f) $(-8)^5 : (-4)^4$

4. Oblicz, stosując prawa działań na potęgach:

a) $5^{11} \cdot 2^9 : 10^9$

b) $(3^{11})^2 : 6^{21} \cdot 2^{20}$

c) $[(10^4)^3 \cdot 0,1^{11}]^2$

d) $14^9 : 7^9 \cdot (-0,5)^7$

e) $(-2^3)^2 : (4^3)^2$

f) $(-4)^7 : (0,8)^7 : 5^8$

5. Zapisz liczbę za pomocą jednej potęgi:

a) $3^{18} \cdot 3^2 \cdot 3^0 \cdot 3$

b) $2^2 \cdot (2^5 \cdot 2^3)^2$

c) $0,7^{13} : 0,7^9 \cdot 0,49$

d) $(-6)^{17} : 36 : (-6)^4$

e) $[(-5)^3]^3 : (-5)^7 \cdot 125$

f) $2^3 \cdot (-2^4)^3 \cdot (0,5)^{20}$

6. Przedstaw poniższe wyrażenia w postaci potęgi o podstawie a ($a \neq 0$):

a) $\frac{(a^2)^7 : a^4}{aa^6}$

b) $\frac{(a^3)^4 (a^2)^5}{(a^6)^3 : a^4}$

c) $\frac{(a^7 a^2)^3}{(a^5 a^3)^2}$

7. Uprość wyrażenie $[(a^3)^5 : (a^2 \cdot a^8)^2 \cdot a^7]^5 : a^6$. Następnie oblicz jego wartość jeśli $a = 1\frac{2}{3}$.

8. Uprość wyrażenie $2(x^3 y^2)^2 - 3x^4 y x^2 y^3 + 4y^4 x^6$. Następnie oblicz jego wartość jeśli $x = -\sqrt{2}$ i $y = 0,5$.

9. Przedstaw liczbę w postaci jednej potęgi:

a) $3^{20} + 3^{20} + 3^{20}$

b) $2^{10} + (-2)^{10}$

c) $5^7 + 5^7 + 5^7 + 5^7 + 5^7$

d) $21 \cdot 6^8 + 90 \cdot 6^7$

e) $7^{13} \cdot 3 - 4 \cdot 7^{13}$

f) $25 \cdot 9^2 + 5 \cdot 9^3 + 99 \cdot 9$

D 10. Uzasadnij, że liczba:

a) $2^{15} + 2^{13} - 9 \cdot 2^{10}$ jest podzielna przez 31;

b) $7^8 - 2 \cdot 7^7 + 8 \cdot 49^3$ jest podzielna przez 43;

c) $3 \cdot 25^6 - 5^{11} + 5^{13}$ jest podzielna przez 195.

11. Oblicz:

a) $\frac{7^{12} \cdot 3 + 4 \cdot 7^{12}}{7^{10}}$

b) $\frac{4^{26} : (4^2 \cdot 4)^4}{9 \cdot 2^{20} + 7 \cdot 2^{20}}$

c) $\frac{5^{13} \cdot 3 + 2 \cdot 5^{13}}{(5^{11} : 25^4)^3 \cdot 25}$

d) $\frac{(9^3)^2 \cdot 27^2}{3^{17} - 2 \cdot 3^{16}}$

e) $\frac{4 \cdot 6^{14} - 6^{15}}{3^{13} \cdot 2^{15} + 2^{15} \cdot 3^{13}}$

f) $\frac{10^9 - (2^4 \cdot 5^5)^2}{1500 : 0,001}$

Pierwiastek arytmetyczny. Pierwiastek stopnia nieparzystego z liczby ujemnej

Posługując się potęgą o wykładniku naturalnym, możemy określić pierwiastek arytmetyczny.

Definicja 1.

Pierwiastkiem arytmetycznym n -tego stopnia, $n \in \mathbf{N} - \{0, 1\}$, z nieujemnej liczby a nazywamy taką nieujemną liczbę b , dla której $b^n = a$.

Zapis symboliczny:

$$\text{Jeśli } a \geq 0 \text{ i } b \geq 0, \text{ to } (\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a).$$

Pierwiastek stopnia drugiego nazywamy **pierwiastkiem kwadratowym** i oznaczamy symbolem $\sqrt{}$, a pierwiastek stopnia trzeciego nazywamy **pierwiastkiem sześciennym**.

$$\sqrt{1,21} = 1,1, \quad \text{bo } 1,1^2 = 1,21 \text{ i } 1,1 \geq 0$$

$$\sqrt[3]{27} = 3, \quad \text{bo } 3^3 = 27 \text{ i } 3 \geq 0$$

$$\sqrt[5]{0} = 0, \quad \text{bo } 0^5 = 0 \text{ i } 0 \geq 0$$

UWAGA: Jeśli stopień pierwiastka (n) jest liczbą nieparzystą, to ostatnią definicję można rozszerzyć na przypadek liczb ujemnych ($a < 0$):

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a.$$

Na przykład:

$$\sqrt[5]{-243} = -3, \text{ bo } (-3)^5 = -243 \qquad \sqrt[3]{-0,125} = -0,5, \text{ bo } (-0,5)^3 = -0,125$$

Pierwiastek taki nazywamy **pierwiastkiem stopnia nieparzystego z liczby ujemnej** (nie używamy określenia „arytmetyczny”).

Twierdzenie 1. Własności pierwiastków arytmetycznych

Jeśli a, b są liczbami nieujemnymi, n, m – liczbami naturalnymi większymi od 1, p jest liczbą naturalną dodatnią, to:

- | | |
|--|--|
| 1) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ | 2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad b \neq 0$ |
| 3) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$ | 4) $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$ |

UWAGA: Jeśli w powyższym twierdzeniu założyć dodatkowo, że stopnie pierwiastków (n oraz m) są liczbami nieparzystymi, to twierdzenie pozostanie prawdziwe, jeśli jedna z liczb a lub b będzie ujemna albo obie te liczby będą ujemne.

Zauważ, że własności pierwiastkowania nie dotyczą dodawania ani odejmowania.

- a) Jeśli mamy sumy lub różnice pierwiastków tego samego stopnia z różnych liczb, to możemy spróbować wyłączyć czynnik przed znak każdego z pierwiastków, np.:

$$\begin{aligned} 7\sqrt{50} - 4\sqrt{72} + 5\sqrt{8} &= 7\sqrt{25 \cdot 2} - 4\sqrt{36 \cdot 2} + 5\sqrt{4 \cdot 2} = \\ &= 7\sqrt{25} \cdot \sqrt{2} - 4\sqrt{36} \cdot \sqrt{2} + 5\sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 35\sqrt{2} - 24\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 21\sqrt{2} \\ \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} &= \sqrt[3]{8 \cdot 3} + \sqrt[3]{27 \cdot 3} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} = 5\sqrt[3]{3} \end{aligned}$$

Wyłączenie czynnika przed znak pierwiastka polega na takim zapisaniu liczby pod pierwiastkiem w postaci iloczynu, by można było wykorzystać punkt 1) lub 2) ostatniego twierdzenia.

- b) Jeśli mamy sumy lub różnice liczb pod znakiem pierwiastka, to możemy spróbować przedstawić wyrażenie pod pierwiastkiem w postaci iloczynu, np.:

$$\begin{aligned} \sqrt{27^2 + 36^2} &= \sqrt{(9 \cdot 3)^2 + (9 \cdot 4)^2} = \sqrt{9^2 \cdot 3^2 + 9^2 \cdot 4^2} = \sqrt{9^2 (3^2 + 4^2)} = \\ &= \sqrt{9^2} \cdot \sqrt{25} = \sqrt{9^2} \cdot 5 = 9 \cdot 5 = 45 \end{aligned}$$

Oczywiście wartość tego wyrażenia można było też policzyć tak:

$$\sqrt{27^2 + 36^2} = \sqrt{729 + 1296} = \sqrt{2025} = 45$$

Ale taki sposób liczenia – bez użycia kalkulatora – jest dość żmudny.

Rozpatrzmy jeszcze następujące przykłady:

$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = -3 $	$\sqrt[3]{(-3)^3} = \sqrt[3]{-27} = -3$
$\sqrt{(1,1)^2} = \sqrt{1,21} = 1,1 = 1,1 $	$\sqrt[3]{(1,1)^3} = \sqrt[3]{1,331} = 1,1$
$\sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = 6 = -6 $	$\sqrt[3]{(-6)^3} = \sqrt[3]{-216} = -6$
Ogólnie możemy zapisać:	
$\sqrt{x^2} = x $	$\sqrt[3]{x^3} = x$

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Oblicz:

a) $\sqrt{196}$	$\sqrt{324}$	$\sqrt{0,16}$	$\sqrt{6,25}$
b) $\sqrt[3]{64}$	$\sqrt[3]{0}$	$\sqrt[3]{216}$	$\sqrt[3]{0,001}$
c) $\sqrt[4]{16}$	$\sqrt[4]{0,0081}$	$\sqrt[5]{1}$	$\sqrt[5]{3125}$
d) $\sqrt[3]{-27}$	$\sqrt[9]{-1}$	$\sqrt[5]{-1024}$	$\sqrt[7]{-128}$

2. Oblicz, korzystając z funkcji pierwiastka kwadratowego na kalkulatorze:

a) $\sqrt[4]{6561}$	b) $\sqrt[4]{0,0256}$	c) $\sqrt[4]{8,3521}$	d) $\sqrt[8]{390625}$
---------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------

3. Wykonaj działania:

a) $4\sqrt{16} - 2\sqrt[4]{625} + 3\sqrt[3]{27}$

b) $5\sqrt[7]{1} - 3\sqrt[3]{64} + 2\sqrt{121}$

c) $\frac{3\sqrt[3]{343} + 2\sqrt[7]{-128}}{4\sqrt[6]{729} + 5\sqrt{64}}$

d) $\frac{\sqrt[4]{0,0016} + \sqrt[6]{1}}{\sqrt[4]{0,0625} - \sqrt[3]{0,027}}$

4. Oblicz, stosując odpowiednią własność pierwiastków:

a) $\sqrt{81 \cdot 225}$

b) $\sqrt{1,21 \cdot 16}$

c) $\sqrt{360 \cdot 10}$

d) $\sqrt{18 \cdot 32}$

e) $\sqrt[3]{27 \cdot 1000}$

f) $\sqrt[3]{-8 \cdot 729}$

g) $\sqrt[4]{(-16) \cdot (-81)}$

h) $\sqrt[5]{3125 \cdot (-1024)}$

5. Oblicz, stosując odpowiednią własność pierwiastków:

a) $\sqrt{324 : 256}$

b) $\sqrt{0,01 : 25}$

c) $\sqrt{10\,000 : 529}$

d) $\sqrt{144 : 0,25}$

e) $\sqrt[3]{\frac{8000}{125}}$

f) $\sqrt[3]{\frac{216}{-343}}$

g) $\sqrt[5]{\frac{-32}{3125}}$

h) $\sqrt[6]{\frac{-729}{-64}}$

6. Oblicz:

a) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$

b) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$

c) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$

d) $\sqrt{5\frac{1}{16}}$

7. Oblicz:

a) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8}$

b) $\sqrt[3]{250} : \sqrt[3]{2}$

c) $5 \cdot \left(\sqrt[3]{5^2} \right)^3$

d) $\sqrt[3]{2} \cdot \left(\sqrt[3]{(\sqrt{2})^2} \right)^2$

8. Oblicz:

a) $\sqrt[3]{8 \cdot 300 + 8 \cdot 43}$

b) $\sqrt{(2 \cdot 5)^2 + (2 \cdot 12)^2}$

c) $\sqrt{(49 \cdot 10)^2 - (49 \cdot 8)^2}$

d) $\sqrt[3]{2 \cdot 12^2 - 8 \cdot 3^2}$

9. Oblicz:

a) $(\sqrt{\pi})^2$

b) $(\sqrt[3]{-2})^3$

c) $(\sqrt[3]{11})^6$

d) $\sqrt{(-5)^4}$

e) $\sqrt[5]{(-7)^{10}}$

f) $\sqrt{\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{8}$

g) $\sqrt[6]{81} \cdot \sqrt[3]{9}$

h) $\sqrt[3]{\sqrt{4}} \cdot \sqrt[6]{16}$

10. Wykonaj działania:

a) $\sqrt{18} + \sqrt{8}$

b) $\sqrt{75} - \sqrt{12}$

c) $3\sqrt{50} - 5\sqrt{18}$

d) $-\sqrt{48} + 2\sqrt{27}$

e) $\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{16}$

f) $\sqrt[3]{-40} + \sqrt[3]{320}$

g) $5\sqrt{12} + 4\sqrt{75} - 3\sqrt{48}$

h) $6\sqrt[3]{16} + 7\sqrt[3]{54} - 5\sqrt[3]{128}$

Działania na wyrażeniach algebraicznych

Jednomiany

Wyrażenia, które są liczbami, literami lub iloczynami liczb i liter, nazywamy **jednomianami**. Przykładami jednomianów są:

$$-3 \quad 2y \quad t^3 \quad 7x^2y^3 \quad 2x^2 \cdot x \cdot (-5) \cdot x^3$$

Ostatni z jednomianów można przedstawić w prostszej postaci:

$$2x^2 \cdot x \cdot (-5) \cdot x^3 = 2 \cdot (-5) \cdot x^2 \cdot x \cdot x^3 = -10x^6$$

Zapisanie jednomianu w najprostszej postaci (ze współczynnikiem liczbowym na początku) nazywamy uporządkowaniem jednomianu. Współczynnikiem liczbowym jednomianu uporządkowanego $-10x^6$ jest liczba (-10) , współczynnikiem liczbowym jednomianu x^2 jest liczba 1, a współczynnikiem liczbowym jednomianu $-x^5$ jest liczba (-1) .

Jednomiany są podobne wtedy, gdy różnią się co najwyżej współczynnikami liczbowymi, np.: jednomiany $-3x^4y$ i $8x^4y$ są podobne, natomiast jednomiany $3xy^2$ i $5x^2y^2$ nie są podobne (dlaczego?). Jednomiany podobne nazywa się też **wyrazami podobnymi**. Jednomiany podobne można redukować, zastępując ich sumę jednym jednomianem podobnym do nich, np.:

$$-3x^4y + 8x^4y = (-3 + 8)x^4y = 5x^4y \quad 6x^2 + (-6x^2) = 0 \cdot x^2 = 0$$

W ostatnim przykładzie otrzymaliśmy jednomian zerowy. Przyjmujemy, że jednomian zerowy jest podobny do każdego jednomianu.

Wyrażenia algebraiczne

Pojedyncze litery i liczby, a także liczby i litery połączone znakami działań (wraz z nawiasami wyznaczającymi kolejność działań) tworzą **wyrażenia algebraiczne**. Wspomnianymi działaniami mogą być: dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie i pierwiastkowanie. Wyrażeniami algebraicznymi są na przykład:

$$25 \quad y \quad -12,3x \quad (3x - y)6x \quad a + 3x^3 \quad \frac{x - \sqrt{3}x}{x + 1}$$

Niektórym wyrażeniom algebraicznym możemy nadawać nazwy: suma, różnica, iloczyn, iloraz, potęga, pierwiastek. Nazwę wyrażenia określa działanie, które należy wykonać jako ostatnie, zgodnie z regułą kolejności wykonywania działań, np.:

$2x^2 + 3y$ to **suma** podwojonego kwadratu liczby x i potrojonej liczby y

$(a - \sqrt{2})(b + 2a)$ to **iloczyn** różnicy liczb a oraz $\sqrt{2}$ i sumy liczb b oraz $2a$

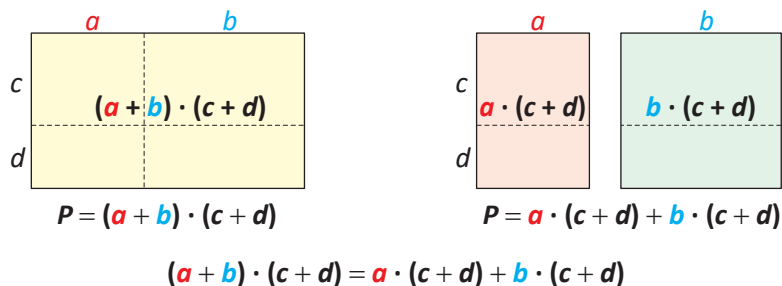
$\sqrt{a^2 + b^2}$ to **pierwiastek kwadratowy** z sumy kwadratów liczb a oraz b

$\sqrt[3]{(a + b)^2}$ to **pierwiastek sześcienny** z kwadratu sumy liczb a oraz b

Jeśli mamy pomnożyć sumę algebraiczną przez jednomian, to stosując prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania (str. 20), możemy przekształcić je w sumę, np.

$$2x(a - 2b + 5) = 2x \cdot a - 2x \cdot 2b + 2x \cdot 5 = 2xa - 4xb + 10x$$

Możemy również pomnożyć jedną sumę algebraiczną przez inną sumę algebraiczną. Przypomnijmy, jak należy wykonać działanie $(a + b)(c + d)$. W tym celu obliczymy pole prostokąta o bokach długości $(a + b)$ i $(c + d)$ na dwa sposoby:



Następnie stosujemy prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania:

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

Aby pomnożyć dwie sumy algebraiczne, należy pomnożyć **każdy składnik** pierwszej sumy **przez każdy składnik** drugiej sumy i dodać otrzymane iloczyny.

Przykład 1.

Wykonajmy mnożenie:

$$\text{a) } (x - 2)(3x + 1) \qquad \text{b) } (4x + y^2 + 5)(x - 3y)$$

$$\text{Ad a) } (x - 2)(3x + 1) = x \cdot 3x + x \cdot 1 + (-2) \cdot 3x + (-2) \cdot 1 = 3x^2 + x - 6x - 2 = 3x^2 - 5x - 2$$

$$\begin{aligned} \text{Ad b) } (4x + y^2 + 5)(x - 3y) &= 4x \cdot (x - 3y) + y^2 \cdot (x - 3y) + 5 \cdot (x - 3y) = \\ &= 4x \cdot x - 4x \cdot 3y + y^2 \cdot x - y^2 \cdot 3y + 5 \cdot x - 5 \cdot 3y = 4x^2 - 12xy + y^2x - 3y^3 + 5x - 15y \end{aligned}$$

Przykład 2.

Sprowadzimy wyrażenie $(2a + b)(2a - 3) - 2a(b - 1)$ do najprostszej postaci i obliczymy jego wartość, jeśli $a = \frac{1}{4}$ i $b = -\frac{1}{3}$.

Wykonujemy mnożenie i przeprowadzamy redukcję wyrazów podobnych:

$$(2a + b)(2a - 3) - 2a(b - 1) = 4a^2 - 6a + 2ab - 3b - 2ab + 2a = 4a^2 - 4a - 3b$$

Obliczamy wartość wyrażenia:

$$4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4} - 1 + 1 = \frac{1}{4}$$

Niektóre sumy algebraiczne można zamienić na iloczyn wyrażeń poprzez wyłączenie wspólnego czynnika poza nawias. Wykorzystujemy wówczas prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania:

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

Zgodnie z powyższym wzorem otrzymujemy na przykład:

$$6x + 2y = 2 \cdot 3x + 2 \cdot y = 2 \cdot (3x + y) = 2(3x + y)$$

$$5y + 10y^2 - 15y^3 = 5y \cdot 1 + 5y \cdot 2y - 5y \cdot 3y^2 = 5y \cdot (1 + 2y - 3y^2) = 5y(1 + 2y - 3y^2)$$

Czasami przydatnym przekształceniem jest wyłączenie liczby (-1) przed nawias, np.:

$$-x - 1 = (-1) \cdot x + (-1) \cdot 1 = (-1)(x + 1)$$

$$-x^2 - 5x + 6 = (-1) \cdot x^2 + (-1) \cdot 5x - (-1) \cdot 6 = (-1)(x^2 + 5x - 6)$$

Zwykle po wyłączeniu liczby (-1) przed nawias stosujemy zapis uproszczony, np.:

$$\text{zamiast } (-1)(x + 1) \text{ zapisujemy } -(x + 1)$$

$$\text{zamiast } (-1)(x^2 + 5x - 6) \text{ zapisujemy } -(x^2 + 5x - 6)$$

Umiejętność wyłączania wspólnego czynnika poza nawias jest przydatna do rozkładania wyrażeń algebraicznych na czynniki.

Rozłożyć wyrażenie algebraiczne na czynniki oznacza przekształcić sumę algebraiczną w iloczyn co najmniej dwóch takich wyrażeń, że każde z nich zawiera co najmniej jedną literę.

Przykład 3.

Rozłożmy na czynniki wyrażenie algebraiczne:

a) $4x^3 - 2x^2$

b) $x(b + 3) + y(b + 3)$

c) $b(2x + y) - 2x - y$

Ad a) Jednomian $4x^3$ zapisujemy w postaci iloczynu $2x^2 \cdot 2x$ i wyłączamy $2x^2$ przed nawias:

$$4x^3 - 2x^2 = 2x^2 \cdot 2x - 2x^2 = 2x^2(2x - 1)$$

Ad b) Wyłączmy poza nawias wspólny czynnik $(b + 3)$:

$$x(b + 3) + y(b + 3) = (b + 3)(x + y)$$

Ad c) Wyłączmy poza nawias liczbę (-1) z wyrażenia $-2x - y$:

$$b(2x + y) - 2x - y = b(2x + y) - 1(2x + y)$$

Otrzymaliśmy różnicę dwóch wyrażeń, w których występuje taki sam czynnik $(2x + y)$. Zatem $b(2x + y) - 2x - y = (2x + y)(b - 1)$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Zapisz w postaci wyrażeń algebraicznych:

- iloczyn liczby a przez sumę liczb b i c ;
- iloraz podwojonej liczby a przez pierwiastek kwadratowy z liczby b ;
- sumę kwadratów dwóch kolejnych liczb parzystych;
- dodatnią różnicę kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych nieparzystych;
- kwadrat sumy potrojonej liczby x i trzeciej części liczby y ;
- sześcian różnicy liczby x i kwadratu liczby a .

2. Wykonaj mnożenie:

a) $(3 - a)(5 + b)$

b) $(2a + 3b)(a + 4b)$

c) $3(5a - 4)(2 - 7a)$

d) $(-3b + 2)(-b - 4)$

3. Wykonaj mnożenie i zapisz w postaci jednomianu:

a) $2xy(-3x^3y^4)$

b) $\frac{-2(x \cdot 4)}{3} \cdot x^2 \cdot (-6) \cdot x^5$

c) $(-4x^2)^3 \left[\frac{1}{2} x^5 (-x) \right]$

4. Wykonaj działania, a następnie przeprowadź redukcję jednomianów podobnych:

a) $(2x - 5)(x^3 + x^2) - 2x^4$

b) $6x + (1 - 3x)(7x - 9) - 2x$

c) $11x^2 - (2x - 7)(3x^2 - 4x)$

d) $28x^5 - (4x^2 - 9)(6 + 7x^3) + 20x^2$

5. Doprowadź wyrażenia do najprostszej postaci. Następnie oblicz ich wartość dla podanych obok liczb.

a) $[2 - (-a)](3a - a^2) - (a - 1)(-a^2); a = 0,5$

b) $4b^2 - (-3b^2 + 2b)(b - 4) + 8b(b - 1); b = -2$

c) $(2a - 1)(2a + 1 + a^2) - a^2(2a + 1); a = 2,5$

d) $(1 - x)(x^2 + x + 2) - x(x - 2)(2 - x); x = 3$

6. Rozwiąż równania:

a) $(x + 7)(2x - 6) = 2(x^2 + 4)$

b) $(3 - 5x)(1 - x) = 5x(x + 7)$

c) $(4 - x)(1 - x - 2x^2) - 2x^2(x - 3,5) = 0$

d) $2x^3 - 2x(x - 1)(x + 1) = 4(x + 5)$

7. Rozwiąż nierówności:

a) $(1 - 2x)(x - 1) \leq 2x(2 - x)$

b) $4x^2 - (2x - 1)(2x + 3) \geq x - 7$

c) $(3 + x)(3 + x) - x^2 > 2(3x + 1)$

d) $1 - (-2x + 1)(-x - 3) < (1 - 2x)x$

8. Wyłącz liczbę (-1) przed nawias:

a) $-4 - 2y$

b) $-2x + 3y$

c) $43x - 2y$

d) $x\sqrt{2} + 2y - 1$

9. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias:

a) $2x^3 - 4x^2$

b) $6xy + 3y^2$

c) $xy - (2xy)^2$

d) $24x^3y + 12x^3$

10. Wyłącz daną obok wyrażenia liczbę przed nawias:

a) $3x - 6y^2; 6$

b) $\frac{1}{2}x^3 + y^2; \frac{1}{2}$

c) $-2x + \frac{y}{3}; \frac{-1}{3}$

d) $x\sqrt{2} - 2y + z\sqrt{8}; \sqrt{2}$

11. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias:

a) $(a + 3)x + (a + 3)y$

b) $(2b - c)x - (2b - c)y^2$

c) $3(5 - y) + x^2(y - 5)$

d) $x^2(y + 1) - x(y + 1)$

12. Rozwiąż równania:

a) $(2x + 6)(x - 5) = 0$

b) $x(x + 1) + x(x + 9) = 0$

c) $2x(x + 1) - x(x + 6) = 0$

d) $3x(x - 7) - (x - 7) = 0$

e) $(2x + 3)(x + 1) - (x + 1)(x - 1) = 0$

f) $(x - 5)(x + 2) + (x + 2)(x + 2) = 0$

Wzory skróconego mnożenia stopnia 2.

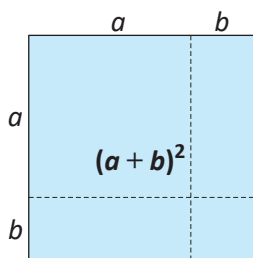
Zapiśmy wyrażenie $(a + b)^2$ w postaci sumy. Mamy:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

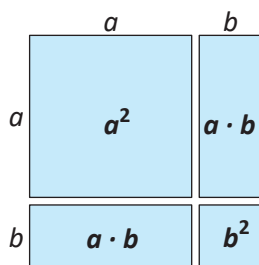
Otrzymaliśmy wzór na kwadrat sumy:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Dla liczb dodatnich a i b wzór ten otrzymamy również wtedy, gdy obliczymy pole kwadratu o boku mającym długość $(a + b)$ na dwa sposoby.



$$P = (a + b)^2$$



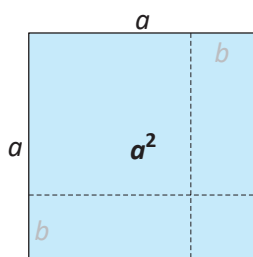
$$P = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

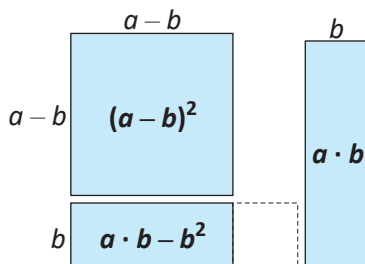
Podobnie można otrzymać wzór na kwadrat różnicy:

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Podamy interpretację geometryczną tego wzoru: obliczymy pole kwadratu o boku mającym długość a ($a > 0$ oraz $a > b > 0$) na dwa sposoby.



$$P = a^2$$



$$P = (a - b)^2 + ab + (ab - b^2)$$

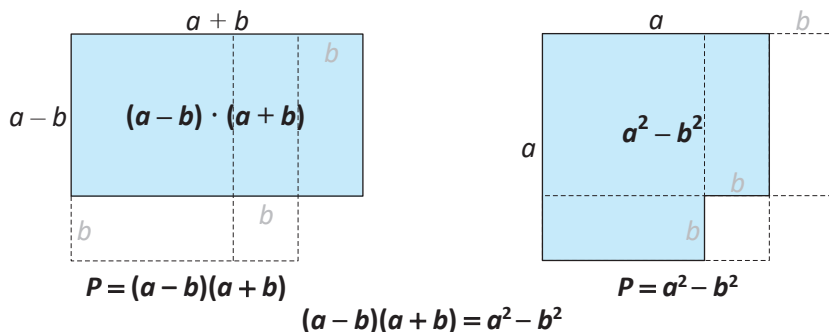
$$a^2 = (a - b)^2 + 2ab - b^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Mnożąc różnicę liczb a i b przez sumę liczb a i b , otrzymamy wzór na różnicę kwadratów:

$$(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Oto interpretacja geometryczna tego wzoru: pole prostokąta o bokach długości $(a - b)$ i $(a + b)$, gdzie $a > b > 0$, jest równe polu kwadratu o boku długości a pomniejszonemu o pole kwadratu o boku długości b .



Twierdzenie 1. Wzory skróconego mnożenia stopnia 2.

Dla dowolnych wyrażeń a, b prawdziwe są wzory:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ kwadrat sumy wyrażeń a i b jest równy sumie kwadratów tych wyrażeń, zwiększonej o podwojony iloczyn tych wyrażeń;

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ kwadrat różnicy wyrażeń a i b jest równy sumie kwadratów tych wyrażeń, zmniejszonej o podwojony iloczyn tych wyrażeń;

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ różnica kwadratów wyrażeń a i b jest równa iloczynowi różnicy tych wyrażeń przez sumę tych wyrażeń.

Przykład 1.

$$\begin{aligned} \text{a) } 301^2 &= (300 + 1)^2 = 300^2 + 2 \cdot 300 \cdot 1 + 1^2 = 90\,000 + 600 + 1 = 90\,601 \\ 49^2 &= (50 - 1)^2 = 50^2 - 2 \cdot 50 \cdot 1 + 1^2 = 2500 - 100 + 1 = 2401 \\ 35^2 - 25^2 &= (35 - 25)(35 + 25) = 10 \cdot 60 = 600 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (\sqrt{3} + 1)^2 &= (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 + 1^2 = 3 + 2\sqrt{3} + 1 = 4 + 2\sqrt{3} \\ (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 &= (\sqrt{5})^2 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 5 - 2\sqrt{10} + 2 = 7 - 2\sqrt{10} \\ (\sqrt{7} - 2\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{7} + 2\sqrt{2}) &= (\sqrt{7})^2 - (2\sqrt{2})^2 = 7 - 4 \cdot 2 = 7 - 8 = -1 \end{aligned}$$

Przykład 2.

Wykonamy mnożenie:

$$\begin{aligned} \text{a) } (2x + y)^2 &= (2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot y + y^2 = 4x^2 + 4xy + y^2 \\ \text{b) } (x^2 - 5z)^2 &= (x^2)^2 - 2 \cdot (x^2) \cdot (5z) + (5z)^2 = x^4 - 10x^2z + 25z^2 \\ \text{c) } (3x^2 + 4x)(3x^2 - 4x) &= (3x^2)^2 - (4x)^2 = 9x^4 - 16x^2 \end{aligned}$$

Wzory skróconego mnożenia są bardzo przydatne w rozkładaniu wyrażeń algebraicznych na czynniki.

Przykład 3.

Rozłóżmy dane wyrażenia na czynniki:

a) $x^2 + 2x + 1$

b) $25 - 10y + y^2$

c) $100x^2 - 49$

Ad a) Wyrażenie jest sumą kwadratów x^2 , 1^2 oraz podwojonego iloczynu liczb x i 1 , możemy więc skorzystać ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy:

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = (x + 1)^2$$

Ad b) Wykorzystamy wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy:

$$25 - 10y + y^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot y + y^2 = (5 - y)^2$$

Ad c) Wyrażenie jest różnicą kwadratów; korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów:

$$100x^2 - 49 = (10x)^2 - 7^2 = (10x - 7)(10x + 7)$$

Przykład 4.

Rozłóżmy dane wyrażenia na czynniki:

a) $16x^4 - 81$

b) $(7 + x)^2 - 25$

c) $16 - (x^2 - 6x + 9)$

$$\begin{aligned} \text{Ad a)} \quad 16x^4 - 81 &= (4x^2)^2 - 9^2 = (4x^2 - 9)(4x^2 + 9) = [(2x)^2 - 3^2] \cdot (4x^2 + 9) = \\ &= (2x - 3)(2x + 3)(4x^2 + 9) \end{aligned}$$

Wykorzystaliśmy dwukrotnie wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów. Sumy kwadratów $(4x^2 + 9)$ nie można rozłożyć na czynniki.

$$\text{Ad b)} \quad (7 + x)^2 - 25 = (7 + x)^2 - 5^2 = (7 + x - 5)(7 + x + 5) = (2 + x)(12 + x)$$

Zastosowaliśmy wzór na różnicę kwadratów.

Gdybyśmy wykorzystali wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy $(7 + x)^2$, to otrzymalibyśmy sumę algebraiczną $24 + 14x + x^2$. Nie byłoby łatwo zastąpić tej sumy iloczynem.

$$\text{Ad c)} \quad 16 - (x^2 - 6x + 9) = 4^2 - (x - 3)^2 = [4 - (x - 3)][4 + (x - 3)] = (7 - x)(1 + x)$$

Posłużyliśmy się wzorem na kwadrat różnicy i wzorem na różnicę kwadratów.

Wzory skróconego mnożenia stosuje się też do usuwania niewymierności z mianownika ułamka.

Przykład 5.

Usuniemy niewymierność z mianownika ułamka $\frac{3}{\sqrt{2}-1}$, a następnie oszacujemy jego wartość.

Zauważ, że jeśli pomnożymy mianownik $\sqrt{2}-1$ przez sumę $\sqrt{2}+1$, to otrzymamy w mianowniku liczbę wymierną:

$$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 2-1=1$$

Dlatego mnożymy licznik i mianownik ułamka przez $\sqrt{2} + 1$, czyli rozszerzamy ułamek.

$$\frac{3}{\sqrt{2}-1} = \frac{3(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{3\sqrt{2}+3}{1} = 3(1+\sqrt{2})$$

Łatwiej jest oszacować wartość liczby zapisanej w postaci $3(1+\sqrt{2})$ niż w postaci $\frac{3}{\sqrt{2}-1}$. Jeśli przyjmiemy $\sqrt{2} \approx 1,41$, wówczas $\sqrt{2} + 1 \approx 2,41$, zatem

$$3(1+\sqrt{2}) \approx 7,23$$

Przykład 6.

Wykażemy, że liczba $\frac{2}{3-\sqrt{5}} + \frac{2}{3+\sqrt{5}}$ jest naturalna.

Usuujemy niewymierność z mianowników ułamków:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3-\sqrt{5}} + \frac{2}{3+\sqrt{5}} &= \frac{2(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} + \frac{2(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = \\ &= \frac{6+2\sqrt{5}}{4} + \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{12}{4} = 3 \end{aligned}$$

Dana liczba jest równa 3; jest to liczba naturalna.

W niektórych przypadkach można usunąć niewymierność z mianownika, nie posługując się wzorami skróconego mnożenia.

Przykład 7.

Usuniemy niewymierność z mianownika ułamka $\frac{12}{\sqrt{15}}$.

Rozszerzamy dany ułamek, mnożąc licznik i mianownik przez $\sqrt{15}$. Otrzymujemy:

$$\frac{12}{\sqrt{15}} = \frac{12 \cdot \sqrt{15}}{\sqrt{15} \cdot \sqrt{15}} = \frac{12\sqrt{15}}{15} = \frac{4\sqrt{15}}{5}$$

Przykład 8.

Chcemy podnieść do kwadratu liczbę 95. Postępujemy tak:

Zasłaniamy liczbę 5, która jest w rzędzie jedności	Widzimy: 9
Liczbę, którą widzimy, mnożymy przez liczbę o 1 większą	Otrzymujemy: $9 \cdot 10 = 90$
Do otrzymanego wyniku dopisujemy z prawej strony 25	Otrzymujemy: 9025

Podobnie otrzymamy:

$$15^2 = 225 \quad (1 \cdot 2 = 2)$$

$$75^2 = 5625 \quad (7 \cdot 8 = 56)$$

$$205^2 = 42\,025 \quad (20 \cdot 21 = 420)$$

Zastanówmy się, z czego wynika taki sposób podnoszenia do kwadratu. Otóż każdą liczbę naturalną, która w rzędzie jedności ma 5, można zapisać w postaci

$$10r + 5 \quad \text{np. } 205 = 10 \cdot 20 + 5, \text{ w tym przypadku } r = 20.$$

Zatem

$$\begin{aligned} (10r + 5)^2 &= (10r)^2 + 2 \cdot 10r \cdot 5 + 5^2 = 100r^2 + 100r + 25 = \\ &= 100r(r + 1) + 25 \end{aligned}$$

Łatwo jest zauważyć, że zaprezentowana procedura podnoszenia do kwadratu przebiega zgodnie ze wzorem: $r(r + 1) \cdot 100 + 25$.

Przykład 9.

Wiedząc, że $x + y = 5$ i $x^2 + y^2 = 15$, obliczymy:

a) xy b) $(x - y)^2$

Ad a) Iloczyn xy występuje we wzorze na kwadrat sumy wyrażeń x i y :

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy, \quad \text{zatem}$$

$$5^2 = 15 + 2xy$$

$$25 = 15 + 2xy, \quad \text{skąd}$$

$$xy = 5$$

Ad b) Wartość wyrażenia możemy obliczyć na dwa sposoby. Zauważamy, że

$$(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy, \quad \text{skąd}$$

$$(x - y)^2 = 15 - 2 \cdot 5 = 15 - 10 = 5$$

Możemy też wykorzystać zależność

$$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$$

W tym przypadku mamy

$$(x - y)^2 = 5^2 - 4 \cdot 5 = 25 - 20 = 5$$

Otrzymaliśmy, że $xy = 5$ oraz $(x - y)^2 = 5$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Oblicz, korzystając z odpowiednich wzorów skróconego mnożenia:

a) 103^2

b) 51^2

c) 48^2

d) 99^2

2. Oblicz, korzystając z odpowiedniego wzoru skróconego mnożenia:

a) $21 \cdot 19$

b) $102 \cdot 98$

c) $37 \cdot 43$

d) $301 \cdot 299$

3. Wykonaj działanie:

a) $(2 + \sqrt{3})^2$

b) $(5 + \sqrt{2})^2$

c) $(2\sqrt{5} + 1)^2$

d) $(3\sqrt{2} + 3)^2$

4. Wykonaj działanie:

a) $(9 + b)^2$	b) $(a + 13)^2$	c) $(x + 14)^2$	d) $(\sqrt{3} + x)^2$
e) $(1 + 2z)^2$	f) $(3y + 8)^2$	g) $(4x + \sqrt{5})^2$	h) $(2\sqrt{7}a + 7b)^2$

5. Wykonaj działanie:

a) $(\sqrt{2} - 2)^2$	b) $(4\sqrt{3} - 7)^2$	c) $(11 - 5\sqrt{2})^2$	d) $(2\sqrt{2} - 2\sqrt{6})^2$
-----------------------	------------------------	-------------------------	--------------------------------

6. Wykonaj działanie:

a) $(a - 3)^2$	b) $(7 - b)^2$	c) $(x - 12)^2$	d) $(2\sqrt{2} - x)^2$
e) $(2z - 3y)^2$	f) $(5y - \sqrt{3})^2$	g) $(4x - \pi)^2$	h) $(\sqrt{3}x - \sqrt{6}y)^2$

7. Wykonaj działanie:

a) $(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})$	b) $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$
c) $(\sqrt{5} - 3)(\sqrt{5} + 3)$	d) $(2\sqrt{6} - 3\sqrt{3})(2\sqrt{6} + 3\sqrt{3})$
e) $(4 + 2\sqrt{8})(2\sqrt{8} - 4)$	f) $(\sqrt{5} + 5\sqrt{10})(5\sqrt{10} - \sqrt{5})$

8. Usuń niewymierność z mianownika ułamka:

a) $\frac{2}{\sqrt{3} - 1}$	b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$	c) $\frac{\sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}$
d) $\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$	e) $\frac{\sqrt{5} + 3}{\sqrt{5} - 3}$	f) $\frac{4 - 2\sqrt{7}}{\sqrt{7} + 5}$

9. Przedstaw odwrotność danej liczby w postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi.

a) $\sqrt{5} - 2$	b) $2\sqrt{2} - 3$	c) $4 + 2\sqrt{3}$
-------------------	--------------------	--------------------

10. Doprowadź wyrażenia do najprostszej postaci:

a) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$	b) $5y^4 - (2y^2 + 8)(2y^2 - 8)$
c) $(b + 3)^2 - (b - 3)^2$	d) $(2a + 7)^2 - (2a - 7)(2a + 7)$
e) $(6 - m)^2 + (2m + 3)^2 - 5m^2$	f) $2(3n + 5)^2 - 5(2n - 4)^2 + 30$

11. Wiadomo, że $xy = 20$ oraz $x^2 + y^2 = 41$. Oblicz $(x + y)^2$ oraz $(x - y)^2$.

12. Wiadomo, że $(x + y)^2 = 285$ oraz $(x - y)^2 = 41$. Oblicz $x^2 + y^2$ oraz xy .

13. Rozłóż wyrażenie na czynniki, korzystając z odpowiedniego wzoru skróconego mnożenia.

a) $x^2 - 121$	b) $4x^2 - 49$	c) $x^2 - 6x + 9$	d) $16 + 8x + x^2$
e) $4x^2 - 4x + 1$	f) $(2x + 1)^2 - x^2$	g) $4x^2 - (x + 5)^2$	h) $x^4 - 16$

14. Rozwiąż równania, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia:

a) $x^2 - 2x + 1 = 0$	b) $x^2 + 10x + 25 = 0$
c) $x^2 - 3 = 0$	d) $0,36 - 0,09x^2 = 0$
e) $9x^2 + 12x = -4$	f) $81x^2 + 1 = 18x$

Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym

Definicja 1.

Potęgą o wykładniku całkowitym ujemnym $(-n)$, $n \in \mathbf{N}_+$ i podstawie a różnej od zera nazywamy odwrotność potęgi a^n , czyli liczbę $\frac{1}{a^n}$.

Zapis symboliczny:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ gdzie } a \in \mathbf{R} - \{0\}, n \in \mathbf{N}_+$$

Zgodnie z definicją obliczamy:

$$(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8} \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

Zauważmy, że $\frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$, gdzie $a \neq 0$ i $n \in \mathbf{N}_+$. Dlatego też definicję potęgi o wykładniku całkowitym ujemnym możemy zapisać również tak:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n, \text{ gdzie } a \neq 0 \text{ i } n \in \mathbf{N}_+$$

Na podstawie tak sformułowanej definicji potęgę o wykładniku całkowitym ujemnym oblicza się łatwiej:

$$\left(\frac{2}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} = 12\frac{1}{4} \qquad \left(-\frac{1}{5}\right)^{-3} = (-5)^3 = -125$$

Twierdzenie 1. Własności potęg o wykładnikach całkowitych

Jeśli k i l są dowolnymi liczbami całkowitymi, a i b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi różnymi od zera, to:

- 1) $a^l \cdot a^k = a^{l+k}$
- 2) $a^l : a^k = a^{l-k}$
- 3) $(a^k)^l = a^{k \cdot l}$
- 4) $a^k \cdot b^k = (a \cdot b)^k$
- 5) $\frac{a^k}{b^k} = \left(\frac{a}{b}\right)^k$

Własności działań na potęgach o wykładnikach całkowitych wynikają bezpośrednio z własności działań na potęgach o wykładnikach naturalnych oraz z definicji potęgi o wykładniku całkowitym ujemnym.

Na przykład, wykażemy, że dla dowolnej liczby całkowitej k prawdziwa jest równość $a^k \cdot b^k = (a \cdot b)^k$. Jeśli $k \in \mathbf{N}$, to równość jest oczywista na podstawie twierdzenia 1 punkt 4, str. 74. Pozostaje pokazać, że dana równość jest prawdziwa, jeśli $k \in \mathbf{Z}_-$. Niech $k = -n$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$; wówczas mamy:

$$a^k \cdot b^k = a^{-n} \cdot b^{-n} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{b^n} = \frac{1}{a^n \cdot b^n} = \frac{1}{(a \cdot b)^n} = (a \cdot b)^{-n} = (a \cdot b)^k$$

$\downarrow$ z def. 1 $\downarrow$ z tw. 1 str. 74 $\downarrow$ z def. 1

Podobnie można udowodnić własność 5).

Wykazanie pozostałych trzech własności wymaga za każdym razem rozpatrzenia kilku przypadków. Na przykład prawdziwość wzoru $(a^k)^l = a^{kl}$, gdzie $k, l \in \mathbf{Z}$, uzasadniamy w czterech krokach: a) liczby k, l są naturalne, b) $k \in \mathbf{Z}_-, l \in \mathbf{N}$, c) $k \in \mathbf{N}, l \in \mathbf{Z}_-$, d) obie liczby k, l są całkowite ujemne. Przypadek a) wynika bezpośrednio z twierdzenia 1 punkt 3), str. 74. Rozpatrujemy przypadki b), c) i d). Niech $n, m \in \mathbf{N}$ oraz

$$\text{b) } k = -n \text{ i } l = m, \text{ to } (a^k)^l = (a^{-n})^m = \left(\frac{1}{a^n}\right)^m = \frac{1}{(a^n)^m} = \frac{1}{a^{n \cdot m}} = a^{-(n \cdot m)} = a^{-n \cdot m} = a^{k \cdot l}$$

$\downarrow$ z def. 1 $\downarrow$ z tw. 1 str. 74 $\downarrow$ z def. 1

$$\text{c) } k = n \text{ i } l = -m, \text{ to } (a^k)^l = (a^n)^{-m} = \frac{1}{(a^n)^m} = \frac{1}{a^{n \cdot m}} = a^{-(n \cdot m)} = a^{n(-m)} = a^{k \cdot l}$$

$\downarrow$ z def. 1 $\downarrow$ z tw. 1 str. 74 $\downarrow$ z def. 1

$$\text{d) } k = -n \text{ i } l = -m, \text{ to } (a^k)^l = (a^{-n})^{-m} = \left(\frac{1}{a^n}\right)^{-m} = (a^n)^m = a^{n \cdot m} = a^{(-n)(-m)} = a^{k \cdot l}$$

$\downarrow$ z def. 1 $\downarrow$ z def. 1 $\downarrow$ z tw. 1 str. 74

Przykład 1.

Obliczymy wartość wyrażenia: $\left[\left(2^{-3} - \frac{3}{8} \right)^{-1} + \left(\frac{1}{2} \right)^{-4} \right]^{-2}$

$$\begin{aligned} \left[\left(2^{-3} - \frac{3}{8} \right)^{-1} + \left(\frac{1}{2} \right)^{-4} \right]^{-2} &= \left[\left(\left(\frac{1}{2} \right)^3 - \frac{3}{8} \right)^{-1} + 2^4 \right]^{-2} = \left[\left(\frac{1}{8} - \frac{3}{8} \right)^{-1} + 16 \right]^{-2} = \\ &= \left[\left(-\frac{1}{4} \right)^{-1} + 16 \right]^{-2} = (-4 + 16)^{-2} = \left(\frac{1}{12} \right)^2 = \frac{1}{144} \end{aligned}$$

Wartość wyrażenia jest równa $\frac{1}{144}$.

Przykład 2.

Wykonamy mnożenie: $(x^{-2} + 3x^{-1})(x^{-1} + x - 2)$.

Najpierw pomnożymy każdy wyraz pierwszej sumy algebraicznej przez każdy wyraz drugiej sumy algebraicznej. Następnie wykonamy działania na potęgach i przeprowadzimy redukcję wyrazów podobnych. Wyrażenie ma sens, jeśli $x \neq 0$, bo $x^{-1} = \frac{1}{x}$ i $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$. Otrzymujemy:

$$(x^{-2} + 3x^{-1})(x^{-1} + x - 2) = x^{-2} \cdot x^{-1} + x^{-2} \cdot x + x^{-2} \cdot (-2) + 3x^{-1} \cdot x^{-1} + 3x^{-1} \cdot x + 3x^{-1} \cdot (-2) = x^{-3} + x^{-1} - 2x^{-2} + 3x^{-2} + 3x^0 - 6x^{-1} = x^{-3} + x^{-2} - 5x^{-1} + 3$$

Wyrażenie można zapisać w postaci $x^{-3} + x^{-2} - 5x^{-1} + 3$, jeśli $x \neq 0$.

Notacja wykładnicza

Umiejętność posługiwania się potęgami o wykładnikach całkowitych umożliwia zapisywanie liczb w tzw. notacji wykładniczej (notacji naukowej). Każdą liczbę $x > 0$ ($x < 0$) można zapisać w postaci $x = a \cdot 10^n$ ($x = -a \cdot 10^n$), gdzie $a \in \langle 1, 10 \rangle$, $n \in \mathbb{Z}$. Taki rodzaj notacji stosuje się często w kalkulatorach i w komputerach. Na przykład zapis na wyświetlaczu

7.1258

E-27

oznacza liczbę $7,1258 \cdot 10^{-27}$

natomiast zapis

-2.31596

E+15

oznacza liczbę $-2,31596 \cdot 10^{15}$.

Mając dwie liczby zapisane w postaci wykładniczej, możemy łatwo stwierdzić, ile razy jedna liczba jest większa od drugiej.

Przykład 3.

Porównamy, ile razy masa największego ssaka jest większa od masy najmniejszego. Płetwal błękitny jest ssakiem o największej masie, która może dochodzić nawet do 190 ton. Wśród ssaków najmniejszą masę (tylko 2 gramy) ma ryjówka etruska.

$$190 \text{ ton} = 190\,000 \text{ kg} = 1,9 \cdot 10^5 \text{ kg}$$

$$2 \text{ g} = 0,002 \text{ kg} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

$$\frac{1,9 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^{-3}} = 0,95 \cdot 10^{5-(-3)} = 0,95 \cdot 10^8 = 9,5 \cdot 10^7$$

Płetwal błękitny może być nawet 95 milionów razy cięższy od ryjówki etruskiej.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Oblicz:

a) 3^{-4}

b) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-3}$

c) $\frac{-5^{-2}}{4}$

d) $\left(3\frac{1}{9}\right)^{-1}$

e) $-0,25^{-2}$

f) $(-0,1)^{-4}$

g) $\left(-1\frac{1}{2}\right)^{-6}$

h) $\sqrt{2^{-6}}$

2. Oblicz:

a) $(0,25)^{-3} + 2 \cdot (-0,5)^2$

b) $3 \cdot (1,125)^{-2} + 9^{-2}$

c) $-5 \cdot (-1,5)^{-3} + 14 \cdot 3^{-3}$

d) $\left(2\frac{1}{2}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{4}{25}\right)^{-3}$

e) $\left(2\frac{1}{3}\right)^6 : \left(1\frac{32}{49}\right)^{-3}$

f) $\left(1\frac{2}{9}\right)^{-1} : \left(3\frac{2}{3}\right)^{-2}$

3. Oblicz, stosując prawa działań na potęgach:

a) $2^7 \cdot 2^{-5}$

b) $0,3^{-9} \cdot 0,3^8$

c) $(\sqrt{2})^{-7} \cdot (\sqrt{2^3})^5$

d) $5^{-20} : 5^{-18}$

e) $(\sqrt[3]{3})^{-11} : (\sqrt[3]{3})^{-5}$

f) $\left(1\frac{1}{5}\right)^{-27} : (-1,2^{-2})^{13}$

g) $(0,25)^{-5} \cdot 2^{-5}$

h) $(0,7)^{-3} \cdot \left(2\frac{2}{49}\right)^{-3}$

i) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-9} \cdot \left(3\frac{3}{8}\right)^{-3}$

j) $(-3)^{-7} : 6^{-7}$

k) $(0,8)^{-5} : (-0,4)^{-5}$

l) $(\sqrt[3]{72})^{-4} : (\sqrt[3]{9})^{-4}$

4. Oblicz:

a) $[8^{-6} : (1,6)^{-6}] : 5^{-5}$

b) $[(2,7)^{-3} : (0,9)^{-3}]^2 : 3^{-7}$

c) $(0,125)^{-4} \cdot 8^{-4} - (0,25)^{-6} \cdot 2^{-12}$

d) $(2^{-1} + 3^{-1} + 6^{-1})^{-1}$

e) $(0,5^{-2} + 0,2^{-2})^{-2}$

f) $[(0,25 \cdot 7)^{-1} + (5^{-1} + 2^{-1})^{-1}]^{-1}$

5. Zamień jednostki i zastosuj notację wykładniczą, według następującego wzoru: $15 \text{ m} = 1,5 \cdot 10^1 \text{ m} = 1,5 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{ km} = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ km}$

a) $10 \text{ cm} = 1 \cdot \dots \text{ km}$

b) $5 \text{ mm} = 5 \cdot \dots \text{ m}$

c) $13 \text{ mm} = 1,3 \cdot \dots \text{ km}$

d) $7 \text{ g} = 7 \cdot \dots \text{ kg}$

e) $0,025 \text{ kg} = 2,5 \cdot \dots \text{ t}$

f) $15 \text{ dag} = 1,5 \cdot \dots \text{ t}$

g) $3,4 \text{ cm}^2 = 3,4 \cdot \dots \text{ km}^2$

h) $25 \text{ mm}^2 = 2,5 \cdot \dots \text{ m}^2$

i) $670 \text{ m}^2 = 6,7 \cdot \dots \text{ ha}$

j) $1 \text{ mm}^3 = 1 \cdot \dots \text{ dm}^3$

k) $45 \text{ cm}^3 = 4,5 \cdot \dots \text{ m}^3$

l) $850 \text{ mm}^3 = 8,5 \cdot \dots \text{ dm}^3$

6. Dorosły słoń afrykański waży 6 ton, zaś chomik syryjski waży 120 g. Wyraż wagę słonia i chomika w kilogramach (w notacji wykładniczej), a następnie podaj, ile razy słoń afrykański jest cięższy od chomika syryjskiego.

7. Najmniejsza jaszczurka to gekon z Wysp Dziewiczych, który osiąga długość 35 mm. Wyraż długość tego gekona w metrach (w notacji wykładniczej). Ile razy anakonda zielona (najdłuższy wąż świata, którego długość dochodzi do 10,5 m) jest dłuższa od tego gekona?

8. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenie.

a) $x^{-2} \cdot (2x^{-1} + x^2)$

b) $(x^{-2} - x^{-1})(2x + x^2)$

c) $(y^{-3} + y^{-2} + y^{-1})(y^2 - y^3)$

d) $(x^{-1} + x)(x^{-1} - x)(x^{-2} + x^2)$

e) $(y^2 + y^{-2})^2$

f) $(3y^{-1} - y)^2(3y^{-1} + y)^2$

Potęga o wykładniku wymiernym

Na początku tego tematu zajmiemy się szczególnym przypadkiem potęgi o wykładniku wymiernym, czyli potęgą o wykładniku $\frac{1}{n}$, gdzie n jest liczbą naturalną większą od 1.

Definicja 1.

Potęgą o wykładniku $\frac{1}{n}$, gdzie $n \in \mathbf{N} - \{0, 1\}$ i nieujemnej podstawie a ($a \geq 0$), nazywamy pierwiastek arytmetyczny stopnia n z liczby a .

Zapis symboliczny:

$$\text{Jeśli } a \geq 0, \text{ to } a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Mamy:

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}, \quad \text{bo} \quad \frac{1}{3} \geq 0 \text{ i } \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$144^{\frac{1}{2}} = \sqrt{144} = 12, \quad \text{bo} \quad 12 \geq 0 \text{ i } 12^2 = 144$$

$$\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}, \quad \text{bo} \quad \frac{1}{3} \geq 0 \text{ i } \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

$$125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5, \quad \text{bo} \quad 5 \geq 0 \text{ i } 5^3 = 125$$

$$256^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{256} = 4, \quad \text{bo} \quad 4 \geq 0 \text{ i } 4^4 = 256$$

$$0^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{0} = 0, \quad \text{bo} \quad 0 \geq 0 \text{ i } 0^5 = 0$$

Przykład 1.

Obliczymy wartość wyrażeń:

$$\text{a) } \left(16^{\frac{1}{4}} - 3 \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right) \left(16^{\frac{1}{4}} + 3 \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right) \qquad \text{b) } \left[\left(2 - 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(2 + 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \right]^2$$

Ad a) Wykonując obliczenia, zamienimy potęgi na pierwiastki i wykorzystamy wzór skróconego mnożenia $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$:

$$\begin{aligned} \left(16^{\frac{1}{4}} - 3 \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right) \left(16^{\frac{1}{4}} + 3 \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right) &= \left(\sqrt[4]{16} - 3\sqrt{2}\right) \left(\sqrt[4]{16} + 3\sqrt{2}\right) = \\ &= (2 - 3\sqrt{2})(2 + 3\sqrt{2}) = 2^2 - (3\sqrt{2})^2 = 4 - 18 = -14 \end{aligned}$$

Wartość wyrażenia wynosi -14 .

Ad b) Zamieniamy potęgi na pierwiastki. Następnie korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, a potem ze wzoru $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Mamy:

$$\begin{aligned} & \left[\left(2 - 3^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(2 + 3^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 = \left[\sqrt{2 - \sqrt{3}} - \sqrt{2 + \sqrt{3}} \right]^2 = \\ & = \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}} \right)^2 - 2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} + \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} \right)^2 = \\ & = 2 - \sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} + 2 + \sqrt{3} = 4 - 2 \cdot \sqrt{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \\ & = 4 - 2\sqrt{4 - 3} = 4 - 2\sqrt{1} = 4 - 2 = 2 \end{aligned}$$

Wartość wyrażenia wynosi 2.

Omówiliśmy już szczegółowe przypadki potęg o wykładniku wymiernym – potęgę o wykładniku całkowitym oraz potęgę, której wykładnik jest odwrotnością liczby naturalnej dodatniej. Teraz podamy określenie potęgi o dowolnym wykładniku wymiernym.

Definicja 2.

Potęę o wykładniku wymiernym określamy następująco:

- a) $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a} \right)^m$, gdzie $a \geq 0$, $n \in \mathbf{N} - \{0, 1\}$, $m \in \mathbf{N}_+$
- b) $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$, gdzie $a > 0$, $n \in \mathbf{N} - \{0, 1\}$, $m \in \mathbf{N}_+$

Powstaje naturalne pytanie, czy powyższa definicja potęgi o wykładniku wymiernym jest poprawna. Wiadomo przecież, że każdą liczbę wymierną można zapisać za pomocą nieskończenie wielu ułamków, np.: $\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{12}{15} = \frac{32}{40} = \dots$. Czy zatem potęgi $2^{\frac{4}{5}}, 2^{\frac{8}{10}}, 2^{\frac{12}{15}}, 2^{\frac{32}{40}}$ mają tę samą wartość? Okazuje się, że tak. Można udowodnić, że wartość potęgi o dodatniej podstawie i wykładniku wymiernym nie zależy od tego, jakim ułamkiem przedstawimy tę liczbę wymierną.

UWAGA: Jeśli wykładnik potęgi jest liczbą całkowitą, to zapisujemy ją w postaci całkowitej, a nie w postaci ułamka, czyli np.: 5 zamiast $\frac{10}{2}$.

Przykład 2.

Obliczmy potęgi o wykładniku wymiernym:

$$16^{\frac{3}{4}} = \left(\sqrt[4]{16} \right)^3 = 2^3 = 8$$

$$125^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{125} \right)^2 = 5^2 = 25$$

$$\left(\frac{1}{8} \right)^{\frac{5}{3}} = \left[\left(\frac{1}{8} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^5 = \left(\frac{1}{2} \right)^5 = \frac{1}{32}$$

$$\left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}} \right)^3 = 2^3 = 8$$

$$81^{-\frac{3}{4}} = \left(\frac{1}{81} \right)^{\frac{3}{4}} = \left[\left(\frac{1}{81} \right)^{\frac{1}{4}} \right]^3 = \left(\frac{1}{3} \right)^3 = \frac{1}{27}$$

$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \right)^{\frac{2}{3}} = \left[\left(\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \right)^2} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$$

Potęgi o wykładnikach wymiernych mają własności analogiczne do potęg o wykładnikach całkowitych.

Twierdzenie 1. Własności potęg o wykładnikach wymiernych

Dla dowolnych liczb wymiernych x, y oraz dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b prawdziwe są równości:

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

2) $a^x : a^y = a^{x-y}$

3) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

4) $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$

5) $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b} \right)^x$

Przykład 3.

Zgodnie z twierdzeniem 1. obliczamy:

$$5^2 \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 5^{2+\frac{1}{2}} = 5^{\frac{5}{2}} = 25$$

$$8^{\frac{1}{2}} : 8^{\frac{1}{6}} = 8^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}} = 8^{\frac{3-1}{6}} = 8^{\frac{2}{6}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\left(16^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{-2}{3}} = 16^{\frac{3 \cdot (-2)}{4 \cdot 3}} = 16^{\frac{-1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$$

$$3^{\frac{1}{4}} \cdot 27^{\frac{1}{4}} = (3 \cdot 27)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3$$

$$\frac{12^{0,5}}{3^{0,5}} = \left(\frac{12}{3}\right)^{0,5} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$$

Przykład 4.

Zapiszemy wyrażenie $\frac{3^3 \sqrt[3]{3} \cdot 9^{\frac{4}{3}} \cdot 27^{-1,5}}{81^{-\frac{3}{4}} \cdot 243^{\frac{2}{5}}}$ w postaci potęgi o podstawie 3 i wykładniku wymiernym.

$$\frac{3^3 \sqrt[3]{3} \cdot 9^{\frac{4}{3}} \cdot 27^{-1,5}}{81^{-\frac{3}{4}} \cdot 243^{\frac{2}{5}}} = \frac{3 \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot (3^2)^{\frac{4}{3}} \cdot (3^3)^{-1,5}}{(3^4)^{-\frac{3}{4}} \cdot (3^5)^{\frac{2}{5}}} = \frac{3 \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{8}{3}} \cdot 3^{-4,5}}{3^{-3} \cdot 3^2} = \frac{3^{-\frac{1}{2}}}{3^{-1}} = 3^{\frac{1}{2}}$$

Wartość wyrażenia jest równa $3^{\frac{1}{2}}$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Oblicz:

a) $49^{\frac{1}{2}}$	$8^{\frac{1}{3}}$	$0,0016^{\frac{1}{4}}$	$\left(\frac{1}{128}\right)^{\frac{1}{7}}$	$0,00001^{\frac{1}{5}}$
b) $64^{\frac{4}{3}}$	$81^{\frac{3}{4}}$	$243^{0,2}$	$32^{0,8}$	$0,25^{1,5}$
c) $4^{\frac{-1}{2}}$	$0,125^{\frac{-2}{3}}$	$0,36^{\frac{-3}{2}}$	$625^{-0,75}$	$0,16^{-2,5}$

2. Oblicz wartość potęgi według wzoru: $64^{\frac{1}{6}} = \left(64^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$. Możesz skorzystać z funkcji pierwiastka kwadratowego na kalkulatorze.

a) $81^{\frac{1}{4}}$	b) $125^{\frac{1}{6}}$	c) $1024^{\frac{1}{10}}$	d) $0,0256^{\frac{-1}{8}}$
e) $0,2401^{\frac{1}{4}}$	f) $6561^{\frac{1}{8}}$	g) $4096^{\frac{1}{6}}$	h) $(6,5536 \cdot 10^4)^{\frac{1}{8}}$
i) $0,0016^{\frac{-1}{4}}$	j) $\left(\frac{256}{625}\right)^{\frac{-3}{4}}$	k) $\left(11\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$	l) $\left(11\frac{25}{64}\right)^{\frac{-5}{6}}$

3. Oblicz, korzystając z własności potęg o wykładnikach wymiernych:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} 5^{\frac{2}{3}} \cdot 0,2^{\frac{2}{3}} & \text{b)} 4^{\frac{1}{5}} \cdot 8^{\frac{1}{5}} & \text{c)} 3^{\frac{5}{4}} \cdot 27^{\frac{5}{4}} & \text{d)} 1,2^{1,5} \cdot 0,3^{1,5} \\ \text{e)} 72^{\frac{1}{2}} : 8^{\frac{1}{2}} & \text{f)} 3^{0,25} : 48^{0,25} & \text{g)} 6^{\frac{-5}{2}} : 24^{\frac{-5}{2}} & \text{h)} 200^{\frac{2}{3}} : 0,2^{\frac{2}{3}} \\ \text{i)} 2,5^{\frac{3}{4}} \cdot 2,5^{\frac{5}{4}} & \text{j)} 81^{\frac{1}{3}} \cdot 81^{\frac{1}{6}} & \text{k)} \left(27^{\frac{1}{6}}\right)^{-2} & \text{l)} \left(49^{\frac{1}{5}}\right)^{2,5} \end{array}$$

4. Oblicz:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \left(3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-1,25} : 3^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{3}} & \text{b)} \left(7^{-0,7} : 7^{\frac{2}{5}} \cdot 7^{-0,9}\right)^{\frac{1}{2}} & \text{c)} 5^{-\frac{4}{3}} : 25^{-\frac{3}{2}} \cdot 0,2^{\frac{2}{3}} \\ \text{d)} 0,5^{-1} \cdot 4^{0,7} \cdot 0,25^{-0,3} & \text{e)} \left(4^{\frac{1}{3}} \cdot 0,5^{-\frac{1}{3}}\right)^{-2} & \text{f)} \left[\left(6^{\frac{1}{3}}\right)^2 : 6^{-\frac{1}{3}}\right]^2 : 4^{0,5} \end{array}$$

5. Zapisz liczbę w postaci jednej potęgi:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} 3\sqrt{3} & \text{b)} \sqrt{2\sqrt{2}} & \text{c)} 4\sqrt[3]{4 \cdot \sqrt[3]{4}} \\ \text{d)} \sqrt{6 \cdot \sqrt[3]{36}} & \text{e)} 5\sqrt[3]{25 : \sqrt{5}} & \text{f)} \sqrt[4]{7} \cdot \sqrt{7 : \sqrt[4]{7}} \end{array}$$

6. Zapisz liczbę w postaci jednej potęgi:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} 7 \cdot 10^{\frac{1}{2}} + 10^{\frac{1}{2}} \cdot 3 & \text{b)} 4^{\frac{2}{3}} + 12 \cdot 4^{-\frac{1}{3}} & \text{c)} 2^{4,5} - 12 \cdot 2^{0,5} \\ \text{d)} 3^{\frac{1}{2}} \cdot 18 + 3^{2,5} & \text{e)} 6^{\frac{2}{3}} + 25^{\frac{1}{2}} \cdot 36^{\frac{1}{3}} & \text{f)} 45 \cdot 5^{0,25} + 0,5^{-4} \cdot \sqrt[4]{5^5} \end{array}$$

7. Wiedząc, że przybliżenie liczby niewymiernej $10^{-0,25}$ jest równe 0,562386, wyznacz z dokładnością do trzech miejsc po przecinku przybliżenia liczb:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} 10^{0,75} & \text{b)} 10^{-\frac{5}{4}} & \text{c)} 10^{-2,25} & \text{d)} 10^{\frac{11}{4}} \end{array}$$

8. Oblicz wartość wyrażenia:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \left(7^{\frac{1}{2}} + 2\right) \left(7^{\frac{1}{2}} - 2\right) & \text{b)} \left(5^{\frac{1}{2}} + 3\right)^2 & \text{c)} \left(3^{\frac{1}{2}} - 6^{\frac{1}{2}}\right)^2 \\ \text{d)} \left(9^{\frac{-1}{4}} - 3^{-1}\right) \left(9^{\frac{-1}{4}} + 3^{-1}\right) & \text{e)} \left(25^{\frac{1}{4}} - 4^{\frac{1}{4}}\right)^2 & \text{f)} \left(8^{\frac{1}{2}} + 12^{\frac{1}{2}}\right)^2 \end{array}$$

Potęga o wykładniku rzeczywistym

Znasz już potęgę o dodatniej podstawie i wykładniku wymiernym.

Pojęcie potęgi o wykładniku niewymiernym omówimy na przykładzie potęgi 5^π . Liczba π jest liczbą niewymierną, więc jej rozwinięcie dziesiętne jest nieskończone i nieokresowe:

$$\pi = 3,141592653589793238462643383...$$

Rozpatrzmy kolejne przybliżenia z niedomiarem liczby π , z dokładnością do jedności, jednej dziesiątej, jednej setnej itd. Mamy więc:

$$3 \quad 3,1 \quad 3,14 \quad 3,141 \quad 3,1415 \quad 3,14159 \quad \text{itd.}$$

Obliczmy, korzystając z kalkulatora, potęgi o podstawie 5 i wykładnikach wymiernych, będących kolejnymi przybliżeniami liczby π .

potęga	rozwinięcie dziesiętne potęgi
5^3	125
$5^{3,1}$	146,827367...
$5^{3,14}$	156,590645...
$5^{3,141}$	156,842871...
$5^{3,1415}$	156,969136...
$5^{3,14159}$	156,991874...
$5^{3,141592}$	156,992380...
$5^{3,1415926}$	156,992531...
...	...

Analizując liczby w drugiej kolumnie, łatwo zauważyć, że kolejne liczby coraz mniej się od siebie różnią. Te liczby „zbliżają się” do pewnej liczby rzeczywistej. Tę właśnie liczbę oznaczamy jako 5^π .

$$5^\pi = 156,992545...$$

Okazuje się, że jeśli rozpatrzylibyśmy dowolny, inny ciąg przybliżeń liczby π , np. z nadmiarem:

$$4 \quad 3,2 \quad 3,15 \quad 3,142 \quad 3,1416 \quad \text{itd.,}$$

to wartości potęg 5^4 , $5^{3,2}$, $5^{3,15}$, $5^{3,142}$, $5^{3,1416}$, ... też zbliżałyby się do tej samej liczby, określonej jako 5^π .

Podobnie jak w powyższym przykładzie, określić można potęgę o dowolnej podstawie dodatniej i dowolnym wykładniku niewymiernym dodatnim.

Jeśli q jest liczbą niewymierną dodatnią, natomiast a liczbą dodatnią, to potęgę a^{-q} określamy następująco:

$$a^{-q} = \frac{1}{a^q}$$

Potęgi o dodatnich podstawach i niewymiernych wykładnikach mają te same własności, które mają potęgi o wykładnikach wymiernych, w tym naturalnych i całkowitych. Prawdziwe jest więc następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. Własności potęg o wykładnikach rzeczywistych

Jeśli a, b są liczbami rzeczywistymi dodatnimi i p, r są liczbami rzeczywistymi, to:

1) $a^r \cdot a^p = a^{r+p}$

2) $a^r : a^p = a^{r-p}$

3) $(a^r)^p = a^{r \cdot p}$

4) $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$

5) $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$

Przykład 1.

$$4^{3\sqrt{5}} \cdot 8^{1-2\sqrt{5}} = 2^{6\sqrt{5}} \cdot 2^{3-6\sqrt{5}} = 2^{6\sqrt{5}+3-6\sqrt{5}} = 2^3 = 8$$

$$5^2 + \sqrt{3} : 5^{3+\sqrt{3}} = 5^{(2+\sqrt{3})-(3+\sqrt{3})} = 5^{2+\sqrt{3}-3-\sqrt{3}} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$$

$$\left(\sqrt[3]{7^{\sqrt{3}}}\right)^{\sqrt{3}} = \left(\sqrt[3]{7}\right)^{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \left(\sqrt[3]{7}\right)^3 = 7$$

$$(2-\sqrt{3})^\pi (2+\sqrt{3})^\pi = \left[(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})\right]^\pi = [4-3]^\pi = 1^\pi = 1$$

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Oblicz:

a) $\left(\sqrt{2^{\sqrt{6}}}\right)^{\sqrt{6}}$

b) $\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{2}}$

c) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{18}}$

d) $\left(\sqrt[3]{25^{\sqrt{3}}}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

e) $\left(0,2^{\sqrt{3}}\right)^{-\sqrt{3}}$

f) $\left(\sqrt{7^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{8}}$

2. Oblicz:

a) $27^{4\sqrt{7}} \cdot 81^{0,5-3\sqrt{7}}$

b) $16^{5\sqrt[3]{6}} : 4^{2\sqrt[3]{750}}$

c) $\left[\left(3-\sqrt{5}\right)^{\sqrt{2}} \left(3+\sqrt{5}\right)^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}}$

3. Korzystając z podanego przybliżenia wartości pierwiastka, oblicz (bez użycia kalkulatora) przybliżoną wartość potęgi:

a) $16^{\sqrt{3}}$, $\sqrt{3} \approx 1,75$

b) $243^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2} \approx 1,4$

c) $0,0001^{-\sqrt{5}}$, $\sqrt{5} \approx 2,25$

Określenie logarytmu

Wiesz, że liczbę 4 należy podnieść do potęgi 2, aby otrzymać 16. Natomiast liczbę 4 należy podnieść do potęgi $\frac{1}{2}$, aby otrzymać 2. A do jakiej potęgi należy podnieść liczbę 4, by otrzymać 12? Widać, że to nie będzie taka „ładna” liczba, jak w poprzednich dwóch przypadkach. W takiej sytuacji wygodnie jest posłużyć się logarytmem.

Definicja 1.

Logarytmem liczby dodatniej b przy podstawie a , dodatniej i różnej od jedności, nazywamy liczbę c , do której należy podnieść podstawę a , aby otrzymać liczbę b .

Zapis symboliczny:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b, \text{ gdzie } a > 0, a \neq 1 \text{ i } b > 0$$

$$\log_a b = c$$

Wracając do pytania z początku tematu: aby otrzymać 12, liczbę 4 należy podnieść do potęgi $\log_4 12$ ($= 1,7924812503\dots$).

Przykład 1.

$\log_2 8 = 3,$	bo	$2^3 = 8$
$\log_2 2 = 1,$	bo	$2^1 = 2$
$\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2},$	bo	$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$
$\log_2 1 = 0,$	bo	$2^0 = 1$
$\log_2 \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = -\frac{2}{3},$	bo	$2^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$
$\log_2 \frac{1}{4} = -2,$	bo	$2^{-2} = \frac{1}{4}$

Ważną rolę w matematyce i naukach matematyczno-przyrodniczych odgrywa m.in. logarytm przy podstawie 10, nazywany **logarytmem dziesiętnym**. Logarytm dziesiętny liczby b oznaczamy $\log b$.

Przykład 2.

$$\begin{aligned}
\log 0,001 &= -3, & \text{bo } 10^{-3} &= 0,001 \\
\log 0,1 &= -1, & \text{bo } 10^{-1} &= 0,1 \\
\log 1 &= 0, & \text{bo } 10^0 &= 1 \\
\log 2 &= 0,301029995663... & (\text{wartość obliczona na kalkulatorze}) \\
\log 10 &= 1, & \text{bo } 10^1 &= 10 \\
\log 11 &= 1,041392685158... & (\text{wartość obliczona na kalkulatorze}) \\
\log 100 &= 2, & \text{bo } 10^2 &= 100 \\
\log 100\,000 &= 5, & \text{bo } 10^5 &= 100\,000
\end{aligned}$$

Bezpośrednio z definicji wynikają następujące własności logarytmu:

Twierdzenie 1. Podstawowe własności logarytmów

Jeśli $a \in \mathbf{R}_+ - \{1\}$, $b \in \mathbf{R}_+$ i $r \in \mathbf{R}$, to:

- a) $\log_a a = 1$
- b) $\log_a 1 = 0$
- c) $\log_a a^r = r$
- d) $a^{\log_a b} = b$.

Dowód własności d):

Oznaczmy $\log_a b = c$; wówczas na podstawie definicji logarytmu możemy zapisać:

$$a^c = b, \text{ stąd otrzymujemy } a^{\log_a b} = b$$

Przykład 3.

$$\pi^{\log_{\pi} 7} = 7 \qquad 1,9^{\log_{1,9} 25} = 25$$

A oto kolejne, ważne własności logarytmów:

Twierdzenie 2. Własności logarytmów

Jeśli $a, b \in \mathbf{R}_+ - \{1\}$, $c, x, y \in \mathbf{R}_+$ i $r \in \mathbf{R}$, to:

- a) $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- b) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- c) $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$
- d) $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$.

Dowód:

Pierwsze trzy wzory wynikają bezpośrednio z własności działań na potęgach:

$$a^d \cdot a^e = a^{d+e} \qquad \frac{a^d}{a^e} = a^{d-e} \qquad (a^e)^r = a^{r \cdot e}$$

Jeśli bowiem oznaczymy $\log_a x = d$ i $\log_a y = e$, to zgodnie z definicją logarytmu otrzymujemy $x = a^d$ oraz $y = a^e$.

Zatem:

$$\text{a) } \log_a(x \cdot y) = \log_a(a^d \cdot a^e) = \log_a a^{d+e} = d + e = \log_a x + \log_a y$$

$$\text{b) } \log_a \frac{x}{y} = \log_a \frac{a^d}{a^e} = \log_a a^{d-e} = d - e = \log_a x - \log_a y$$

$$\text{c) } \log_a x^r = \log_a (a^d)^r = \log_a a^{r \cdot d} = r \cdot d = r \cdot \log_a x$$

Własność z punktu d) nazywa się czasem wzorem na zmianę podstaw logarytmu. Pozwala on zamienić logarytm o dowolnej podstawie np. na iloraz logarytmów dziesiętnych, których wartości łatwo jest obliczać, korzystając z kalkulatora. Dowód własności d) pomijamy.

Przykład 4.

Obliczymy wartości poniższych wyrażeń, korzystając z poznanych twierdzeń.

- a) $\log_3 4,5 + \log_3 6 = \log_3 (4,5 \cdot 6) = \log_3 27 = 3$ twierdzenie 2a
 b) $\log_5 100 - \log_5 4 = \log_5 (100 : 4) = \log_5 25 = 2$ twierdzenie 2b
 c) $\log_7 2401 = \log_7 7^4 = 4 \cdot \log_7 7 = 4 \cdot 1 = 4$ twierdzenie 2c i 1a
 d) $\frac{\log_4 216}{\log_4 6} = \log_6 216 = \log_6 6^3 = 3 \cdot \log_6 6 = 3$ twierdzenie 2d, 2c i 1a

Przykład 5.

Wiedząc, że $\log 3 = a$ i $\log 5 = b$, wyznaczmy $\log 45$, w zależności od a i b .

$$\log 45 = \log(9 \cdot 5) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{tw. 2a}}}{=} \log 9 + \log 5 = \log 3^2 + \log 5 \underset{\substack{\downarrow \\ \text{tw. 2c}}}{=} 2\log 3 + \log 5 = 2a + b$$

Liczba $\log 45$ jest równa $2a + b$.

Przykład 6.

Obliczymy wartość wyrażenia $\sqrt[2 + \frac{1}{2}\log 16]{10}$.

$$\begin{aligned} \sqrt[2 + \frac{1}{2}\log 16]{10} &= \left(10^{2 + \frac{1}{2}\log 16} \right)^{\frac{1}{2}} \underset{\substack{\downarrow \\ (a^x)^y = a^{x \cdot y}}}{=} 10^{1 + \frac{1}{4}\log 16} \underset{\substack{\downarrow \\ a^{x+y} = a^x \cdot a^y}}{=} 10 \cdot 10^{\frac{1}{4}\log 16} \underset{\substack{\downarrow \\ r \cdot \log_a x = \log_a x^r}}{=} \\ &= 10 \cdot 10^{\log 16^{\frac{1}{4}}} = 10 \cdot 10^{\log 2} \underset{\substack{\downarrow \\ a^{\log_a b} = b}}{=} 10 \cdot 2 = 20 \end{aligned}$$

Wartość wyrażenia jest równa 20.

Przykład 7.

Obliczymy wartość wyrażenia $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 9$.

Zastosujemy wzór na zamianę podstaw logarytmu i przedstawimy dane wyrażenie w zależności od logarytmu przy podstawie 3.

$$\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 9 = \log_3 4 \cdot \frac{\log_3 5}{\log_3 4} \cdot \frac{\log_3 7}{\log_3 5} \cdot \frac{\log_3 9}{\log_3 7} = \log_3 9 = 2$$

Wartość wyrażenia jest równa 2.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Oblicz:

- | | | | |
|------------------------|----------------------------|---------------------------|-----------------------------|
| a) $\log_2 32$ | b) $\log 0,01$ | c) $\log_3 1$ | d) $\log_6 \frac{1}{216}$ |
| e) $\log_{\sqrt{3}} 9$ | f) $\log_{\frac{1}{3}} 81$ | g) $\log_{0,25} \sqrt{2}$ | h) $\log_{0,2} \sqrt[3]{5}$ |

2. Oblicz:

- | | | | |
|--------------------|---------------------|----------------------------|------------------------------------|
| a) $\log_3 3^{20}$ | b) $\log_5 5^{0,1}$ | c) $\log_{0,3} \sqrt{0,3}$ | d) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{3^{10}}$ |
| e) $4^{\log_4 5}$ | f) $3^{7 \log_3 2}$ | g) $25^{\log_5 3}$ | h) $7^{\log_{49} 4}$ |

3. Oblicz:

- | | | |
|--|-----------------------------|---------------------------|
| a) $\log_3 \frac{2}{9} + \log_3 \frac{1}{6}$ | b) $\log_2 10 + \log_2 1,6$ | c) $\log 25 + \log 4$ |
| d) $\log_5 \sqrt{10} - \log_5 \sqrt{2}$ | e) $\log 9 - \log 0,9$ | f) $\log_8 7 - \log_8 14$ |

4. Niech $\log 2 = a$ oraz $\log 3 = b$. Wyraż za pomocą liczb a i b poniższe wyrażenia:

- | | | | |
|---------------|---------------------|----------------|---------------|
| a) $\log 192$ | b) $\log \sqrt{48}$ | c) $\log 0,15$ | d) $\log 7,5$ |
|---------------|---------------------|----------------|---------------|

5. Wyznacz liczbę naturalną n , dla której liczba b należy do przedziału $(n, n+1)$, jeśli:

- | | | |
|----------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| a) $\log_{100} b = \frac{-1}{2}$ | b) $\log_{0,6} b = -3$ | c) $\log_4 b = \frac{1}{3}$ |
| d) $\log_3 b = 1,5$ | e) $\log_{\sqrt{32}} b = -0,4$ | f) $\log_{\pi} b = 2$ |

D 6. Wykaż, że jeśli liczba a jest dodatnia oraz liczba b jest odwrotnością liczby a , to $\log b$ jest liczbą przeciwną do liczby $\log a$.

D 7. Wykaż, że jeśli $a = 3^{4,5}$ oraz $b = \sqrt[3]{3\sqrt{3}}$, to $\log_3 a - \log_3 b = 4$.

D 8. Wykaż, że jeśli $a = \sqrt{5} - 1$ oraz $b = \sqrt{5} + 1$, to $\log_{\sqrt{2}} a + \log_{\sqrt{2}} b = 4$.

D 9. Wykaż, że dane liczby są wymierne:

- | | |
|---|--|
| a) $\log^2 5 + \log^2 2 + \log 4 \cdot \log 5$ | b) $\log_6^2 3 + \log_6 9 \cdot \log_6 12 + \log_6^2 12$ |
| c) $\log_5^2 4 + \log_5^2 100 - 8 \cdot \log_5 2 \cdot \log_5 10$ | d) $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$ |

Zastosowanie logarytmów

Logarytmy dziesiętne znalazły zastosowanie w chemii. Mają one związek z określaniem odczynu roztworu. Odczyn roztworu to cecha roztworu związana ze stężeniem jonów wodorowych $[H^+]$ i stężeniem jonów wodorotlenkowych $[OH^-]$. Jeśli stężenia jonów są równe, $[H^+] = [OH^-]$, mówimy, że odczyn roztworu jest obojętny; jeśli $[H^+] > [OH^-]$ mówimy, że odczyn roztworu jest kwaśny (lub że jest to roztwór kwasu); jeśli $[H^+] < [OH^-]$, to odczyn roztworu nazywamy zasadowym (lub mówimy, że jest to roztwór zasady). W każdym roztworze wodnym iloczyn stężeń jonów wodorowych i wodorotlenkowych jest stały i wynosi 10^{-14} mol/dm³. W chemicznie czystej wodzie (odczyn obojętny) stężenia $[H^+]$ i $[OH^-]$ są równe, zatem

$$[H^+] = 10^{-7} \text{ mol/dm}^3 \quad [OH^-] = 10^{-7} \text{ mol/dm}^3$$

W roztworze kwasu mamy stężenie jonów wodorowych większe niż 10^{-7} mol/dm³, a w roztworze zasady mamy stężenie $[H^+]$ mniejsze niż 10^{-7} mol/dm³. Określanie odczynu roztworu przez podanie stężenia $[H^+]$ (lub $[OH^-]$) nie jest wygodne ze względu na dużą rozpiętość omawianych stężeń. Chemicy posługują się „stopniami kwasowości”, zwanymi pH, określonymi wzorem

$$\text{pH} = -\log[H^+]$$

Dla chemicznie czystej wody mamy

$$\text{pH} = -\log 10^{-7} = 7$$

Zauważ, że roztwory o odczynie kwaśnym mają pH mniejsze od 7, a roztwory o odczynie zasadowym mają pH większe od 7. Wartość pH roztworów wodnych waha się w przedziale od 0 do 14.

Przykład 1.

Stężenie jonów wodorowych w occie wynosi $1,26 \cdot 10^{-3}$ mol/dm³. Obliczmy pH octu.

$$\text{pH} = -\log(1,26 \cdot 10^{-3}) \approx 2,9$$

Dla octu pH wynosi ok. 2,9.

Podamy jeszcze przykład zastosowania logarytmów w fizyce (dokładniej – w akustyce).

Natężenie dźwięku jest miarą siły dźwięku. Określa średnią ilość energii akustycznej, przepływającej w jednostce czasu przez jednostkę powierzchni prostopadłą do kierunku rozchodzenia się fali dźwiękowej. Jednostką natężenia dźwięku jest wat na metr kwadratowy (W/m²). W zakresie słyszalności człowieka dla dźwięku o częstotliwości 1000 Hz natężenie dźwięku przyjmuje wartość od 10^{-12} W/m² do 10^2 W/m². Pierwsza wartość odpowiada progowi słyszalności, druga – granicy bólu. Posługiwanie się natężeniem dźwięku nie jest wygodne, bowiem stosunek największej wartości natężenia do najmniejszej wyraża się bardzo dużą liczbą (10^{14}). Dlatego w akustyce wprowadzono pojęcie poziomu natężenia dźwięku L , który określa względną wartość natężenia następującym wzorem:

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

gdzie $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$, natomiast I to badane natężenie dźwięku.

Przykład 2.

Jednostką poziomu natężenia dźwięku jest decybel (dB). Jest to jedna dziesiąta jednostki zwanej belem (B).

Progowi słyszalności odpowiada:

$$10 \log \frac{10^{-12} \text{ W/m}^2}{10^{-12} \text{ W/m}^2} = 10 \log 1 = 0 \text{ (dB)}$$

a granicy bólu:

$$10 \log \frac{10^2 \text{ W/m}^2}{10^{-12} \text{ W/m}^2} = 10 \log 10^{14} = 140 \text{ (dB)}$$

Dla porównania podamy jeszcze kilka wielkości:

- szelest liści – ok. 10 dB
- rozmowa – ok. 60 dB
- przejeżdżający samochód – ok. 70 dB
- głośna muzyka – ok. 110 dB
- startujący samolot odrzutowy (w pobliżu) – ok. 130 dB.

Przebywanie w hałasie większym niż 90 dB może doprowadzić do uszkodzenia słuchu.

Wprowadzenie skali decybelowej pozwoliło wyrazić wielką rozpiętość natężeń dźwięków w zakresie 0 do 140 jednostek.

Przykład 3.

Gdy kierowca jechał samochodem osobowym z prędkością 60 km/h, to poziom natężenia hałasu (we wnętrzu samochodu) wynosił 65 dB. Po wjeździe na autostradę kierowca zwiększył prędkość do 130 km/h i wówczas poziom natężenia hałasu podniósł się do 72 dB. Obliczmy, ile razy głośniejsze zrobiło się w samochodzie.

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

I_1 – natężenie hałasu w samochodzie jadącym z prędkością 60 km/h

I_2 – natężenie hałasu w samochodzie jadącym z prędkością 130 km/h

I_0 – natężenie dźwięku odpowiadające progowi słyszalności.

Szukamy wartości wyrażenia: $\frac{I_2}{I_1}$.

Z wcześniejszych rozważań wynika, że prawdziwe są następujące dwie równości:

$$65 = 10 \cdot \log \frac{I_1}{I_0} \quad \text{ i } \quad 72 = 10 \cdot \log \frac{I_2}{I_0}$$

Równości te odejmujemy stronami i otrzymujemy:

$$72 - 65 = 10 \cdot \left[\log \frac{I_2}{I_0} - \log \frac{I_1}{I_0} \right]$$

$$7 = 10 \cdot \log \frac{I_2 \cdot I_0}{I_0 \cdot I_1} \quad / : 10$$

$$0,7 = \log \frac{I_2}{I_1}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = 10^{0,7}$$

$$\frac{I_2}{I_1} \approx 5,01$$

Po zwiększeniu prędkości w samochodzie zrobiło się pięć razy głośniej.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Dla mleka pH jest równe 6,6. Oblicz stężenie jonów wodorowych w mleku.
2. Stężenie jonów wodorotlenkowych w soku z cytryny jest równe $10^{-11,6}$ mol/dm³. Oblicz pH tego soku.
3. Oblicz pH roztworu, w którym stężenie jonów wodorowych jest 1000 razy większe od stężenia jonów wodorotlenkowych.
4. W roztworze zwiększono 50 razy stężenie jonów wodorowych. O ile zmalało pH tego roztworu?
5. Oblicz, o ile decybeli wzrośnie poziom natężenia dźwięku, jeśli siłę dźwięku (natężenie dźwięku) zwiększymy dwukrotnie.
6. Poziom natężenia dźwięku podczas rozmowy to 60 dB, a odpowiadające mu natężenie dźwięku jest 1 000 000 razy mniejsze niż natężenie dźwięku podczas startu helikoptera. Oblicz poziom natężenia dźwięku (w decybelach) podczas startu helikoptera.
7. Z punkowego źródła dźwięku oddalonego od obserwatora o 20 m dochodzi dźwięk o poziomie natężenia 100 dB. Oblicz poziom natężenia dźwięku (w decybelach), który będzie słyszał obserwator, jeśli stanie w odległości 200 m od tego źródła dźwięku. W obliczeniach przyjmij, że natężenie dźwięku słyszanego przez obserwatora jest odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości obserwatora od źródła dźwięku, tzn. jeśli obserwator stanie za drugim razem w odległości 2 razy większej niż za pierwszym razem, to natężenie dźwięku w tym miejscu będzie 4 razy mniejsze. Jeśli natomiast za drugim razem obserwator stanie 3 razy bliżej niż za pierwszym razem, to natężenie dźwięku w tym miejscu będzie 9 razy większe.

Zdanie. Zaprzeczenie zdania

Już wiesz, że umiejętność argumentowania i wnioskowania jest ważna w trakcie uczenia się matematyki, a także w innych dziedzinach życia. Metodami wnioskowania zajmuje się logika matematyczna. My omówimy tylko podstawowe pojęcia i prawa logiczne, które ułatwią Ci uczenie się matematyki, jej rozumienie, rozwiązywanie zadań i poprawne zapisywanie tych rozwiązań.

Definicja 1.

Zdaniem w logice nazywamy wypowiedź oznajmującą, o której możemy powiedzieć, że jest albo prawdziwa, albo fałszywa.

Prawdę i fałsz nazywamy wartościami logicznymi. Prawdę oznaczamy 1, a fałsz 0. Zdania oznaczamy zwykle małymi literami: $p, q, r, s, t, \dots$ Przyjmujemy zasadę, że pisząc o zdaniu, będziemy mieli na myśli wyłącznie zdanie w sensie logicznym.

Przykład 1.

Ocenimy wartość logiczną poniższych zdań:

$p: 2 + 3 = 5$ – prawda (1)

$q: 7 < 0$ – fałsz (0)

$r: \sqrt{12^2 + 5^2} = 17$ – fałsz (0), bo $\sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$

$s: \sqrt{2} \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ – prawda (1)

Przykład 2.

Poniższe wypowiedzi nie są zdaniami logicznymi:

a) Czy to prawda, że 2^7 jest większe niż 7^2 ?

Ta wypowiedź nie jest wypowiedzią oznajmującą.

b) Oblicz wartość wyrażenia $(2^7 - 4) : 8$.

Ta wypowiedź nie jest wypowiedzią oznajmującą.

c) $2 + x = 5$

Ta wypowiedź jest wypowiedzią oznajmującą, ale nie można określić, czy jest ona prawdziwa czy fałszywa, bo nie wiadomo, jaką liczbę oznacza litera x .

d) $x \geq 9$

e) $x \in \mathbf{N}$

Zwróćmy jeszcze uwagę na wypowiedzi c), d) i e) z przykładu 2.: $2 + x = 5$, $x \geq 9$, $x \in \mathbf{N}$. Są to przykłady tak zwanych **form zdaniowych** zmiennej x , czyli wyrażeń zawierających zmienną x , które stają się zdaniem prawdziwym lub fałszywym dopiero wtedy, gdy zmienną x zastąpimy konkretną liczbą (w ogólnym przypadku – nazwą pewnego elementu). Formy zdaniowe oznaczamy: $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, itp.

Możemy np. zapisać:

- | | | | |
|----------------------|-------------------|------------------|--------------------------|
| – formy zdaniowe | $p(x): 2 + x = 5$ | $q(x): x \geq 9$ | $r(x): x \in \mathbf{N}$ |
| – przykładowe zdania | $p: 2 + 8 = 5$ | $q: 10 \geq 9$ | $r: 7 \in \mathbf{N}$ |

W precyzyjnym wypowiedzianiu się ważną rolę odgrywają dwa rodzaje sformułowań: „dla każdego” oraz „istnieje”.

Zaimek „każdy” oznacza, że wszystkie elementy ze wskazanego zbioru mają daną własność. Wyrażenie „dla każdego” nazywamy **kwantyfikatorem ogólnym** lub kwantyfikatorem dużym.

Przyjmujemy, że sformułowanie „dla każdego” znaczy to samo, co sformułowanie „dla dowolnego”. Jeśli bowiem dowolny element pewnego zbioru ma pewną własność, to znaczy, że każdy element tego zbioru ma tę własność.

Czasownik „istnieje” oznacza, że we wskazanym zbiorze jest co najmniej jeden element mający daną własność. Zwrot „istnieje” nazywamy **kwantyfikatorem szczegółowym** lub kwantyfikatorem małym.

Przyjmujemy, że sformułowanie „istnieje” oznacza to samo, co sformułowanie „dla pewnego”. Jeśli bowiem pewien element ma daną własność, to znaczy, że istnieje element, który ma tę własność.

Forma zdaniowa jednej zmiennej, poprzedzona kwantyfikatorem, staje się zdaniem.

Przykład 3.

- Równanie $2 + x = 5$ jest formą zdaniową.
Wypowiedź: *Istnieje liczba całkowita x , dla której $2 + x = 5$* jest zdaniem prawdziwym, bo liczba 3 jest liczbą całkowitą i $2 + 3 = 5$.
- Nierówność $x^2 > 0$ jest formą zdaniową.
Wypowiedź: *Dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $x^2 > 0$* jest zdaniem fałszywym.

Większość liczb rzeczywistych ma tę własność, że ich kwadrat jest większy od 0, np. $2^2 > 0$, $(-10)^2 > 0$, $\pi^2 > 0$, $(-2,157)^2 > 0$. Ale jeśli w miejsce x wstawimy 0 (zero też jest liczbą rzeczywistą), to otrzymamy nierówność fałszywą: $0 > 0$. Zatem nie jest prawdą, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $x^2 > 0$.
- W każdym trójkącie suma miar kątów wewnętrznych jest równa 180°* . To jest zdanie prawdziwe.
- Istnieje liczba naturalna n , która jest ujemna*. To jest zdanie fałszywe.
- Istnieje liczba pierwsza m , która jest liczbą parzystą*. To zdanie jest prawdziwe bo jedyną liczbą pierwszą i jednocześnie parzystą jest liczba 2.

Zdania i formy zdaniowe możemy zaprzeczać.

Definicja 2.

Zaprzeczeniem zdania p nazywamy zdanie **nieprawda, że p** , które oznaczamy $\neg p$. Zaprzeczeniem zdania prawdziwego jest zdanie fałszywe; zaprzeczeniem zdania fałszywego jest zdanie prawdziwe.

Podobnie zaprzeczenie formy zdaniowej $p(x)$ oznaczamy $\neg p(x)$.

Przykład 4.

Napiszemy zaprzeczenia wybranych zdań i form zdaniowych.

- a) Niech p oznacza zdanie: $2 + 3 = 5$. Wówczas zdanie $\neg p$ oznacza zdanie:
Nieprawda, że $(2 + 3 = 5)$, które możemy zapisać krócej
 $\neg(2 + 3 = 5)$, co znaczy:
 $2 + 3 \neq 5$
- b) Zaprzeczenie formy zdaniowej: $x \in \mathbf{N}$ zapiszemy tak $\neg(x \in \mathbf{N})$ lub krócej: $x \notin \mathbf{N}$
- c) Zaprzeczeniem formy zdaniowej: $x \geq 9$ jest forma zdaniowa $x < 9$.
- d) Niech q oznacza zdanie: *Istnieje liczba całkowita x , dla której $2 + x = 5$* . Wtedy $\neg q$ jest zdaniem:
Nieprawda, że (Istnieje liczba całkowita x , dla której $2 + x = 5$), co znaczy:
Dla każdej liczby całkowitej x , nieprawdą jest, że $(2 + x = 5)$, czyli
Dla każdej liczby całkowitej x , $2 + x \neq 5$
- e) Jeśli r oznacza zdanie: *Dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $x^2 > 0$* , to $\neg r$ jest zdaniem:
Nieprawda, że (Dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $x^2 > 0$),
co znaczy:
Istnieje liczba rzeczywista x , dla której nie jest prawdziwa nierówność $x^2 > 0$,
czyli
Istnieje liczba rzeczywista x , dla której $x^2 \leq 0$.

Ogólnie można powiedzieć, że zaprzeczeniem zdania typu:

„**Istnieje** liczba x ... dla której **jest spełniony** warunek ...” jest zdanie:
„**Dla każdej** liczby x ... **nie jest spełniony** warunek ...”

Podobnie zaprzeczeniem zdania typu:

„**Dla każdej** liczby x ... **jest spełniony** warunek ...” jest zdanie:
„**Istnieje** liczba x ... dla której **nie jest spełniony** warunek ...”

Z ostatniej reguły wynika, że jeśli chcemy uzasadnić, że dane zdanie z kwantyfikatorem ogólnym (dla każdego) jest fałszywe, to wystarczy wskazać jeden element, dla którego dane zdanie nie jest prawdziwe. Mówimy wtedy, że podaliśmy **kontrprzykład**, który dowodzi, że dane zdanie jest fałszywe. Takim kontrprzykładem w przypadku fałszywego zdania z przykładu 3 b) jest liczba 0.

Zdania złożone. Zaprzeczenia zdań złożonych

Zdania możemy łączyć spójnikami *i* oraz *lub* i w ten sposób otrzymywać **zdania złożone**. Zdania wchodzące w skład zdania złożonego nazywamy zdaniami prostymi. Podobnie można łączyć tymi spójnikami formy zdaniowe.

Przykładem zdania złożonego jest koniunkcja zdań.

Definicja 1.

Koniunkcją zdań p oraz q nazywamy zdanie p **i** q , które oznaczamy $p \wedge q$. Koniunkcja dwóch zdań jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy oba tworzące ją zdania są prawdziwe.

Mówiąc inaczej, koniunkcja dwóch zdań jest fałszywa tylko wtedy, gdy co najmniej jedno zdanie ją tworzące jest fałszywe.

Przykład 1.

Zdanie $5 > 3 \wedge 5 = 3$ jest koniunkcją zdań prostych:

$$5 > 3 \text{ i } 5 = 3$$

Zdanie $5 > 3$ jest prawdziwe, a zdanie $5 = 3$ jest fałszywe, zatem koniunkcja tych zdań jest fałszywa.

Definicja 2.

Alternatywą zdań p oraz q nazywamy zdanie p **lub** q , które oznaczamy $p \vee q$. Alternatywa dwóch zdań jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedno ze zdań ją tworzących jest prawdziwe.

Inaczej mówiąc: alternatywa dwóch zdań jest fałszywa tylko wtedy, gdy oba tworzące ją zdania są fałszywe.

Przykład 2.

Zdanie $5 \geq 3$ można zapisać w postaci alternatywy zdań prostych tak:

$$5 > 3 \vee 5 = 3 \quad \text{albo tak} \quad 5 > 3 \text{ lub } 5 = 3$$

Zdanie $5 > 3$ jest prawdziwe, a zdanie $5 = 3$ jest fałszywe, zatem alternatywa tych zdań $5 \geq 3$ jest prawdziwa.

UWAGA: W języku potocznym wyrazu *alternatywa* używa się niekiedy w innym znaczeniu niż w logice matematycznej. Otóż, jeśli ktoś powie „Kupię tort lub kupię lody”, to odbiorcy tej informacji mogą oczekiwać, że osoba wybierająca się do cukierni albo kupi tort i nie kupi lodów, albo kupi lody i nie kupi tortu. Jeśli ta osoba przyniosłaby z cukierni i tort, i lody, to mogłoby to wywołać duże zdziwienie – przecież nie mówiła, że kupi tort i kupi lody.

Natomiast w logice matematycznej, jeśli koniunkcja dwóch zdań jest prawdziwa, to również alternatywa tych zdań jest prawdziwa.

Bardzo ważną rolę w matematyce odgrywają zdania mające postać implikacji.

Definicja 3.

Implikacją o poprzedniku p i następniku q nazywamy zdanie **jeśli p , to q** , które oznaczamy $p \Rightarrow q$; implikację uznajemy za prawdziwą wtedy, gdy poprzednik i następnik są prawdziwe, oraz wtedy, gdy poprzednik jest fałszywy; wówczas następnik może być prawdziwy lub fałszywy.

Inaczej mówiąc: implikacja jest fałszywa tylko wtedy, gdy poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy.

Przykład 3.

a) Jeśli $2 + 3 = 5$, to $-2(2 + 3) = -2 \cdot 5$.

poprzednik implikacji następnik implikacji

b) Jeśli $(-1)^2 = 1^2$, to $-1 = 1$

c) Jeśli $2 > 4$, to $2 - 3 > 4 - 3$

Posługując się ostatnią definicją, możemy stwierdzić, że zdania (a) i (c) są prawdziwe, a zdanie (b) jest fałszywe.

Pewne zaskoczenie może powodować ten fragment ostatniej definicji, który mówi, że jeśli poprzednik implikacji jest fałszywy, to implikacja jest prawdziwa. Spróbujmy odnieść to do sytuacji z życia. Przeanalizujmy następujące zdanie:

Jeśli posprzątasz swój pokój, to pójdziesz z przyjaciółmi do kina.

Załóżmy, że to zdanie powiedziała do Ciebie Twoja mama. Kiedy mama spełni obietnicę? Na pewno wtedy, gdy posprzątasz swój pokój i mama pozwoli Ci pójść do kina. Mama na pewno nie spełni obietnicy, jeśli posprzątasz pokój, a pomimo to nie pozwoli Ci pójść do kina. A co się stanie, jeśli nie posprzątasz swojego pokoju? Zauważ, że o takiej sytuacji mama się nie wypowiedziała! Zatem każde jej postępowanie powinniśmy uznać za logicznie uzasadnione: zarówno wtedy, gdy pozwoli Ci pójść do kina, jak i wtedy, gdy nie pozwoli Ci pójść do kina.

Definicja 4.

Równoważnością zdań p oraz q nazywamy zdanie **p wtedy i tylko wtedy, gdy q** , które oznaczamy $p \Leftrightarrow q$; równoważność dwóch zdań uznajemy za prawdziwą wtedy i tylko wtedy, gdy tworzące ją zdania mają tę samą wartość logiczną, tzn. oba są prawdziwe albo oba są fałszywe.

Inaczej mówiąc: równoważność jest fałszywa tylko wtedy, gdy tworzące ją zdania mają różne wartości logiczne, tzn. jedno jest fałszywe, a drugie prawdziwe.

Przykład 4.

Zdanie: *Liczba 348 jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $3 + 4 + 8$ jest podzielna przez 3* jest równoważnością zdań

p : *Liczba 348 jest podzielna przez 3* oraz

q : *Liczba $3 + 4 + 8$ jest podzielna przez 3.*

Oba zdania p oraz q są prawdziwe, zatem równoważność $p \Leftrightarrow q$ jest prawdziwa

UWAGA: Równoważność $p \Leftrightarrow q$ można zawsze zastąpić koniunkcją dwóch implikacji: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

Omówimy teraz zaprzeczenie koniunkcji i alternatywy.

Założmy, że wypowiadamy zdanie:

Pouczę się matematyki i pogram w piłkę.

Zastanówmy się, co znaczy zaprzeczenie powyższego zdania:

Nieprawda, że pouczę się matematyki i pogram w piłkę.

Dotrzymasz danego słowa, jeśli pouczysz się matematyki i pograsz w piłkę, czyli spełnisz oba warunki. Nie dotrzymasz słowa tylko wtedy, gdy nie spełnisz co najmniej jednego warunku (tzn. nie pouczysz się matematyki i pograsz w piłkę, albo pouczysz się matematyki i nie pograsz w piłkę, albo nie pouczysz się matematyki i nie pograsz w piłkę). Tak więc zdanie:

Nieprawda, że pouczę się matematyki i pogram w piłkę

jest równoważne zdaniu:

*Nieprawda, że pouczę się matematyki **lub** nieprawda, że pogram w piłkę*

co można wyrazić prościej:

*Nie pouczę się matematyki **lub** nie pogram w piłkę.*

Prawdziwe jest tzw. prawo zaprzeczania koniunkcji:

$$\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$$

Prawo to wypowiadamy następująco: zaprzeczeniem koniunkcji dwóch zdań jest alternatywa zaprzeczeń tych zdań.

Przykład 5.

Zaprzeczeniem zdania prawdziwego: *Liczba 42 jest podzielna przez 7 i liczba 42 nie jest podzielna przez 8* jest zdanie fałszywe: *Liczba 42 nie jest podzielna przez 7 lub liczba 42 jest podzielna przez 8.*

Analogicznie zaprzecza się alternatywę form zdaniowych.

Przykład 6.

Napiszemy zaprzeczenie formy zdaniowej: $x > 2 \wedge x \leq 5$.

Mamy:

$$\neg(x > 2 \wedge x \leq 5) \Leftrightarrow [\neg(x > 2) \vee \neg(x \leq 5)] \Leftrightarrow [x \leq 2 \vee x > 5]$$

Omówimy zaprzeczanie alternatywy. Załóżmy, że wypowiadamy zdanie:

Popracuję przy komputerze lub pójdę do kina.

Interesuje nas, co dokładnie znaczy zaprzeczenie powyższej alternatywy.

Nieprawda, że popracuję przy komputerze lub pójdę do kina.

Zastanówmy się, kiedy nie dotrzymalibyśmy danego słowa. Wiesz, że dotrzymasz słowa, jeśli popracujesz przy komputerze i nie pójdziesz do kina, albo nie popracujesz przy komputerze i pójdziesz do kina, albo popracujesz przy komputerze i pójdziesz do kina, ponieważ alternatywa jest prawdziwa, jeśli zachodzi co najmniej jeden z warunków. Nie dotrzymasz słowa tylko wtedy, gdy żaden z warunków nie zostanie spełniony. Tak więc zdanie:

Nieprawda, że popracuję przy komputerze lub pójdę do kina

jest równoważne zdaniu:

Nieprawda, że popracuję przy komputerze i nieprawda, że pójdę do kina

co możemy wyrazić prościej:

Nie popracuję przy komputerze i nie pójdę do kina.

Prawdziwe jest tzw. prawo zaprzeczania alternatywy

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$

Prawo to wypowiadamy następująco: zaprzeczeniem alternatywy dwóch zdań jest koniunkcja zaprzeczeń tych zdań.

Przykład 7.

Zaprzeczeniem zdania prawdziwego:

$$7 > 2 \text{ lub } 7 = 2$$

jest zdanie fałszywe:

$$7 \leq 2 \text{ i } 7 \neq 2 \quad \text{czyli} \quad 7 < 2$$

Analogicznie zaprzecza się alternatywę form zdaniowych.

Przykład 8.

Napiszemy zaprzeczenie formy zdaniowej: $x = 2 \vee x = 7$.

Mamy:

$$\neg(x = 2 \vee x = 7) \Leftrightarrow [\neg(x = 2) \wedge \neg(x = 7)] \Leftrightarrow [x \neq 2 \wedge x \neq 7]$$

Definicja. Twierdzenie. Dowód twierdzenia

Definicje

Definicje są to zdania określające znaczenia nowo wprowadzanych pojęć za pomocą pojęć wcześniej znanych.

Z nauki matematyki znasz wiele różnych definicji, np. definicję pierwiastka kwadratowego i definicję podnoszenia do kwadratu (podnoszenia do drugiej potęgi). Przypomnijmy te definicje i przeanalizujmy ich budowę.

Podnieść liczbę a do kwadratu (symbol: a^2) to znaczy pomnożyć liczbę a przez nią samą.

W powyższej definicji pojęciem znanym wcześniej, użytym do określenia kwadratu liczby, jest *mnożenie*.

Jeśli wiemy, czym jest podnoszenie liczby do kwadratu, to możemy zdefiniować pierwiastek kwadratowy.

Pierwiastkiem kwadratowym z nieujemnej liczby a (symbol: $\sqrt{a}$) nazywamy taką nieujemną liczbę b , która podniesiona do kwadratu będzie równa liczbie a .

Z kolei w tej definicji pojęciami znanymi wcześniej, użytymi do określenia pierwiastka kwadratowego, są *podnoszenie do kwadratu* i *liczba nieujemna*.

Podsumowując, można stwierdzić, że w definicji wyróżniamy:

- pojęcie definiowane
- łącznik (nazywamy, jest to, to znaczy, tylko wtedy, gdy, itp.)
- wyrażenia określające pojęcie definiowane, w którym występują pojęcia wcześniej znane.

Twierdzenia

Twierdzenia są to zdania wyrażające własności pojęć, np.: figur geometrycznych, działań matematycznych, liczb.

Zdania te mogą być prawdziwe lub fałszywe. Prawdziwość twierdzenia stwierdza się, przeprowadzając, zgodnie z regułami logiki, pewne rozumowanie, nazywane dowodem. Twierdzenia opisują zwykle pewne własności ogólne, a więc dotyczą: dowolnej liczby naturalnej, każdego trójkąta prostokątnego, dowolnego równoległoboku itp., czyli są zdaniami z kwantyfikatorem ogólnym. Fałszywość takiego zdania – jak już wiesz – stwierdza się poprzez wskazanie kontrprzykładu. Na przykład rozważmy zdanie: *Jeśli dowolna liczba naturalna jest podzielna przez 2 i przez 6, to liczba ta jest podzielna przez 12*. Kontrprzykładem pokazującym fałszywość tego stwierdzenia może być liczba 18: jest ona liczbą naturalną podzielną przez 2 i przez 6, a nie jest podzielna przez 12.

UWAGA: Formułując twierdzenia z kwantyfikatorem ogólnym, czasami pomija się wyrażenie: „dla każdego”, „dla dowolnego”, itp. (zobacz przykłady twierdzeń w dalszej części tego tematu). Nie zmienia to jednak sensu danego twierdzenia.

Podstawowa forma twierdzenia ma postać implikacji. Wyróżniamy w nim założenie (poprzednik implikacji) i tezę (następnik implikacji).

Rozpatrzmy następujące twierdzenie:

- (1) Jeśli **czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem**,

założenie

to **punkt, w którym przecinają się przekątne czworokąta $ABCD$, dzieli je na połowy**.

teza

Twierdzeniem odwrotnym do danego twierdzenia jest implikacja, w której zamieniono miejscami założenie z tezą.

Twierdzenie odwrotne do prezentowanego powyżej jest więc następujące:

- (2) Jeśli **punkt, w którym przecinają się przekątne czworokąta $ABCD$, dzieli je na połowy**, to **czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem**.

W tym wypadku twierdzenie (1) i twierdzenie odwrotne do niego (2) są zdaniami prawdziwymi. Można zapisać je w jednym zdaniu, które ma postać równoważności:

„Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem wtedy i tylko wtedy, gdy punkt, w którym przecinają się przekątne czworokąta $ABCD$, dzieli je na połowy”.

Warto pamiętać, że twierdzenie odwrotne do danego twierdzenia nie zawsze jest zdaniem prawdziwym.

Przykład 1.

Twierdzenie:

Jeśli liczba naturalna jest podzielna przez 14, to liczba ta jest podzielna przez 7.

Twierdzenie odwrotne do danego:

Jeśli liczba naturalna jest podzielna przez 7, to jest podzielna przez 14.

W tym przykładzie twierdzenie jest oczywiście zdaniem prawdziwym, natomiast twierdzenie odwrotne jest zdaniem fałszywym; podaj odpowiedni kontrprzykład.

UWAGA: Czasami formułuje się twierdzenia w taki sposób, że nie mają one (wyrażonej) postaci implikacji, np. twierdzenie (1) można sformułować tak:

„W równoległoboku $ABCD$ punkt przecięcia przekątnych dzieli te przekątne na połowy”.

Taki sposób sformułowania twierdzenia sprawia, że jego treść jest krótsza i bardziej czytelna, natomiast nieco trudniejsze może okazać się wyodrębnienie jego założeń i tezy.

Dowód twierdzenia

Dowodzenie twierdzeń jest ważną umiejętnością, którą kształtuje się w trakcie całego procesu uczenia się matematyki.

W dowodzie korzystamy z założeń dowodzonego twierdzenia, z definicji oraz z wcześniej udowodnionych twierdzeń.

Dowód, w którym rozpoczyna się od założeń lub wcześniej udowodnionych twierdzeń, a następnie przeprowadza się wnioskowanie i dochodzi się do tezy twierdzenia, nazywa się **dowodem wprost**.

Przykład 2.

Wykażemy, że jeśli $x + y = 6$, $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$, to $x^2 + y^2 \geq 18$.

Założenie: $x + y = 6$, $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$

Teza: $x^2 + y^2 \geq 18$

Dowód (wprost):

Z założenia $x + y = 6$ wynika, że $y = 6 - x$, zatem

$$x^2 + y^2 = x^2 + (6 - x)^2 =$$

$$= x^2 + 36 - 12x + x^2 = 2x^2 - 12x + 36 =$$

$$= 2(x^2 - 6x + 18) = 2(x^2 - 6x + 9 + 9) =$$

$$= 2[(x - 3)^2 + 9] = 2(x - 3)^2 + 18$$

Otrzymaliśmy zależność

$$x^2 + y^2 = 2(x - 3)^2 + 18$$

Przeprowadzamy wnioskowanie:

Dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność

$$2(x - 3)^2 \geq 0, \text{ więc}$$

$$2(x - 3)^2 + 18 \geq 18, \text{ czyli}$$

$$x^2 + y^2 \geq 18$$

co kończy dowód.

stosujemy wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy

wyłączamy liczbę 2 przed nawias

stosujemy wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy

Przykład 3.

Wykażemy, że jeśli $a < 0$, to $a + \frac{1}{a} \leq -2$.

Założenie: $a < 0$

Teza: $a + \frac{1}{a} \leq -2$

Dowód (wprost) – I sposób

Aby porównać dwie liczby, wygodnie jest zbadać ich różnicę (zobacz str. 22). Mamy

$$a + \frac{1}{a} - (-2) = a + \frac{1}{a} + 2 = \frac{a^2 + 2a + 1}{a} = \frac{(a+1)^2}{a}.$$

Przeprowadzamy wnioskowanie:

Dla dowolnej liczby a prawdziwa jest nierówność $(a+1)^2 \geq 0$. Ponadto z założenia wynika, że $a < 0$. Iloraz liczby nieujemnej przez ujemną jest niedodatni, zatem

$$\frac{(a+1)^2}{a} \leq 0 \quad \text{czyli}$$

$$a + \frac{1}{a} + 2 \leq 0 \quad \text{skąd}$$

$$a + \frac{1}{a} \leq -2 \quad \text{co kończy dowód.}$$

Dowód (wprost) – II sposób

Dla dowolnej liczby rzeczywistej a prawdziwa jest nierówność

$$(a+1)^2 \geq 0 \quad \text{zatem}$$

$$a^2 + 2a + 1 \geq 0 \quad / -2a \quad \text{zobacz twierdzenie 2, str. 50}$$

$$a^2 + 1 \geq -2a \quad / : a \quad \text{zobacz twierdzenie 1b, str. 49}$$

z założenia $a < 0$, więc zmieniamy zwrot nierówności na przeciwny

$$a + \frac{1}{a} \leq -2 \quad \text{co kończy dowód.}$$

Przykład 4.

Wykażemy, że różnica kwadratów dowolnych dwóch kolejnych naturalnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 8.

Założenie: $2n+1, 2n+3$ – kolejne liczby naturalne nieparzyste, $n \in \mathbf{N}$

Teza: liczba $(2n+3)^2 - (2n+1)^2$ jest podzielna przez 8

Dowód (wprost):

Stosujemy wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.

$$\begin{aligned} (2n+3)^2 - (2n+1)^2 &= [(2n+3) - (2n+1)][(2n+3) + (2n+1)] = \\ &= 2(4n+4) = 8(n+1) \end{aligned}$$

Z założenia $n \in \mathbf{N}$ wynika, że $(n+1)$ jest liczbą naturalną. Liczba $(2n+3)^2 - (2n+1)^2$ jest równa iloczynowi liczby 8 i liczby naturalnej $(n+1)$, a to znaczy, że liczba $(2n+3)^2 - (2n+1)^2$ jest podzielna przez 8,

co kończy dowód.

Innym rodzajem dowodu jest **dowód nie wprost**. Polega on na zaprzeczeniu tezy dowodzonego twierdzenia i wykazaniu, że przyjęcie takiego zaprzeczenia prowadzi do sprzeczności (np. z wcześniej udowodnionym twierdzeniem lub z założeniem dowodzonego twierdzenia). Zatem dane twierdzenie należy uznać za prawdziwe.

Przykład 5.

Wykażemy, że jeśli $x + y = 6$, $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$, to $x^2 + y^2 \geq 18$.

Założenie: $x + y = 6$, $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$

Teza: $x^2 + y^2 \geq 18$

Dowód (nie wprost):

Założmy, że $x^2 + y^2 < 18$. Ponieważ $x + y = 6$, zatem $y = 6 - x$, więc

$$x^2 + (6 - x)^2 < 18$$

$$x^2 + 36 - 12x + x^2 < 18 \quad / - 18$$

$$2x^2 - 12x + 18 < 0 \quad / : 2$$

$$x^2 - 6x + 9 < 0$$

stosujemy wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy

$$(x - 3)^2 < 0$$

Otrzymaliśmy **sprzeczność z twierdzeniem** „kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną”. Zatem twierdzenie „jeśli $x + y = 6$, $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$, to $x^2 + y^2 \geq 18$ ” jest zdaniem prawdziwym.

Przykład 6.

Wykażemy, że liczba $\sqrt{3}$ jest liczbą niewymierną.

Założenie: $\sqrt{3}$ – dana liczba rzeczywista

Teza: $\sqrt{3}$ jest liczbą niewymierną

Dowód (nie wprost):

Założmy, że **liczba $\sqrt{3}$ jest liczbą wymierną**. To znaczy (na mocy definicji liczby wymiernej dodatniej), że istnieją liczby naturalne p , q , gdzie $q \neq 0$, dla których

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q} \quad \text{obie strony równości są dodatnie, więc podnosimy je do kwadratu}$$

$$3 = \frac{p^2}{q^2} \quad \text{czyli} \quad 3 \cdot q \cdot q = p \cdot p$$

Otrzymana równość jest fałszywa, bowiem liczba naturalna $3 \cdot q \cdot q$, w rozkładzie na czynniki pierwsze, ma nieparzystą liczbę trójek, natomiast równa jej liczba $p \cdot p$ w rozkładzie na czynniki pierwsze ma parzystą liczbę trójek. Otrzymaliśmy **sprzeczność z twierdzeniem** „każde dwa rozkłady liczby naturalnej rozłożonej na czynniki pierwsze różnią się co najwyżej kolejnością czynników”. Prawdziwe jest więc twierdzenie „liczba $\sqrt{3}$ jest liczbą niewymierną”.

Przykład 7.

Wykażemy, że jeśli $\sqrt{5}$ jest liczbą niewymierną, to liczba $a + b\sqrt{5}$, gdzie $a \in \mathbf{Q}$, $b \in \mathbf{Q}$ i $b \neq 0$, też jest liczbą niewymierną.

Założenie: $\sqrt{5}$ jest liczbą niewymierną, $a \in \mathbf{Q}$, $b \in \mathbf{Q}$ i $b \neq 0$

Teza: liczba $a + b\sqrt{5}$ jest liczbą niewymierną

Dowód (nie wprost):

Założmy, że liczba $a + b\sqrt{5}$ jest liczbą wymierną. To znaczy, że istnieją takie liczby całkowite p, q , gdzie $q \neq 0$, dla których

$$a + b\sqrt{5} = \frac{p}{q}, \text{ zatem } b\sqrt{5} = \frac{p}{q} - a, \text{ czyli } b\sqrt{5} = \frac{p - aq}{q}, \text{ skąd } \sqrt{5} = \frac{p - aq}{qb}$$

Wyrażenie qb oznacza liczbę wymierną różną od zera (jako iloczyn liczb wymiernych różnych od zera) oraz wyrażenie $p - aq$ oznacza liczbę wymierną (jako różnica liczb wymiernych). Iloraz liczb wymiernych jest również liczbą wymierną. Otrzymaliśmy

sprzeczność z założeniem ($\sqrt{5}$ jest liczbą niewymierną). Prawdziwe jest więc twierdzenie „jeśli $\sqrt{5}$ jest liczbą niewymierną, to liczba $a + b\sqrt{5}$, gdzie $a \in \mathbf{Q}$, $b \in \mathbf{Q}$ i $b \neq 0$, też jest liczbą niewymierną”.

Przykład 8.

Wykażemy, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele

Założenie: P – zbiór wszystkich liczb pierwszych

Teza: zbiór P jest nieskończony

Dowód (nie wprost):

Założmy, że zbiór P jest skończony, czyli istnieje k liczb pierwszych, gdzie k jest pewną liczbą naturalną. Oznaczmy te liczby: $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$. Rozważmy liczbę n ,

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_k + 1$$

Liczba n jest liczbą naturalną większą od 1 i nie jest podzielna przez żadną z liczb $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ (gdyby bowiem liczba n była podzielna np. przez p_1 , to również przez p_1 podzielna byłaby liczba 1, a jedynym naturalnym dzielnikiem liczby 1 jest 1). Otrzymaliśmy **sprzeczność z twierdzeniem** „każda liczba naturalna większa od 1 ma dzielnik będący liczbą pierwszą”. Prawdziwe jest więc twierdzenie „zbiór liczb pierwszych P jest nieskończony”.

Sprawdź, czy rozumiesz

- D** 1. Wykaż, że jeśli $x > \frac{1}{3}$ i $y > \frac{-1}{2}$, to $3x + 2y > 0$.
- D** 2. Wykaż, że jeśli $a > 1$ i $b > -2$, to $4a + 5b > -6$.
- D** 3. Wykaż, że jeśli $a > -2$ i $b < 3$, to $ab < 6 + 3a - 2b$.
- D** 4. Wykaż, że jeśli $x \leq \frac{1}{4}$ i $y \geq \frac{-1}{3}$, to $12xy + 4x - 3y \leq 1$.

- D** 5. Wykaż, że jeśli $a > 3b$ i $b > 0$, to $\frac{a-b}{2b} > 1$.
- D** 6. Wykaż, że suma czterech kolejnych liczb całkowitych nieparzystych jest podzielna przez 8.
- D** 7. Wykaż, że suma trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 jest podzielna przez 6.
- D** 8. Wykaż, że suma sześciu kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 7 jest podzielna przez 7.
- D** 8. Wykaż, że jeśli liczba całkowita n nie jest podzielna przez 3, to liczba $n^2 - 1$ jest podzielna przez 3.
- D** 10. Liczba naturalna n przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2, a liczba naturalna m przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1. Wykaż, że dla dowolnych liczb n, m spełniających podane warunki, liczba $n^2 - m^2$ jest podzielna przez 3.
- D** 11. Wykaż, że suma kwadratów dwóch kolejnych liczb całkowitych, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę odpowiednio 1 i 3, jest podzielna przez 10.
- D** 12. Wykaż, że jeśli $x + y = 4$, to $x^2 + y^2 \geq 8$. Przeprowadź dwa dowody: dowód wprost oraz dowód nie wprost.
- D** 13. Wykaż, że jeśli $a > 0$, to $a + \frac{4}{a} \geq 4$. Przeprowadź dwa dowody: dowód wprost oraz dowód nie wprost.
- D** 14. Wykaż, że jeśli $x < 0$, to $x + \frac{9}{x} \leq 6$.
- D** 15. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność:
a) $9x^2 - 6xy + 2y^2 \geq 0$ b) $2x^2 + 4y^2 + 1 \geq 2x + 4xy$
- D** 16. Wykaż, że $\sqrt{5}$ jest liczbą niewymierną.
- D** 17. Wykaż, że liczba $\log_2 3$ jest liczbą niewymierną.
- D** 18. Wykaż, że jeśli a jest liczbą niewymierną, to liczba $\frac{7a+12}{17}$ też jest liczbą niewymierną.
- D** 19. Wykaż, że jeśli n jest liczbą naturalną, to liczba $3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}$ jest podzielna przez 13.
- D** 20. Wykaż, że liczba $2^{n+5} + 2^{n+4} - 2^{n+3} + 2^{n+2} + 2^{n+1}$ dla dowolnej liczby naturalnej n , jest podzielna przez 23.
- D** 21. Wykaż, że liczba $6^{n+2} - 2 \cdot 6^{n+1} + 7^{n+2} - 7^n$ dla dowolnej liczby naturalnej n , jest podzielna przez 24.

Przekształcanie wzorów

Umiejętność przekształcania wzorów jest niezbędna do nauki matematyki, fizyki, chemii i wielu innych przedmiotów.

Wzory możemy podzielić na trzy grupy:

- I grupa – wzory, które nie zawierają ułamków, np.:
 $p = mv$ $F = ma$ $C_p = C_v + R$ $\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t$
- II grupa – wzory, które zawierają ułamki, ale nie występują w nich działania dodawania (odejmowania), np.:

$$\frac{M}{I} = \varepsilon \quad E = \frac{mv^2}{2} \quad \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \quad F = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

- III grupa – wzory, które zawierają ułamki i występują w nich działania dodawania lub odejmowania, np.:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad \eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad I = \frac{\varepsilon}{R_z + R_w}$$

Analizując poniższe przykłady, podaj założenia, przy których omawiane przekształcenia wzorów mają sens.

Najpierw zajmijmy się I grupą wzorów.

Przykład 1.

- a) Dany jest wzór $U = R \cdot I$, który opisuje wielkość U za pomocą iloczynu dwóch innych wielkości: R oraz I . Z tego wzoru można wyznaczyć R w zależności od U i I , a także I w zależności od U i R . Zgodnie z prawami działań możemy podzielić równość stronami przez R albo przez I .

$$U = R \cdot I \quad / : R$$

$$\frac{U}{R} = \frac{R \cdot I}{R}$$

Dzielimy równość stronami przez R .

Skracamy przez R ułamek po prawej stronie powstałej równości.

$$\frac{U}{R} = I, \text{ czyli } I = \frac{U}{R}$$

Wyznaczyliśmy I jako iloraz U przez R .

$$U = R \cdot I \quad / : I$$

$$\frac{U}{I} = \frac{R \cdot I}{I}$$

Dzielimy równość stronami przez I .

Skracamy przez I ułamek po prawej stronie powstałej równości.

$$\frac{U}{I} = R, \text{ czyli } R = \frac{U}{I}$$

Wyznaczyliśmy R jako iloraz U przez I .

- b) Wyznamy wielkość a ze wzoru $V = V_0 + a \cdot t$. Powyższy wzór opisuje V jako sumę dwóch wyrażeń V_0 oraz $a \cdot t$. Możemy najpierw przekształcić dany wzór w taki sposób, aby po jego prawej stronie pozostał iloczyn $a \cdot t$, następnie skorzystać z rozumowania przedstawionego w punkcie a).

$$V = V_0 + a \cdot t \quad / - V_0$$

$$V - V_0 = a \cdot t \quad / : t$$

$$\frac{V - V_0}{t} = a, \text{ czyli } a = \frac{V - V_0}{t}$$

Odejmujemy V_0 od obu stron równości.

Dzielimy powstałą równość stronami przez t .

Wyznaczyliśmy a jako iloraz $V - V_0$ przez t .

Teraz omówimy przekształcanie wzorów z II grupy.

Przykład 2.

Wyznamy wskazane wielkości z podanych niżej wzorów:

a) T ze wzoru $f = \frac{1}{T}$

b) V ze wzoru $F = \frac{mV^2}{r}$

c) n_1 ze wzoru $\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$

Przekształcamy wzory tak, aby otrzymać zależności takie, jak w grupie I. Następnie stosujemy metodę opisaną w poprzednim przykładzie, w punkcie a).

Ad a) Wielkość T znajduje się w mianowniku ułamka.

$$f = \frac{1}{T} \quad / \cdot T$$

Mnożymy równość stronami przez T .

$$f \cdot T = 1 \quad / : f$$

Dzielimy powstałą równość stronami przez f .

$$T = \frac{1}{f}$$

Otrzymujemy T w zależności od f .

Ad b) Wielkość V znajduje się w liczniku ułamka.

$$F = \frac{mV^2}{r} \quad / \cdot r$$

Mnożymy równość stronami przez r .

$$F \cdot r = mV^2 \quad / : m$$

Dzielimy powstałą równość stronami przez m .

$$\frac{Fr}{m} = V^2$$

$$V = \sqrt{\frac{Fr}{m}}$$

Przy założeniu, że wszystkie wielkości we wzorze mają wartość dodatnią, znajdujemy pierwiastki kwadratowe obu stron równości.

Ad c) Podany wzór jest proporcją, w której jednym z wyrazów jest wielkość n_1 .

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Mnożymy równość stronami przez iloczyn mianowników $(v_2 \cdot n_1)$.

$$v_1 \cdot n_1 = v_2 \cdot n_2 \quad / : v_1$$

Dzielimy powstałą równość stronami przez v_1 .

$$n_1 = \frac{v_2 \cdot n_2}{v_1}$$

We wzorach z III grupy występują ułamki oraz działania dodawania i odejmowania.

Przykład 3.

Wyznamy wskazane wielkości z podanych obok wzorów:

a) R_w ze wzoru $I = \frac{\varepsilon}{R_z + R_w}$

b) T_1 ze wzoru $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$

c) R_1 ze wzoru $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, wygodnie jest „pozbyć się” najpierw mianowników ułamków.

Ad a)

$$I = \frac{\varepsilon}{R_z + R_w} \quad / \cdot (R_z + R_w)$$

$$I \cdot (R_z + R_w) = \varepsilon$$

$$I \cdot R_z + I \cdot R_w = \varepsilon \quad / - I \cdot R_z$$

$$I \cdot R_w = \varepsilon - I \cdot R_z \quad / : I$$

$$R_w = \frac{\varepsilon - I \cdot R_z}{I}$$

Mnożymy równość stronami przez mianownik ułamka $(R_z + R_w)$.

Stosujemy prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania po lewej stronie równości.

Odejmujemy iloczyn $I \cdot R_z$ od obu stron równości.

Dzielimy powstałą równość stronami przez I .

Ad b)

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad / \cdot T_1$$

$$\eta \cdot T_1 = T_1 - T_2 \quad / - T_1$$

$$\eta \cdot T_1 - T_1 = -T_2$$

$$T_1 \cdot (\eta - 1) = -T_2 \quad / : (\eta - 1)$$

$$T_1 = \frac{-T_2}{\eta - 1}, \text{ czyli}$$

$$T_1 = \frac{T_2}{1 - \eta}$$

Mnożymy równość stronami przez T_1 .

Odejmujemy od obu stron równości T_1 , żeby wyznaczana wielkość była tylko po jednej stronie.

Wyłączamy poza nawias T_1 , zgodnie z prawem rozdzielności mnożenia względem odejmowania.

Dzielimy równość stronami przez $(\eta - 1)$, $\eta \neq 1$.

Licznik i mianownik ułamka możemy pomnożyć przez (-1) .

Ad c) W tym wzorze prawa strona jest sumą dwóch ułamków. Wielkość R_1 możemy wyznaczyć na dwa sposoby:

- pomnożyć równość stronami przez iloczyn wszystkich występujących (we wzorze) mianowników i dalej postępować jak w punkcie b) lub
- pozostawić po jednej stronie równości tylko ułamek z interesującą nas wielkością R_1 i po drugiej stronie doprowadzić dwa ułamki do wspólnego mianownika i dalej postępować jak w przykładzie 2 c).

I sposób

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad / \cdot R \cdot R_1 \cdot R_2$$

$$\begin{aligned} R_1 \cdot R_2 &= R \cdot R_2 + R \cdot R_1 & / - R \cdot R_1 \\ R_1 \cdot R_2 - R \cdot R_1 &= R \cdot R_2 \end{aligned}$$

$$R_1 \cdot (R_2 - R) = R \cdot R_2 \quad / : (R_2 - R)$$

$$R_1 = \frac{R \cdot R_2}{R_2 - R}$$

Mnożymy równość stronami przez $R \cdot R_1 \cdot R_2$.

Odejmujemy od obu stron równości $R \cdot R_1$.
Wyłączamy poza nawias R_1 .

Dzielimy równość stronami przez $(R_2 - R)$.

II sposób

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad / - \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1}$$

$$\frac{R_2 - R}{R \cdot R_2} = \frac{1}{R_1}$$

$$(R_2 - R) \cdot R_1 = R \cdot R_2 \quad / : (R_2 - R)$$

$$R_1 = \frac{R \cdot R_2}{R_2 - R}$$

Odejmujemy od obu stron wzoru $\frac{1}{R_2}$.

Ułamki po lewej stronie równości sprowadzamy do wspólnego mianownika.

Mnożymy równość stronami przez $R \cdot R_2 \cdot R_1$.

Dzielimy równość stronami przez $(R_2 - R)$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Z podanych wzorów wyznaczn wskazane wielkości:

a) $p = mv$, v

b) $C_p = C_v + R$, R

c) $\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t$, t

2. Z podanych wzorów wyznaczn wskazane wielkości:

a) $\frac{M}{l} = \varepsilon$, l

b) $E = \frac{mv^2}{2}$, v

c) $F = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$, m_2 , r

3. Z podanych wzorów wyznaczn wskazane wielkości:

a) $v = \frac{s}{t_1 - t_2}$, t_1 , t_2

b) $\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, y , f

c) $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, R , R_2

4. Z podanych wzorów wyznaczn wskazane wielkości:

a) $r = \frac{a+b-c}{2}$, b , c

b) $P = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R}$, a , R

c) $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$, h , b

d) $h = \sqrt{c_1 \cdot c_2}$, c_1

e) $V = \frac{4}{3} \pi r^3$, r

f) $P_c = 2\pi r(r+h)$, h

Średnie

Jeśli chcemy scharakteryzować w prosty sposób grupę liczb, często posługujemy się średnią tych liczb. Średnia jest zawsze zawarta między najmniejszą a największą z danych liczb.

Wprowadzimy cztery typy średnich.

- 1) **Średnia arytmetyczna** liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest równa

$$S_a = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

- 2) **Średnia geometryczna** liczb dodatnich $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest równa

$$S_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

Między średnią geometryczną a średnią arytmetyczną zachodzi następująca zależność: jeśli $a_1, a_2, \dots, a_n$ są liczbami dodatnimi, to $S_g \leq S_a$, przy czym równość występuje tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

- 3) **Średnia ważona** liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ z wagami dodatnimi $w_1, w_2, \dots, w_n$ jest równa

$$S_w = \frac{a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_n w_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

- 4) **Średnia harmoniczna** liczb dodatnich $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest równa

$$S_h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

Między średnią geometryczną a średnią harmoniczną n liczb dodatnich $a_1, a_2, \dots, a_n$ zachodzi następująca zależność $S_g \geq S_h$, przy czym równość występuje tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Przykład 1.

Tomek mierzył temperaturę powietrza o godz. 15⁰⁰ – od poniedziałku do piątku. Otrzymał następujące wyniki: 17°C, 20°C, 22°C, 13°C, 18°C. Jaka była średnia temperatura powietrza w tych dniach o godz. 15⁰⁰?

Obliczamy średnią arytmetyczną danych temperatur

$$\frac{1}{5}(17^\circ + 20^\circ + 22^\circ + 13^\circ + 18^\circ) = 18^\circ$$

Średnia temperatura powietrza była równa 18°C.

Przykład 2.

Średnia płaca w zakładzie zatrudniającym 19 osób była równa 2650 zł. Po wypłaceniu pensji nowo przyjętemu pracownikowi średnia płaca dla wszystkich zatrudnionych wzrosła o 2%. Jaką płacę otrzymał nowy pracownik?

Niech x oznacza pensję nowego pracownika (w zł). Po wypłaceniu pensji nowemu pracownikowi średnia płaca dla wszystkich zatrudnionych wzrosła o 2% i wynosiła $1,02 \cdot 2650$ (zł), czyli 2703 (zł). Stąd mamy

$$\frac{19 \cdot 2650 + x}{20} = 2703, \quad \text{skąd } x = 3710 \text{ (zł)}$$

Nowy pracownik otrzymał 3710 zł pensji.

Przykład 3.

W sklepie odzieżowym cena pewnej bluzki wzrosła najpierw o 50%, następnie o 20%. Na koniec sezonu cena bluzki została obniżona o 30%. Jaka była średnia, procentowa zmiana ceny bluzki?

Niech a oznacza początkową cenę bluzki w złotych. Po pierwszej podwyżce cena bluzki była równa

$$1,5a.$$

Liczbę 1,5 (w iloczynie $1,5a$) nazywamy czynnikiem zmiany ceny.

Po drugiej podwyżce cena bluzki wynosiła $1,2 \cdot 1,5a$, zaś po obniżce $0,7 \cdot 1,2 \cdot 1,5a$.

Niech p oznacza średni czynnik zmiany ceny bluzki. Ponieważ nastąpiły trzy zmiany ceny bluzki, więc otrzymujemy równanie

$$p^3 a = 0,7 \cdot 1,2 \cdot 1,5a, \quad \text{skąd otrzymujemy}$$

$$p = \sqrt[3]{0,7 \cdot 1,2 \cdot 1,5}, \quad \text{czyli } p = 1,080082...$$

Możemy powiedzieć, że przy każdej zmianie ceny bluzka drożała średnio o ok. 8%.

Przykład 4.

Nauczyciel powiedział uczniom, że w ocenie śródrocznej uwzględni średnią ważoną ocen cząstkowych. Przy czym najważniejsze są prace klasowe (waga 4), trochę mniej ważne są odpowiedzi ustne (waga 2), a najniżej punktowane są kartkówki (waga 1). Stopnie Marka i Jacka przedstawione są w tabeli poniżej. Jaką średnią ocen ma każdy z chłopców?

	klasówka	odpowiedź	kartkówka	kartkówka
Marek	5	4	1	5
Jacek	1	4	5	5

Obliczamy

$$S_w^M = \frac{5 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1}{4 + 2 + 1 + 1} = \frac{34}{8} = 4,25$$

$$S_w^J = \frac{1 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 5 \cdot 1}{4 + 2 + 1 + 1} = \frac{22}{8} = 2,75$$

Marek ma średnią 4,25, a Jacek 2,75.

Przykład 5.

Samochód przejechał trasę z miasta A do miasta B. Z jaką średnią prędkością v_{sr} poruszał się samochód, jeśli:

- połowę czasu przejechał z prędkością v_1 , a drugą połowę czasu przejechał z prędkością v_2 .
- połowę drogi przejechał z prędkością v_1 , a drugą połowę drogi przejechał z prędkością v_2 .

Przypomnijmy: średnią prędkość v (w ruchu jednostajnym) obliczamy, korzystając ze wzoru

$$v = \frac{s}{t},$$

gdzie s oznacza przebytą drogę, t – czas, w którym przebyto drogę s .

Ad a) Niech s_1 oznacza drogę, jaką przejechał samochód z prędkością v_1 , s_2 – drogę, jaką przejechał samochód z prędkością v_2 . Mamy:

$$s_1 = v_1 \cdot \frac{t}{2} \quad \text{oraz} \quad s_2 = v_2 \cdot \frac{t}{2}$$

$$s = s_1 + s_2 \quad \text{zatem}$$

$$v_{sr} = \frac{s}{t} = \frac{s_1 + s_2}{t} = \frac{v_1 \cdot \frac{t}{2} + v_2 \cdot \frac{t}{2}}{t} = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot \frac{t}{2} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

W tym przypadku średnia prędkość samochodu jest średnią arytmetyczną prędkości v_1 i v_2 .

Ad b) Niech t_1 oznacza czas, w jakim samochód przejechał pierwszą połowę drogi (z prędkością v_1), t_2 – czas, w jakim samochód przejechał drugą połowę drogi (z prędkością v_2). Mamy:

$$t_1 = \frac{\frac{s}{2}}{v_1} = \frac{s}{2 \cdot v_1} \quad \text{oraz} \quad t_2 = \frac{\frac{s}{2}}{v_2} = \frac{s}{2 \cdot v_2}$$

$$t = t_1 + t_2$$

$$v_{sr} = \frac{s}{t} = \frac{s}{t_1 + t_2} = \frac{s}{\frac{s}{2 \cdot v_1} + \frac{s}{2 \cdot v_2}} = \frac{1}{\frac{1}{2 \cdot v_1} + \frac{1}{2 \cdot v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$$

W tym przypadku średnia prędkość samochodu jest średnią harmoniczną prędkości v_1 i v_2 .

Sprawdź, czy rozumiesz

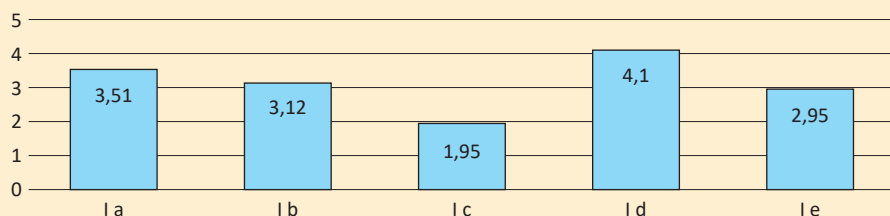
1. W tabeli poniżej przedstawiono liczbę godzin, w których świeciło słońce w danym miesiącu w Suwałkach i w Szczecinie.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Suwałki	29	73	121	196	234	242	291	237	195	131	49	12
Szczecin	43	61	121	233	205	255	230	197	177	152	66	24

W którym mieście, średnio, liczba „słonecznych” godzin w miesiącu jest większa, i o ile?

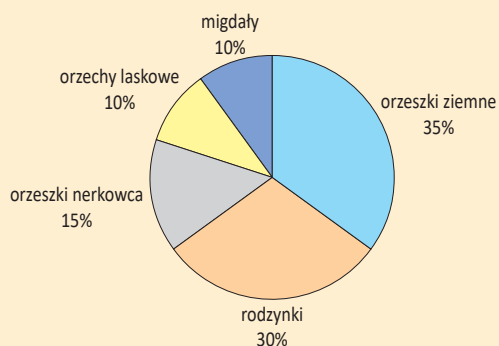
2. Diagram poniżej przedstawia wyniki sprawdzianu z matematyki w klasach pierwszych pewnego liceum.

Średnie ocen ze sprawdzianu z matematyki w klasach pierwszych



Wiedząc, że w klasie Ia sprawdzian pisało 30 uczniów, w Ib – 25 uczniów, w Ic – 20 uczniów, w Id – 27 uczniów oraz w Ie – 31 uczniów, oblicz średni wynik ze sprawdzianu z matematyki wśród uczniów klas pierwszych tego liceum. Wynik zaokrąglij do części setnych.

3. Diagram poniżej przedstawia skład *Mieszanki studenckiej*, w tabeli obok podane są ceny wszystkich składników.



składnik	cena
orzeszki ziemne	14 zł/kg
rodzynki	12 zł/kg
orzeszki nerkowca	56 zł/kg
orzechy laskowe	42 zł/kg
migdały	38 zł/kg

Chcemy przygotować 8 kg *Mieszanki studenckiej*. Jaka będzie cena 1 kg takiej *Mieszanki* (jeśli uwzględniamy tylko koszt zakupu składników)?

4. W czterech kolejnych latach, w Polsce, inflacja była równa 10,1%, 5,5%, 1,9%, 0,8%. Oblicz, jaka była średnia inflacja w Polsce w ciągu tych czterech lat.

- Liczba $(10^{20})^{-5}$ jest równa:
A. 10^{-4} B. 10^{15} C. 10^{-25} D. 10^{-100}
- Liczba $0,2^{-14} : \left(-\frac{1}{5}\right)^{-17}$ jest równa:
A. -1 B. $-0,008$ C. $-\frac{8}{10}$ D. $\frac{8}{125}$
- Liczba $4^{(3^2)}$ jest równa:
A. 4^9 B. $4^{(2^3)}$ C. 4^6 D. 4^5
- Dane są liczby $a = \sqrt{2,89}$, $b = \sqrt{1\frac{9}{16}}$, $c = \sqrt{\frac{1}{0,49}}$. Wówczas:
A. $c < b < a$ B. $a < b < c$ C. $b < a < c$ D. $b < c < a$
- Liczba $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16}$ jest równa:
A. $\sqrt[3]{2}$ B. $\sqrt[3]{38}$ C. $\sqrt[6]{38}$ D. $1,5\sqrt[3]{2}$
- Po wyłączeniu ułamka $\frac{x}{2}$ poza nawias z wyrażenia $2x^3 - 3xy$ otrzymamy:
A. $\frac{x}{2}(x^2 - 1,5y)$ B. $\frac{x}{2}(4x^2 - 6y)$ C. $\frac{x}{2}(4x^2 - 3xy)$ D. $\frac{x}{2}(x^2 - 1,5xy)$
- Wyrażenie $\sqrt{8}(x-y) + \sqrt{2}(y-x)$ można zapisać jako:
A. $\sqrt{10}(x-y)$ B. $\sqrt{6}(x-y)$ C. $\sqrt{2}(x-y)$ D. $\sqrt{18}(x-y)$
- Odwrotnością liczby $\sqrt{2} + 1$ jest liczba:
A. $\sqrt{2} + 1$ B. $\sqrt{2} - 1$ C. $-\sqrt{2} + 1$ D. $-\sqrt{2} - 1$
- Liczbę $0,000015$ można zapisać jako $a \cdot 10^k$, gdzie $a \in \langle 1, 10 \rangle$ i $k \in \mathbf{Z}$. Wówczas:
A. $a = 15$ $k = 10^{-6}$ B. $a = 1,5$ $k = 10^{-6}$ C. $a = 1,5$ $k = -5$ D. $a = 15$ $k = 10^{-5}$
- Liczba $\log 100^2$ jest równa:
A. 2 B. 4 C. 100 D. $10\,000$
- Liczba $\log_{0,2} 10 + \log_{0,2} 12,5$ jest równa:
A. -3 B. $\log_{0,2} 2,5$ C. 3 D. $\log_{0,2} 22,5$

12. Liczba $3^{\log_3 8}$ jest równa:

A. $\log 8$

B. $\log_9 8$

C. $\log_2 256$

D. $\log_3 8^3$

13. Liczba $-2\log_6 2 - \log_6 9$ jest równa:

A. -2

B. -4

C. $-2\log_6 \frac{2}{9}$

D. $-\log_6 \frac{4}{9}$

14. Liczba $\log_3 243 \cdot \log_3 1$ jest równa:

A. 5

B. 6

C. 0

D. 3^{244}

Zadania otwarte

15. Zamień jednostki i zastosuj w zapisie wyniku notację wykładniczą.

a) $2 \text{ km} = \dots \text{ dm}$

13 mm = m

23 cm = km

b) $37 \text{ kg} = \dots \text{ dag}$

56 g = kg

81 g = t

c) $2 \text{ m}^2 = \dots \text{ dm}^2$

7,1 m² = cm²

4,5 mm² = m²

16. Zapisz liczbę w postaci jednej potęgi:

a) $4^{10} : 2^4 \cdot (-0,5)^2$

b) $\left[(-2)^5\right]^{-2} \cdot 2^7$

c) $(3^3)^4 : 9^3 \cdot (-3)^0$

d) $\sqrt[3]{7\sqrt{7}}$

e) $2^{\frac{9}{5}} \cdot \sqrt[5]{2} \cdot \sqrt{8}$

f) $4^{-7,5} : 4^{-2,5} + 2^{-10}$

17. Oblicz:

a) $\sqrt{12^2 + 5^2} - \sqrt[3]{3-512}$

b) $\sqrt[5]{-2} \cdot \sqrt[5]{16} + \sqrt[4]{243} : \sqrt[4]{3}$

c) $\sqrt{32} + \sqrt{72} - \sqrt{200}$

d) $\sqrt[3]{8 \cdot 7 + 8 \cdot 11 + 8 \cdot 9}$

18. Oblicz:

a) $(\sqrt{2} - 2)^2$

b) $(2 + 2\sqrt{5})(2\sqrt{5} - 2)$

c) $(-2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})^2$

d) $(\sqrt[4]{3} - 1)(\sqrt[4]{3} + 1)(\sqrt{3} + 1)$

19. Zapisz liczbę w postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie liczby a, b, c są całkowite:

a) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2}$

b) $\frac{32}{(\sqrt{5}-1)^2}$

c) $\sqrt{3}(\sqrt{6} + \sqrt{3})^{-1}$

20. Uprość wyrażenie. Następnie oblicz jego wartość dla podanej obok wyrażenia wartości zmiennej.

a) $(-x+2)(4-3x) - 3(x+1)^2$; $x = 0,01^{0,5}$

b) $(2a+1)(a^2-a-1) - 2(a^2+1)(a-1)$; $a = \sqrt{2} - 1$

c) $(2x-3)^2 - (2x+3)^2 + 4x$; $x = 16^{0,3} : 16^{0,05}$

d) $(x-1)^2(x+1)^2 - (x^2+1)^2$; $x = -2\sqrt[4]{9}$

21. Rozwiąż równania:

a) $(7-x)^2 = x^2 + 7$

b) $(5x+2)^2 = 25x^2$

c) $(x+4)^2 = (6-x)^2$

d) $(x-15)^2 = (x-11)^2$

22. Rozwiąż nierówność $(x-a)^2 + \frac{x}{2} - \frac{(x-5)^2}{2} > 1 + 0,5(x+2)(x-2)$, jeżeli liczba a

jest największą liczbą pierwszą, spełniającą nierówność: $\frac{a-3}{2} - \frac{a+3}{3} + 5 \geq a$.

23. Rozwiąż nierówności:

a) $(3+x)(3-x) \geq x(5-x)$

b) $(6-2x)^2 > (3+2x)^2$

c) $(x+4)(x-4) \leq (x+1)^2$

24. Oblicz:

a) $(\log 0,08 + 3\log 0,5)^{-3}$

b) $7^{2+\log_{49} 25}$

c) $\log_3 0,375 - \log_3 \frac{1}{8}$

d) $\log_4^2 3 - \log_4 9 \cdot \log_4 6 + \log_4^2 6$

D 25. Wykaż, że jeśli $a > -2$ i $b \geq 3$, to $ab + 2b \geq 3a + 6$.

D 26. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność $3a^2 + 7b^2 \geq 6ab$.

D 27. Wykaż, że suma dwóch kolejnych parzystych liczb całkowitych niepodzielnych przez 6 jest podzielna przez 6.

D 28. Wykaż, że jeśli n jest liczbą całkowitą nieparzystą, to liczba $n^2 - 1$ jest podzielna przez 4.

D 29. Wykaż, że suma pięciu kolejnych liczb naturalnych nieparzystych jest liczbą naturalną, mającą cyfrę jedności równą 5.

D 30. Wykaż, że liczba $3^{2n+3} + 4 \cdot 9^{n+1} + 81^{0,5n+1}$ dla dowolnej liczby naturalnej n :

a) jest podzielna przez 12

b) jest kwadratem pewnej liczby naturalnej.

D 31. Wykaż, że jeśli $(a+b)(c+d) = (a+c)(b+d)$, to $a = d$ lub $b = c$.

32. Samochód przejechał jedną trzecią trasy z prędkością $v_1 = 40$ km/h, jedną trzecią trasy z prędkością $v_2 = 50$ km/h i pozostałą część trasy z prędkością $v_3 = 90$ km/h. Oblicz średnią prędkość v_{sr} , z jaką samochód przejechał całą trasę.

33. Samochód przejechał całą trasę w następujący sposób: jedną trzecią czasu jechał z prędkością $v_1 = 40$ km/h, jedną trzecią czasu z prędkością $v_2 = 50$ km/h, a przez pozostały czas jechał z prędkością $v_3 = 90$ km/h. Oblicz średnią prędkość v_{sr} , z jaką samochód przejechał całą trasę.

3. Funkcje i ich własności

Pojęcie funkcji. Funkcja liczbowa. Sposoby opisywania funkcji

W matematyce i w życiu codziennym mamy do czynienia z różnymi przyporządkowaniami, np. każdej osobie mieszkającej na stałe w Polsce przyporządkowuje się numer PESEL, jak również każdej osobie przyporządkowuje się jej imię. Niektóre z takich przyporządkowań są funkcjami, inne nie są. Aby dobrze zrozumieć pojęcie funkcji, rozważymy różne przykłady przyporządkowań.

Przykład 1.

Nauczyciel wychowania fizycznego przeprowadził wśród uczniów klasy I pewnego liceum sprawdzian z biegu na 100 m. Wyniki sprawdzianu zapisał w postaci zbioru par liczb, gdzie pierwszy element pary oznaczał numer ucznia z dziennika, zaś drugi element pary oznaczał czas w sekundach, uzyskany przez ucznia. Poniżej przedstawiono notatki nauczyciela:

(3; 15)	(5; 17)	(11; 13)	(18; 12,5);
(19;)	(21; 14)	(25, 16,3)	(29; 16,5)

Uczniowi z numerem 19 nie został przypisany czas biegu; być może uczeń był nieobecny lub nie ukończył biegu.

Przykład 2.

Ewie, Włodkowi, Jankowi i Marysi przyporządkowano przedmioty dodatkowe, jakie zadeklarowali na maturę.

Ewa → fizyka

Włodek → geografia

Janek → chemia i fizyka

Marysia → biologia

Każdemu elementowi ze zbioru X , gdzie $X = \{\text{Ewa, Włodek, Janek, Marysia}\}$, przyporządkowaliśmy elementy zbioru Y , gdzie $Y = \{\text{fizyka, geografia, biologia, chemia}\}$. Janek wybrał dwa przedmioty dodatkowe, pozostali maturzyści – po jednym.

Przykład 3.

Poniższa tabela przedstawia przyporządkowanie wybranym lekturom szkolnym nazwiska ich autorów.

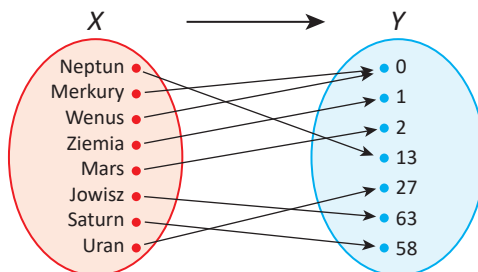
tytuł lektury szkolnej	nazwisko autora
„Pan Tadeusz”	Mickiewicz
„W pustyni i w puszczy”	Sienkiewicz
„Lalka”	Prus
„Antygona”	Sofokles
„Iliada”	Homer

Każdemu elementowi ze zbioru X , $X = \{„Pan Tadeusz”, „W pustyni i w puszczy”, „Lalka”, „Antygona”, „Iliada”\}$, przyporządkowaliśmy nazwisko autora – tylko jednego! – ze zbioru Y , $Y = \{\text{Mickiewicz, Sienkiewicz, Prus, Sofokles, Homer}\}$.

W tym przykładzie każdy element ze zbioru Y został przyporządkowany jednemu elementowi ze zbioru X .

Przykład 4.

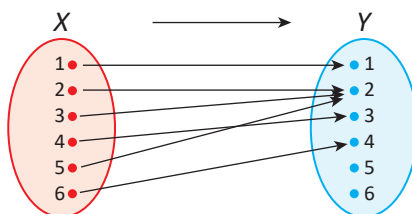
Poniższy graf przedstawia przyporządkowanie, w którym planetom z Układu Słonecznego przyporządkowujemy liczbę księżyców krążących wokół nich.



Każdej planecie przypisano tylko jedną liczbę księżyców. Zauważ też, że element 0 ze zbioru Y został przyporządkowany dwóm elementom (Merkury i Wenus) ze zbioru X .

Przykład 5.

Poniższy graf ilustruje odwzorowanie, w którym liczbom naturalnym ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ przyporządkowujemy liczbę ich naturalnych dzielników.



Każdej liczbie ze zbioru X przyporządkowano tylko jedną liczbę ze zbioru Y .

Zauważ, że żadna z liczb naturalnych ze zbioru X nie ma pięciu ani sześciu dzielników (czyli elementom 5 i 6 ze zbioru Y nie został przyporządkowany żaden element zbioru X).

Te przykłady prowadzą nas do następującej definicji:

Definicja 1.

Funkcją f ze zbioru X w zbiór Y (zbiory X i Y są niepuste) nazywamy takie odwzorowanie, w którym każdemu elementowi ze zbioru X został przyporządkowany tylko jeden element ze zbioru Y . Funkcję tę oznaczamy $f: X \rightarrow Y$.

Odwzorowanie w przykładzie 1. nie jest funkcją, ponieważ elementowi 19 nie został przyporządkowany żaden element.

Odwzorowanie w przykładzie 2. nie jest funkcją, ponieważ jednemu z elementów ze zbioru X przyporządkowano dwa elementy ze zbioru Y .

Przykłady 3., 4. i 5. opisują funkcje.

Zauważ, że element ze zbioru Y może być przyporządkowany kilku elementom ze zbioru X (zobacz przykład 5). Ponadto do zbioru Y mogą należeć elementy, które nie zostały przyporządkowane żadnym elementom ze zbioru X .

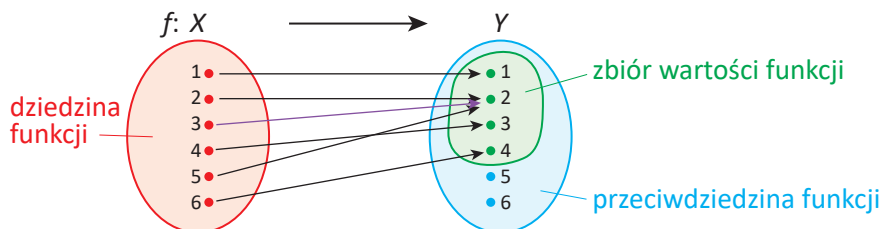
Funkcje oznaczamy zwykle literami f, g, h, F, G, H itp.

Zbiór X , o którym mowa w definicji funkcji, nazywamy **dziedziną funkcji** f . Dziedzinę funkcji f oznaczamy również symbolem D_f . Elementy dziedziny funkcji f nazywamy **argumentami funkcji** f .

Zbiór Y nazywamy **przeciwdziedziną funkcji** f .

Zbiór tych elementów ze zbioru Y , które zostały przypisane elementom ze zbioru X , nazywamy **zbiorem wartości** funkcji f . Zbiór wartości funkcji f oznaczamy symbolem ZW_f .

Dla funkcji z przykładu 5. (oznacmy ją f) dziedzina, przeciwdziedzina i zbiór wartości zaznaczone są na rysunku poniżej.



Zapis $f(3) = 2$ (czytamy: „ f od 3 równa się 2”) znaczy: dla argumentu 3 funkcja f przyjmuje wartość 2 (argumentowi 3 funkcja f przyporządkowuje liczbę 2).

Ogólnie: zapis $f(x)$ oznacza wartość funkcji f dla argumentu x .

Jeśli zbiory X oraz Y są niepustymi podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych, to funkcję $f: X \rightarrow Y$ nazywamy **funkcją liczbową** zmiennej rzeczywistej.

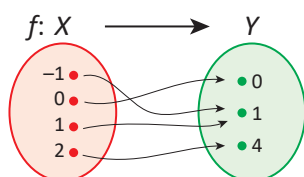
Sposoby opisywania funkcji liczbowych

Najczęstszymi sposobami, które stosujemy do opisywania funkcji liczbowej, są:

- graf,
- opis słowny,
- tabelka,
- zbiór par uporządkowanych,
- wykres funkcji,
- wzór funkcji.

Sposoby te omówimy na przykładzie jednej i tej samej funkcji f .

• Graf



Z grafu odczytujemy, że dziedziną funkcji jest zbiór $X = \{-1, 0, 1, 2\}$, zaś zbiorem wartości zbiór $Y = \{0, 1, 4\}$. Strzałki pokazują sposób przyporządkowania, np. zapis: $2 \rightarrow 4$ czytamy: dla argumentu 2 wartość funkcji f wynosi 4, czyli $f(2) = 4$.

• Opis słowny

Funkcję f opisujemy całym zdaniem, podając jej dziedzinę i precyzyjny opis odwzorowania, np.:

„Funkcja f każdej liczbie ze zbioru $\{-1, 0, 1, 2\}$ przyporządkowuje jej kwadrat.”

Na podstawie tego opisu łatwo jest podać wartości funkcji przyporządkowane poszczególnym argumentom.

• Tabelka

Tabelka składa się z dwóch wierszy. W górnym wierszu znajdują się argumenty funkcji f , czyli wszystkie liczby należące do dziedziny funkcji (najczęściej wpisujemy je do tabeli w porządku rosnącym); w dolnym wierszu znajdują się wartości, jakie funkcja f przyjmuje dla tych argumentów.

x	-1	0	1	2
$f(x)$	1	0	1	4

Na przykład z tabeli odczytujemy, że dla argumentu 2 funkcja f przyjmuje wartość 4, natomiast wartość 1 odpowiada dwóm argumentom: -1 i 1 .

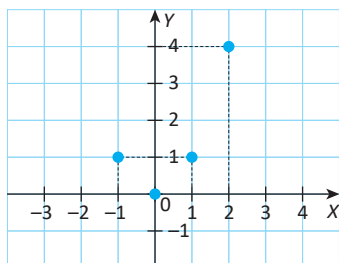
• Zbiór par uporządkowanych

Jest to zbiór wszystkich par mających postać $(x, f(x))$, czyli pierwszy element pary oznacza argument, zaś drugi – wartość funkcji, która jest przyporządkowana danemu argumentowi. Na przykład para $(2, 4)$ oznacza, że $f(2) = 4$. Oto zbiór wszystkich par opisujących daną funkcję f :

$\{(-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$.

• Wykres

Wykres funkcji f jest to zbiór wszystkich punktów płaszczyzny o współrzędnych $(x, f(x))$, w prostokątnym układzie współrzędnych, gdzie x należy do dziedziny tej funkcji, natomiast $f(x)$ jest wartością funkcji f dla argumentu x .



Wykres rozważanej przez nas funkcji f składa się z czterech punktów. Punkty te mają współrzędne: $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 4)$.

Z wykresu odczytujemy na przykład, że $f(-1) = 1$ oraz że $f(x) = 4$ tylko wtedy, gdy $x = 2$.

UWAGA: Wykres funkcji składa się z tylu punktów, ile liczb znajduje się w dziedzinie funkcji.

Wykres funkcji jest bardzo pomocny w analizowaniu różnych własności funkcji, które zostaną omówione w kolejnych tematach.

• Wzór funkcji

Poniżej są przedstawione trzy sposoby zapisania wzoru funkcji f .

$$f: x \rightarrow x^2, \text{ jeśli } x \in \{-1, 0, 1, 2\}$$

$$f(x) = x^2, \text{ jeśli } x \in \{-1, 0, 1, 2\}$$

$$y = x^2, \text{ jeśli } x \in \{-1, 0, 1, 2\}$$

Wzór funkcji umożliwia obliczenie wartości funkcji dla dowolnego argumentu z dziedziny tej funkcji. Wówczas mamy:

$$f(-1) = (-1)^2 = 1, \quad f(0) = 0^2 = 0 \quad \text{i tak dalej.}$$

Mając wzór funkcji możemy również stwierdzić, czy dany punkt należy do wykresu tej funkcji, bez jego szkicowania.

Przykład 6.

Sprawdźmy, czy punkty $A(-2, 4)$, $B(1, 0)$, $C(9, -21)$ należą do wykresu funkcji f opisanej za pomocą wzoru $f(x) = 2\sqrt{x} - 3x$, gdzie $x \in \langle 0, +\infty \rangle$.

Punkt A nie należy do wykresu funkcji f , ponieważ liczba -2 nie należy do dziedziny tej funkcji.

Punkt B nie należy do wykresu funkcji f , chociaż liczba 1 jest argumentem tej funkcji. Mamy bowiem:

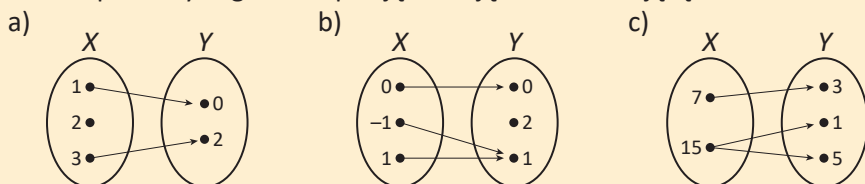
$$f(1) = 2\sqrt{1} - 3 \cdot 1 = -1, \text{ więc } f(1) \neq 0.$$

Punkt C należy do wykresu funkcji f , bo liczba 9 należy do dziedziny tej funkcji oraz $f(9) = -21$:

$$f(9) = 2\sqrt{9} - 3 \cdot 9 = 6 - 27 = -21.$$

Sprawdź, czy rozumiesz

- Czy poniższe przyporządkowania są funkcjami? Odpowiedź uzasadnij.
 - Każdemu Polakowi przyporządkowujemy datę jego urodzin.
 - Każdemu odcinkowi przyporządkowujemy jego długość.
 - Każdej liczbie naturalnej przyporządkowujemy jej naturalne dzielniki.
- Które z poniższych grafów opisują funkcję odwzorowującą zbiór X w zbiór Y ?



Odpowiedź uzasadnij.

- Funkcja f odwzorowuje zbiór $X = \{0, 5, 10, 15\}$ w zbiór $Y = \{0, 1, 2, 3, 5\}$ w taki sposób, że $f(0) = 0$, $f(5) = 1$, $f(10) = 2$, $f(15) = 3$.
 - Narysuj graf funkcji f .
 - Czy funkcja f odwzorowuje zbiór X na zbiór Y ?
- Funkcja f jest opisana za pomocą wzoru $f(x) = (0,5)^{x-2}$, gdzie $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
 - Wyznacz zbiór wartości funkcji f .
 - Przedstaw tę funkcję za pomocą grafu.
- Funkcja $f: \{1, 3, 5, 7\} \longrightarrow \{0, 2, 4, 6\}$ dla coraz większych argumentów przyjmuje coraz mniejsze wartości.
 - Przedstaw tę funkcję za pomocą tabelki.
 - Oblicz wartość wyrażenia: $[f(7) - f(3)] \cdot [f(1) + f(5)]$.
- Funkcja g jest opisana za pomocą tabelki.

x	0	1	4	9	16	25	36
$g(x)$	0	1	2	3	4	5	6

- Jaką wartość funkcja g przyjmuje dla argumentu 4?
 - Podaj argument, dla którego funkcja g przyjmuje wartość 4.
 - Podaj opis słowny funkcji g .
- Funkcja h jest opisana za pomocą tabelki:

x	-3	-2	0	1	2	3
$h(x)$	-5	-4	-2	-1	0	1

- Jaką wartość funkcja h przyjmuje dla argumentu -2?
- Wypisz wszystkie argumenty, dla których funkcja h przyjmuje wartości większe od -3.
- Podaj opis słowny oraz wzór funkcji h .

8. Funkcję f opisuje tabela:

x	0,125	1	$\sqrt[3]{4}$	16
$f(x)$	-3	0	0,(6)	4

Wykaż, że funkcję f można opisać za pomocą wzoru $f(x) = \log_2 x$, gdzie $x \in \left\{16, \sqrt[3]{4}, \frac{1}{8}, 1\right\}$.

9. Funkcja f jest opisana za pomocą zbioru par uporządkowanych:

$\{(-3, -5), (-2, -4), (-1, -3), (0, -2), (1, -1), (2, 0), (3, 1)\}$.

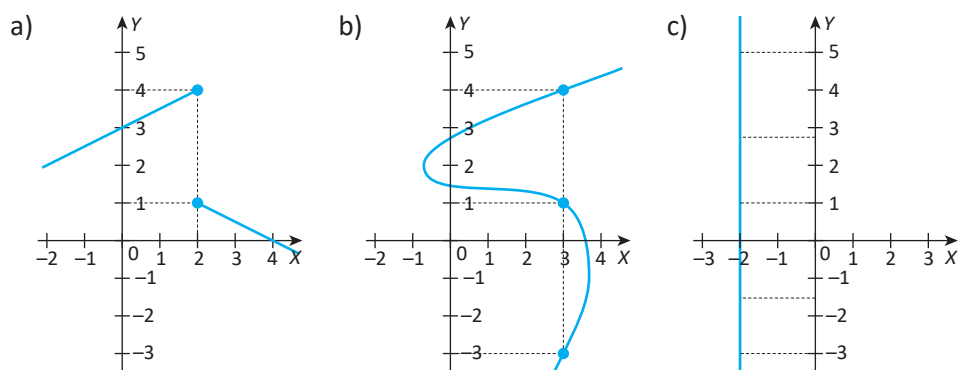
- Narysuj wykres funkcji f w prostokątnym układzie współrzędnych.
 - Podaj wzór funkcji f .
 - Oblicz wartość wyrażenia $3 \cdot f(1) - 2 \cdot f(-2)$.
10. Funkcja f każdej liczbie ze zbioru $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1\}$ przyporządkowuje wartość bezwzględną tej liczby, pomniejszoną o 1.
- Zapisz wzór funkcji f .
 - Przedstaw daną funkcję za pomocą zbioru par uporządkowanych.
 - Narysuj wykres funkcji f w prostokątnym układzie współrzędnych.
11. Dziedziną funkcji f jest zbiór $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Funkcja f każdej liczbie pierwszej ze zbioru A przyporządkowuje liczbę 1, każdej liczbie złożonej ze zbioru A przyporządkowuje liczbę 2, zaś pozostałym liczbom ze zbioru A – liczbę 3.
- Przedstaw tę funkcję za pomocą tabelki.
 - Narysuj wykres funkcji f .
12. Funkcja f każdej liczbie ze zbioru $\{-2, -1, 0, 2, 3, 4\}$ przyporządkowuje jej podwojony kwadrat, pomniejszony o 8.
- Napisz wzór funkcji f .
 - Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje tę samą wartość? Ile wynosi ta wartość?
13. Funkcja g każdej liczbie całkowitej przyporządkowuje kwadrat tej liczby pomniejszonej o 3.
- Podaj wzór funkcji g .
 - Dla jakiego argumentu funkcja g przyjmuje wartość 0?
 - Sprawdź, czy punkty $A(20, 289)$ i $B(-9, 124)$ należą do wykresu funkcji g .
14. Funkcja h każdej liczbie naturalnej dwucyfrowej podzielnej przez 5 przyporządkowuje resztę z dzielenia tej liczby przez 4.
- Zapisz dziedzinę i zbiór wartości funkcji h .
 - Które z punktów $A(100, 0)$, $B(50, 2)$, $C(75, 1)$ należą do wykresu funkcji h ?
 - Oblicz wartość wyrażenia $[h(30) + h(65)]^{h(55)}$.

Wykres funkcji

Jednym ze znanych Ci sposobów opisywania funkcji jest jej wykres, czyli zbiór wszystkich punktów mających postać (x, y) , gdzie x należy do dziedziny funkcji, zaś y jest przyporządkowaną argumentowi x wartością funkcji. Powstaje pytanie: „Czy dowolnie wybrany zbiór punktów w układzie współrzędnych jest wykresem pewnej funkcji?” Oczywiście, że nie.

Przykład 1.

Poniżej przedstawione są zbiory punktów, które nie są wykresami funkcji zmiennej x . Zastanówmy się, dlaczego.



Rysunek a) nie przedstawia wykresu funkcji, ponieważ elementowi 2 przyporządkowane są dwie liczby: 1 oraz 4, a zgodnie z definicją funkcji każdemu elementowi z dziedziny musi być przyporządkowana tylko jedna wartość.

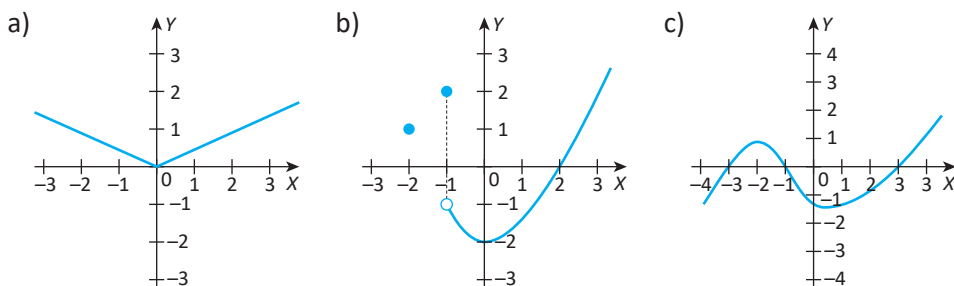
Rysunek b) nie przedstawia wykresu funkcji, ponieważ elementowi 3 zostały przyporządkowane trzy liczby: -3 , 1, 4.

Rysunek c) nie przedstawia wykresu funkcji, ponieważ elementowi -2 przypisano nieskończenie wiele różnych liczb rzeczywistych.

Zbiór punktów w prostokątnym układzie współrzędnych jest wykresem funkcji tylko wtedy, gdy każda prosta równoległa do osi OY ma z danym zbiorem nie więcej niż jeden punkt wspólny.

Przykład 2.

Poniżej kolorem niebieskim naszkicowane są wykresy różnych funkcji.



Zauważ, że w każdym przypadku dowolna prosta równoległa do osi OY , ma z danym wykresem funkcji co najwyżej jeden punkt wspólny.

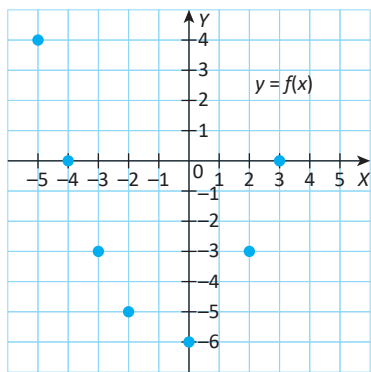
Przykład 3.

Dana jest funkcja $f(x) = 0,5(x - 3)(x + 4)$, gdzie $x \in \{-5, -4, -3, -2, 0, 2, 3\}$. Narysujemy wykres tej funkcji. Następnie odczytamy współrzędne punktów wspólnych wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych.

Po wyznaczeniu wartości funkcji f (wykonaj obliczenia) możemy opisać tę funkcję, na przykład, za pomocą zbioru par uporządkowanych:

$$\{(-5, 4), (-4, 0), (-3, -3), (-2, -5), (0, -6), (2, -3), (3, 0)\}.$$

Wykres funkcji f jest następujący:



Zauważ, że jedynym punktem wspólnym wykresu funkcji f i osi OY jest punkt o współrzędnych $(0, -6)$.

Wykres funkcji f ma natomiast dwa punkty wspólne z osią OX : $(-4, 0)$ oraz $(3, 0)$.

Zauważmy, że:

- 1) Wszystkie punkty znajdujące się na osi OY mają pierwszą współrzędną równą 0. Wykres funkcji f ma punkt wspólny z osią OY tylko wtedy, gdy $0 \in D_f$. Wówczas współrzędne tego punktu są równe $(0, f(0))$.
- 2) Wszystkie punkty znajdujące się na osi OX mają drugą współrzędną równą 0. Wykres funkcji f ma punkt wspólny z osią OX tylko wtedy, gdy istnieje argument x_0 , dla którego funkcja f przyjmuje wartość 0. Wówczas współrzędne tego punktu wynoszą $(x_0, 0)$.

Wykres funkcji może mieć co najwyżej jeden punkt wspólny z osią OY oraz dowolną liczbę punktów wspólnych z osią OX .

Przykład 4.

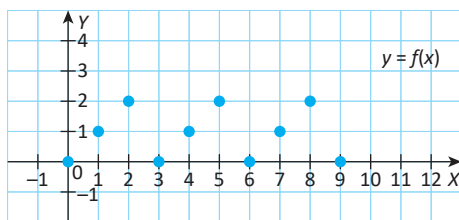
W prostokątnym układzie współrzędnych przedstawimy wykres funkcji f danej opisem słownym: „Funkcja f każdej liczbie naturalnej mniejszej od 10 przyporządkowuje resztę z dzielenia tej liczby przez 3”.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Zauważ, że wśród liczb należących do dziedziny funkcji mamy:

- liczby 0, 3, 6 oraz 9, które po podzieleniu przez 3 dają resztę 0;
- liczby 1, 4, 7, które po podzieleniu przez 3 dają resztę 1;
- liczby 2, 5, 8, które po podzieleniu przez 3 dają resztę 2.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0

Na podstawie tabelki rysujemy wykres funkcji f .



Pamiętaj, że wykres funkcji składa się z tylu punktów, ile argumentów należy do dziedziny danej funkcji. W tym przypadku do wykresu funkcji należy dziesięć punktów.

W matematyce często posługujemy się funkcjami zmiennej x , których wzór składa się z kilku wyrażeń połączonych klamrą. Na przykład funkcję z przykładu 4. opisuje

$$\text{wzór: } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } x \in \{0, 3, 6, 9\} \\ 1, & \text{jeśli } x \in \{1, 4, 7\} \\ 2, & \text{jeśli } x \in \{2, 5, 8\} \end{cases}$$

Przykład 5.

Funkcja f opisana jest wzorem $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{jeśli } x \in \{-2, 0, 5, 6\} \\ 4x^{-1}, & \text{jeśli } x \in \{2, 4\} \end{cases}$. Narysujemy wykres tej funkcji.

Z opisu funkcji f wynika, że jej dziedziną jest zbiór $\{-2, 0, 5, 6\} \cup \{2, 4\}$, czyli $D_f = \{-2, 0, 2, 4, 5, 6\}$. Obliczamy wartości funkcji f dla poszczególnych argumentów:

$$f(-2) = -2 - 1 = -3$$

$$f(2) = 4 \cdot 2^{-1} = 2$$

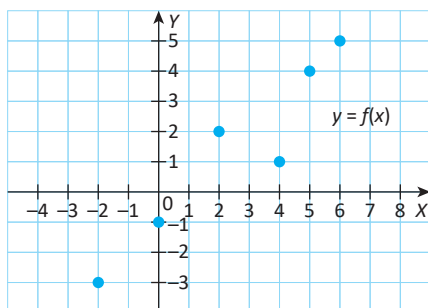
$$f(0) = 0 - 1 = -1$$

$$f(4) = 4 \cdot 4^{-1} = 1$$

$$f(5) = 5 - 1 = 4$$

$$f(6) = 6 - 1 = 5$$

Do wykresu funkcji f należy sześć punktów:



Do wykresu funkcji może należeć nieskończenie wiele punktów (zobacz przykład 2.) – na przykład wówczas, gdy dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$. W takim przypadku nie możemy obliczyć wartości funkcji dla wszystkich argumentów. Tworzymy jedynie tzw. tabelkę częściową. Im bardziej szczegółowa jest ta tabelka, tym dokładniej naszkicujemy fragment wykresu takiej funkcji.

Przykład 6.

Naszkicujemy wykresy dwóch funkcji:

a) $y = x$, gdzie $x \in \mathbf{R}$

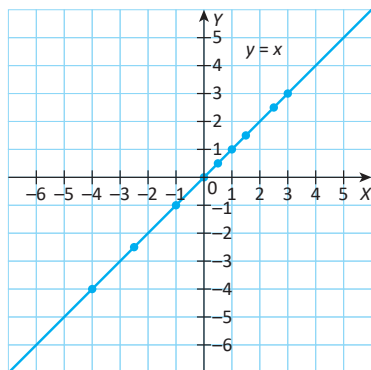
b) $y = \sqrt{x}$, gdzie $x \in \langle 0, +\infty \rangle$

Budujemy tabelki częściowe tych funkcji.

a) $y = x$, gdzie $x \in \mathbf{R}$

x	-4	$-\frac{5}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\frac{5}{2}$	3
y	-4	$-\frac{5}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\frac{5}{2}$	3

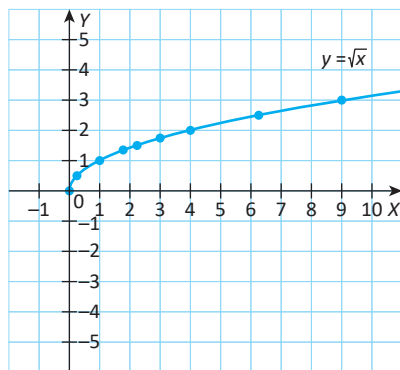
Wszystkie punkty płaszczyzny w układzie współrzędnych o dwóch takich samych współrzędnych tworzą prostą.



b) $y = \sqrt{x}$, gdzie $x \in \langle 0, +\infty \rangle$

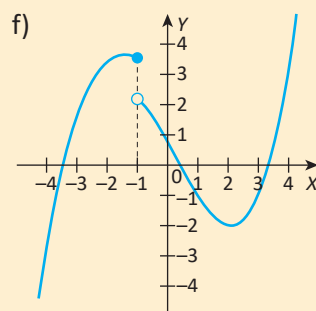
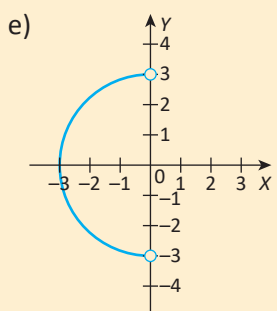
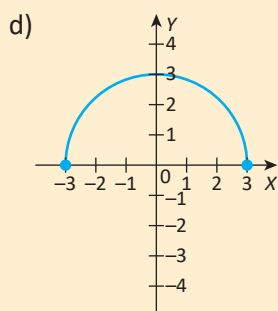
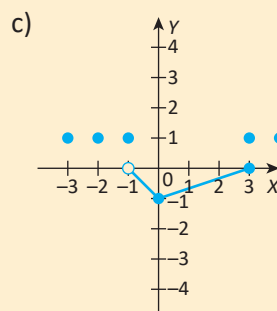
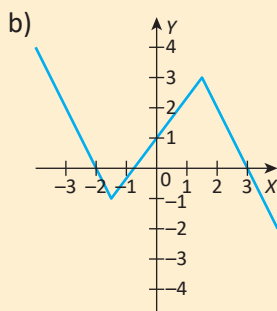
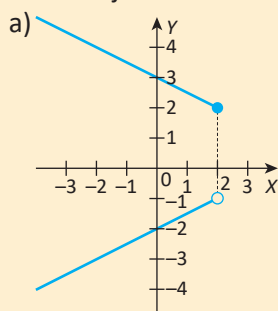
x	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{16}{9}$	$\frac{9}{4}$	3	4	$\frac{25}{4}$	9
y	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\frac{5}{2}$	3

Wykres funkcji jest krzywą, której kształt przedstawia rysunek.



Sprawdź, czy rozumiesz

1. Który zbiór punktów jest wykresem pewnej funkcji zmiennej x ? Odpowiedź uzasadnij.



2. Naszkicuj wykresy funkcji:

a) $f(x) = x$, gdzie $x \in (-\infty, 1)$

b) $f(x) = x$, gdzie $x \in \langle -4, -1 \rangle \cup \{1, 2, 3\}$

c) $f(x) = -x$, gdzie $x \in \mathbb{Z}$

d) $f(x) = -x$, gdzie $x \in (-2, +\infty) \cup \{-4, -3\}$.

3. Naszkicuj wykres funkcji f , opisaną za pomocą wzoru:

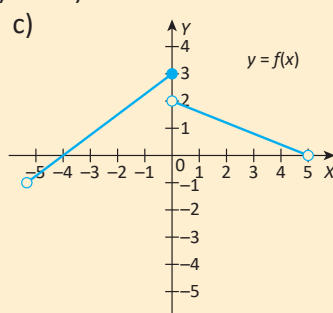
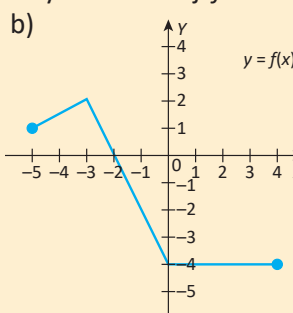
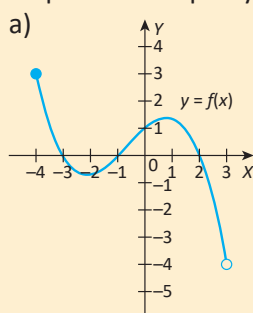
a) $f(x) = \sqrt{x}$, gdzie $x \in \langle 0, 1 \rangle$

b) $f(x) = \sqrt{x}$, gdzie $x \in \{0\} \cup (1, +\infty)$

c) $f(x) = -\sqrt{x}$, gdzie $x \in \left\{0, \frac{1}{4}, 1, \frac{9}{4}, \frac{25}{4}, 9\right\}$

d) $f(x) = -\sqrt{x}$, gdzie $x \in \langle 0, +\infty \rangle$.

4. Na poniższym rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f . Podaj współrzędne punktów wspólnych wykresu funkcji f i osi: 1) OY 2) OX .



5. Wyznacz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji f i osi OY oraz współrzędne punktów wspólnych wykresu tej funkcji i osi OX (o ile istnieją), jeżeli:

- a) $f(x) = -2x^2 + 8$, gdzie $x \in \mathbf{R}$ b) $f(x) = 2(x-3)(x+7)$, gdzie $x \in \mathbf{R}$
 c) $f(x) = 2x + 10$, gdzie $x \in \mathbf{N}$ d) $f(x) = -3x + 6$, gdzie $x \in \mathbf{Z}$
 e) $f(x) = (x+3)^2$, gdzie $x \in \langle -5, 0 \rangle$ f) $f(x) = x^2 - 7$, gdzie $x \in (-\infty, 1)$.

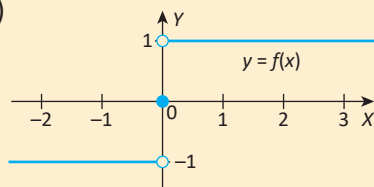
6. Narysuj wykres funkcji f , której dziedziną jest zbiór wszystkich liczb całkowitych z przedziału $(-6, 4)$ i która liczbom parzystym przyporządkowuje liczbę 2, zaś liczbom nieparzystym przyporządkowuje liczbę -1 . Zapisz wzór funkcji f .

7. Naszkicuj wykresy następujących funkcji:

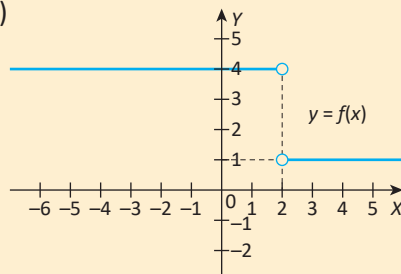
- a) $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{jeśli } x \in \langle 0, 6 \rangle \\ x, & \text{jeśli } x \in (-4, 0) \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} -2, & \text{jeśli } x \in (-3, 1) \\ 1, & \text{jeśli } x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \end{cases}$
 c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{jeśli } x \in \{0, 1, 4\} \\ 0, & \text{jeśli } x \in (-5, 0) \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{jeśli } x \in (-\infty, 0) \\ \sqrt{x}, & \text{jeśli } x \in \langle 0, 1 \rangle \end{cases}$

8. Na rysunku poniżej przedstawiony jest fragment wykresu funkcji f , określonej w zbiorze $\mathbf{R}$. Podaj opis słowny tego przyporządkowania oraz wzór funkcji f .

a)



b)



9. Korzystając z definicji wartości bezwzględnej: $|x| = \begin{cases} x, & \text{jeśli } x \geq 0 \\ -x, & \text{jeśli } x < 0 \end{cases}$, naszkicuj wykres funkcji $y = |x|$, gdzie $x \in \mathbf{R}$.

10. Sprawdź (wykonując obliczenia), który z podanych punktów: $A(-1, 2)$, $B(-2, 1)$,

$$C(0, 5), D(\sqrt{3}, 0) \text{ należy do wykresu funkcji } f(x) = \begin{cases} x+5, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -1) \\ 3-x^2, & \text{jeśli } x \in \langle -1, +\infty \rangle \end{cases}$$

11. Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5, & \text{jeśli } x \in \langle -4, -2 \rangle \cup \langle 2, 4 \rangle \\ 3x + 7, & \text{jeśli } x \in (-2, 2) \end{cases}$

- a) Podaj współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji f i osi OY .
 b) Oblicz wartość funkcji f dla argumentu 2.
 c) Wyznacz argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość 4.
 d) Sprawdź, czy do wykresu funkcji f należy punkt $A(-2, 1)$.

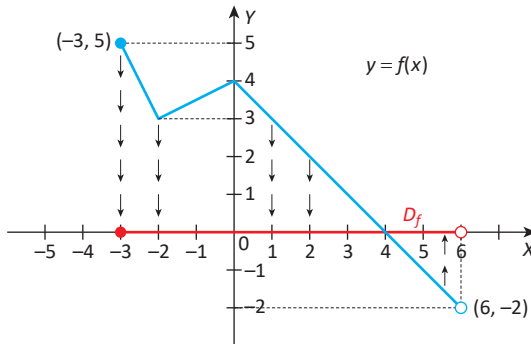
Dziedzina funkcji liczbowej

Ważną umiejętnością jest wyznaczanie dziedziny funkcji zarówno na podstawie wykresu funkcji, jak też z jej wzoru.

Wyznaczanie dziedziny funkcji na podstawie jej wykresu

Wiesz, że wykres funkcji w prostokątnym układzie współrzędnych to zbiór wszystkich punktów płaszczyzny o współrzędnych (x, y) , gdzie x oznacza argument funkcji, zaś y – wartość funkcji dla argumentu x .

Aby z wykresu funkcji odczytać dziedzinę funkcji f , wystarczy „zebrać” wszystkie pierwsze współrzędne punktów wykresu. Czyli odcięte tych punktów. Wyobraź sobie, że te odcięte (x) „odłączają” się od par (x, y) i „wędrują” na oś OX pod kątem prostym (jak pokazują strzałki). Na osi OX powstaje zbiór wszystkich argumentów funkcji, czyli dziedzina funkcji – zbiór D_f (kolor czerwony).



Odczytujemy: $D_f = \langle -3, 6 \rangle$.

Wyznaczanie dziedziny funkcji opisanej wzorem

Można zauważyć, że w rozważanych przez nas przykładach funkcji w poprzednich tematach obok wzoru funkcji występowała dziedzina. Często jednak w zadaniach podaje się sam wzór funkcji. W jaki sposób wówczas określamy jej dziedzinę?

Przez dziedzinę funkcji opisanej wzorem rozumiemy zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych, dla których są wykonalne wszystkie działania zapisane we wzorze funkcji, co znaczy, że dziedziną funkcji jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, dla których można obliczyć wartości funkcji.

Przykład 1.

Wyznaczmy dziedziny funkcji:

a) $f(x) = -5x + 7$

b) $g(x) = \sqrt{x-1}$

c) $h(x) = \frac{3}{x^2 - 4}$

Ad a) Wiemy, że każdą liczbę rzeczywistą można pomnożyć przez -5 oraz do każdej liczby rzeczywistej można dodać 7 . Wnioskujemy, że dziedziną funkcji $f(x) = -5x + 7$ jest zbiór $\mathbf{R}$, zapisujemy $D_f = \mathbf{R}$.

Ad b) Pierwiastek kwadratowy istnieje tylko z liczby dodatniej lub równej 0 . Oznacza to, że wartość funkcji g można obliczyć tylko wtedy, gdy jest spełniona nierówność $x - 1 \geq 0$, czyli $x \geq 1$.

Dziedziną funkcji $g(x) = \sqrt{x-1}$ jest przedział $\langle 1, +\infty \rangle$, zapisujemy $D_g = \langle 1, +\infty \rangle$.

Ad c) Dowolną liczbę rzeczywistą można podnieść do kwadratu, od każdej liczby rzeczywistej można odjąć liczbę 4 , ale dzielenie liczby 3 przez $x^2 - 4$ jest możliwe tylko wtedy, gdy $x^2 - 4 \neq 0$. Dzielenie przez 0 jest niewykonalne. Otrzymujemy:

$$x^2 \neq 4 \text{ tylko wtedy, gdy } x \neq 2 \text{ i } x \neq -2.$$

Dziedziną funkcji $h(x) = \frac{3}{x^2 - 4}$ jest zbiór $\mathbf{R} - \{-2, 2\}$, czyli $D_h = \mathbf{R} - \{-2, 2\}$.

Pamiętaj:

- 1) Pierwiastki stopnia parzystego można obliczać tylko z liczb nieujemnych.
- 2) Mianownik ułamka musi być zawsze liczbą różną od 0 .

Przykład 2.

Wyznamy dziedzinę funkcji:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+6}}$$

$$\text{b) } g(x) = \sqrt{8-x} + \frac{2}{x-5}$$

$$\text{Ad a) } f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+6}}$$

Z ostatniej uwagi wynika, że: 1) $x + 6 \geq 0$ oraz 2) $x + 6 \neq 0$. Te dwa warunki można zastąpić jedną nierównością: $x + 6 > 0$. Zatem

$$D_f = (-6, +\infty)$$

$$\text{Ad b) } g(x) = \sqrt{8-x} + \frac{2}{x-5}$$

Liczba x musi spełniać jednocześnie dwa warunki:

$$1) 8 - x \geq 0 \text{ oraz } 2) x - 5 \neq 0$$

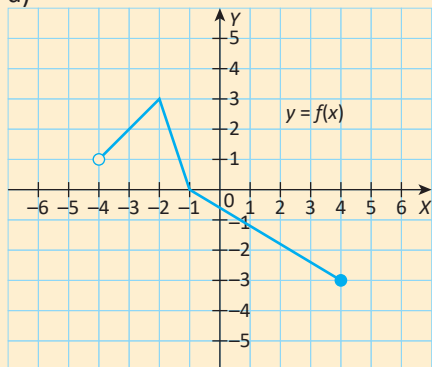
1) Zbiorem rozwiązań nierówności $8 - x \geq 0$ jest przedział $(-\infty, 8]$.

2) Jednocześnie $x \neq 5$, więc otrzymujemy, że dziedziną funkcji g jest suma przedziałów:

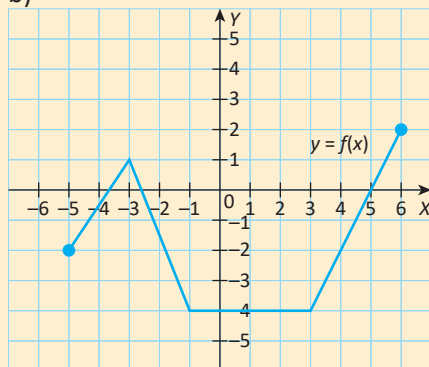
$$D_g = (-\infty, 5) \cup (5, 8].$$

Sprawdź, czy rozumiesz1. Odczytaj z wykresu funkcji f jej dziedzinę.

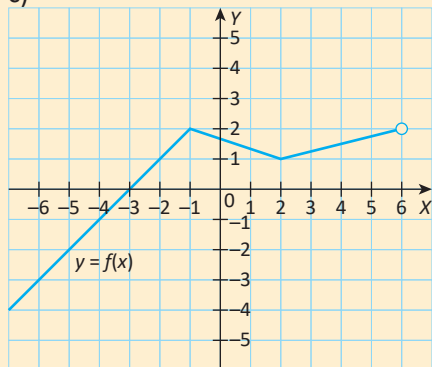
a)



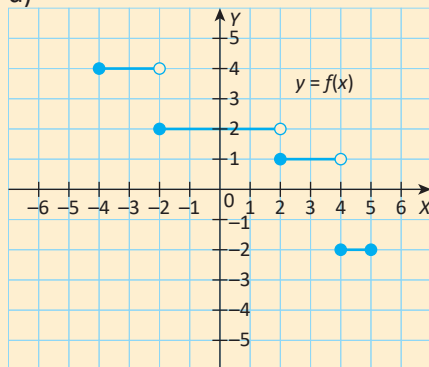
b)



c)



d)



2. Wyznacz dziedzinę funkcji:

a) $f(x) = \frac{x+1}{2}$

b) $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$

c) $f(x) = \frac{x^2}{x} + \frac{3}{x-7}$

d) $f(x) = \frac{3+x}{x^2+1}$

e) $f(x) = \frac{5x}{(x+2)(x-4)}$

f) $f(x) = \frac{4}{x+9} + \frac{10}{x^2-3}$

3. Wyznacz dziedzinę funkcji:

a) $f(x) = \sqrt{3x+6}$

b) $f(x) = \sqrt{5-2x}$

c) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+4}}$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x}} + \frac{3}{\sqrt{x}}$

e) $f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{x-2}$

f) $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{4-6x}} + \frac{1}{x^2}$

g) $f(x) = \frac{\sqrt{5+x}}{x^2+10x+25}$

h) $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{9-x^2}$

i) $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{5-x}}$

Zbiór wartości funkcji liczbowej. Najmniejsza i największa wartość funkcji

Zbiór wartości funkcji liczbowej to zbiór liczb, jakie otrzymujemy w wyniku obliczenia wartości funkcji dla wszystkich jej argumentów.

Przykład 1.

Wyznamy zbiór wartości funkcji $g(x) = |2x + 3|$, gdzie $x \in \{-5, -4, -1, 0, 2\}$.

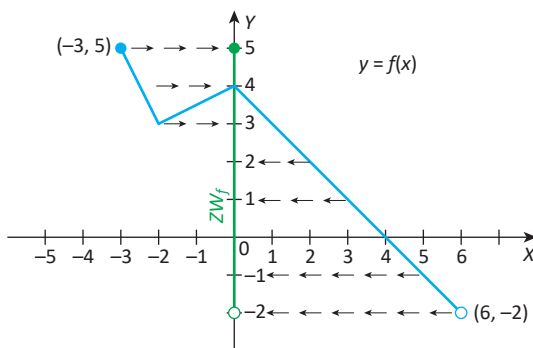
Obliczamy wartości funkcji g dla kolejnych argumentów:

$$g(-5) = 7 \quad g(-4) = 5 \quad g(-1) = 1 \quad g(0) = 3 \quad g(2) = 7$$

Wyznaczyliśmy wszystkie wartości funkcji g , zatem $ZW_g = \{1, 3, 5, 7\}$.

Określanie zbioru wartości funkcji na podstawie jej wzoru jest zazwyczaj bardzo trudne. Dlatego do wyznaczenia zbioru wartości funkcji często korzystamy z jej wykresu.

Aby z wykresu funkcji f odczytać zbiór wartości funkcji, wystarczy „zebrać” z punktów wykresu (x, y) drugie współrzędne tych punktów. Czyli rzędne tych punktów. Wyobraź sobie, że te rzędne (y) „odłączają” się od par (x, y) i „wędrują” na oś OY pod kątem prostym (jak pokazują strzałki). Na osi OY powstaje zbiór wszystkich wartości funkcji, czyli zbiór ZW_f (kolor zielony).



Odczytujemy: $ZW_f = (-2, 5]$.

Największą liczbą w zbiorze wartości funkcji f jest liczba 5. Mówimy, że funkcja f przyjmuje największą wartość równą 5 dla argumentu -3 .

W przedziale $(-2, 5]$ nie istnieje wartość najmniejsza. Powiemy, że funkcja f nie przyjmuje wartości najmniejszej.

Definicja 1.

Najmniejszą wartością funkcji liczbowej nazywamy najmniejszą z liczb należących do zbioru wartości funkcji, o ile w zbiorze wartości taka liczba istnieje.

Największą wartością funkcji liczbowej nazywamy największą z liczb należących do zbioru wartości funkcji, o ile w zbiorze wartości taka liczba istnieje.

Zauważ, że funkcja g z przykładu 1. dla argumentu -1 przyjmuje najmniejszą wartość równą 1, a dla argumentów -5 i 2 przyjmuje największą wartość równą 7.

Przykład 2.

Sprawdźmy, czy liczba 3 należy do zbioru wartości funkcji, jeżeli dany jest wzór tej funkcji: $f(x) = 2x^2 - 5$, gdzie $x \in \{-4, -3, -2, -1\}$.

Wystarczy sprawdzić, czy istnieje argument funkcji, dla którego funkcja przyjmuje wartość 3. W takim razie szukamy takiego rozwiązania równania $f(x) = 3$, które należy do dziedziny funkcji f .

$$2x^2 - 5 = 3, \text{ skąd}$$

$$2x^2 = 8, \quad \text{czyli} \quad x^2 = 4$$

Równanie to ma dwa rozwiązania: -2 oraz 2 .

Zauważamy, że liczba -2 należy do dziedziny funkcji f , zatem $f(-2) = 3$.

Liczba 3 należy do zbioru wartości funkcji f i jest ona przyjmowana dla argumentu -2 .

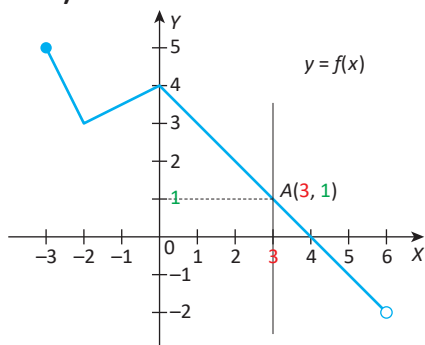
UWAGA: Jeżeli do dziedziny funkcji należy niewielka liczba argumentów, to można obliczyć wszystkie wartości funkcji, aby się przekonać, czy dana liczba należy do zbioru wartości tej funkcji.

Przykład 3.

Dany jest wykres funkcji f . Z wykresu odczytamy:

- wartość tej funkcji dla argumentu 3,
- argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość 3.

Ad a)

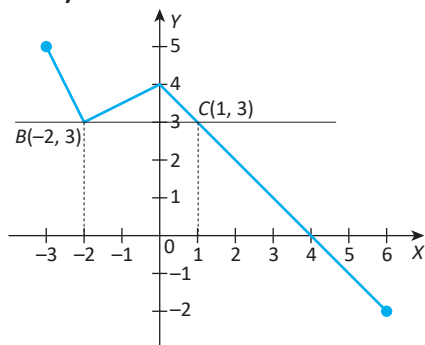


Wykonujemy następujące czynności:

- znajdujemy na osi OX punkt, którego odcięta, czyli pierwsza współrzędna, wynosi 3;
- przez ten punkt prowadzimy prostą równoległą do osi OY , aż do przecięcia się tej prostej z wykresem funkcji; prosta przecina wykres funkcji w punkcie A ;
- odczytujemy rzędną, czyli drugą współrzędną, punktu A na osi OY : $y_A = 1$.

Dla argumentu 3 wartość funkcji f jest równa 1, czyli $f(3) = 1$.

Ad b)



Wykonujemy następujące czynności:

- znajdujemy na osi OY punkt, którego druga współrzędna (rzędna) wynosi 3;
- przez ten punkt prowadzimy prostą równoległą do osi OX , aż do przecięcia się tej prostej z wykresem funkcji; prosta ma dwa punkty wspólne z wykresem funkcji: punkty B i C ;
- odczytujemy pierwsze współrzędne (odcięte) punktów B i C na osi OX :

$$x_B = -2 \quad \text{ i } \quad x_C = 1.$$

Funkcja f przyjmuje wartość 3 dla dwóch argumentów: -2 i 1 . Zapisujemy:

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow x \in \{-2, 1\}$$

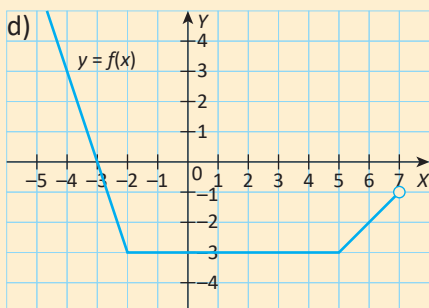
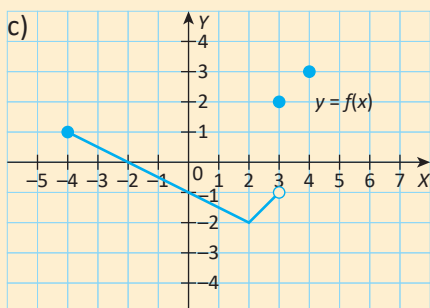
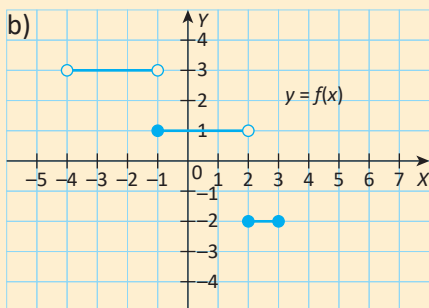
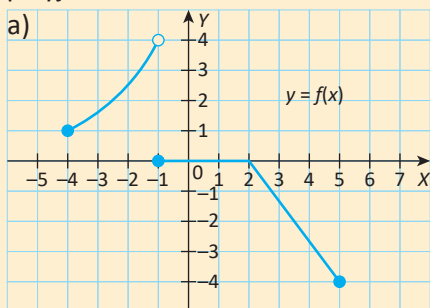
Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wyznacz zbiór wartości funkcji f , jeśli:

a) $f(x) = \frac{x-3}{2x+5}$, $x \in \{-2, -1, 0, 4\}$ b) $f(x) = \frac{(x-5)(x+5)}{x^2+1}$, $x \in \{\sqrt{2}, 1, 2, \sqrt{3}\}$

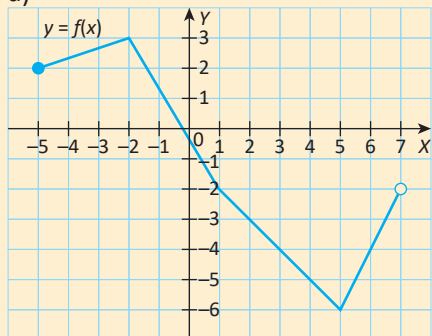
c) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, $x \in \left\{\frac{1}{8}, 1, 4, \sqrt[4]{8}\right\}$ d) $f(x) = 1 - 2^x$, $x \in \{-3, -2, 0, 1, 4\}$.

2. Odczytaj z wykresu zbiór wartości funkcji f . Następnie podaj najmniejszą oraz największą wartość funkcji f (o ile istnieją) i dla jakich argumentów są one przyjmowane.

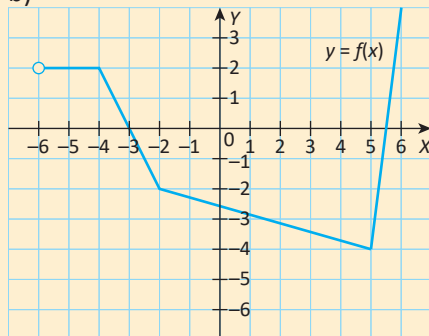


3. Na poniższym rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$.

a)



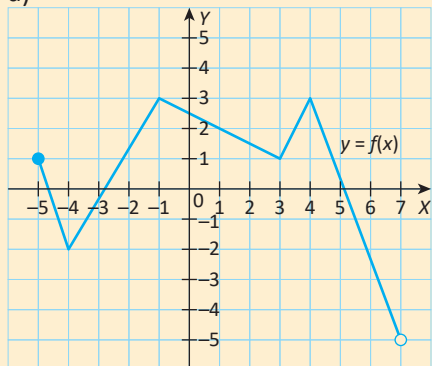
b)



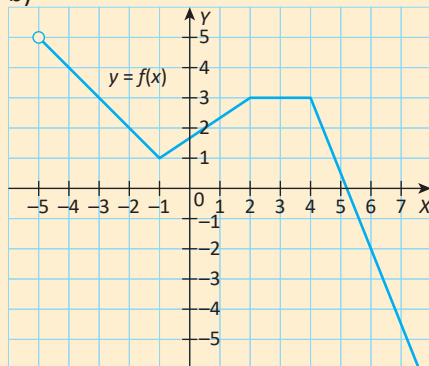
Odczytaj z wykresu:

- 1) dziedzinę i zbiór wartości funkcji f ;
 - 2) $f(-2)$ oraz $f(6)$;
 - 3) argumenty, dla których wartość funkcji f jest równa -4 ;
 - 4) najmniejszą i największą wartość funkcji f (o ile istnieją) oraz dla jakich argumentów są one przyjmowane.
4. Dany jest wykres funkcji f .

a)



b)



Odczytaj z wykresu:

- 1) dziedzinę i zbiór wartości funkcji f ;
 - 2) wartość funkcji f dla argumentu 4;
 - 3) argumenty, dla których wartość funkcji f jest równa -2 ;
 - 4) dla ilu argumentów funkcja f przyjmuje wartość 1.
5. Podaj dziedzinę funkcji f . Następnie oblicz, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość w podaną obok wzoru funkcji.
- a) $f(x) = -3x + 8$, $w = 98$;

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5$, $w = 3$;
6. Sprawdź, czy liczba 5 należy do zbioru wartości funkcji:
- a) $f(x) = 3x - 6$, $x \in \mathbb{Z}$

b) $g(x) = -4x - 7$, $x \in \{-5, -3, -1\}$.

Miejsce zerowe funkcji

Funkcja f jest opisana za pomocą tabelki poniżej. Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość 0?

x	-3	-2	0	3	5	8
$f(x)$	4	0	-1	7	0	2

Funkcja f przyjmuje wartość 0 dla dwóch argumentów: -2 oraz 5. Możemy zapisać:
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x = -2 \text{ lub } x = 5)$

Argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartość 0, to miejsca zerowe funkcji. Zatem funkcja f ma dwa miejsca zerowe: -2 oraz 5.

Definicja 1.

Miejscem zerowym funkcji liczbowej nazywamy argument, dla którego wartość funkcji jest równa zero.

Przykład 1.

Dana jest funkcja $f(x) = x^2 - 49$, gdzie $x \in \{-7, -6, -5, -4\}$. Wyznamy miejsca zerowe tej funkcji.

Aby wyznaczyć miejsca zerowe funkcji, rozwiązujemy równanie $f(x) = 0$. Następnie sprawdzamy, czy otrzymane rozwiązania należą do dziedziny funkcji.

$$\begin{aligned} x^2 - 49 &= 0 \\ (x - 7)(x + 7) &= 0 \\ x - 7 = 0 \text{ lub } x + 7 &= 0 \\ x = 7 \text{ lub } x &= -7 \end{aligned}$$

korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

iloczyn liczb jest równy 0 wtedy, gdy co najmniej jedna z tych liczb jest równa 0.

Liczba -7 należy do dziedziny funkcji f , a liczba 7 nie należy do dziedziny tej funkcji. Jedynym miejscem zerowym funkcji f jest liczba -7.

UWAGA: W przypadku, gdy do dziedziny funkcji należy tylko kilka liczb, możemy obliczyć wszystkie wartości tej funkcji. Miejscami zerowymi będą te argumenty, dla których otrzymamy wartość funkcji równą 0.

Przykład 2.

Wyznamy, jeżeli istnieją, miejsca zerowe następujących funkcji:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \sqrt{x+5} & \text{b) } g(x) &= x^2 + 3 & \text{c) } h(x) &= \begin{cases} x+3, & \text{jeśli } x \in (-\infty, 0) \\ x+2, & \text{jeśli } x \in (0, +\infty) \end{cases} \end{aligned}$$

Ad a) Wyznamy najpierw dziedzinę funkcji f . Liczby należące do tej dziedziny spełniają nierówność $x + 5 \geq 0$. Stąd $D_f = \langle -5, +\infty \rangle$.

Aby wyznaczyć miejsca zerowe tej funkcji, szukamy rozwiązań równania $\sqrt{x+5} = 0$.

Z własności pierwiastka kwadratowego wynika, że tylko $\sqrt{0}$ wynosi 0. Otrzymujemy

$$x + 5 = 0, \text{ skąd}$$

$$x = -5$$

Stwierdzamy, że $-5 \in D_f$. Jedynym miejscem zerowym funkcji f jest liczba -5 .

Ad b) Dziedziną funkcji g jest zbiór $\mathbf{R}$. Rozpatrujemy równanie $g(x) = 0$, czyli

$$x^2 + 3 = 0$$

które sprowadzamy do postaci

$$x^2 = -3$$

Równanie jest sprzeczne. Funkcja g nie ma miejsc zerowych.

Ad c) Dziedziną funkcji $h(x) = \begin{cases} x+3, & \text{jeśli } x \in (-\infty, 0) \\ x+2, & \text{jeśli } x \in (0, +\infty) \end{cases}$ jest suma przedziałów

$$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

I. Jeśli $x \in (-\infty, 0)$, to $h(x) = x + 3$

$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

Ponieważ $-3 \in (-\infty, 0)$, więc $h(-3) = 0$.

Liczba -3 jest miejscem zerowym funkcji h .

II. Jeśli $x \in (0, +\infty)$, to $h(x) = x + 2$

$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

Zauważamy, że $-2 \notin (0, +\infty)$.

Liczba -2 nie jest miejscem zerowym funkcji h .

Jedynym miejscem zerowym funkcji h jest liczba -3 .

Przykład 3.

Wyznamy, jeżeli istnieją, miejsca zerowe funkcji:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x-4}{x^2+5}$$

$$\text{b) } g(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$$

Ad a)

Wyznamy dziedzinę funkcji f . Wyrażenie $x^2 + 5$ dla każdej liczby rzeczywistej przyjmuje wartości różne od zera, więc $D_f = \mathbf{R}$.

Teraz rozwiązujemy równanie $f(x) = 0$:

$$\frac{x-4}{x^2+5} = 0 \text{ tylko wtedy, gdy } x-4 = 0, \text{ skąd } x = 4$$

Miejscem zerowym funkcji f jest liczba 4.

Ad b)

Mianownik ułamka we wzorze funkcji jest różny od 0 wtedy, gdy $x-3 \neq 0$, więc $D_g = \mathbf{R} - \{3\}$. Następnie rozwiązujemy równanie $g(x) = 0$:

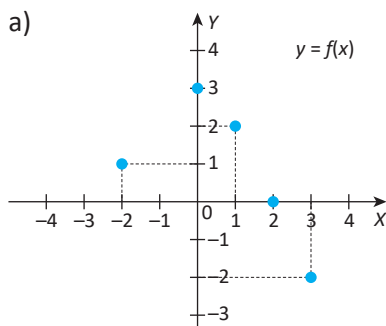
$$\frac{x^2-9}{x-3} = 0, \text{ skąd } x^2-9 = 0, \text{ czyli } x^2 = 9$$

Ostatnie równanie spełniają dwie liczby: -3 oraz 3 . Jednak tylko jedna z nich należy do dziedziny funkcji g . Jest to liczba -3 .

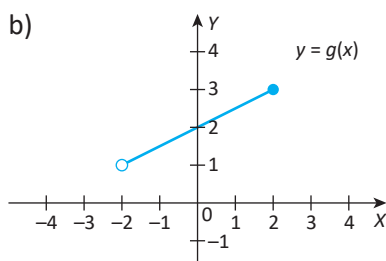
Jedynym miejscem zerowym funkcji g jest liczba -3 .

Przykład 4.

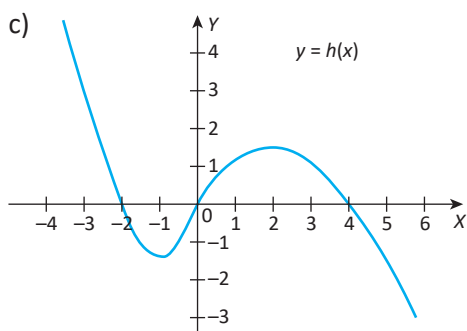
Poniżej przedstawiono wykresy trzech funkcji. Na ich podstawie wyznaczmy miejsca zerowe, o ile istnieją, tych funkcji.



Punktem wspólnym wykresu funkcji f i osi OX jest punkt $(2, 0)$, zatem miejscem zerowym tej funkcji jest liczba 2 .



Wykres funkcji g nie ma punktów wspólnych z osią OX , więc ta funkcja nie ma miejsc zerowych.



Wykres funkcji h przecina oś OX w punktach: $(-2, 0)$, $(0, 0)$, $(4, 0)$, zatem ta funkcja ma trzy miejsca zerowe: $-2, 0, 4$.

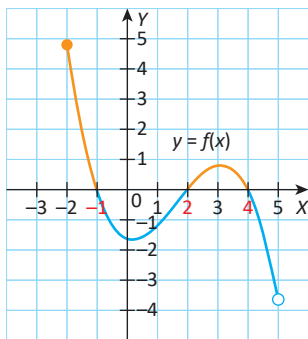
1. Miejsca zerowe to pierwsze współrzędne punktów wspólnych wykresu funkcji i osi OX .
2. Punkty wykresu znajdujące się powyżej osi OX mają drugą współrzędną dodatnią i wówczas $f(x) > 0$.
3. Punkty wykresu znajdujące się poniżej osi OX mają drugą współrzędną ujemną i wtedy $f(x) < 0$.

Przykład 5.

Dany jest wykres funkcji f , określonej w zbiorze $\langle -2, 5 \rangle$ (zobacz rysunek poniżej). Z wykresu tej funkcji odczytamy:

- zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie,
- zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne.

Część wykresu znajdująca się nad osią OX (zaznaczona kolorem pomarańczowym) „informuje” nas o dodatnich wartościach funkcji, zaś część wykresu położona pod osią OX (zaznaczona kolorem niebieskim) „informuje” nas o ujemnych wartościach funkcji.



Miejscami zerowymi są liczby: $-1, 2$ i 4 .

Ponadto:

- funkcja f przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów należących do zbioru $\langle -2, -1 \rangle \cup (2, 4)$
- funkcja f przyjmuje wartości ujemne dla argumentów należących do zbioru $(-1, 2) \cup (4, 5)$

Powyższe informacje zapisujemy krótko:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 2, 4\}$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \langle -2, -1 \rangle \cup (2, 4)$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 2) \cup (4, 5)$$

Sprawdź, czy rozumiesz

- Dana jest funkcja f oraz liczba a obok wzoru tej funkcji, należąca do jej dziedziny. Sprawdź, czy liczba a jest miejscem zerowym funkcji f .

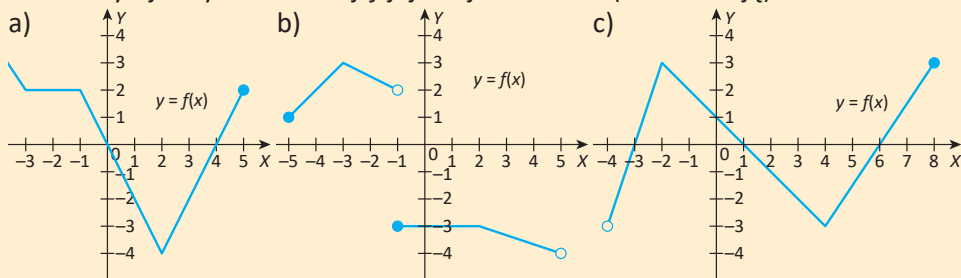
a) $f(x) = \frac{2}{5}x - 2$; $a = 5$

b) $f(x) = \log_2 x - 3$; $a = 8$

c) $f(x) = (3 - x^2)(x + 1)$; $a = -\sqrt{3}$

d) $f(x) = 2^{x-1} + 5$; $a = 3$.

- Odczytaj z wykresu funkcji f jej miejsca zerowe (o ile istnieją).



3. Czy funkcja f ma miejsca zerowe? Jeśli tak, to je podaj.

a) $f(x) = -2x + 8$, gdzie $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ b) $f(x) = x^2$, gdzie $x \in \mathbf{N}$

c) $f(x) = 5x + 2$, gdzie $x \in \mathbf{R}_+$ d) $f(x) = -x^2 + 5$, gdzie $x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$

4. Wyznacz miejsca zerowe funkcji f , jeśli:

a) $f(x) = \begin{cases} 4x + 15, & x \in (-\infty, -4) \\ \frac{1}{3}x - 1, & x \in (-4, +\infty) \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 16, & x \in (-\infty, -3) \\ x^2 - 10x + 25, & x \in (-3, +\infty) \end{cases}$

5. Oblicz miejsca zerowe funkcji f , jeżeli istnieją. Pamiętaj o wyznaczeniu dziedziny funkcji.

a) $f(x) = 9x - 120$

b) $f(x) = \sqrt{x+3}$

c) $f(x) = 3x(2x-1)(x+9)$

d) $f(x) = \sqrt{2-3x}$

e) $f(x) = -x^2 - 1$

f) $f(x) = \sqrt{x} + 4$

6. Wyznacz dziedzinę funkcji f oraz jej miejsca zerowe, jeżeli istnieją.

a) $f(x) = \frac{x+8}{3x}$

b) $f(x) = \frac{4x-8}{x^2-4}$

c) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

d) $f(x) = \frac{4}{x^2}$

e) $f(x) = \frac{2-x^2}{2+x^2}$

f) $f(x) = \frac{(x+3)(x-4)}{x^2+3x}$

7. Oblicz miejsca zerowe funkcji f . Pamiętaj o wyznaczeniu dziedziny funkcji.

a) $f(x) = \frac{x^2+5x}{x+5}$

b) $f(x) = \frac{x^2-64}{x-8}$

c) $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2-4x+4}$

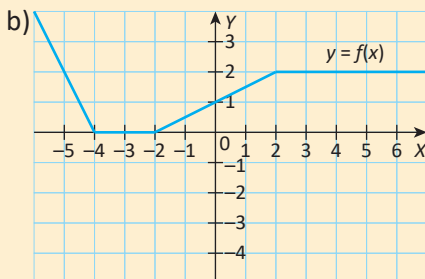
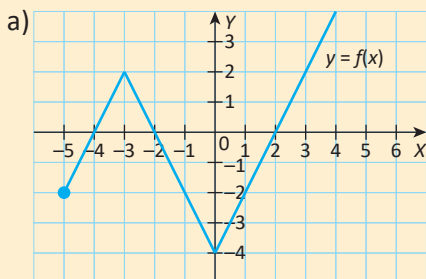
8. Wyznacz miejsca zerowe funkcji f , jeżeli istnieją.

a) $f(x) = \frac{x^2-16}{\sqrt{3-x}}$

b) $f(x) = \frac{\sqrt{2+x}}{x^2+4x+4}$

c) $f(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x}}$

9. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$.



Odczytaj z wykresu:

- 1) dziedzinę i zbiór wartości funkcji f ;
- 2) miejsca zerowe funkcji f ;
- 3) zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie;
- 4) zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne.

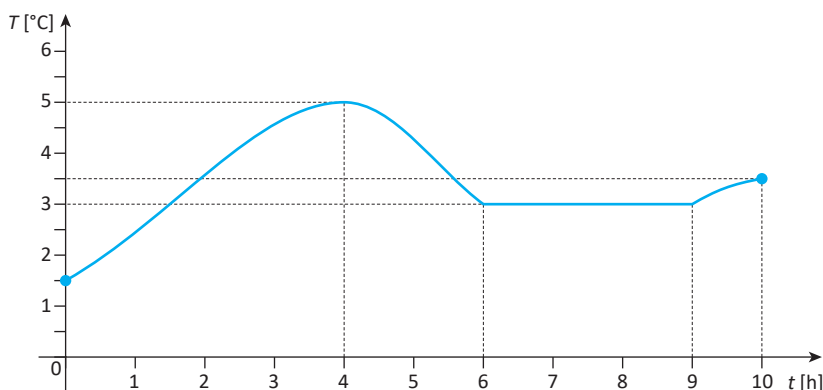
Monotoniczność funkcji

Poniższy wykres otrzymany z termografu ilustruje zmiany temperatury powietrza w pewnej miejscowości w ciągu 10 godzin.

Przeanalizujemy ten wykres i odpowiemy na następujące pytania:

- 1) Jak zmieniała się temperatura powietrza w ciągu pierwszych czterech godzin od rozpoczęcia pomiaru?
- 2) Co działo się przez następne dwie godziny?
- 3) Czy w siódmej, ósmej i dziewiątej godzinie pomiaru temperatura zmieniała się?
- 4) Jak zmieniła się temperatura w czasie ostatniej godziny pomiaru?

Oto wykres przedstawiający zmiany temperatury.



Ad 1)

W ciągu pierwszych czterech godzin temperatura rosła (wykres „wznosi się”). W chwili rozpoczęcia pomiaru temperatura wynosiła $1,5^{\circ}\text{C}$ i wzrastała aż do poziomu 5°C .

Ad 2)

Przez następne dwie godziny temperatura malała (wykres „opada”). W tym czasie temperatura obniżyła się o 2°C do poziomu 3°C .

Ad 3)

W siódmej, ósmej i dziewiątej godzinie pomiaru temperatura była stała (wykres jest poziomy). W tym czasie temperatura miała jedną niezmienną wartość równą 3°C .

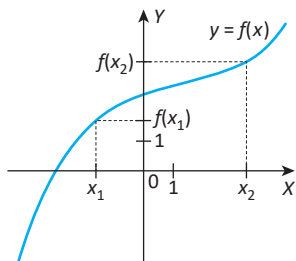
Ad 4)

W ostatniej godzinie pomiaru temperatura znowu rosła i w chwili zakończenia pomiaru osiągnęła wartość $3,5^{\circ}\text{C}$.

Definicja 1.

Funkcja liczbową $f: X \rightarrow Y$ jest **funkcją rosnącą w zbiorze A** , $A \subset X$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów x_1, x_2 , należących do zbioru A , z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkcję, która jest rosnąca w całej dziedzinie, nazywamy **funkcją rosnącą**.



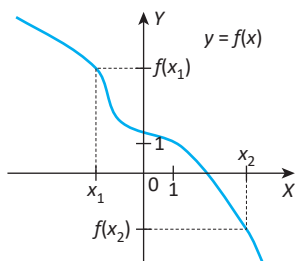
wykres rosnącej funkcji f

Wraz ze wzrostem argumentów rosną też wartości funkcji f ; dla dowolnych liczb x_1, x_2 należących do D_f z faktu, że $x_1 < x_2$, wynika, że $f(x_1) < f(x_2)$.

Definicja 2.

Funkcja liczbową $f: X \rightarrow Y$ jest **funkcją malejącą w zbiorze A** , $A \subset X$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów x_1, x_2 , należących do zbioru A , z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkcję, która jest malejąca w całej dziedzinie, nazywamy **funkcją malejącą**.



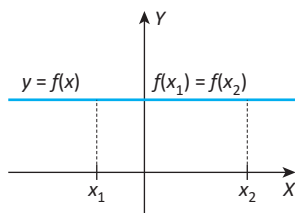
wykres malejącej funkcji f

Wraz ze wzrostem argumentów maleją wartości funkcji f ; dla dowolnych liczb x_1, x_2 należących do D_f z faktu, że $x_1 < x_2$, wynika, że $f(x_1) > f(x_2)$.

Definicja 3.

Funkcja liczbową $f: X \rightarrow Y$ jest **funkcją stałą w zbiorze A** , $A \subset X$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów x_1, x_2 , należących do zbioru A , zachodzi równość $f(x_1) = f(x_2)$.

Funkcję, która jest stała w całej dziedzinie, nazywamy **funkcją stałą**.

wykres stałej funkcji f

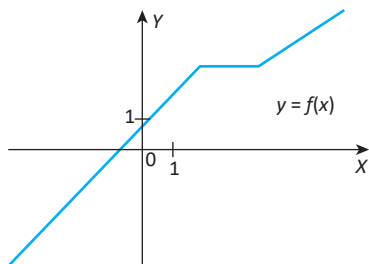
Dla dowolnych liczb x_1, x_2 należących do D_f mamy $f(x_1) = f(x_2)$.

Oprócz funkcji rosnących i malejących wyróżnia się też funkcje niemalejące i nierosnące.

Definicja 4.

Funkcja liczbowa $f: X \rightarrow Y$ jest **funkcją niemalejącą w zbiorze A** , $A \subset X$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów x_1, x_2 , należących do zbioru A , z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność $f(x_1) \leq f(x_2)$.

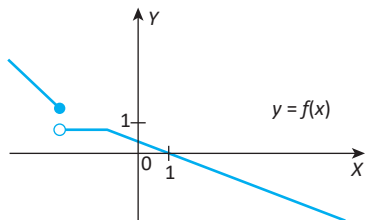
Każda funkcja rosnąca jest jednocześnie funkcją niemalejącą. Rysunek poniżej przedstawia wykres funkcji niemalejącej, która nie jest rosnąca (w pewnym przedziale jest stała).



Definicja 5.

Funkcja liczbowa $f: X \rightarrow Y$ jest **funkcją nierosnącą w zbiorze A** , $A \subset X$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów x_1, x_2 , należących do zbioru A , z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Podobnie, każda funkcja malejąca jest jednocześnie funkcją nierosnącą. Rysunek poniżej przedstawia wykres funkcji nierosnącej, która nie jest malejącą.



Funkcja stała jest jednocześnie nierosnąca i niemalejąca.

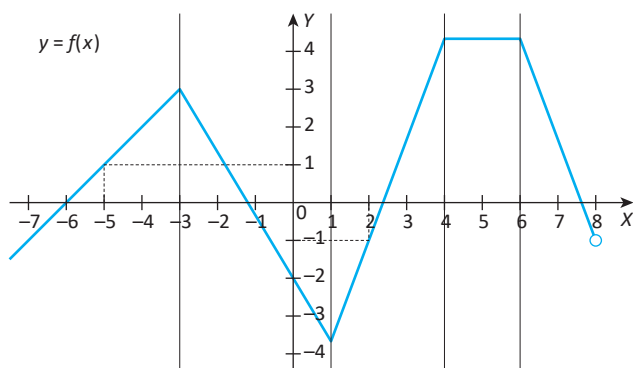
Funkcje nierosnące i niemalejące nazywamy **funkcjami monotonicznymi**.

Najczęściej spotykamy się z funkcjami, które nie są monotoniczne, to znaczy z takimi, które w pewnych przedziałach (podzbiorach dziedziny) są rosnące, w innych malejące lub stałe (przykład zależności temperatury od czasu – przedstawiony na początku rozdziału). Wówczas mówimy o przedziałach monotoniczności funkcji.

Poniższy przykład ilustruje funkcję przedziałami monotoniczną. Pokażemy, jak odczytać z wykresu przedziały monotoniczności funkcji.

Przykład 1.

Odczytajmy przedziały monotoniczności funkcji f , której wykres jest przedstawiony na poniższym rysunku.



Aby łatwiej było nam odczytać zbiory, w których funkcja jest malejąca, rosnąca lub stała, prowadzimy pomocnicze proste prostopadłe do osi OX , które dzielą wykres funkcji f na odpowiednie części (dzielą też dziedzinę funkcji na odpowiednie przedziały). Przedziały monotoniczności funkcji odczytujemy na osi OX .

Funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty, -3)$, $\langle 1, 4)$.

Funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów: $\langle -3, 1)$, $\langle 6, 8)$.

Funkcja jest stała w przedziale: $\langle 4, 6)$.

Zauważ, że funkcja f **nie jest rosnąca w sumie przedziałów**

$$(-\infty, -3) \cup \langle 1, 4).$$

Weźmy bowiem dwa argumenty funkcji f należące do zbioru $(-\infty, -3) \cup \langle 1, 4)$,

$$x_1 = -5 \text{ oraz } x_2 = 2$$

i odczytajmy wartości funkcji dla tych argumentów:

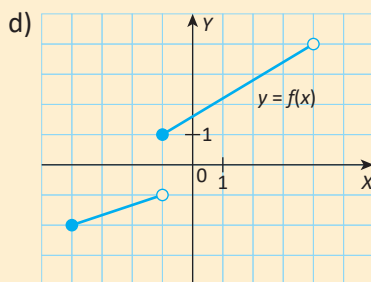
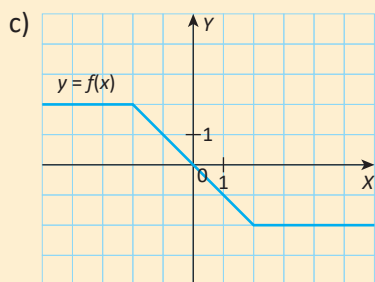
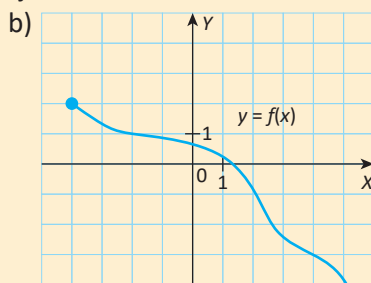
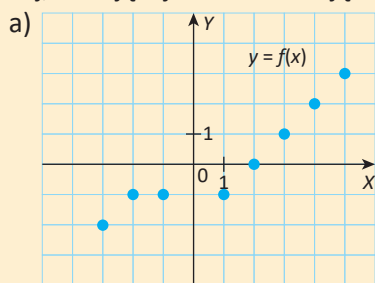
$$f(x_1) = f(-5) = 1 \text{ oraz } f(x_2) = f(2) = -1.$$

Okazuje się, że $x_1 < x_2$, ale $f(x_1) > f(x_2)$, zatem funkcja f nie jest rosnąca w zbiorze $(-\infty, -3) \cup \langle 1, 4)$.

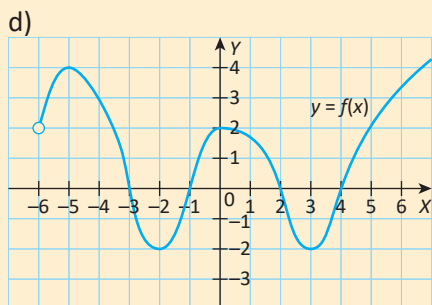
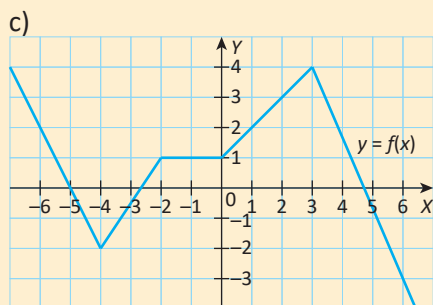
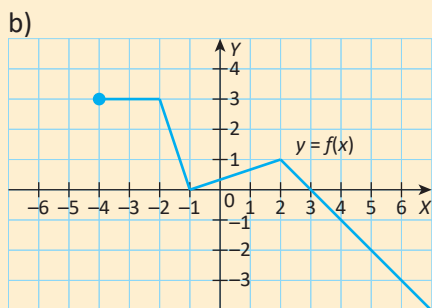
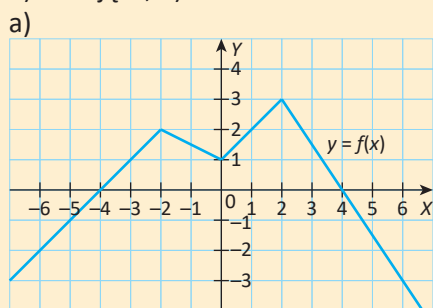
Przedziały monotoniczności funkcji wygodnie jest podawać jako osobne zbiory, oddzielając je przecinkiem. W ten sposób unikamy ewentualnych błędów.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wśród poniższych wykresów znajduje się wykres funkcji rosnącej, nierosnącej, malejącej oraz niemalejącej. Wskaż je.



2. Wyznacz maksymalne przedziały, w których funkcja f jest: 1) rosnąca, 2) malejąca, 3) stała.

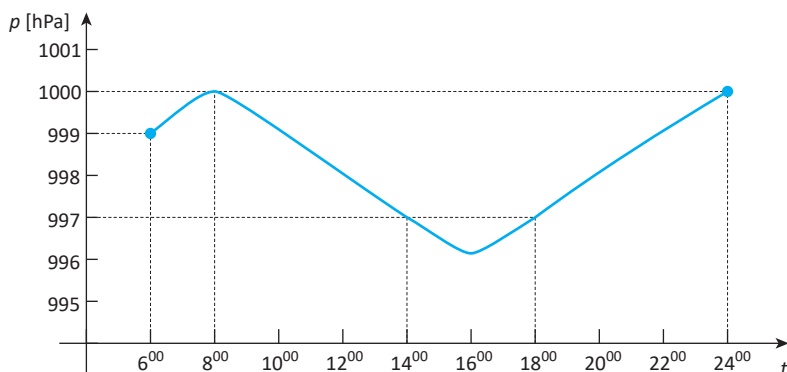


Funkcje różnowartościowe

Poniżej przedstawione są wykresy zależności wartości ciśnienia atmosferycznego od czasu, sporządzone w dwóch różnych dniach w pewnej miejscowości. Każdego dnia pomiar rozpoczynano o godzinie 6⁰⁰ i kończono o godzinie 24⁰⁰.

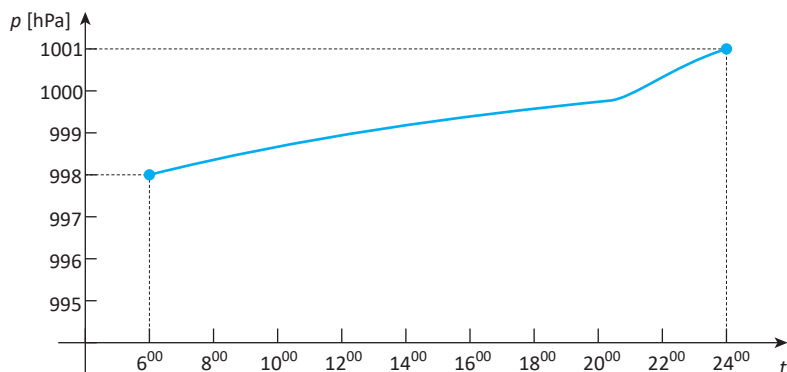
Przeanalizujemy te wykresy. Pomogą nam w tym pytania pod wykresami.

a) Wykres wartości ciśnienia we wtorek.



W jakich godzinach wartość ciśnienia wynosiła 1000 hPa? Jaką wartość miało ciśnienie atmosferyczne o godz. 14⁰⁰, a jaką o godz. 18⁰⁰?

b) Wykres wartości ciśnienia w czwartek.



Czy można wskazać takie pory dnia, w których ciśnienie miało taką samą wartość?

We wtorek można było zaobserwować wahania ciśnienia atmosferycznego. Były takie pory dnia, że ciśnienie atmosferyczne miało jednakową wartość (np. o godzinie 14⁰⁰ i o godzinie 18⁰⁰ było równe 997 hPa).

W czwartek ciśnienie atmosferyczne systematycznie rośnie. O każdej porze dnia wartość ciśnienia atmosferycznego była różna od pozostałych wartości.

Wykres ciśnienia atmosferycznego wykonany we wtorek jest przykładem wykresu funkcji, która nie jest różnowartościowa, zaś wykres ciśnienia atmosferycznego zrobiony w czwartek jest przykładem wykresu funkcji, która jest różnowartościowa.

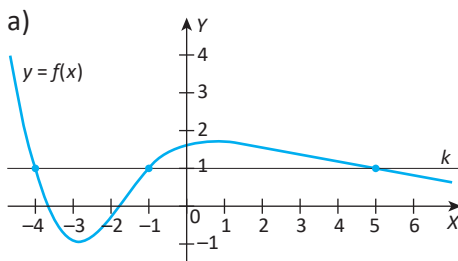
Zauważ, że funkcja różnowartościowa każdą swoją wartość przyjmuje tylko jeden raz.

Definicja 1.

Funkcja liczbową $f: X \rightarrow Y$ jest **funkcją różnowartościową** wtedy i tylko wtedy, gdy różnym argumentom przyporządkowuje różne wartości, to znaczy, że dla dowolnych argumentów x_1, x_2 z warunku $x_1 \neq x_2$ wynika warunek $f(x_1) \neq f(x_2)$.

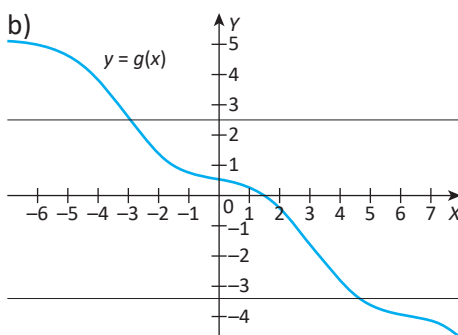
Aby ustalić, korzystając z wykresu funkcji, czy funkcja jest różnowartościowa, czy też nie jest różnowartościowa, wystarczy poprowadzić proste równoległe do osi OX i sprawdzić, ile punktów wspólnych mają te proste z wykresem funkcji.

Przykład 1.



Na rysunku prosta k przecina wykres funkcji $y = f(x)$ w trzech punktach.

Dla różnych argumentów $-4, -1, 5$, funkcja f osiąga tę samą wartość równą 1. Funkcja f nie jest różnowartościowa.



Nie istnieje prosta równoległa do osi OX , która przecięłaby wykres funkcji g w więcej niż jednym punkcie (patrz rysunek obok). Każda prosta ma z wykresem funkcji g co najwyżej jeden punkt wspólny. Funkcja g jest funkcją różnowartościową.

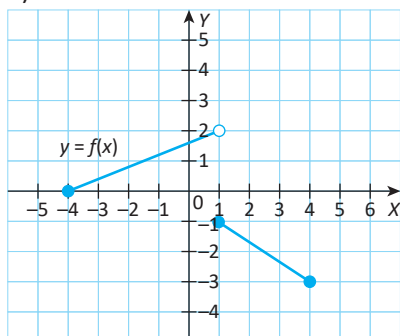
Zauważ, że jedna z omówionych do tej pory funkcji różnowartościowych jest rosnąca (zobacz wykres ciśnienia atmosferycznego w czwartek), a druga jest malejąca (zobacz ostatni wykres).

Okazuje się, że wszystkie funkcje rosnące i wszystkie funkcje malejące są różnowartościowe (wyjaśnij, dlaczego). Zatem, czy każda funkcja różnowartościowa jest albo rosnąca, albo malejąca? Oczywiście, że nie.

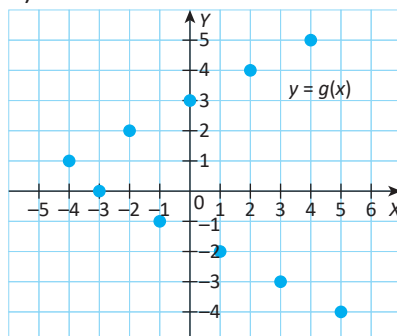
Przykład 2.

Poniżej przedstawione są wykresy funkcji, które są różnowartościowe i nie są monotoniczne.

a)



b)



Przykład 3.

Oto przykład funkcji opisanej tabelką. Uzasadnimy, że nie jest to funkcja różnowartościowa.

x	-3	-2	0	1	5
$y = f(x)$	4	6	5	6	10

Wystarczy przeanalizować zbiór wartości funkcji. Wartość funkcji równa 6 wystąpiła dwukrotnie. Zatem funkcja f nie jest różnowartościowa.

Przykład 4.

Czy istnieje funkcja f , która jest różnowartościowa i przekształca zbiór $\{3, 6, 8\}$ w zbiór $\{1, 2\}$?

Oczywiście, nie istnieje! Nie uda się utworzyć takiego przyporządkowania, które każdemu elementowi zbioru $\{3, 6, 8\}$ przyporządkowuje inną wartość. Elementów w zbiorze $\{1, 2\}$ jest za mało.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Funkcje f i g opisane są za pomocą tabelek. Która z tych funkcji jest różnowartościowa?

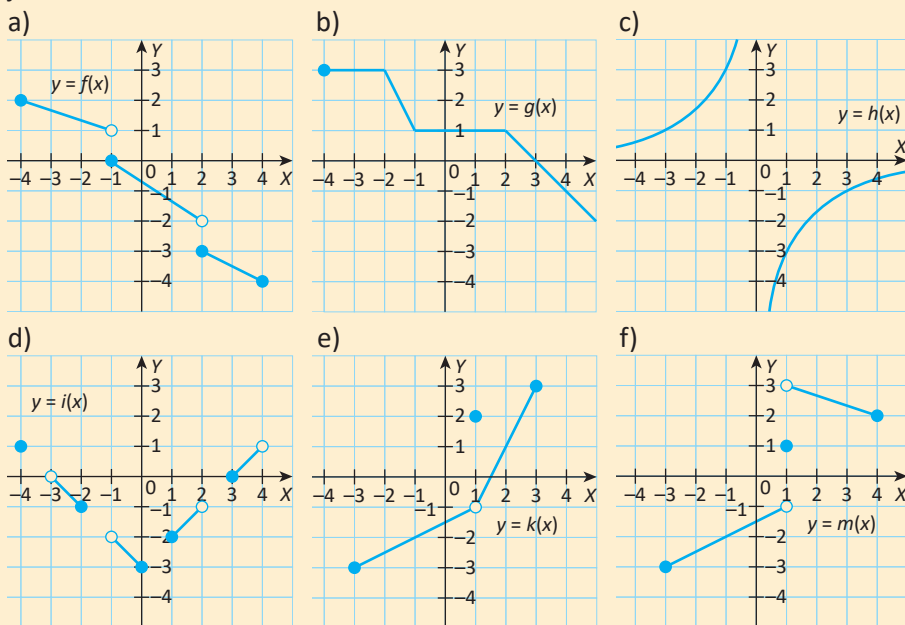
a)

x	-8	-6	-4	-2	-1
$f(x)$	4	3	1	3	5

b)

x	-5	-3	-1	0	1	3
$g(x)$	7	3	2	4	5	6

2. Sprawdź, czy dana funkcja jest różnowartościowa, jeśli:
 a) $f(x) = x^2 - 4x$, gdzie $x \in \{-3, -1, 1, 4\}$ b) $g(x) = x^2 - 4x$, gdzie $x \in \{-2, 0, 2, 4\}$.
3. Na poniższym rysunku przedstawione są wykresy funkcji. Która z tych funkcji jest różnowartościowa?



4. Funkcja f każdej liczbie całkowitej przyporządkowuje jej wartość bezwzględną. Napisz wzór funkcji f . Czy funkcja f jest różnowartościowa? Odpowiedź uzasadnij.
5. Funkcja g każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowuje dwukrotność tej liczby. Napisz wzór funkcji g . Czy funkcja g jest różnowartościowa? Odpowiedź uzasadnij.
6. Funkcja h każdej liczbie całkowitej ujemnej przyporządkowuje resztę z dzielenia tej liczby przez 7.
- a) Wyznacz zbiór wartości funkcji h .
- D** b) Wykaż, że funkcja h nie jest różnowartościowa.
7. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \begin{cases} |2x+1|, & \text{jeśli } x \in \{-4, -3, -2, -1\} \\ -x+5, & \text{jeśli } x \in \{1, 2, 3\} \end{cases}$
- a) Wyznacz zbiór wartości funkcji f .
- b) Czy funkcja f jest różnowartościowa?

Odczytywanie własności funkcji na podstawie jej wykresu

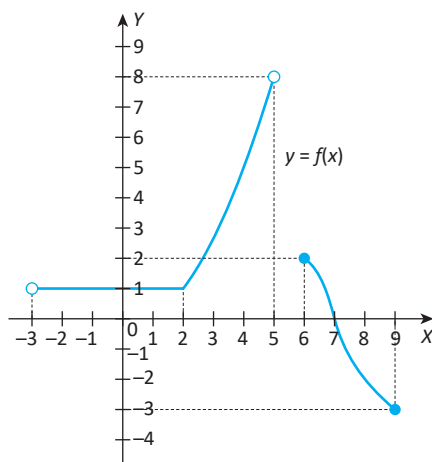
Znamy już wiele terminów dotyczących funkcji, takich jak: dziedzina, zbiór wartości, miejsca zerowe, monotoniczność, różnowartościowość funkcji. Teraz powtórzmy i uporządkujemy Twoje wiadomości.

Bardzo ważną umiejętnością jest odczytywanie własności funkcji na podstawie jej wykresu. Podstawowe własności funkcji określamy poprzez odpowiedzi na następujące pytania:

1. Jaka jest dziedzina funkcji?
2. Jaki jest zbiór wartości funkcji?
3. Czy funkcja ma miejsca zerowe? Jeśli tak, to jakie?
4. Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich ujemne?
5. W jakich przedziałach funkcja jest rosnąca, w jakich malejąca, a w jakich stała?
6. Czy funkcja jest różnowartościowa?
7. Czy funkcja osiąga wartość największą, czy osiąga wartość najmniejszą? Jeśli tak, to dla jakiego argumentu?

Przykład 1.

Wykres funkcji f przedstawiony jest na poniższym rysunku.

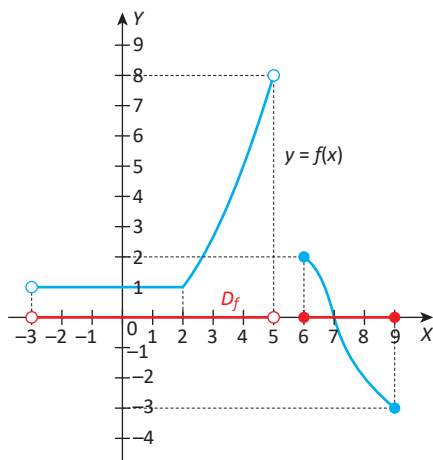


Omówimy własności tej funkcji. Odpowiemy na wcześniej postawione pytania.

1. Dziedzina funkcji

Dziedzinę odczytujemy na osi OX .

Jest ona zaznaczona na rysunku kolorem czerwonym.

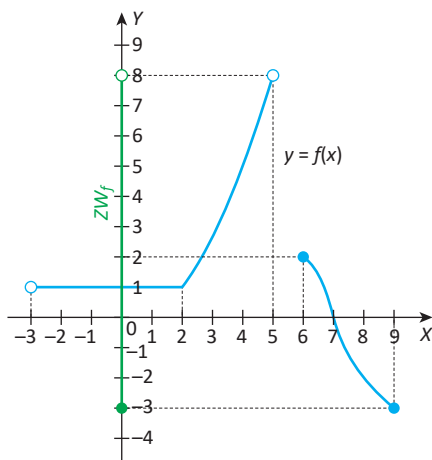


$$D_f = (-3, 5) \cup \langle 6, 9 \rangle$$

2. Zbiór wartości funkcji

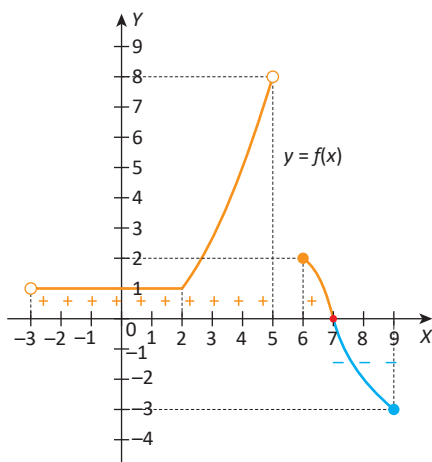
Zbiór wartości odczytujemy na osi OY .

Jest on zaznaczony na rysunku kolorem zielonym.



$$ZW_f = \langle -3, 8 \rangle$$

Na rysunku poniżej kolorem czerwonym został zaznaczony jedyny punkt wspólny wykresu funkcji f i osi OX : punkt o współrzędnych $(7, 0)$. Część wykresu nad osią OX (zaznaczona kolorem pomarańczowym) składa się z punktów o drugiej współrzędnej dodatniej, zaś fragment wykresu poniżej osi OX (w kolorze niebieskim) składa się z punktów o drugiej współrzędnej ujemnej.



$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 7$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3, 5) \cup \langle 6, 7 \rangle$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (7, 9)$$

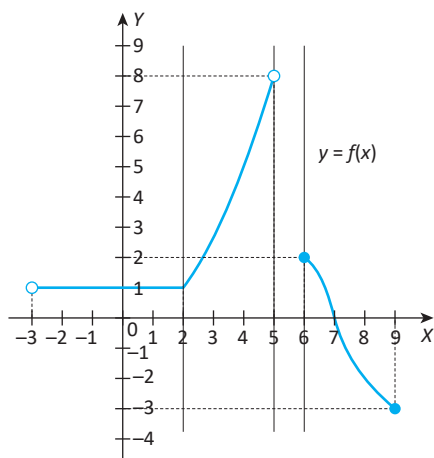
Zatem:

3. Jedynym miejscem zerowym funkcji f jest liczba 7.

4. Funkcja f przyjmuje wartości dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-3, 5) \cup \langle 6, 7 \rangle$.

Funkcja f przyjmuje wartości ujemne wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (7, 9)$.

5. Znajdujemy (na osi OX) maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f .



Funkcja f jest :

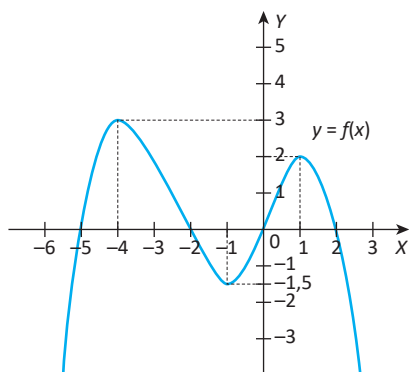
- rosnąca w przedziale $\langle 2, 5 \rangle$
- malejąca w przedziale $\langle 6, 9 \rangle$
- stała w przedziale $(-3, 2)$.

6. Funkcja nie jest różnowartościowa (bo na przykład dla argumentów 2 i 1 przyjmuje tę samą wartość, równą 1).

7. Odczytaliśmy już z wykresu zbiór wartości funkcji f : $ZW_f = \langle -3, 8 \rangle$. Najmniejszą liczbą należącą do tego zbioru jest liczba -3 . Z wykresu odczytujemy, że funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość dla argumentu 9. W przedziale $\langle -3, 8 \rangle$ nie istnieje liczba największa. Zatem funkcja f nie ma wartości największej.

Przykład 2.

Omówimy własności funkcji f , której wykres przedstawiony jest na rysunku poniżej.



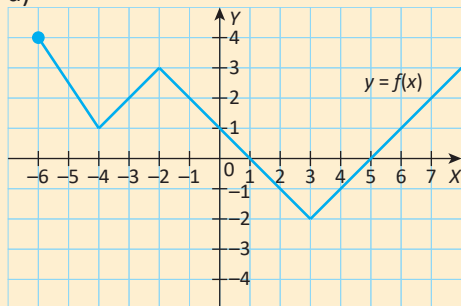
1. $D_f = \mathbf{R}$
2. $ZW_f = (-\infty, 3)$
3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-5, -2, 0, 2\}$
4. $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-5, -2) \cup (0, 2)$
 $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -5) \cup (-2, 0) \cup (2, +\infty)$
5. Funkcja f jest rosnąca w przedziałach:
 $(-\infty, -4)$, $\langle -1, 1 \rangle$.
 Funkcja f jest malejąca w przedziałach:
 $\langle -4, -1 \rangle$, $\langle 1, +\infty \rangle$.
6. Funkcja f nie jest różnowartościowa.

7. Funkcja f przyjmuje wartość największą równą 3 dla argumentu -4 , funkcja f nie przyjmuje wartości najmniejszej.

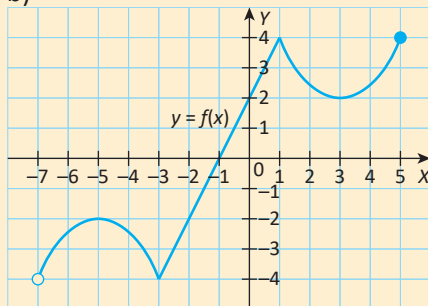
Sprawdź, czy rozumiesz

1. Poniżej przedstawione są wykresy pewnych funkcji. Podaj własności tych funkcji według kolejności z przykładu 2.

a)

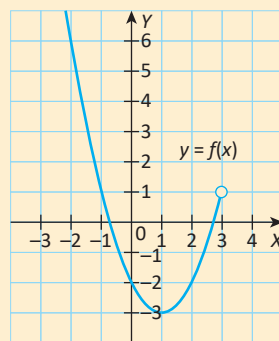


b)



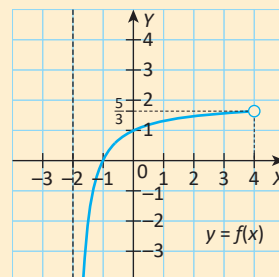
2. Na podstawie wykresu funkcji f (rysunek poniżej) wyznacz:

- dziedzinę funkcji f ;
- argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość 1;
- maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f ;
- wartość wyrażenia $f(2) \cdot f(1) - 4 \cdot f(0)$.



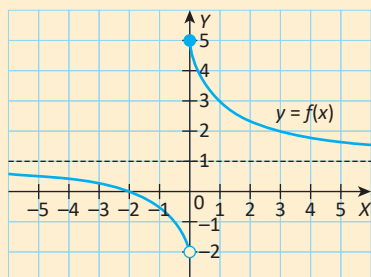
3. Dany jest wykres funkcji f , określonej w zbiorze $(-2, 4)$.

- Podaj zbiór wartości funkcji f .
- Odczytaj współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji f z osią OY .
- Przepisz do zeszytu i uzupełnij zapis:
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$
 $f(x) > 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$
 $f(x) < 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$
- Czy funkcja f jest różnowartościowa? Odpowiedź uzasadnij.



4. Funkcja f jest określona w zbiorze $\mathbf{R}$. Na podstawie wykresu funkcji f :

- Podaj zbiór wartości funkcji f .
- Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości niedodatnie?
- Zapisz maksymalne przedziały, w których funkcja f jest malejąca.
- Czy funkcja f jest monotoniczna? Odpowiedź uzasadnij.



Zastosowanie wiadomości o funkcjach do opisywania, interpretowania i przetwarzania informacji wyrażonych w postaci wykresu funkcji

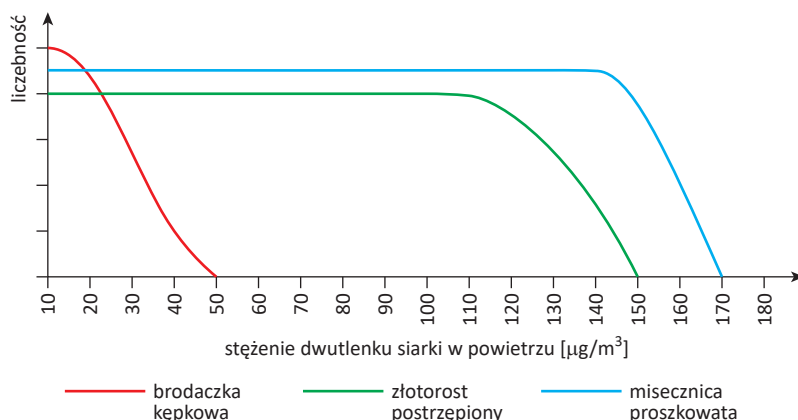
Matematyka jest obecna niemal w każdej dyscyplinie naukowej, a jedno z jej najważniejszych pojęć – funkcja – pojawia się praktycznie w każdej dziedzinie. Umiejętność analizowania wykresu funkcji, interpretowania informacji, jakie ten wykres przedstawia, oraz przetwarzania tych informacji, jest niezbędnym elementem zdobywania nowej wiedzy i pogłębiania wcześniej nabytych umiejętności.

Poniższe przykłady pokażą zastosowanie wiadomości o funkcjach w biologii, chemii, fizyce i medycynie.

Biologia

Przykład 1.

Na poniższym wykresie przedstawiono zależność pomiędzy liczebnością trzech gatunków porostów w ekosystemie leśnym a zawartością dwutlenku siarki w powietrzu. Przeanalizujemy ten wykres.



Z wykresu można dowiedzieć się, w jaki sposób stężenie dwutlenku siarki w powietrzu wpływa na liczebność takich gatunków porostów, jak: brodaczka kępkowa, złotorost postrzępiony oraz misecznica proszkowata.

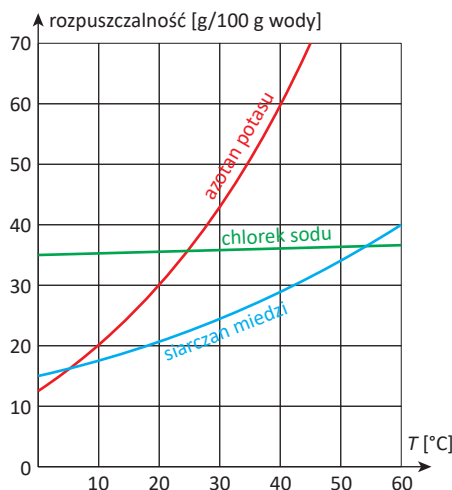
Istnienie tych gatunków w ekosystemie leśnym zależy od wysokości stężenia dwutlenku siarki w powietrzu. Jeśli dojdzie do zanieczyszczenia atmosfery dwutlenkiem siarki o stężeniu $50 \mu\text{g}/\text{m}^3$ powietrza, to wśród porostów zabraknie brodaczki kępkowej, która stanowi najczulszy naturalny wskaźnik zanieczyszczenia atmosfery SO_2 .

Złotorost postrzępiony ginie w ekosystemie leśnym, gdy stężenie dwutlenku siarki osiągnie wartość $150 \mu\text{g}/\text{m}^3$, zaś misecznica proszkowata znika z ekosystemu przy stężeniu $170 \mu\text{g}/\text{m}^3$.

Chemia

Przykład 2.

Na sprawdzianie młody chemik otrzymał od nauczyciela zadanie: „Oblicz maksymalne stężenie procentowe azotanu potasu w temperaturze 40°C ” oraz kartkę z materiałami pomocniczym (rysunek poniżej).



Jak powinien poradzić sobie uczeń z rozwiązaniem tego problemu?

W pierwszej kolejności powinien zapoznać się z wykresem, który otrzymał od nauczyciela. Z wykresu bowiem może dowiedzieć się, w jakiej temperaturze rozpuści się określona ilość soli w 100 g wody. Informacja dotyczy rozpuszczalności chlorku sodu, azotanu potasu oraz siarczanu miedzi, ale przedmiotem naszych zainteresowań jest tylko azotan potasu. Łatwo odczytać, że w 100 g wody w temperaturze 40°C rozpuści się 60 g azotanu potasu (sprawdź!). Teraz wystarczy obliczyć szukane stężenie procentowe roztworu. Ponieważ w 100 g wody rozpuści się 60 g azotanu potasu, więc masa roztworu będzie równa 160 g (woda + azotan potasu). Na 160 g roztworu przypada 60 g azotanu potasu, zatem:

$$c_p = \frac{m_s}{m_r} \cdot 100\%, \quad \text{czyli}$$

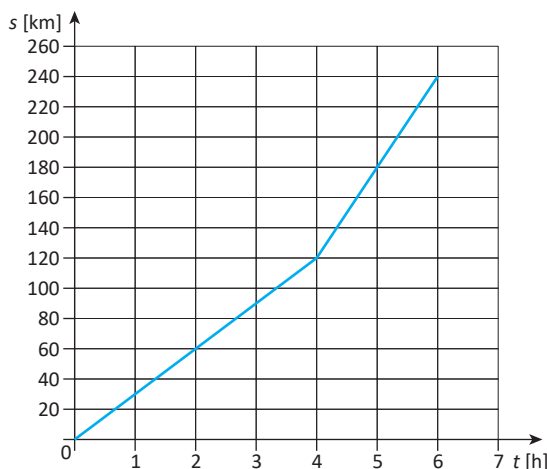
$$c_p = \frac{60}{160} \cdot 100\% = 37,5\%$$

Maksymalne stężenie azotanu potasu w temperaturze 40°C jest równe 37,5%.

Fizyka

Przykład 3.

Pan Fizyk wyjechał skuterem z miejscowości A do miejscowości B, a następnie wrócił tą samą trasą samochodem. Poniżej przedstawiony jest wykres drogi pana Fizyka, w zależności od czasu.



Przeanalizuj wykres, a następnie odpowiedz na pytania:

- Z jaką prędkością pan Fizyk jechał skuterem (oznaczmy ją v_1)?
- Z jaką prędkością jechał samochodem (oznaczmy ją v_2)?
- Jaka była średnia prędkość jazdy na trasie A – B – A (tę prędkość oznaczmy v)?

Droga tam i z powrotem miała długość 240 km, zatem długość trasy w jedną stronę wynosiła 120 km.

Ad a) Drogę z A do B mającą długość 120 km pokonał pan Fizyk skuterem w czasie 4 godzin, zatem: $v_1 = \frac{120}{4} = 30$ (km/h).

Ad b) Drogę z B do A mającą długość 120 km pokonał pan Fizyk samochodem w czasie 2 godzin, zatem: $v_2 = \frac{120}{2} = 60$ (km/h).

Ad c) Średnia prędkość jazdy jest równa stosunkowi długości przebytej drogi s do czasu jazdy t : $s = 120 + 120 = 240$ (km) $t = 2 + 4 = 6$ (h), stąd

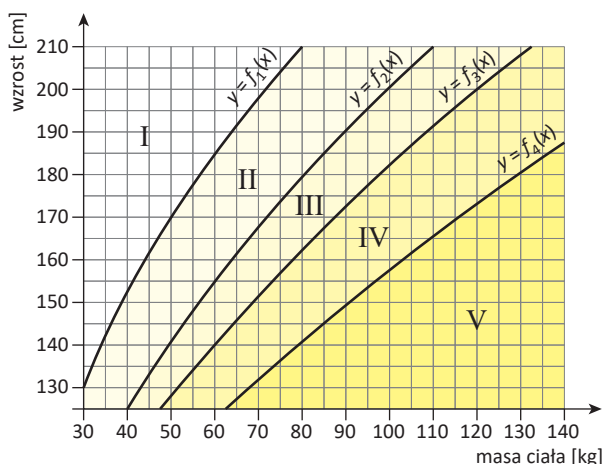
$$v = \frac{240}{6} = 40 \text{ (km/h)}.$$

Zauważ, że średnia prędkość jazdy jest średnią harmoniczną prędkości jazdy samochodem i skuterem (zobacz przykład 5. str. 129).

Medycyna

Przykład 4.

Ustalenie, czy masa ciała jest odpowiednia do wzrostu, stanowi istotny czynnik w profilaktyce zdrowotnej. Chcąc to stwierdzić, możemy posłużyć się rysunkiem poniżej.



Na rysunku przedstawione są wykresy czterech funkcji: $f_1(x) = \sqrt{\frac{x}{18}} \cdot 100$,

$f_2(x) = \sqrt{\frac{x}{25}} \cdot 100$, $f_3(x) = \sqrt{\frac{x}{30}} \cdot 100$, $f_4(x) = \sqrt{\frac{x}{40}} \cdot 100$. Ustalają one zależność między

masą ciała a wzrostem przy stałym – dla danej funkcji – tzw. współczynniku masy ciała (BMI), równym odpowiednio: 18 kg/m², 25 kg/m², 30 kg/m², 40 kg/m². Wykresy te wyznaczają pięć obszarów. Aby sprawdzić, czy zależność między masą ciała a wzrostem jest prawidłowa, wystarczy zaznaczyć w układzie współrzędnych punkt (x, y), gdzie x jest masą ciała w kg, y jest wzrostem w cm i stwierdzić, w jakim obszarze znalazł się punkt. Jeśli punkt znalazł się w obszarze:

- I – oznacza to niedowagę
- II – oznacza to wagę prawidłową
- III – oznacza to nadwagę
- IV – oznacza to otyłość
- V – oznacza to otyłość ekstremalną

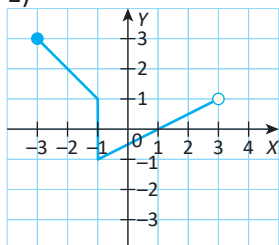
Nadwaga i otyłość mają związek ze wzrostem ryzyka zachorowania m.in. na cukrzycę, miażdżycę, choroby serca. Również niedowaga jest zjawiskiem niekorzystnym. Może być objawem poważnych chorób, w tym chorób nowotworowych lub chorób psychicznych.

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 3.

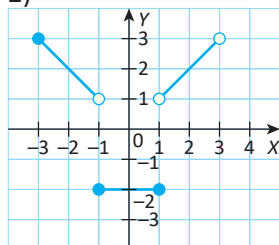
Test

1. Na poniższych rysunkach przedstawione są zbiory punktów.

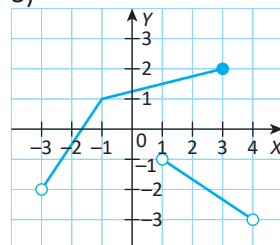
1)



2)



3)



Wykres pewnej funkcji zmiennej x przedstawia rysunek:

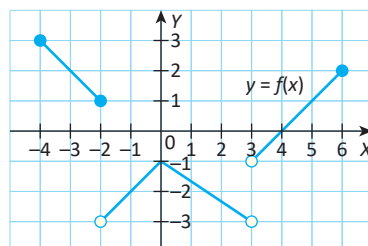
A. 1 i 2

B. 1 i 3

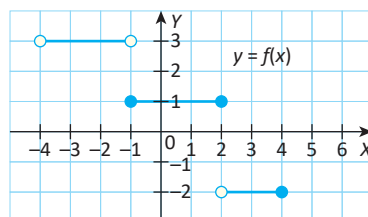
C. 2 i 3

D. tylko 2

2. Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$. Dziedziną funkcji f jest zbiór:

A. $\langle -3, 3 \rangle$ B. $\langle -4, 6 \rangle$ C. $(-4, 6)$ D. $\langle -4, 3 \rangle \cup (3, 6)$ 

3. Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$. Zbiorem wartości tej funkcji jest zbiór:

A. $\langle -2, 3 \rangle$ B. $\{-2, 1, 3\}$ C. $\langle -2, 3 \rangle$ D. $\{-2, 1\}$ 

4. Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{(x+2)(x-7)}{\sqrt{3-x}}$ jest zbiór:

A. $(-\infty, 3)$ B. $\mathbb{R} - \{3\}$ C. $(3, +\infty)$ D. $\mathbb{R} - \{-2, 7\}$

5. Wykres funkcji $h(x) = \frac{15-x}{x+3}$, gdzie $x \neq -3$, przecina oś OY w punkcie:

A. $(0, 5)$ B. $(0, 15)$ C. $(0, 3)$ D. $(0, -3)$

6. Funkcja $f(x) = x^2 - 4x$ przyjmuje wartość -4 dla argumentu:

A. -2 B. 0 C. 2 D. 4

7. Liczba 2 nie jest miejscem zerowym funkcji:

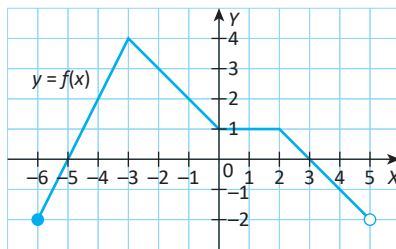
A. $f(x) = x^2 - 2x$ B. $g(x) = \sqrt{2-x}$ C. $h(x) = 0,5x - 1$ D. $i(x) = \frac{x-2}{x^2-4x+4}$

8. Funkcja $y = f(x)$ jest opisana za pomocą tabelki:

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4

Wskaż zdanie fałszywe.

- A. Funkcja f każdej liczbie ze zbioru $X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ przyporządkowuje kwadrat tej liczby pomniejszonej o 1.
 B. Funkcję f można opisać wzorem $f(x) = x^2 - 2x + 1, x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.
 C. Funkcja f jest różnowartościowa.
 D. Funkcja f nie jest monotoniczna.
9. Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$. Funkcja f jest malejąca:
- A. w przedziale $\langle 1, 4 \rangle$
 B. tylko w przedziale $\langle 4, 5 \rangle$
 C. w przedziale $(-3, 5)$
 D. w przedziałach: $\langle -3, 0 \rangle$ oraz $\langle 2, 5 \rangle$
10. Punkt $P(1, 2k + 1)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = -4x^2 + 7$. Zatem:
- A. $k = -2$ B. $k = -1$ C. $k = 1$ D. $k = 2$



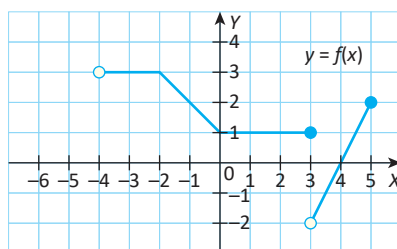
Zadania otwarte

11. Funkcja f każdej liczbie ze zbioru $\{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ przyporządkowuje resztę z dzielenia tej liczby przez 6.
- Opisz tę funkcję za pomocą zbioru par uporządkowanych.
 - Wyznacz zbiór wartości tej funkcji.
 - Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość największą i ile ta wartość jest równa?
12. Funkcja f każdej liczbie ze zbioru $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ przyporządkowuje sumę wszystkich jej naturalnych dzielników.
- Podaj zbiór wszystkich argumentów, dla których wartość funkcji f jest liczbą złożoną.
 - Uzasadnij, że $f(2) + f(3) = f(4)$.

D

13. Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$. Przepisz do zeszytu i uzupełnij zapis:

- $f(-2\sqrt{2}) + f(4) - f(0) = \dots\dots\dots$
- $f(x) = 2 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$
- $f(x) > 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$



14. Wyznacz miejsca zerowe funkcji (jeżeli istnieją):

a) $f(x) = 8 - x^2$

b) $g(x) = 2\sqrt{x+4}$

c) $h(x) = \frac{1-x^2}{x-1}$

15. Dany jest wzór funkcji f .

a) $f(x) = \begin{cases} |x| - 2, & \text{jeśli } x \in \{-4, -2, -1, 5\} \\ \sqrt{x} + 1, & \text{jeśli } x \in \{0, 1, 4\} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -1) \\ -x, & \text{jeśli } x \in (-1, +\infty) \end{cases}$

- 1) Naskicuj wykres tej funkcji w prostokątnym układzie współrzędnych.
- 2) Podaj zbiór wartości funkcji f .
- 3) Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich – ujemne?
- 4) Czy funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą i wartość największą? Jeśli tak, to dla jakich argumentów?

16. Funkcja f jest opisana za pomocą wzoru: $f(x) = \begin{cases} -2x + 1, & \text{jeśli } x \in \langle 3, +\infty) \\ x^2 - 10, & \text{jeśli } x \in (-8, 3) \end{cases}$

- a) Oblicz $f(3) + f(-7)$.
- b) Wyznacz miejsca zerowe funkcji f (jeżeli istnieją).
- c) Podaj argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartość -1 .

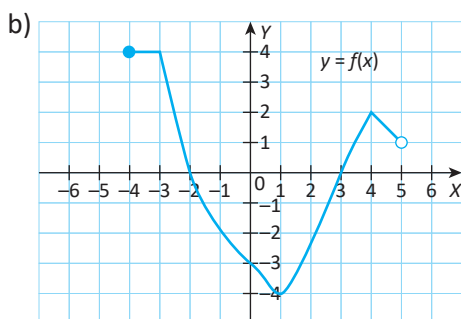
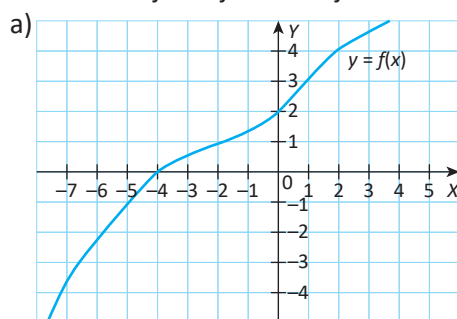
17. Dany jest zbiór $A = \left\{-5, -1, \frac{1}{3}, \frac{\sqrt[6]{9}}{\sqrt{3}}, \sqrt[4]{3}, 81^{\frac{2}{5}}, 27\right\}$. Funkcja $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ jest określona w następujący sposób: $f(x) = \begin{cases} \log_3 x, & \text{jeśli } x > 0 \text{ i } x \in A \\ -1, & \text{jeśli } x < 0 \text{ i } x \in A \end{cases}$

na w następujący sposób: $f(x) = \begin{cases} \log_3 x, & \text{jeśli } x > 0 \text{ i } x \in A \\ -1, & \text{jeśli } x < 0 \text{ i } x \in A \end{cases}$

- a) Wyznacz zbiór wartości funkcji f .
- b) Dla jakich argumentów wartości funkcji f są ujemne?
- c) Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje największą, a dla jakich – najmniejszą wartość?

18. Odczytaj z wykresu funkcji własności tej funkcji, według następującego porządku:

- 1) Dziedzina
- 2) Zbiór wartości
- 3) Miejsca zerowe
- 4) Punkt przecięcia wykresu z osią OY
- 5) Argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie (ujemne)
- 6) Monotoniczność
- 7) Różnowartościowość
- 8) Wartość największa i wartość najmniejsza funkcji.



4. Funkcja liniowa

Proporcjonalność prosta

Przykład 1.

Założmy, że cena jednego kilograma cukru jest równa 2 zł 30 gr. Zaobserwujemy, jak zmienia się koszt zakupów w zależności od ilości zakupionego cukru. Pokazuje to poniższa tabela:

liczba kg cukru	x	1	2	3	4	5	6
koszt zakupu w zł	y	2,30	4,60	6,90	9,20	11,50	13,80

Zależność między kosztem zakupu a liczbą kilogramów cukru wyraża wzór:

$$y = 2,3 \cdot x$$

gdzie x jest liczbą naturalną dodatnią. Zauważ, że koszt zakupu (y) i liczba kilogramów zakupionego cukru (x) zmieniają się w tym samym stosunku, np. trzykrotny wzrost liczby kilogramów pociąga za sobą trzykrotny wzrost kosztu zakupu. Stały stosunek kosztu zakupu (y) do liczby kilogramów zakupionego cukru (x) wyraża cenę 1 kg cukru, czyli 2,3 (zł).

Przykład 2.

Rowerzysta postanowił, że pewien odcinek trasy przejedzie ze stałą prędkością 12 km/h. Jak będzie zmieniała się długość przebytej drogi, jeśli rowerzysta na ten eksperyment przeznaczył 4 godziny?

Długość przebytej drogi przy stałej prędkości jazdy zależy od czasu, w jakim ta droga zostanie przebyta, i wyraża się wzorem:

$$s = v \cdot t, \text{ czyli } s = 12 \cdot t$$

gdzie s – długość drogi w km, t – czas jazdy w godzinach, $t \in (0, 4)$.

Zauważ, że tym razem długość przebytej drogi (s) i liczba godzin jazdy (t) zmieniają się w tym samym stosunku. Stały stosunek długości przebytej drogi (s) do liczby godzin jazdy (t) wyraża wartość prędkości jazdy, czyli 12 (km/h).

Jeśli dwie wielkości zmieniają się w tym samym stosunku, to mówimy, że te dwie wielkości są wprost proporcjonalne.

Definicja 1.

Proporcjonalnością prostą nazywamy zależność między dwiema wielkościami zmiennymi x , y , określoną wzorem $y = a \cdot x$, gdzie a jest liczbą różną od zera, zwaną **współczynnikiem proporcjonalności**.

W przykładzie 1. koszt zakupu jest wprost proporcjonalny do liczby kilogramów zakupionego cukru, a współczynnik proporcjonalności 2,30 (zł) oznacza stałą cenę 1 kg cukru.

W przykładzie 2. długość drogi jest wprost proporcjonalna do czasu, w jakim ta droga zostanie przebyta, a współczynnikiem proporcjonalności jest stała prędkość rowerzysty 12 (km/h).

Przykład 3.

- a) Rozważmy trójkąty równoboczne. Długość boku trójkąta oznaczmy przez x , zaś jego obwód przez y . Czy obwód trójkąta i długość jego boku są wielkościami wprost proporcjonalnymi? Jeśli tak, to jaki jest współczynnik proporcjonalności?
- b) Niech x oznacza długość boku kwadratu, natomiast y – pole kwadratu o boku x . Czy pole kwadratu i długość jego boku są wielkościami wprost proporcjonalnymi?

Ad a) Zależność między obwodem trójkąta równobocznego a długością jego boku wyraża wzór:

$$y = 3x, \text{ gdzie } x > 0$$

Zauważmy, że stosunek obwodu trójkąta do długości jego boku jest stały i wynosi 3. Liczba 3 – oznaczająca liczbę boków trójkąta – jest wielkością stałą. Jest to współczynnik proporcjonalności.

Ad b) Pole kwadratu w zależności od długości boku kwadratu wyraża się wzorem

$$y = x^2, \text{ gdzie } x > 0$$

Zauważmy, że pole kwadratu nie jest wprost proporcjonalne do długości boku kwadratu. Na przykład kwadrat o boku 3 ma pole równe 9, zatem $\frac{9}{3} = 3$; zaś kwadrat

o boku 8 ma pole równe 64, zatem $\frac{64}{8} = 8$. Stosunek pola kwadratu do długości jego boku nie jest stały.

Proporcjonalność prosta opisana wzorem $y = ax$, gdzie $a \neq 0$, jest funkcją zmiennej x określoną w zbiorze $\mathbf{R}$. Jej wykres i własności poznasz w kolejnym temacie.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Sprawdź, czy podane w tabelkach wielkości x i y są wprost proporcjonalne. Jeśli tak, to podaj współczynnik proporcjonalności i napisz wzór opisujący zależność zmiennej y od zmiennej x .

a)

x	-18	-3	6	27	60	900
y	-12	-2	4	18	40	600

b)

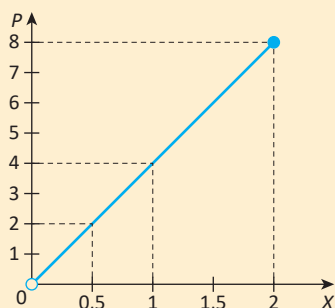
x	-4	-3	2	9	100	120
y	-5	3,75	2,5	11,25	125	155

2. O wielkościach x i y wiemy, że są wprost proporcjonalne. Uzupełnij tabelę. Podaj współczynnik proporcjonalności.

x	1,2		24		36	42,6	
y		8	20	$24\frac{2}{3}$			105,5

3. Pan Kowalski za 6 dni pracy otrzymał wynagrodzenie w wysokości 864 zł.
- Zakładając, że stawka za dzień pracy nie ulega zmianie, napisz wzór proporcjonalności prostej, określający kwotę wynagrodzenia w zależności od liczby przepracowanych dni.
 - Ile zarobi pan Kowalski za: 3, 7, 15, 20 oraz 28 dni pracy? Wyniki przedstaw w tabeli.
4. Motocyklista przebył drogę 63 km w czasie 1 godziny i 10 minut.
- Zakładając, że motocyklista jedzie ze stałą prędkością, zapisz wzór proporcjonalności prostej, określający liczbę przejechanych kilometrów w zależności od czasu jazdy (w godzinach).
 - Ile kilometrów przejedzie ten motocyklista w czasie: 20 minut, 1 godziny i 40 minut, 2 godzin, 2,5 godziny? Wyniki przedstaw w tabeli.
5. Za 3 m tasiemki ozdobnej Hania zapłaciła 10,50 zł.
- Napisz wzór proporcjonalności prostej określający koszt zakupu x metrów zakupionej tasiemki.
 - Ile trzeba zapłacić za 9,5 m tej tasiemki?
6. Z 19 litrów mleka otrzymuje się 5,8 kg śmietany.
- Napisz wzór proporcjonalności prostej, określający ilość (w kg) otrzymanej śmietany w zależności od x litrów wykorzystanego mleka.
 - Z ilu litrów mleka otrzymamy 29 kg śmietany?
7. Napisz wzór proporcjonalności prostej, opisującej zależność obwodu sześciokąta foremnego od długości jego boku x . Naszkicuj wykres tej funkcji wiedząc, że $x \in \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2} \right\}$.

8. Rozważamy trójkąty o stałej wysokości h . Poniżej przedstawiony jest wykres funkcji, która opisuje, jak zmienia się pole trójkąta P w zależności od długości podstawy x tego trójkąta, gdzie $x \in (0, 2)$.
- Odczytaj z wykresu współczynnik proporcjonalności i napisz wzór funkcji P .
 - Oblicz wysokość h rozważanych trójkątów.



9. Czy dane wielkości są wprost proporcjonalne? Odpowiedź uzasadnij.
- obwód koła i promień tego koła
 - pole koła i promień tego koła.

Funkcja liniowa. Wykres i miejsce zerowe funkcji liniowej

Definicja 1.

Funkcją liniową nazywamy funkcję, którą można opisać wzorem $y = ax + b$, gdzie a i b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi. Liczbę a nazywamy współczynnikiem kierunkowym, b – wyrazem wolnym. Dziedziną funkcji liniowej jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$.

Przykład 1.

Poniższe wzory opisują cztery funkcje liniowe:

$$1) y = 5x - 7, \quad (a = 5, b = -7) \qquad 2) y = 3 - x, \quad (a = -1, b = 3)$$

$$3) y = -\sqrt{3}x, \quad (a = -\sqrt{3}, b = 0), \qquad 4) y = 10, \quad (a = 0, b = 10)$$

Wykresem każdej funkcji liniowej jest prosta. Zapewne pamiętasz, że prosta równoległa do osi OY nie jest wykresem żadnej funkcji. Zatem prosta będąca wykresem funkcji liniowej nie jest równoległa do osi OY .

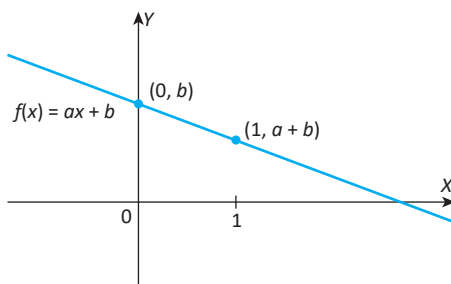
Wiesz, że przez dwa dowolne różne punkty płaszczyzny można poprowadzić tylko jedną prostą.

Aby naszkicować wykres funkcji liniowej, wystarczy wyznaczyć dwa punkty należące do wykresu funkcji i poprowadzić przez nie prostą.

Obliczmy wartości funkcji dla argumentów 0 i 1:

$$f(0) = a \cdot 0 + b = b$$

$$f(1) = a \cdot 1 + b = a + b$$



Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.

Wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$ jest prosta przechodząca przez punkty $(0, b)$ oraz $(1, a + b)$.

Korzystając z powyższego twierdzenia, naszkicujemy wykresy kilku funkcji liniowych.

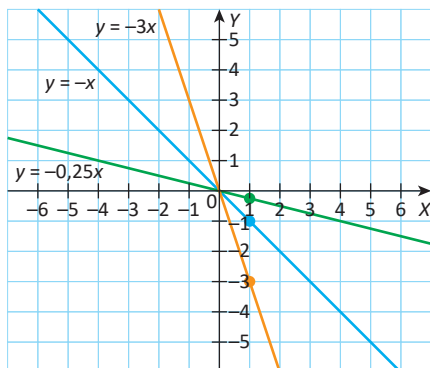
Przykład 2.

Naszkicujemy wykresy funkcji:

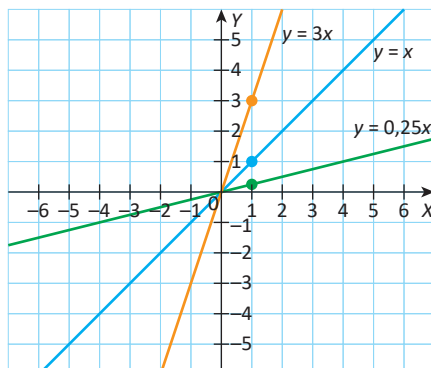
1) $y = -3x$ $y = -x$ $y = -0,25x$

2) $y = 3x$ $y = x$ $y = 0,25x$

1)



2)



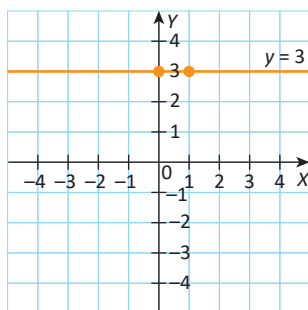
Wykresem funkcji $y = ax$, $a \neq 0$, jest prosta przechodząca przez punkty $(0, 0)$ i $(1, a)$. Miejscem zerowym funkcji $y = ax$, $a \neq 0$, jest liczba 0. Funkcja $y = ax$, $a \neq 0$, jest przykładem proporcjonalności prostej.

Przykład 3.

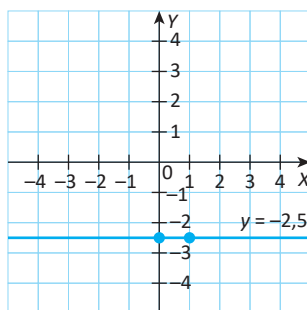
Naszkicujemy wykresy funkcji:

1) $y = 3$ 2) $y = -2,5$ 3) $y = 0$

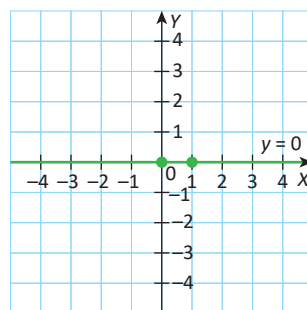
1)



2)



3)



Wykresem funkcji $y = b$ jest prosta przechodząca przez punkty $(0, b)$ i $(1, b)$, czyli prosta równoległa do osi OX . Jeśli $b \neq 0$, to funkcja $y = b$ nie ma miejsc zerowych. Natomiast miejscem zerowym funkcji $y = 0$ jest każda liczba rzeczywista.

Omówimy teraz szkicowanie wykresu funkcji liniowej, jeżeli obydwa współczynniki występujące we wzorze tej funkcji są różne od 0.

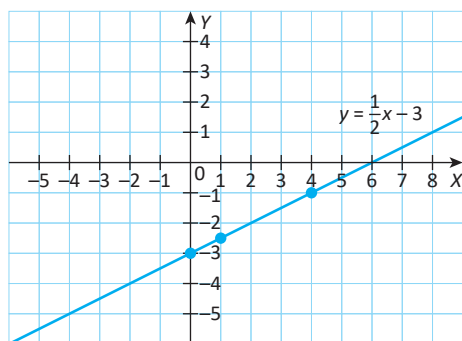
Przykład 4.

Sporządzimy wykres funkcji liniowej $y = \frac{1}{2}x - 3$.

Do wykresu funkcji należą punkty o współrzędnych $(0, -3)$ oraz $(1; -2,5)$. Warto jest wyznaczyć dodatkowo trzeci punkt (bardziej odległy od pozostałych) – żeby wykluczyć ewentualne błędy.

x	0	1	4
y	-3	-2,5	-1

Wykres funkcji $y = \frac{1}{2}x - 3$, gdzie $x \in \mathbf{R}$



Zauważ, że wykres funkcji f przecina oś OX w punkcie o współrzędnych $(6, 0)$.

Jeśli $a \neq 0$, to wykres funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ nie jest równoległy do osi OX (uzasadnij to, wykorzystując twierdzenie 1.). Wówczas prosta będąca wykresem tej funkcji przecina oś OX tylko w jednym punkcie, którego pierwsza współrzędna jest miejscem zerowym danej funkcji.

Z definicji miejsca zerowego otrzymujemy:

$$f(x) = 0, \text{ czyli}$$

$$ax + b = 0$$

$$ax = -b \quad / : a \quad (\text{bo } a \neq 0)$$

$$x = \frac{-b}{a}$$

Miejscem zerowym funkcji liniowej $f(x) = ax + b$, gdzie $a \neq 0$, jest liczba $\frac{-b}{a}$.

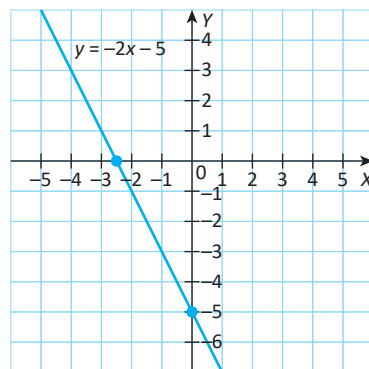
Wniosek: Jeśli $a \neq 0$, to wykres funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ przecina oś OX w punkcie $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$.

Przykład 5.

Naszkicujemy wykres funkcji liniowej $f(x) = -2x - 5$, wykorzystując punkty przecięcia jej wykresu z osiami układu współrzędnych.

Wykresem funkcji f jest prosta przecinająca oś OY w punkcie o współrzędnych $(0, -5)$, zaś oś OX – w punkcie o współrzędnych

$$\left(-\frac{5}{2}, 0\right), \text{ czyli } (-2,5; 0).$$



Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.

- 1) Funkcja liniowa $y = ax + b$ ma jedno miejsce zerowe tylko wtedy, gdy $a \neq 0$ i jest ono równe $-\frac{b}{a}$.
- 2) Funkcja liniowa $y = ax + b$ nie ma miejsc zerowych tylko wtedy, gdy $a = 0$ i $b \neq 0$.
- 3) Każda liczba rzeczywista jest miejscem zerowym funkcji liniowej $y = ax + b$ tylko wtedy, gdy $a = b = 0$.

Przykład 6.

Funkcja liniowa $f(x) = 4x + b$ ma takie samo miejsce zerowe, jak funkcja liniowa $g(x) = 0,5x + 1$. Obliczmy b .

Jedynym miejscem zerowym funkcji g i f jest liczba -2 . Zatem

$$0 = 4 \cdot (-2) + b, \text{ skąd } b = 8.$$

Przykład 7.

Dana jest funkcja liniowa opisana wzorem $f(x) = (m^2 - 4)x + 2 - m$. Sprawdźmy, ile miejsc zerowych ma funkcja f , jeśli: a) $m = 0$ b) $m = 2$ c) $m = -2$.

Ad a) Jeśli $m = 0$, to wzór funkcji f jest następujący: $f(x) = -4x + 2$. Ta funkcja liniowa ma jedno miejsce zerowe, równe $0,5$.

Ad b) Jeśli $m = 2$, to otrzymujemy wzór $f(x) = (2^2 - 4)x + 2 - 2$, czyli $f(x) = 0$. Każda liczba rzeczywista jest miejscem zerowym tej funkcji liniowej.

Ad c) Jeśli $m = -2$, to $f(x) = 0 \cdot x + 4$, czyli $f(x) = 4$. Funkcja f nie ma miejsc zerowych.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wśród poniższych funkcji określonych wzorami znajdują się funkcje liniowe. Wskaż je.

a) $f(x) = -2x$ b) $f(x) = \frac{5}{x} + 7$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ d) $f(x) = 5 - \frac{x}{4}$

2. Dla każdej z poniższych funkcji liniowych podaj współczynnik kierunkowy a oraz wyraz wolny b .

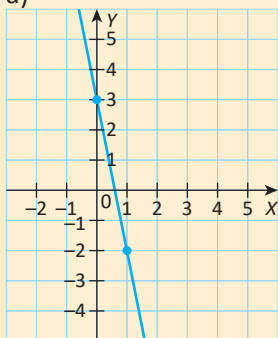
a) $y = 0,6x$ b) $y = 8 - 9x$ c) $y = \frac{5-3x}{4}$ d) $y = -12$

3. Do wykresu proporcjonalności prostej należy punkt A . Wyznacz wzór tej funkcji i naskicuj jej wykres w prostokątnym układzie współrzędnych.

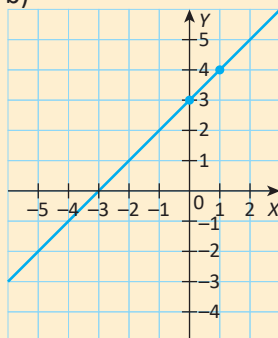
a) $A(1, 4)$ b) $A(-4, 2)$ c) $A(6, -4)$ d) $A(4, 7)$

4. Na rysunku poniżej przedstawiony jest wykres funkcji liniowej $y = ax + b$. Wiedząc, że do wykresu funkcji należą punkty $(0, b)$ oraz $(1, a + b)$, napisz wzór tej funkcji.

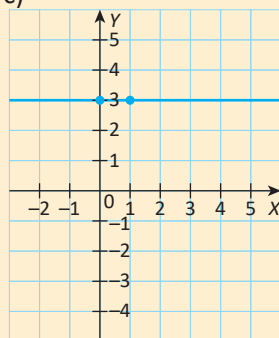
a)



b)



c)



5. Napisz wzór funkcji liniowej wiedząc, że do jej wykresu należą punkty:

a) $A(0, 5)$ i $B(1, -4)$ b) $A(1, 7)$ i $B(0, -3)$
c) $A(16, -2)$ i $B(0, 30)$ d) $A(0, -18)$ i $B(-6, -22)$.

6. Dany jest wzór funkcji liniowej. Oblicz współrzędne punktów, jeżeli istnieją, w których wykres funkcji przecina osie układu współrzędnych. Następnie naskicuj wykres tej funkcji i omów jej własności, jeśli:

a) $y = 2x + 3$ b) $y = -x + 4$ c) $y = -3$ d) $y = \frac{1}{5}x$
e) $y = -6 + 2x$ f) $y = \frac{2x-6}{4}$ g) $y = -1\frac{2}{3} + \frac{2x}{3}$ h) $y = \frac{-(x+8)}{4}$

7. Wyznacz miejsce zerowe funkcji liniowej f , jeśli:

a) $f(x) = 12x + 288$

b) $f(x) = -0,01x + 2$

c) $f(x) = \pi x - 2\pi^2$

d) $f(x) = \frac{-2}{\sqrt{8}}x + 5\sqrt{2}$

e) $f(x) = \sqrt{3}x - 2\sqrt{6}$

f) $f(x) = (\sqrt{6} - \sqrt{5})x + \sqrt{6} + \sqrt{5}$

8. Wyznacz brakujący współczynnik we wzorze funkcji liniowej wiedząc, że liczba podana obok wzoru funkcji jest miejscem zerowym tej funkcji.

a) $f(x) = 10x + b$; $\frac{1}{2}$

b) $f(x) = -5x + b$; 4

c) $f(x) = ax - \pi$; -2π

d) $f(x) = ax + \sqrt{6}$; $\sqrt{2}$

9. Naszkicuj wykres funkcji f . Następnie odczytaj z wykresu miejsca zerowe funkcji f , jeśli:

a) $f(x) = \begin{cases} -x - 1, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -1) \\ 0, & \text{jeśli } x \in (-1, +\infty) \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x + 4, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -2) \\ -1,5x, & \text{jeśli } x \in (-2, +\infty) \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x + 6, & \text{jeśli } x \in (-\infty, 0) \\ 6 - x, & \text{jeśli } x \in (0, +\infty) \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x+4}{2}, & \text{jeśli } x \in (-\infty, 2) \\ 3, & \text{jeśli } x \in (2, +\infty) \end{cases}$

10. Dana jest funkcja liniowa $g(x) = -mx + m - 4$. Wyznacz współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji g z osią OY , jeśli:

a) $m = 1$

b) $m = 4$

c) $m = 11$

d) $m = 64$

11. Dana jest funkcja liniowa $h(x) = (2m + 3)x - 5$. Wyznacz współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji h z osią OX , jeśli:

a) $m = 0$

b) $m = 1$

c) $m = -1$

d) $m = 3,5$

12. Funkcję liniową f opisuje wzór: $f(x) = 2x + 4m - 1$. Wyznacz liczbę m , dla której:

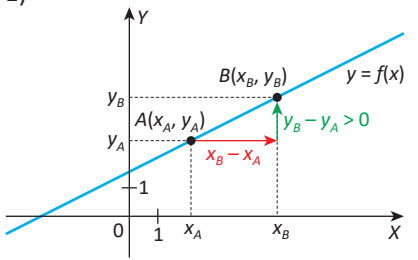
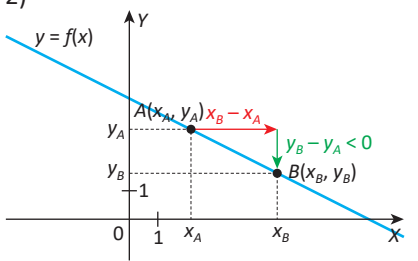
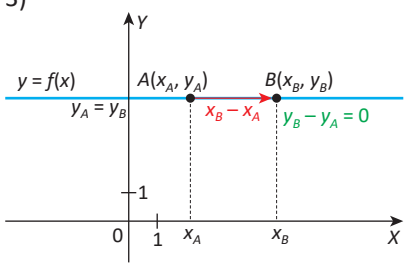
a) funkcja f jest proporcjonalnością prostą;b) wykres funkcji f przecina oś OY w punkcie $(0, 7)$;c) do wykresu tej funkcji należy punkt $(-3, 5)$;d) miejscem zerowym funkcji f jest liczba 1.

Dla wyznaczonej wartości m podaj wzór funkcji f i sprawdź poprawność obliczeń.

13. Funkcje liniowe $f(x) = \frac{3x-4}{5}$ oraz $g(x) = ax + 2a - 3\frac{1}{3}$ mają wspólne miejsce zerowe. Oblicz a . Następnie podaj współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji g z osią OY .

Znaczenie współczynnika kierunkowego we wzorze funkcji liniowej

Na poniższych rysunkach przedstawione są wykresy trzech różnych funkcji liniowych: funkcji rosnącej, funkcji malejącej, funkcji stałej, do których należą takie punkty $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$, że $x_B > x_A$.

1) 	Funkcja f jest rosnąca. Przyrost argumentu funkcji f o dodatnią liczbę $x_B - x_A$ powoduje dodatni przyrost wartości funkcji o $y_B - y_A$.
2) 	Funkcja f jest malejąca. Przyrost argumentu funkcji o dodatnią liczbę $x_B - x_A$ powoduje ujemny „przyrost” wartości funkcji o $y_B - y_A$.
3) 	Funkcja f jest stała. Przyrostowi argumentu funkcji o dodatnią liczbę $x_B - x_A$ odpowiada „przyrost” wartości funkcji równy 0.

Obliczmy $y_B - y_A$ jako różnicę wartości funkcji f dla argumentów x_B oraz x_A . Mamy:

$$y_B - y_A = f(x_B) - f(x_A) = (ax_B + b) - (ax_A + b) = ax_B - ax_A = a(x_B - x_A).$$

Zatem prawdziwa jest równość

$$y_B - y_A = a \cdot (x_B - x_A), \text{ gdzie } x_B - x_A \neq 0.$$

Po podzieleniu stron równości przez wyrażenie $x_B - x_A$ otrzymujemy:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Zauważ, że $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-(y_A - y_B)}{-(x_A - x_B)} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$. Zatem nie jest istotne uporządkowanie punktów A, B na prostej będącej wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$.

Z naszych rozważań wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. *O współczynniku kierunkowym*

Jeśli dwa różne punkty $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$ należą do wykresu funkcji liniowej

$$y = ax + b, \text{ to } a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Przykład 1.

Dane są dwa punkty $A(2, -3)$, $B(4, 5)$ należące do wykresu funkcji liniowej. Wyznamy wzór tej funkcji.

Obliczamy współczynnik kierunkowy (korzystamy z twierdzenia 1.):

$$a = \frac{5 - (-3)}{4 - 2} = 4$$

Wzór funkcji przyjmuje postać $y = 4x + b$.

Po podstawieniu współrzędnych punktu A (lub B) do wzoru w miejsce x i y mamy:

$$-3 = 4 \cdot 2 + b, \text{ skąd}$$

$$b = -11$$

Wzór funkcji jest następujący: $y = 4x - 11$.

Na podstawie wykresów ze str. 188 stwierdzamy, że iloraz $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ jest dodatni wtedy, gdy funkcja liniowa jest rosnąca, ujemny wtedy, gdy funkcja liniowa jest malejąca i równy 0 wtedy, gdy funkcja liniowa jest stała.

Twierdzenie 2. *O monotoniczności funkcji liniowej*

Funkcja liniowa $y = ax + b$ jest:

- 1) rosnąca tylko wtedy, gdy $a > 0$
- 2) malejąca tylko wtedy, gdy $a < 0$
- 3) stała tylko wtedy, gdy $a = 0$.

Przykład 2.

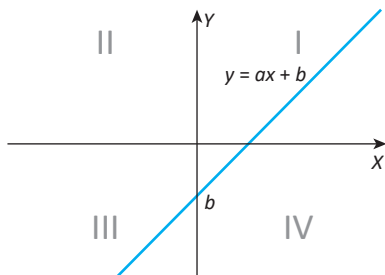
Dane są funkcje liniowe: $f(x) = (1 - \sqrt{2})x + 1$, $g(x) = -8 + \pi x$, $h(x) = -\sqrt{3}$.

Z twierdzenia 2. wynika, że funkcja f jest malejąca ($1 - \sqrt{2} < 0$), funkcja g jest rosnąca ($\pi > 0$), zaś funkcja h jest stała.

Przykład 3.

Prosta będąca wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$ przechodzi przez I, III i IV ćwiartkę układu współrzędnych. Ustalimy znaki współczynników a i b .

Wykonujemy szkic wykresu funkcji w układzie współrzędnych.



Zauważamy, że wykres przecina oś OY poniżej punktu $(0, 0)$, więc $b < 0$. Miejsce zerowe znajduje się na dodatniej półosi OX . Funkcja jest rosnąca, $a > 0$.

Z twierdzenia 1. wynika również następujący wniosek.

Dla każdej funkcji liniowej $f(x) = ax + b$, wzrost argumentu o 1 powoduje „przyrost” wartości funkcji równy współczynnikowi kierunkowemu a .

Jeśli bowiem $A(x_A, y_A)$, zaś $B(x_A + 1, y_B)$, to

$$y_B - y_A = f(x_A + 1) - f(x_A) = a(x_A + 1) + b - (ax_A + b) = a$$

Przykład 4.

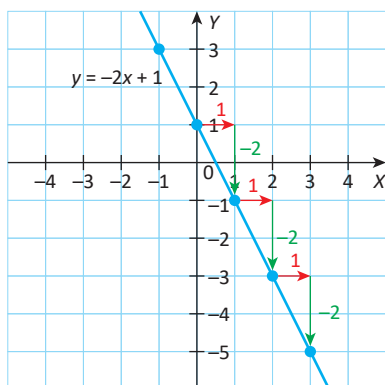
Naszkiujemy wykresy funkcji: a) $y = -2x + 1$ b) $y = \frac{3}{4}x + 2$

korzystając z interpretacji współczynników we wzorze funkcji liniowej.

Ad a) $y = -2x + 1$

Zaczynamy szkicowanie wykresu danej funkcji od zaznaczenia w układzie współrzędnych punktu przecięcia wykresu z osią OY , mającego współrzędne $(0, 1)$.

Następnie zauważamy, że każdy wzrost argumentu o 1 spowoduje „przyrost” wartości funkcji o -2 (bo $a = -2$).



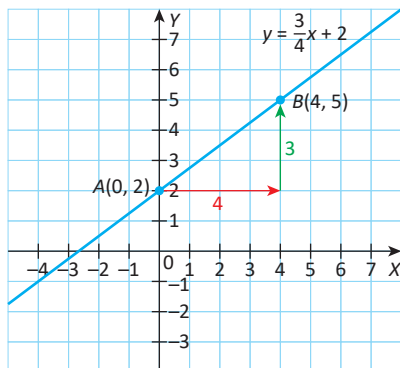
Przechodzimy do zaznaczenia kolejno punktów o współrzędnych:

$(1, -1), (2, -3), (3, -5)$, itd.

Analogicznie możemy zaznaczyć wybrane punkty wykresu w drugiej ćwiartce układu współrzędnych, np. punkt o współrzędnych $(-1, 3)$.

Przez wyznaczone punkty prowadzimy szukaną prostą.

Ad b) $y = \frac{3}{4}x + 2$



Wykres funkcji przecina oś OY w punkcie $A(0, 2)$. Przyrost argumentu o 1 powoduje przyrost wartości funkcji o $\frac{3}{4}$. Jeśli rozważymy czterokrotnie większy przyrost argumentu ($4 \cdot 1 = 4$), to odpowiadać mu będzie czterokrotnie większy przyrost wartości $\left(4 \cdot \frac{3}{4} = 3\right)$.

Wyznaczamy kolejny punkt wykresu:

$$B(0 + 4, 2 + 3), \text{ czyli } B(4, 5).$$

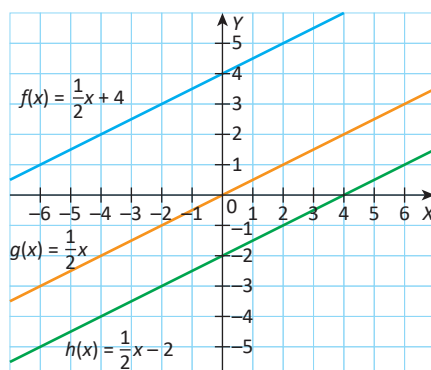
Przez punkty A i B prowadzimy szukaną prostą.

Porównamy teraz wykresy trzech funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 4, g(x) = \frac{1}{2}x \text{ i } h(x) = \frac{1}{2}x - 2.$$

Współczynnik kierunkowy każdej funkcji jest równy $\frac{1}{2}$.

Proste będące wykresami tych funkcji są równoległe.



Twierdzenie 3.

Proste będące wykresami funkcji liniowych są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki kierunkowe występujące we wzorach tych funkcji są równe.

Przykład 5.

Napišemy wzór funkcji liniowej f , wiedząc, że jej wykres jest równoległy do wykresu funkcji $y = 3x$ i przechodzi przez punkt o współrzędnych $(2, 1)$.

Szukamy współczynników a i b we wzorze funkcji $y = ax + b$.

- 1) Na podstawie twierdzenia 3. zauważamy, że $a = 3$. Szukany wzór przyjmuje postać $y = 3x + b$.
- 2) Podstawiamy współrzędne $(2, 1)$ w miejsce x i y do wzoru funkcji:

$$1 = 3 \cdot 2 + b, \text{ skąd } b = -5$$

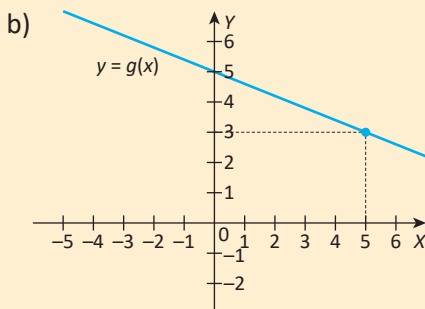
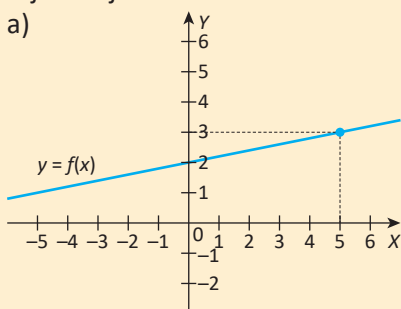
Funkcję liniową f opisuje wzór $y = 3x - 5$.

Więcej informacji o równoległości prostych w układzie współrzędnych poznasz w klasie drugiej.

Sprawdź, czy rozumiesz

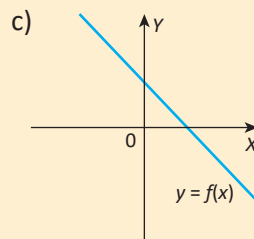
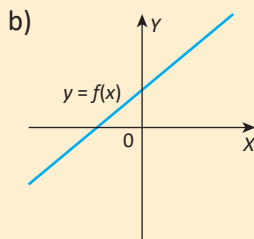
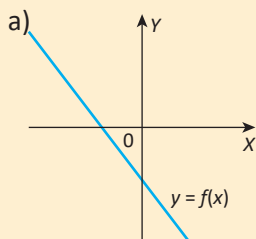
- Dane są punkty A i B należące do wykresu funkcji liniowej. Oblicz współczynnik kierunkowy występujący we wzorze tej funkcji liniowej, jeśli:
 - $A(2, 0)$, $B(1, 7)$
 - $A(6, -2)$, $B(0, 1)$
 - $A(4, 3)$, $B(-1, 3)$
 - $A(3, \sqrt{2})$, $B(1, -\sqrt{2})$
 - $A(-15, -3)$, $B(5, 1)$
 - $A(1, 2\sqrt{3})$, $B(\sqrt{3}, 2)$.
- Do wykresu funkcji liniowej należą punkty M i N . Wyznacz wzór tej funkcji, jeśli:
 - $M(2, -1)$, $N(-4, 11)$
 - $M(2, 0)$, $N(-6, -2)$
 - $M\left(\frac{5}{6}, -4\frac{1}{2}\right)$, $N(8, 17)$
 - $M(\sqrt{5}, 5)$, $N(-\sqrt{5}, -5)$.
- Do wykresu funkcji liniowej $f(x) = 4(2m - 3) - 3mx$ należy punkt $A(2, -26)$. Oblicz m . Dla otrzymanej wartości m , wyznacz współczynnik kierunkowy i wyraz wolny funkcji f .

- Na poniższym rysunku przedstawiony jest wykres funkcji liniowej. Podaj wzór tej funkcji.



- Dana jest funkcja liniowa $f(x) = 1 + (2 - m)x$. Określ, czy funkcja f jest rosnąca, malejąca czy stała, jeśli:
 - $m = 7$
 - $m = 2$
 - $m = -1$
 - $m = \pi$.
- Wyznacz wszystkie wartości m , $m \in \mathbf{R}$, dla których funkcja liniowa:
 - $f(x) = (m^2 - 3)x + 2m$ jest stała
 - $f(x) = (4 - m)x + 3$ jest rosnąca
 - $f(x) = m - (2m - 7)x$ jest malejąca
 - $f(x) = m - (m - 2)(m + 2)x$ jest stała.

7. Określ znaki współczynników a i b we wzorze funkcji liniowej $f(x) = ax + b$, której wykres jest przedstawiony poniżej:



8. Dany jest wzór funkcji liniowej f . Naszkicuj wykres funkcji f na podstawie interpretacji współczynników występujących we wzorze funkcji. Następnie oblicz miejsce zerowe i omów własności funkcji f , jeśli:

a) $f(x) = 3x - 1$

b) $f(x) = -4x$

c) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 2$

d) $f(x) = -\frac{3}{7}x + 1$

e) $f(x) = \frac{2}{5}x - 3$

f) $f(x) = \frac{7x + 8}{4}$

9. Dany jest wzór funkcji liniowej f oraz punkt P . Wyznacz wzór funkcji liniowej g , wiedząc, że wykres funkcji g jest równoległy do wykresu funkcji f i przechodzi przez punkt P , jeśli:

a) $f(x) = \sqrt{2}x - 1$, $P(0, 4)$

b) $f(x) = -5x$, $P(2, 0)$

c) $f(x) = -4$, $P(1, 3)$

d) $f(x) = 6 - x$, $P(2, 7)$

e) $f(x) = 0,25x + 4$, $P(2\pi, \pi)$

f) $f(x) = -\sqrt{3}x + 2$, $P(1, -\sqrt{3})$.

10. Wykres funkcji liniowej f jest równoległy do wykresu funkcji liniowej g . Oblicz m , jeśli:

a) $f(x) = 4x - m$, $g(x) = (m + 1)x + 2$

b) $f(x) = (2m - 1)x - 2m$, $g(x) = 4mx - 5$

Dla wyznaczonej wartości m naszkicuj wykresy obydwu funkcji w jednym układzie współrzędnych.

11. Do wykresu funkcji liniowej f należą punkty $A(-3, 1)$ oraz $B(1, 7)$. Wykres funkcji liniowej g jest równoległy do wykresu funkcji f i przechodzi przez punkt $C(-5, -3)$.

a) Wyznacz wzory funkcji f i g .

b) Podaj argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne.

c) Oblicz pole trójkąta ograniczonego wykresem funkcji g i osiami układu współrzędnych.

Własności funkcji liniowej – zadania różne

Umiesz już szkicować wykres funkcji liniowej. Znasz też własności funkcji liniowej. W tym temacie zwrócimy uwagę na zastosowanie poznanych wiadomości w różnych zadaniach.

Przykład 1.

Funkcja liniowa przyjmuje wartości ujemne wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-\infty, 3)$. Ponadto dla argumentu 0 przyjmuje wartość -1 . Wyznamy wzór tej funkcji.

Szukamy funkcji określonej wzorem $f(x) = ax + b$.

Ponieważ funkcja liniowa f przyjmuje wartości ujemne tylko dla argumentów mniejszych od 3, więc możemy wnioskować, że liczba 3 jest miejscem zerowym funkcji f . Zatem $0 = 3a + b$. Ponadto $f(0) = -1$, czyli wykres funkcji f przecina oś OY w punkcie $(0, -1)$, stąd $b = -1$. Otrzymujemy:

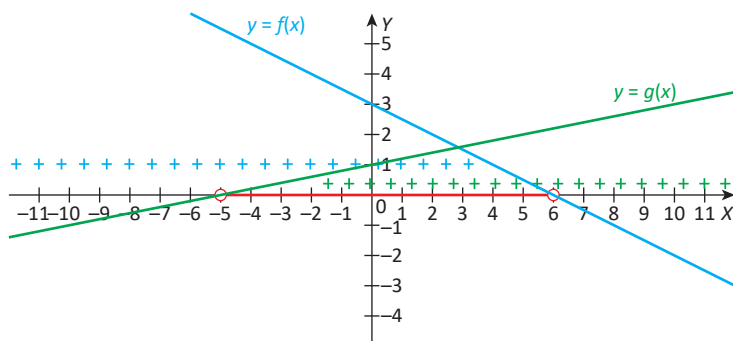
$$b = -1 \quad \text{i} \quad 0 = 3a + b, \text{ skąd}$$

$$a = \frac{1}{3}$$

Wzór funkcji f przyjmuje postać $f(x) = \frac{1}{3}x - 1$.

Przykład 2.

Naszukujemy w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji liniowych $f(x) = -0,5x + 3$ i $g(x) = 0,2x + 1$. Następnie na podstawie wykresów wyznaczmy zbiór wszystkich takich argumentów, dla których obie funkcje jednocześnie przyjmują wartości dodatnie.



Wyznamy miejsca zerowe funkcji f i g :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -5$$

Na rysunku powyżej niebieskie plusy wyznaczają przedział, w którym funkcja f przyjmuje wartości dodatnie, zaś plusy zielone – przedział, w którym funkcja g przyjmuje wartości dodatnie.

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 6)$$

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-5, +\infty)$$

Na osi OX kolorem czerwonym jest zaznaczony zbiór tych wszystkich argumentów, dla których obie funkcje jednocześnie przyjmują wartości dodatnie, czyli przedział $(-5, 6)$.

Obie funkcje przyjmują jednocześnie wartości dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-5, 6)$.

UWAGA: Zauważ, że $(-\infty, 6) \cap (-5, +\infty) = (-5, 6)$.

Zbiór argumentów, dla których obie funkcje z przykładu 2. jednocześnie przyjmują wartości dodatnie, można też wyznaczyć bez szkicowania wykresów. Wystarczy:

1) rozwiązać nierówności:

$$\begin{array}{ccc} -0,5x + 3 > 0 & \text{ i } & 0,2x + 1 > 0 \\ x < 6 & \text{ i } & x > -5 \end{array}$$

2) następnie wyznaczyć część wspólną zbiorów rozwiązań.

Przykład 3.

Wyznamy zbiór tych wszystkich argumentów, dla których funkcja liniowa

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1 \text{ przyjmuje wartości należące do przedziału } (3, 7).$$

I sposób

Szukamy takich argumentów, dla których $f(x) \in (3, 7)$, czyli $3 < f(x) \leq 7$.

Rozwiązujemy nierówność podwójną:

$$3 < \frac{1}{2}x + 1 \leq 7,$$

$$\frac{1}{2}x + 1 > 3 \quad \text{ i } \quad \frac{1}{2}x + 1 \leq 7, \text{ skąd}$$

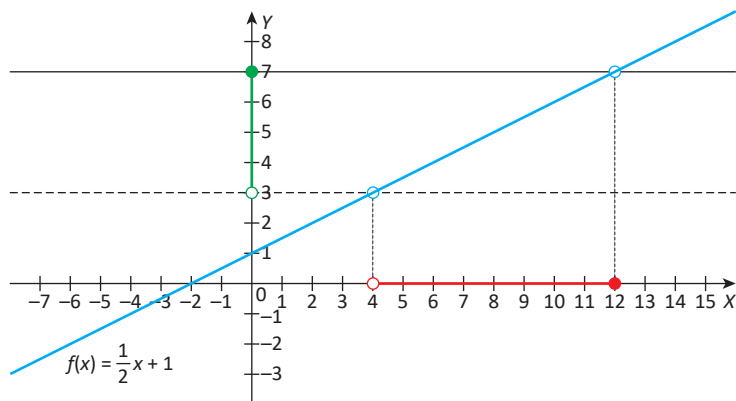
$$x > 4 \quad \text{ i } \quad x \leq 12, \quad \text{zatem} \\ x \in (4, 12]$$

Funkcja f przyjmuje wartości należące do przedziału $(3, 7)$ tylko wtedy, gdy $x \in (4, 12]$.

II sposób

Szkicujemy wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$, (zobacz rysunek poniżej). Zaznaczamy na

osi OY przedział $(3, 7)$, następnie prowadzimy w układzie współrzędnych proste $y = 3$ i $y = 7$. Obliczamy współrzędne punktów przecięcia tych prostych z wykresem funkcji f . Na koniec odczytujemy na osi OX przedział tych argumentów, dla których $f(x) \in (3, 7)$.



Funkcja f przyjmuje wartości należące do przedziału $(3, 7)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (4, 12)$.

Przykład 4.

$$\text{Funkcja } f \text{ dana jest wzorem } f(x) = \begin{cases} 0,5x + 1, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -4) \\ x + 3, & \text{jeśli } x \in \langle -4, 0 \rangle \\ 3 - 0,5x, & \text{jeśli } x \in \langle 0, +\infty \rangle \end{cases}$$

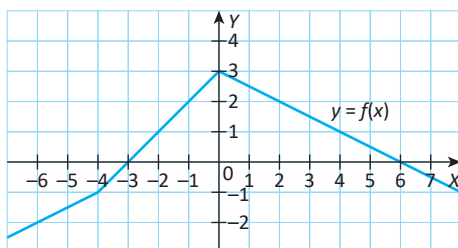
- Obliczymy miejsca zerowe funkcji f .
- Wyznamy zbiór wartości tej funkcji.
- Odczytamy z wykresu funkcji f , dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości mniejsze od 1.

Ad a) Sprawdzamy, czy funkcja f ma miejsca zerowe.

1) $x \in (-\infty, -4)$	2) $x \in \langle -4, 0 \rangle$	3) $x \in \langle 0, +\infty \rangle$
$0,5x + 1 = 0$	$x + 3 = 0$	$3 - 0,5x = 0$
$x = -2$	$x = -3$	$x = 6$
$-2 \notin (-\infty, -4)$	$-3 \in \langle -4, 0 \rangle$	$6 \in \langle 0, +\infty \rangle$

Funkcja f ma tylko dwa miejsca zerowe. Są to liczby -3 oraz 6 .

Ad b) Zbiór wartości funkcji f odczytujemy z jej wykresu.



Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-\infty, 3]$.

Ad c) Z wykresu odczytujemy zbiór tych argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości mniejsze od 1:

$$f(x) < 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$$

Przykład 5.

Dana jest funkcja liniowa $y = (m^2 - 9)x + 9m + 27$. Sprawdzimy, czy istnieje liczba m , dla której ta funkcja ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.

Funkcja liniowa $y = ax + b$ ma nieskończenie wiele miejsc zerowych tylko wtedy, gdy jej wzór przyjmuje postać $y = 0$, czyli tylko wtedy, gdy $a = 0$ i $b = 0$ (zobacz str. 185). Zauważamy, że $a = m^2 - 9$ oraz $b = 9m + 27$. Zatem rozwiązujemy dwa równania:

$$\begin{array}{ll} m^2 - 9 = 0 & \text{i} \quad 9m + 27 = 0 \\ (m - 3)(m + 3) = 0 & \text{i} \quad 9m = -27 \\ (m = 3 \text{ lub } m = -3) & \text{i} \quad m = -3 \end{array}$$

Dana funkcja liniowa ma nieskończenie wiele miejsc zerowych wtedy i tylko wtedy, gdy $m = -3$.

Przykład 6.

Wyznamy wszystkie wartości m , dla których funkcja liniowa

$f(x) = (2m + 8)x - m + 5$ jest rosnąca i jednocześnie jej wykres przecina oś OY powyżej punktu $P(0, 2)$.

Funkcja liniowa $y = ax + b$ jest rosnąca tylko wtedy, gdy $a > 0$. Wykres tej funkcji przecina oś OY powyżej punktu $P(0, 2)$ tylko wtedy, gdy $b > 2$. Zauważamy, że

$$a = 2m + 8 \quad b = -m + 5.$$

Rozwiązujemy nierówności:

$$\begin{array}{ll} 2m + 8 > 0 & \text{i} \quad -m + 5 > 2. \\ m > -4 & \text{i} \quad m < 3 \end{array}$$

Wyznamy część wspólną przedziałów $(-4, +\infty)$ i $(-\infty, 3)$:

$$(-4, +\infty) \cap (-\infty, 3) = (-4, 3)$$

Funkcja liniowa f jest rosnąca i jednocześnie jej wykres przecina oś OY powyżej punktu P wtedy i tylko wtedy, gdy $m \in (-4, 3)$.

Przykład 7.

Sprawdzimy, czy punkty $A(0, -7)$, $B(60, -5)$ i $C(-120, -11)$ należą do jednej prostej.

Przez dwa dowolne różne punkty płaszczyzny przechodzi jedna prosta. Aby rozwiązać to zadanie, wystarczy wyznaczyć wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez dwa punkty, na przykład A i B , a następnie sprawdzić (rachunkowo), czy trzeci punkt (C) należy do wykresu tej funkcji.

Niech $f(x) = ax + b$. Zatem:

1) Wyznamy współczynnik kierunkowy: $a = \frac{-5 + 7}{60 - 0} = \frac{1}{30}.$

- 2) Punkt $A(0, -7)$ należy do wykresu funkcji f . Odczytujemy $b: b = -7$.
- 3) Funkcję liniową f opisuje wzór $f(x) = \frac{1}{30}x - 7$. Sprawdzamy, czy punkt C należy

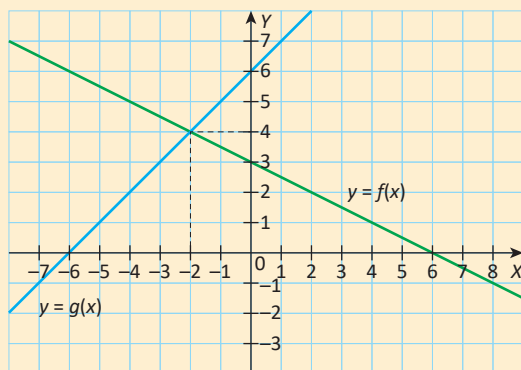
do prostej będącej wykresem tej funkcji, to znaczy sprawdzamy, czy jest spełniona równość $f(-120) = -11$:

$$f(-120) = \frac{1}{30} \cdot (-120) - 7 = -11$$

Punkt C należy do prostej wyznaczonej przez punkty A i B , czyli punkty A, B, C są współliniowe.

Sprawdź, czy rozumiesz

- Wykres funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ przecina oś OY w punkcie $(0, 8)$. Funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-\infty, 5)$. Wyznacz wzór funkcji f .
- Funkcja liniowa określona wzorem $f(x) = (m - 2)x + 4$ przyjmuje wartości ujemne wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-\infty, -3)$. Oblicz m .
- Wyznacz zbiór tych wszystkich argumentów, dla których wartości funkcji liniowej $f(x) = -\frac{3}{8}x + 6$ należą do przedziału $(-9, 21)$.
- Wyznacz zbiór tych wszystkich argumentów, dla których funkcje liniowe $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{5}$ oraz $g(x) = -5x + 9$ jednocześnie przyjmują wartości nieujemne.
- Na rysunku poniżej we wspólnym układzie współrzędnych przedstawione są wykresy dwóch funkcji liniowych $y = f(x)$ oraz $y = g(x)$. Odczytaj z wykresu:
 - zbiór wartości funkcji f dla argumentów należących do przedziału $(0, 4)$;
 - argument, dla którego obie funkcje przyjmują tę samą wartość;
 - dla jakich argumentów zachodzi nierówność $g(x) < 0$;
 - dla jakich argumentów obie funkcje przyjmują jednocześnie wartości większe od 2.
- Dane są funkcje liniowe: $f(x) = -0,4x + 8$ oraz $g(x) = -0,3x + 15$. Wyznacz zbiór wszystkich argumentów, dla których wartości funkcji f są większe od wartości funkcji g .



7. Wyznacz zbiór tych wszystkich argumentów, dla których funkcja liniowa $f(x) = 0,5x - 10$ przyjmuje wartości większe od 3 i jednocześnie funkcja liniowa $g(x) = 0,1x - 4$ przyjmuje wartości mniejsze od 16.
8. Dany jest wzór funkcji f . Naszkicuj wykres tej funkcji i na jego podstawie omów jej własności.
- a) $f(x) = \begin{cases} -x - 4, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -1) \\ -3, & \text{jeśli } x \in (-1, 3) \\ x - 6, & \text{jeśli } x \in (3, +\infty) \end{cases}$
- b) $f(x) = \begin{cases} 2x + 8, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -2) \\ -\frac{1}{2}x + 3, & \text{jeśli } x \in (-2, 4) \\ 1, & \text{jeśli } x \in (4, +\infty) \end{cases}$
9. Wyznacz wszystkie wartości p , $p \in \mathbf{R}$, dla których wykres funkcji liniowej $f(x) = (p + 3)x - 2p + 4$ przecina oś OY :
- a) poniżej punktu $P(0, -3)$ b) powyżej punktu $K(0, 6)$.
10. Wykresy funkcji liniowych $f(x) = (a + 1)x + (a + 3)^2$ oraz $g(x) = 3x + a^2 + 16$ przecinają oś OY w tym samym punkcie. Wyznacz a .
11. Wyznacz wszystkie wartości b tak, aby funkcja liniowa określona wzorem:
- a) $f(x) = (b^2 + 4b + 4)x + 2$ miała jedno miejsce zerowe;
b) $f(x) = b(b - 2)x + b$ nie miała miejsca zerowego;
c) $f(x) = (4 + b)x - 16 + b^2$ miała nieskończenie wiele miejsc zerowych.
12. Wyznacz wszystkie wartości k , $k \in \mathbf{R}$, dla których funkcja liniowa:
- a) $g(x) = 4 + k - (5k + 8)x$ jest stała;
b) $g(x) = (k + 5)x + 6 + 2k$ jest rosnąca;
c) $g(x) = -4k + 7 - (3 - 2k)x$ jest malejąca.
13. Funkcja liniowa $f(x) = (3 - m)x + (m + 1)^2$ jest rosnąca, a jej wykres przechodzi przez punkt $A(2, 23)$. Oblicz m . Dla wyznaczonej wartości m , oblicz miejsce zerowe funkcji f .
14. Wyznacz wszystkie wartości m , $m \in \mathbf{R}$, dla których wykres funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = (2 - m)x + m - 5$ przechodzi przez II, III i IV ćwiartkę układu współrzędnych.
15. Wyznacz wszystkie wartości m , $m \in \mathbf{R}$, dla których wykres funkcji liniowej określonej wzorem $h(x) = (2m + 5)x + 6m + 3$ przechodzi przez I, III i IV ćwiartkę układu współrzędnych.
16. Proste będące wykresami funkcji liniowych $f(x) = 3 - a + 8x$ oraz $g(x) = 3(b - 2)x + 6$ się pokrywają. Wyznacz a i b .
17. Wyznacz k tak, aby punkt $C(5k, 3k + 2)$ należał do prostej przechodzącej przez punkty $A(5, 9)$ i $B(-10, 3)$.
18. Proste będące wykresami dwóch funkcji liniowych $f(x) = (1 - m)x - 2m$ oraz $g(x) = (m - 5)x - 1$ są równoległe.
- a) Oblicz m .
b) Zaznacz w układzie współrzędnych trapez, którego podstawy zawierają się w tych prostych, a ramiona zawierają się w osiach układu współrzędnych. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trapezu.

Zastosowanie własności funkcji liniowej w zadaniach praktycznych

Przykład 1.

W wyścigu kolarskim grupa sportowców ma jeszcze 144 km do mety i jedzie ze średnią prędkością 45 km/h. Oznaczmy odległość (w km) tej grupy od mety literą d , zaś czas jazdy (w h) – literą t .

- Wyznamy wzór opisujący odległość tej grupy od mety, w zależności od czasu i obliczymy, ile czasu potrzeba kolarzom, by dotrzeć do mety.
- Naszkuje wykres funkcji d .

Ad a) Odległość grupy kolarzy od mety, w zależności od czasu t , opisuje wzór:

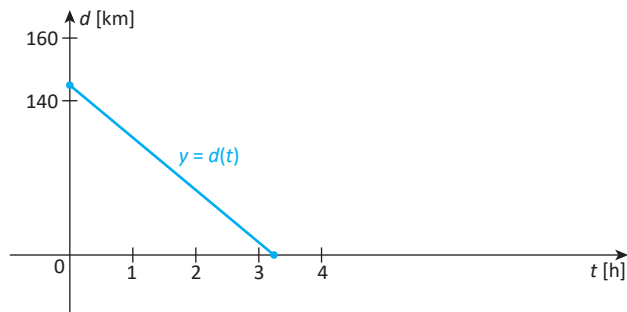
$$d(t) = 144 - 45 \cdot t$$

Kolarze dotrą do mety w czasie t , dla którego $d(t) = 0$. Zatem

$$144 - 45 \cdot t = 0, \text{ skąd } t = 3,2 \text{ (h) zatem } d(t) = 144 - 45 \cdot t, \text{ gdzie } t \in \left\langle 0, 3\frac{1}{5} \right\rangle$$

Kolarze dotrą do mety za 3 godziny i 12 minut.

Ad b)



Przykład 2.

W pewnym kraju od podatku dochodowego są zwolnione dochody nieprzekraczające 5 tys. dolarów. Za dochody przekraczające 5 tys. dolarów, ale nie większe niż 30 tys. dolarów, podatnik zapłaci podatek w wysokości 10% od dochodu pomniejszonego o 5 tys. dolarów. Jeżeli dochód przekracza 30 tys. dolarów, podatnik płaci 2500 dolarów plus 25% nadwyżki powyżej 30 tys. dolarów.

Opiszemy system podatkowy w tym kraju za pomocą funkcji f , która pokazuje zależność podatku od dochodu, i naszkuje jej wykres.

Oznaczamy:

x – dochód uzyskany przez podatnika (w dolarach)

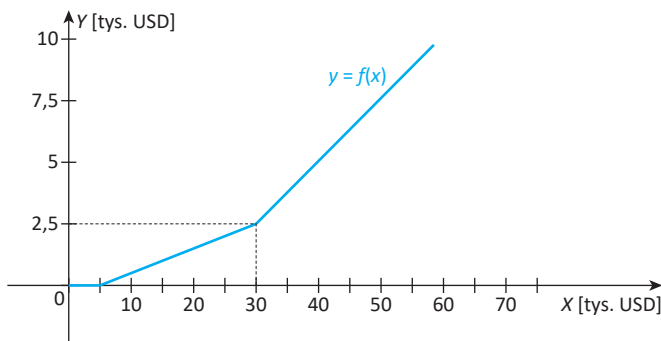
y – podatek, jaki należy zapłacić od uzyskanego dochodu (w dolarach).

1. Jeżeli podatnik uzyska dochód z przedziału $\langle 0, 5000 \rangle$, to nie płaci podatku, czyli podatek ma wartość równą zero.
2. Jeśli dochód x podatnika spełnia warunek $5000 < x \leq 30\,000$ to dochód x pomniejszamy o 5000 dolarów i otrzymujemy kwotę $x - 5000$ dolarów; następnie obliczamy 10% uzyskanej w ten sposób kwoty, czyli $0,1 \cdot (x - 5000)$.
Zatem podatnik zapłaci podatek w wysokości $0,1x - 500$.
3. Jeśli natomiast dochód x podatnika przekroczy 30 tys. dolarów, to postępujemy następująco: od uzyskanego dochodu odejmujemy 30 000 dolarów i otrzymujemy nadwyżkę powyżej 30 000 dolarów, równą $x - 30\,000$.
Obliczamy 25% z otrzymanej nadwyżki, czyli $0,25 \cdot (x - 30\,000)$ i otrzymujemy kwotę $0,25x - 7500$ do której należy jeszcze dodać opłatę stałą w wysokości 2500 dolarów. Zatem podatek w tym przypadku wynosi:
 $0,25x - 7500 + 2500$, czyli $0,25x - 5000$.

Oto wzór funkcji f opisującej system podatkowy w tym kraju:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } 0 \leq x \leq 5000 \\ 0,1x - 500, & \text{jeśli } 5000 < x \leq 30\,000 \\ 0,25x - 5000, & \text{jeśli } x > 30\,000 \end{cases}$$

Poniższy rysunek przedstawia wykres funkcji f :



Oblicz, jaki podatek zapłaci obywatel tego kraju, który uzyskał dochód równy 28 000 dolarów, a jaki obywatel, którego dochód wyniósł 86 000 dolarów.

Niektóre ciała stałe pod wpływem temperatury zmieniają swoje rozmiary liniowe. Takie zjawisko zwane jest rozszerzalnością cieplną. Inżynierowie projektujący mosty, sieci elektryczne czy tory kolejowe muszą uwzględnić to zjawisko fizyczne. Na przykład szyny kolejowe są układane z zachowaniem pewnych odstępów zwanych szczelinami dylatacyjnymi, aby w przypadku ich wydłużenia, pod wpływem zmiany temperatury, nie doszło do wykolejenia się pociągu.

Przykład 3.

Przyrost długości Δl ciała stałego jest wprost proporcjonalny do długości początkowej l_0 i przyrostu temperatury ΔT :

$$\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta T, \text{ gdzie } \alpha - \text{współczynnik rozszerzalności.}$$

Długość końcowa l jest równa

$$l - l_0 = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta T$$

$$l = l_0 + \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta T$$

$$l = l_0(1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

Szyna kolejowa w temperaturze 5°C ma długość 120 m. Współczynnik rozszerzalności stali jest równy $\alpha = 11 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}$.

- Obliczymy, jaką długość będzie mieć ta szyna w temperaturze 25°C .
- Obliczymy w jakiej temperaturze szyna wydłuży się o 5 cm i 2,8 mm.

Ad a) Mamy:

$$l_0 = 120 \text{ m}, \quad \Delta T = 25^\circ\text{C} - 5^\circ\text{C} = 20^\circ\text{C}$$

$$l = 120 \cdot (1 + 11 \cdot 10^{-6} \cdot 20)$$

$$l = 120 \cdot (1 + 0,00022)$$

$$l = 120 \cdot 1,00022$$

$$l = 120,0264$$

W temperaturze 25°C szyna będzie mieć długość 120,0264 m.

Ad b) Szyna wydłuży się o 5 cm 2,8 mm, czyli $\Delta l = 0,0528 \text{ m}$, $T_0 = 5^\circ\text{C}$, $l_0 = 120 \text{ m}$.

Szukamy temperatury T . Korzystamy ze wzoru: $\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta T$

$$\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot (T - T_0) \quad \text{skąd}$$

$$0,0528 = 11 \cdot 10^{-6} \cdot 120 \cdot (T - 5) \quad \text{czyli}$$

$$0,0528 = 0,00132 (T - 5) \quad /: 0,00132$$

$$40 = T - 5$$

$$T = 45$$

Szyna zwiększy swoją długość o 5,28 cm w temperaturze 45°C .

Przykład 4.

Troposfera to warstwa atmosfery ziemskiej, najbliższa powierzchni Ziemi, która rozciąga się do wysokości 7 – 10 km nad obszarami podbiegunowymi, 10 – 12 km nad umiarkowanymi szerokościami geograficznymi oraz 16 – 18 km nad równikiem. Jej grubość od kilkudziesięciu metrów do 2 km nazywa się warstwą graniczną. Powyżej warstwy granicznej, w atmosferze swobodnej, temperatura maleje niemal jednostajnie z wysokością, to znaczy co każde 100 m obniża się o $0,6^{\circ}\text{C}$ (encyklopedia PWN).

Założmy, że kilkadziesiąt metrów nad poziomem morza (w atmosferze swobodnej) znajduje się punkt badawczy, w którym temperatura jest równa 23°C .

- Napiszemy wzór funkcji opisującej zmianę temperatury $T[^{\circ}\text{C}]$ w zależności od wysokości h [m] od punktu badawczego, gdzie $0 \leq h \leq 10\,000$.
- Obliczymy wartość temperatury na wysokości 10 km od punktu badawczego.
- Obliczymy, na jakiej wysokości od punktu badawczego temperatura jest równa -25°C .
- Naszukujemy wykres funkcji temperatury w zależności od wysokości i odczytamy z wykresu na jakiej wysokości temperatura jest równa 0°C .

Ad a) Temperatura obniża się co każde 100 m o $0,6^{\circ}\text{C}$, zatem na wysokości h będzie niższa od temperatury początkowej o $\frac{h}{100} \cdot 0,6^{\circ}\text{C}$. Zatem

$$T(h) = 23 - \frac{h}{100} \cdot 0,6$$

$$T(h) = 23 - 0,006h, \quad h \in \langle 0, 10\,000 \rangle$$

Ad b) $T(10\,000) = 23 - 0,006 \cdot 10\,000 = 23 - 60 = -37$

Na wysokości 10 km nad punktem badawczym temperatura jest równa -37°C .

Ad c) $T = 23 - 0,006h$, więc

$$h = \frac{23 - T}{0,006}, \text{ zatem}$$

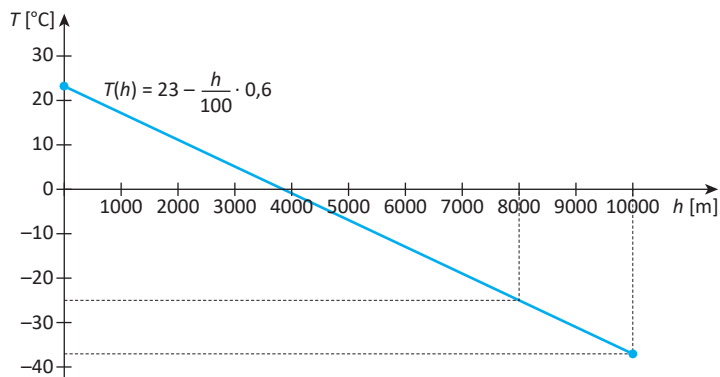
$$h = \frac{23 - (-25)}{0,006}$$

$$h = \frac{48}{0,006}$$

$$h = 8\,000$$

Na wysokości 8 km nad punktem badawczym temperatura jest równa -25°C .

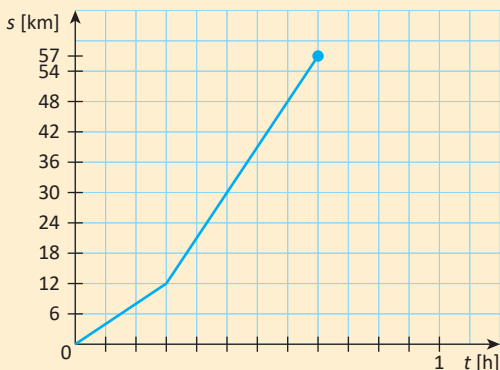
Ad d) Wykres funkcji przedstawia poniższy rysunek.



Z wykresu odczytujemy, że w odległości ok. 3,8 km nad punktem badawczym temperatura jest równa 0°C (sprawdź rachunkiem).

Sprawdź, czy rozumiesz

- Samochód najpierw jechał w terenie zabudowanym, a następnie w terenie niezabudowanym i łącznie przebył 57 km. Na rysunku obok przedstawiony jest wykres ilustrujący drogę s samochodu w zależności od czasu t .



- Oblicz średnią prędkość samochodu na całej trasie.
 - Napisz wzór funkcji opisującej drogę s samochodu w zależności od czasu jazdy t .
- W zbiorniku o wysokości 1,3 m znajduje się woda. Lustro wody jest na wysokości 4 cm od dna zbiornika. Po odkręceniu kranu poziom wody podnosi się o 18 cm co godzinę.
 - Zapisz wzór funkcji P opisującej zależność poziomu wody w zbiorniku od czasu t . Określ dziedzinę funkcji, przyjmując, że proces ten trwa do całkowitego napełnienia zbiornika.
 - Jaki byłby poziom wody w zbiorniku, gdyby czas napełniania wynosił 5 godzin 36 minut?
 - Napisz wzór funkcji wyrażającej zależność temperatury, podanej w stopniach Fahrenheita, od temperatury wyrażonej w stopniach Celsjusza, wiedząc, że ta zależność ma postać $F = a \cdot C + b$, oraz wiedząc, że 100°C to 212°F , zaś 35°C to 95°F , a następnie:
 - Oblicz temperaturę powietrza w stopniach Celsjusza, jeśli temperatura tego dnia była równa 59°F .
 - Temperatura zdrowego człowieka wynosi $36,6^{\circ}\text{C}$. Wyraż tę temperaturę w skali Fahrenheita.

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 4.

Test

1. Wielkości x i y podane w tabelce poniżej są wprost proporcjonalne.

x	a	2,5	3,2
y	8	16	b

Zatem iloczyn $a \cdot b$ jest równy:

- A. 25,6 B. 26,5 C. 22 D. 24
2. Kolarz pokonuje drogę 40 m w 3 sekundy. Ile kilometrów przejedzie w czasie 15 minut, jadąc z tą samą prędkością?
- A. 6 B. 8 C. 10 D. 12
3. Do wykresu proporcjonalności prostej należy punkt $(-2, 8)$. Zatem tę funkcję opisuje wzór:
- a) $y = 8$ B. $y = -2x + 4$ C. $y = -4x$ D. $y = -8x - 8$
4. Wartość funkcji $f(x) = (3 - 2\sqrt{2})x + 12\sqrt{2}$ dla argumentu $\frac{1}{3 + 2\sqrt{2}}$ jest liczbą:
- A. pierwszą B. złożoną C. niewymierną D. ujemną
5. Liczba 11 jest wartością funkcji liniowej $f(x) = \sqrt{2}x + 3$ dla argumentu:
- A. $2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{32}$ C. $\frac{6}{\sqrt{2}}$ D. $11\sqrt{2} + 3$
6. Wykres funkcji liniowej $f(x) = 4 - 8m + (m - 3)x$ przecina oś OY w punkcie $P(0, 6)$, jeśli:
- A. $m = 9$ B. $m = 4$ C. $m = -0,25$ D. $m = -4$
7. Miejscem zerowym funkcji liniowej $f(x) = -\frac{2}{3}x + 14$ jest liczba:
- A. 14 B. 0 C. -21 D. 21
8. Funkcje liniowe $f(x) = 3x - 2k + 6$ oraz $g(x) = \frac{1}{2}x + m - 2$ mają wspólne miejsce zerowe. Wobec tego zachodzi równość:
- A. $k + m = 3$ B. $k = 9 - 3m$ C. $k = 2m$ D. $4k + 3m = 18$
9. Dane są funkcje liniowe:
- I. $y = -0,5x + 8$ II. $y = (\pi - 4)x$ III. $y = 3 + 0,8x$ IV. $y = 5$
- Funkcję rosnącą opisuje wzór:
- A. IV B. III C. II D. I

10. Funkcja liniowa $f(x) = (k+1)x + k - 2$ jest stała, jeśli:
 A. $k = 0$ B. $k = 1$ C. $k = -1$ D. $k = 2$
11. Do wykresu funkcji liniowej należą punkty $P(-8, 6)$ i $R(2, -10)$. Zatem współczynnik kierunkowy ma wartość:
 A. 1,6 B. $\frac{5}{8}$ C. -1,6 D. $-\frac{5}{8}$
12. Funkcja liniowa $f(x) = -3x + 12$ przyjmuje wartości ujemne wtedy i tylko wtedy, gdy:
 A. $x < 4$ B. $x > 4$ C. $x < -4$ D. $x > -4$
13. Wykres funkcji $f(x) = 0,5x - 3$ nie przechodzi przez jedną z ćwiartek układu współrzędnych. Która to ćwiartka?
 A. II B. III C. IV D. I
14. Wykres funkcji liniowej $y = ax + b$ przechodzi tylko przez III i IV ćwiartkę układu współrzędnych, jeśli:
 A. $a = 0, b < 0$ B. $a = 0, b > 0$ C. $a < 0, b = 0$ D. $a > 0, b = 0$
15. Wykres funkcji liniowej $f(x) = 4x - 5$ jest równoległy do wykresu funkcji $g(x) = (1+m)x + m$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 A. $m = 4$ B. $m = -5$ C. $m = 3$ D. $m = 0$

Zadania otwarte

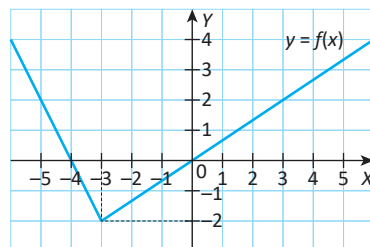
16. Prosta będąca wykresem funkcji liniowej przechodzi przez punkt $A(9, -12)$ i przecina oś OX w punkcie o odciętej równej 5. Oblicz współrzędne punktu, w którym ta prosta przecina oś OY .
17. Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji liniowej $f(x) = (k+2) \cdot (x-3)$ i punkt P należący do tego wykresu. Wyznacz współrzędne punktu przecięcia się wykresu z osią OY .
-
18. Napisz wzór funkcji liniowej, wiedząc, że do jej wykresu należy punkt $A(84, -34)$ oraz że przyjmuje ona wartości dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-\infty, 16)$.
19. Funkcje $f(x) = -\frac{2}{3}x + 3\frac{1}{3}$ oraz $g(x) = (x-a)^2 - a^2$ określone w zbiorze $\mathbf{R}$ mają wspólne miejsce zerowe. Oblicz a .
20. Wyznacz zbiór tych wszystkich argumentów, dla których funkcje: $f(x) = -2,5x + 7,5$ oraz $g(x) = \frac{1}{3}x + 2$ przyjmują jednocześnie wartości nieujemne.

21. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{jeśli } x \in \langle -1, 3 \rangle \\ -\frac{4}{3}x+10, & \text{jeśli } x \in \langle 3, 9 \rangle \end{cases}$

- Sprawdź, czy liczba $16^{\frac{3}{4}}$ należy do dziedziny funkcji f .
- Oblicz wartość wyrażenia $f(6) - f(0)$.
- Oblicz miejsca zerowe funkcji f .
- Sporządź wykres funkcji f .
- Podaj maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f .
- Podaj najmniejszą oraz największą wartość funkcji f .

22. Wykres funkcji f (rysunek obok) jest sumą dwóch półprostych. Korzystając z danych na rysunku:

- wyznaczyć zbiór argumentów, dla których wartości funkcji są nie większe niż 2;
- podaj zbiór wartości funkcji f ;
- wyznaczyć wzór funkcji f .



23. Wyznaczyć wszystkie wartości m , dla których wykres funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = (5 - 2m)x + 20 - 4m$ przechodzi przez I, II i IV ćwiartkę układu współrzędnych.
24. Wyznaczyć wszystkie wartości m , dla których funkcja liniowa $f(x) = (1 + m)x + 2m$ jest malejąca, a jej wykres przecina oś OY powyżej punktu $P(0, -8)$.
25. Wyznaczyć wszystkie wartości m tak, aby funkcja $f(x) = (4 - m)x + 12$ była rosnąca i jednocześnie miejsce zerowe funkcji $g(x) = 2x - \frac{3m+5}{2}$ było liczbą większą od 2.

- D** 26. Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej a , wartość funkcji liniowej $f(x) = (a - 4)x + 4$ dla argumentu a jest liczbą nieujemną.
27. Napisz wzór funkcji liniowej, której wykres jest równoległy do wykresu funkcji $f(x) = 1 - 2x$ i przecina oś odciętych w punkcie o współrzędnych $(\sqrt{3}, 0)$.
28. Wykres funkcji liniowej $f(x) = (3k + 2)x - 2k$ jest równoległy do wykresu funkcji liniowej $g(x) = (1 + 2k)x - 3$.
- Oblicz k .
 - Dla wyznaczonej wartości k naszkicuj wykresy obu funkcji w jednym układzie współrzędnych.
29. Kolarz znajduje się w odległości 140 km od mety, do której zbliża się ze stałą prędkością. Za 4 godziny przekroczy linię mety. Napisz wzór funkcji opisującej odległość kolarza od mety [km] w zależności od czasu t [h]. Podaj dziedzinę funkcji. Naszkicuj wykres tej funkcji.

5. Układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

Definicja 1

Równaniem pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi x oraz y nazywamy równanie, które można zapisać w postaci $ax + by = c$, przy czym a i b nie są jednocześnie zerami. Liczby rzeczywiste a, b, c nazywamy współczynnikami równania.

Równanie $3x + 2y = 4$ jest przykładem równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi. Mamy wówczas: $a = 3, b = 2, c = 4$.

Jeśli do tego równania wstawimy w miejsce x liczbę (-2) , a w miejsce y – liczbę 5 , to otrzymamy równość arytmetyczną prawdziwą:

$$3 \cdot (-2) + 2 \cdot 5 = 4.$$

Powiemy, że para liczb $(-2, 5)$ spełnia równanie $3x + 2y = 4$.

Jeśli natomiast w miejsce x wstawimy liczbę 5 , a w miejsce y – liczbę (-2) , to otrzymamy równość arytmetyczną fałszywą:

$$3 \cdot 5 + 2 \cdot (-2) = 4 \quad (\text{czyli } 11 = 4).$$

Mówimy, że para $(5, -2)$ nie spełnia danego równania.

Parę liczb, która spełnia równanie pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi, nazywamy **rozwiązaniem** tego **równania**.

Czy istnieje tylko jedno rozwiązanie równania $3x + 2y = 4$? Oczywiście, że nie. Aby znaleźć inne rozwiązania tego równania wyznaczamy, na przykład, niewiadomą y i otrzymujemy równanie równoważne danemu, czyli mające takie same rozwiązania.

$$y = -\frac{3}{2}x + 2$$

Jeśli w miejsce x do ostatniego równania wstawimy dowolną liczbę rzeczywistą, to niewiadomą y wyznaczymy w sposób jednoznaczny, np.:

jeśli $x = 0$, to $y = 2$,

jeśli $x = 4$, to $y = -4$.

Pary $(0, 2)$ i $(4, -4)$ są kolejnymi rozwiązaniami równania $3x + 2y = 4$ (sprawdź!).

Łatwo zauważyć, że to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań. Dlatego do ich interpretacji wygodnie jest posłużyć się wykresem równania.

Definicja 2.

Wykresem równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi x, y nazywamy zbiór wszystkich punktów (x, y) , których współrzędne spełniają to równanie.

Twierdzenie 1.

Wykresem równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi x, y jest prosta.

Jeżeli prosta jest wykresem danego równania, to mówimy, że dane równanie opisuje tę prostą. Prawdziwe jest również następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.

Każda prosta w układzie współrzędnych jest wykresem pewnego równania mającego postać $ax + by = c$, gdzie a i b nie są jednocześnie równe zero.

Istnieje wiele równań równoważnych, które opisują jedną prostą, np.:

$$3x + 2y = 4 \qquad 9x + 6y = 12 \qquad \frac{3}{2}x + y = 2 \qquad y = -\frac{3}{2}x + 2$$

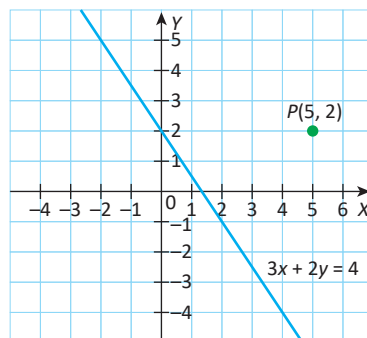
Wszystkie rozwiązania równania $3x + 2y = 4$ możemy opisać jako pary liczb mające postać

$$\left(x, -\frac{3}{2}x + 2\right), \text{ gdzie } x \in \mathbb{R}.$$

Tych par jest nieskończenie wiele.

Zauważ, że np. para liczb $(5, 2)$, nie spełnia danego równania.

Wobec tego punkt $P(5, 2)$ nie należy do naszkicowanej prostej.



Na podstawie zamieszczonego opisu rozwiązań podaj jeszcze trzy inne rozwiązania równania $3x + 2y = 4$ oraz trzy pary liczb, nie będące rozwiązaniami tego równania.

Może się zdarzyć, że w równaniu $ax + by = c$ jedna z liczb: a, b jest równa 0.

Omówimy tę sytuację w poniższym przykładzie.

Przykład 1.

Naszkicujemy proste opisane równaniami: a) $2x + 0y = 4$, b) $0x - y = 3$.

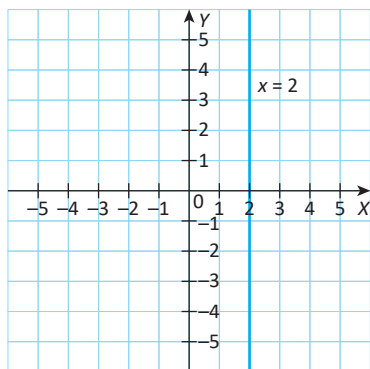
$$2x + 0y = 4$$

Zauważ, że $0y = 0$ dla każdej liczby rzeczywistej y , więc otrzymujemy

$$2x = 4 \quad \text{i} \quad y \in \mathbf{R}$$

$$x = 2 \quad \text{i} \quad y \in \mathbf{R}$$

Rozwiązaniami są wszystkie pary liczb mające postać $(2, y)$, gdzie $y \in \mathbf{R}$.



Wykresem równania jest prosta $x = 2$.

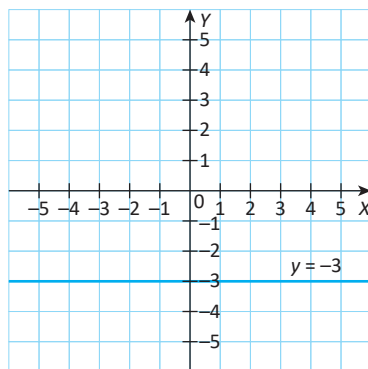
$$0x - y = 3$$

Ponieważ $0x = 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x , więc mamy

$$-y = 3 \quad \text{i} \quad x \in \mathbf{R}$$

$$y = -3 \quad \text{i} \quad x \in \mathbf{R}$$

Rozwiązaniami są wszystkie pary liczb mające postać $(x, -3)$, gdzie $x \in \mathbf{R}$.



Wykresem równania jest prosta $y = -3$.

Podsumujmy:

1. Jeśli $a \neq 0$, to równanie $ax = c$ opisuje prostą równoległą do osi OY .
2. Jeśli $b \neq 0$, to równanie $by = c$ opisuje prostą równoległą do osi OX .

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Dane jest równanie pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi x i y oraz pary liczb obok tego równania. Sprawdź, które pary liczb spełniają dane równanie.

a) $0 \cdot x + \frac{1}{5}y = 0,4$ $(100, 2), (5, 5), (-7, 2)$

b) $0,375x - 0,875y = 1$ $(-2, -2), (-9, -5), (3, 3)$

c) $6x - 0y = 5$ $(-1, 6), \left(\frac{5}{6}, 9\frac{1}{5}\right), (0, -5)$

d) $-\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y = \sqrt{32}$ $(-4, 0), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (5, 3)$

2. Wyznacz brakującą liczbę w parze tak, aby otrzymana para spełniała równanie $5x - 7y = 3$:

a) $(9, \dots)$ b) $(-5, \dots)$ c) $(\dots, 16)$ d) $(\dots, -14)$.

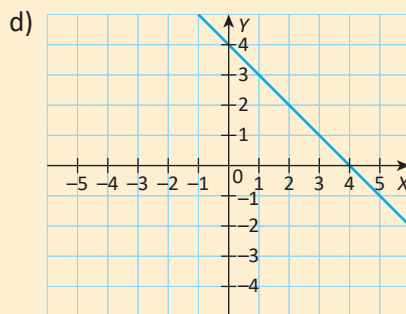
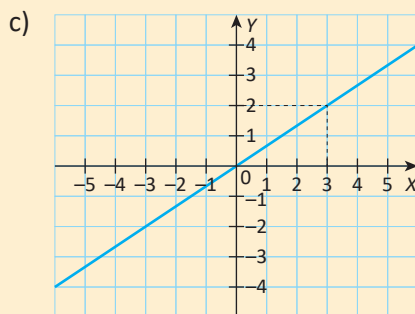
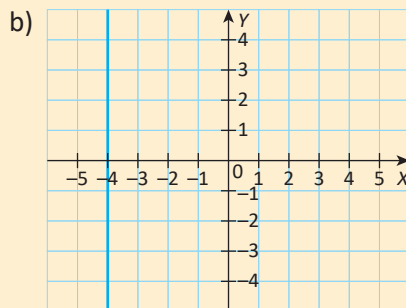
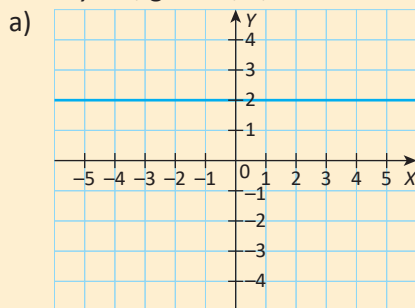
3. Podaj trzy przykłady par liczb spełniających dane równanie. Następnie w prostokątnym układzie współrzędnych naszkicuj wykres tego równania i zaznacz na nim punkty, których współrzędne są równe tym parom liczb.

a) $4x + 5y = 10$ b) $0x + 4y = -12$ c) $-5x + 0y = 10$ d) $3x - 7y = 0$

4. Które z poniższych równań opisują tę samą prostą?

- a) $0,6x - 4y = 3$ b) $\frac{3}{4}x - 1\frac{1}{4}y = 1\frac{1}{2}$ c) $y = 0,6x - 1,2$
 d) $y = 0,15x - 0,75$ e) $3x - 5y = 6$ f) $3x - 20y = 15$

5. Na poniższym rysunku dana jest prosta będąca wykresem równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi x i y . Zapisz to równanie w postaci $ax + by = c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{Z}$.



6. Opisz wszystkie pary liczb (x, y) spełniające równanie:

- a) $2x + 9y = 0$ b) $3y = 9$ c) $2x - 8y = 5$
 d) $7x = 21$ e) $4x + 2y = 10$ f) $\sqrt{3}x = 3$.

7. Wypisz wszystkie pary liczb naturalnych spełniające równanie $x + 3y = 12$.

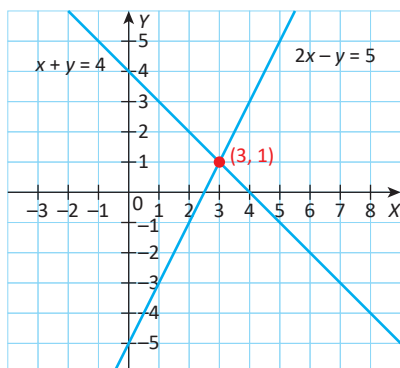
8. Wypisz wszystkie pary liczb (m, n) spełniające równanie $0,75x - y = -15$, jeśli m jest liczbą całkowitą ujemną, zaś n jest liczbą całkowitą dodatnią.

9. Zapisz każdą z poniższych wypowiedzi w postaci równania $ax + by = c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

- a) Liczba x jest o 12 większa od podwojonej liczby y .
 b) Różnica liczby x i połowy liczby y jest równa 9.
 c) Liczba x jest o 40% większa od sumy liczb x i y .
 d) $14\frac{2}{7}\%$ liczby y jest 3 razy większe od podwojonej różnicy liczb x i y .

Układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi. Graficzne rozwiązywanie układów równań

Naszukujemy w jednym układzie współrzędnych proste, będące wykresami dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi: $2x - y = 5$ oraz $x + y = 4$.



Te dwie proste przecinają się w punkcie o współrzędnych $(3, 1)$. Jest to jedyny punkt należący zarówno do jednej, jak i do drugiej prostej. Tylko para liczb $(3, 1)$ jest rozwiązaniem równania $2x - y = 5$ i jednocześnie równania $x + y = 4$. Powiemy, że para $(3, 1)$ jest jedynym rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Rozważmy równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi: $a_1x + b_1y = c_1$, gdzie a_1, b_1 nie są jednocześnie zerami, oraz $a_2x + b_2y = c_2$, gdzie a_2, b_2 nie są jednocześnie zerami.

Jeżeli szukamy takich par liczb, które spełniają jednocześnie oba te równania, to mówimy, że rozwiązujemy układ równań. Układ ten zapisujemy symbolicznie:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & \text{gdzie } a_1 \text{ i } b_1 \text{ nie są jednocześnie równe zero} \\ a_2x + b_2y = c_2 & \text{gdzie } a_2 \text{ i } b_2 \text{ nie są jednocześnie równe zero} \end{cases}$$

Definicja 1.

Rozwiązaniem układu dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi nazywamy każdą parę liczb (x, y) , która spełnia jednocześnie oba równania układu.

Definicja 2.

Rozwiązać układ równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi, to wyznaczyć wszystkie jego rozwiązania albo stwierdzić, że zbiór rozwiązań jest pusty.

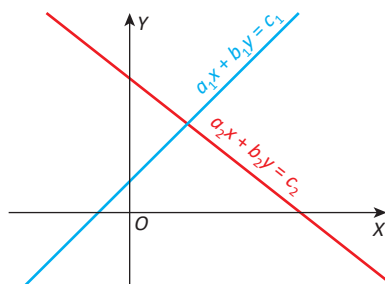
Zastanowimy się, ile rozwiązań może mieć układ równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi. Ilustracją graficzną takiego układu są dwie proste. Rozwiązania układu równań są pary liczb (x, y) , które spełniają jednocześnie oba równania układu, czyli współrzędne punktów wspólnych obu prostych.

Dwie proste na płaszczyźnie mogą mieć następujące położenie:

- 1) proste przecinają się w jednym punkcie,
- 2) proste się pokrywają,
- 3) proste są równoległe i nie mają punktów wspólnych.

Rozróżniamy zatem trzy rodzaje układów dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi:

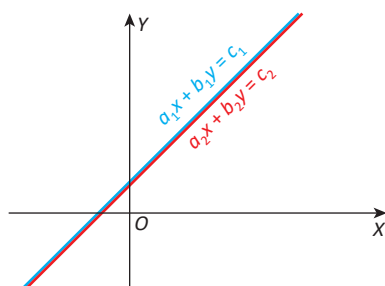
1) **Układ oznaczony** (układ równań niezależnych)



Proste mają tylko jeden punkt wspólny. Współrzędne tego punktu tworzą parę liczb, która spełnia oba równania: $a_1x + b_1y = c_1$ oraz $a_2x + b_2y = c_2$. Ta para jest jedynym rozwiązaniem układu.

Układ oznaczony ma jedno rozwiązanie.

2) **Układ nieoznaczony** (układ równań zależnych)

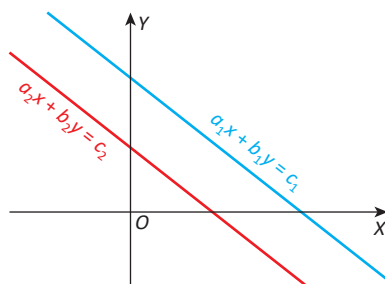


Proste się pokrywają. Każdy punkt jednej prostej jest jednocześnie punktem należącym do drugiej prostej.

Każda para liczb rzeczywistych, spełniająca jedno równanie, spełnia również drugie równanie; tych par jest nieskończenie wiele.

Układ nieoznaczony ma nieskończenie wiele rozwiązań.

3) **Układ sprzeczny**



Proste są równoległe i nie mają punktów wspólnych.

Nie istnieje taka para liczb, która spełniałaby jednocześnie oba równania.

Układ sprzeczny nie ma rozwiązań.

Graficzne rozwiązywanie układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi zilustrujemy przykładami.

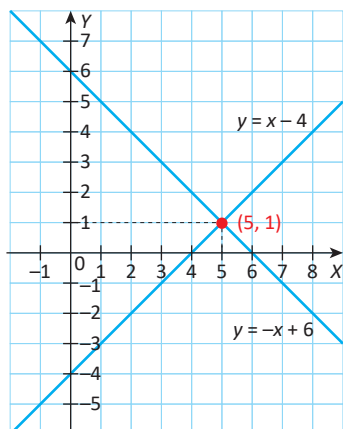
Przykład 1.

Rozwiążemy graficznie układ równań
$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

Sporządzamy wykresy równań układu we wspólnym układzie współrzędnych. W tym celu możemy przekształcić oba równania układu w sposób równoważny:

$$\begin{cases} y = x - 4 \\ y = -x + 6 \end{cases}$$

Poniższy rysunek przedstawia ilustrację graficzną układu.



Z rysunku odczytujemy, że proste przecinają się w punkcie o współrzędnych: $x = 5$ i $y = 1$.

Układ jest oznaczony. Para $(5, 1)$ jest jedynym rozwiązaniem tego układu równań.

Należy sprawdzić poprawność rozwiązania, podstawiając współrzędne punktu kolejno do każdego

równania układu
$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

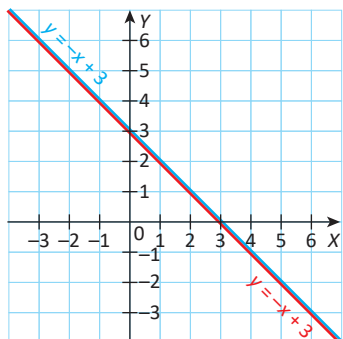
$$L_1 = 5 - 1 = 4, P_1 = 4, \text{ więc } L_1 = P_1 \text{ oraz } L_2 = 5 + 1 = 6, P_2 = 6, \text{ zatem } L_2 = P_2.$$

Jedynym rozwiązaniem danego układu równań jest para $(5, 1)$.

Przykład 2.

Rozwiążemy graficznie układ równań
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

Przekształcamy równania układu równoważnie:
$$\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = -x + 3 \end{cases}$$



Ilustrację graficzną tego układu przedstawia rysunek obok.

Proste układu pokrywają się, bo można je opisać takim samym równaniem.

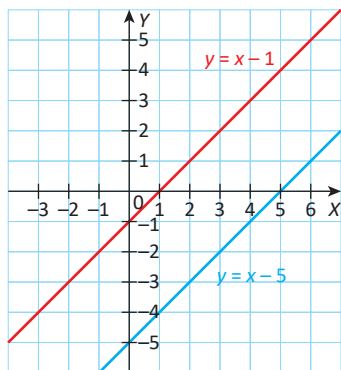
Układ jest nieoznaczony i ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Rozwiązaniem układu jest każda para liczb mająca postać $(x, -x + 3)$, gdzie $x \in \mathbf{R}$.

Przykład 3.

Rozwiążemy układ równań
$$\begin{cases} x - y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Zapisujemy
$$\begin{cases} y = x - 5 \\ y = x - 1 \end{cases}$$
. Ilustracją graficzną tego układu są dwie proste równoległe, które się nie pokrywają.



Naszkicowane proste są wykresami funkcji liniowych o wzorach $y = x - 5$ oraz $y = x - 1$. Współczynniki kierunkowe w tych wzorach są takie same i równe 1.

Proste są równoległe i nie mają punktów wspólnych.

Układ jest sprzeczny, czyli nie ma rozwiązań.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Sprawdź, która z par liczb $(3, 0)$, $(1, -3)$, $(7, 6)$ spełnia podany układ równań:

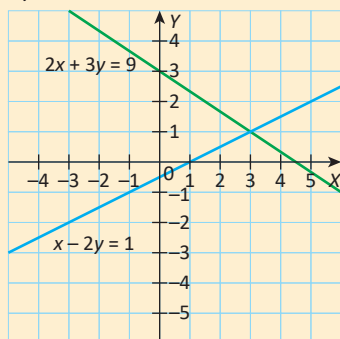
a)
$$\begin{cases} x - 2y = 7 \\ 5x + y = 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x - 2y = 9 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

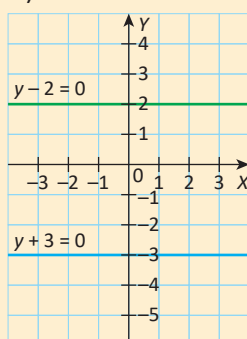
c)
$$\begin{cases} 3x - 2y = 9 \\ y = 1,5x - 4,5 \end{cases}$$

2. Na poniższym rysunku przedstawiona jest ilustracja graficzna pewnego układu dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi. Czy ten układ jest oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny? W przypadku, gdy istnieje rozwiązanie układu, podaj je.

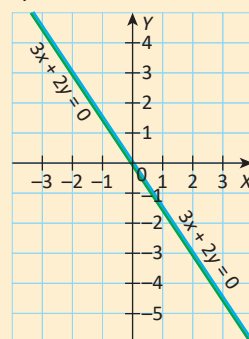
a)



b)



c)



3. Poniższe układy równań są układami oznaczonymi. Rozwiąż graficznie każdy z nich. Pamiętaj o sprawdzeniu poprawności rozwiązania.

a) $\begin{cases} y=1 \\ x+2y=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x+y=5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x=-4 \\ y=x+1 \end{cases}$

4. Rozwiąż graficznie układ równań:

a) $\begin{cases} 2x-y=-2 \\ x-2y=-4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x+2y=-8 \\ y=-1,5x-4 \end{cases}$

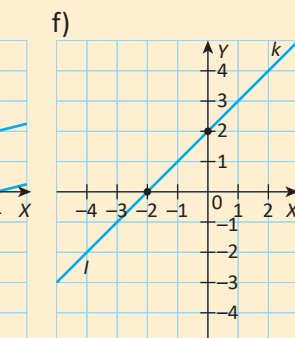
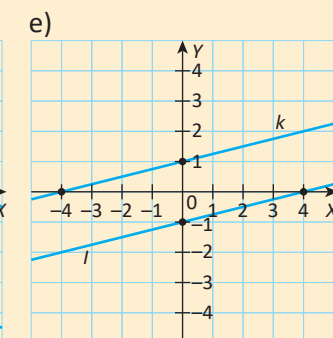
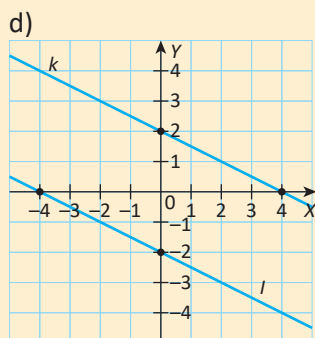
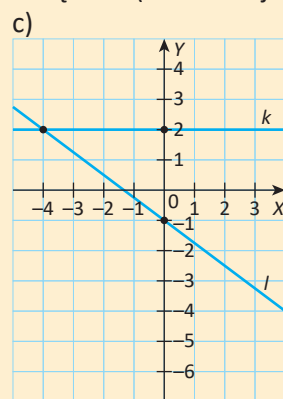
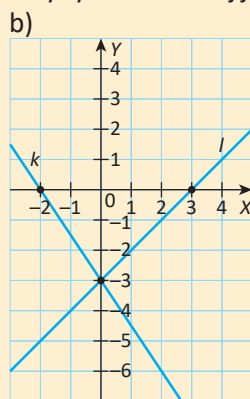
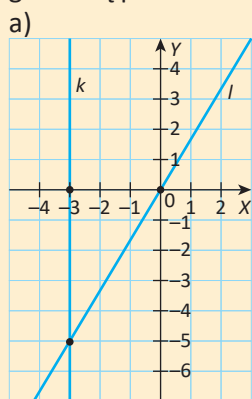
c) $\begin{cases} -4x+y=3 \\ x+y=-7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+y=0 \\ y=-2x+3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x-6=0 \\ 2(x-3)+y=y \end{cases}$

f) $\begin{cases} y+1=0 \\ 2x-y=5 \end{cases}$

5. Napisz układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi, którego interpretację graficzną przedstawia poniższy rysunek. Podaj jego rozwiązanie (o ile istnieje).



6. Dane jest równanie pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi. Podaj przykład drugiego takiego równania, aby powstały układ był: 1) oznaczony, 2) nieoznaczony, 3) sprzeczny.

a) $\begin{cases} 3x-y=7 \\ \dots\dots\dots \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+5y=0 \\ \dots\dots\dots \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-2=0 \\ \dots\dots\dots \end{cases}$

Rozwiązywanie układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi metodą podstawiania

Wiesz już, że równania układu można zastępować równaniami równoważnymi. Wówczas rozwiązywanie układu pozostaną takie same.

Definicja 1.

Dwa układy równań nazywamy **układami równoważnymi** wtedy i tylko wtedy, gdy mają ten sam zbiór rozwiązań.

W tym temacie przedstawimy algebraiczną metodę rozwiązywania układów równań, zwaną metodą podstawiania. W tej metodzie zastępujemy dany układ równań układem równoważnym, wykorzystując następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.

Jeżeli z jednego równania układu wyznaczymy jedną niewiadomą i podstawimy otrzymane wyrażenie do drugiego równania zamiast tej niewiadomej, to układ równań złożony z pierwszego równania i tak przekształconego drugiego równania jest równoważny danemu.

Rozwiązywanie układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi metodą podstawiania zilustrujemy przykładami.

Przykład 1.

Rozwiążemy metodą podstawiania układ równań
$$\begin{cases} 5x + 2y = 8 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$$

Wyznaczamy niewiadomą y z drugiego równania:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 8 \\ y = 6 - 3x \end{cases}$$

Wyrażenie $6 - 3x$ wstawiamy w miejsce y do pierwszego równania:

$$\begin{cases} 5x + 2 \cdot (6 - 3x) = 8 \\ y = 6 - 3x \end{cases}$$

Rozwiązujemy pierwsze równanie układu z niewiadomą x ; drugie równanie przepisujemy bez zmian:

$$\begin{cases} 5x + 12 - 6x = 8 \\ y = 6 - 3x \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 6 - 3x \end{cases}$$

Do drugiego równania w miejsce x podstawiamy liczbę 4 i obliczamy y :

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 6 - 3 \cdot 4 \end{cases} \quad \text{skąd} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = -6 \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $(4, -6)$. Jest to układ oznaczony.

Przykład 2.

Rozwiążemy metodą podstawiania układ równań
$$\begin{cases} x - y = 4 \\ \frac{1}{2}x - 0,5y = 2 \end{cases}$$

Z pierwszego równania układu wyznaczamy x :

$$\begin{cases} x = 4 + y \\ \frac{1}{2}x - 0,5y = 2 \end{cases}$$

Wyrażenie $4 + y$ wstawiamy w miejsce x do drugiego równania:

$$\begin{cases} x = 4 + y \\ \frac{1}{2} \cdot (4 + y) - 0,5y = 2 \end{cases}$$

i porządkujemy drugie równanie:

$$\begin{cases} x = 4 + y \\ 2 + \frac{1}{2}y - 0,5y = 2 \end{cases} \quad \text{skąd otrzymujemy} \quad \begin{cases} x = 4 + y \\ 0y = 0 \end{cases}$$

Równanie $0y = 0$ jest spełnione przez każdą liczbę rzeczywistą y . Zatem rozwiązaniem układu równań jest każda para liczb mająca postać $(4 + y, y)$, gdzie $y \in \mathbf{R}$. Takich par jest nieskończenie wiele. Jest to układ nieoznaczony.

Przykład 3.

Rozwiążemy układ równań
$$\begin{cases} (x+3)(y+2) = (x+2)(y+4) \\ (x-2)^2 = 16 + x^2 - 2y \end{cases}$$

Dany układ równań doprowadzamy najpierw do najprostszej postaci, wykonując działania:

$$\begin{cases} xy + 2x + 3y + 6 = xy + 4x + 2y + 8 \\ x^2 - 4x + 4 = 16 + x^2 - 2y \\ -2x + y = 2 \\ -4x + 2y = 12 \quad / : 2 \end{cases}$$

Wyznaczamy y z pierwszego równania:

$$\begin{cases} y = 2 + 2x \\ -2x + y = 6 \end{cases}$$

Wstawiamy wyrażenie $2 + 2x$ w miejsce y do drugiego równania:

$$\begin{cases} y = 2 + 2x \\ -2x + 2 + 2x = 6 \end{cases} \quad \text{czyli}$$
$$\begin{cases} y = 2 + 2x \\ 2 = 6 \end{cases}$$

Równość $2 = 6$ jest fałszywa.

Nie istnieje taka para liczb, która spełniałaby oba równania układu jednocześnie. Zatem układ równań nie ma rozwiązań czyli jest układem sprzecznym.

Przykład 4.

Wyznamy wartości a i b , wiedząc, że jedynym rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} ax + y = b \\ 13x + by = a \end{cases} \quad \text{z niewiadomymi } x, y \text{ jest para liczb } (-1, 5).$$

Para liczb $(-1, 5)$ jest rozwiązaniem układu równań, więc spełnia oba równania układu. Po podstawieniu w miejsce x liczby -1 , zaś w miejsce y liczby 5 , otrzymujemy dwie równości prawdziwe, które tworzą nowy układ równań:

$$\begin{cases} -a + 5 = b \\ -13 + 5b = a \end{cases}$$

Po podstawieniu wyrażenia $-13 + 5b$ w miejsce a do pierwszego równania otrzymujemy układ:

$$\begin{cases} 13 - 5b + 5 = b \\ -13 + 5b = a \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} b = 3 \\ -13 + 5b = a \end{cases}$$

Wstawiamy liczbę 3 w miejsce b do drugiego równania:

$$\begin{cases} b = 3 \\ -13 + 5 \cdot 3 = a \end{cases} \quad \text{skąd} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

Jeśli $a = 2$, $b = 3$, to układ równań z niewiadomymi x i y przyjmuje postać

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 13x + 3y = 2 \end{cases}$$

Rozwiąż ten układ równań i sprawdź, że jego jedynym rozwiązaniem jest para liczb $(-1, 5)$.

Szukane wartości to: $a = 2$, $b = 3$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Rozwiąż dany układ równań metodą podstawiania.

$$\text{a)} \begin{cases} x + 5y = 8 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} 8x - y = 10 \\ 3x + 4y = 30 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} -2x + 7y = -13 \\ 8x + y = 23 \end{cases}$$

$$\text{d)} \begin{cases} 3x - y = 2 \\ -6x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$\text{e)} \begin{cases} 0,4x - y = 5 \\ 2x - 5y = 25 \end{cases}$$

$$\text{f)} \begin{cases} 2x - 4y = 9 \\ 0,5x - y = 2\frac{1}{4} \end{cases}$$

2. Rozwiąż dany układ równań metodą podstawiania.

$$\text{a)} \begin{cases} 3x + 6y = 12 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} 5y - 5x = 10 \\ 14x + 7y = 21 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} 0,5x + 3y = -1 \\ 2x + 5y = 3 \end{cases}$$

$$\text{d)} \begin{cases} 0,4x - 0,1y = 2 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$$

$$\text{e)} \begin{cases} -3x + 2y = 41 \\ y - x = 14 \end{cases}$$

$$\text{f)} \begin{cases} 0,3x + 21y = 9 \\ x - 7y = 8 \end{cases}$$

3. Rozwiąż dany układ równań metodą podstawiania, porządkując najpierw równania danego układu.

$$\text{a)} \begin{cases} 2(3x - 2y) - (x - 4y) = 20 \\ -5(x + y) + 2(x - y) = 23 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} 7(2x + 3y) - 6(x + 4y) = 2 \\ 3(-2x + y) - 5(3x - 2y) = 5 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} -3(2x - y) + 2(3x - 1,5y) = x + 4 \\ 2(y - x) - 2x = 4x + 5 \end{cases}$$

$$\text{d)} \begin{cases} 4(-3y - 2x) - 12(x - y) = y \\ 9(x - y) - 8x = 21x - 8y + 7 \end{cases}$$

4. Rozwiąż dany układ równań metodą podstawiania.

$$\text{a)} \begin{cases} (x + 1)^2 - x^2 = 15y \\ x - y = 6 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} xy + 2(x - y) = x(7 + y) \\ (x + 3)^2 - (x - 3)^2 = -4,8y \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} (x + 2)(x - 2) + y = x(x + 3) \\ (y + 3)^2 - 18x = y^2 \end{cases}$$

$$\text{d)} \begin{cases} (x + 1)(x - 1) = (x + 1)^2 + 2y \\ 3x + 2y(y - 3) = 2y^2 \end{cases}$$

5. Rozwiąż dany układ równań metodą podstawiania.

$$\text{a)} \begin{cases} 3 - \frac{x + 5y}{2} = 11,5 \\ \frac{2x - 3y}{5} - 2 = 1,6 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} 3(x + y) - \frac{x + 2y}{2} = 3 \\ 5(x + y) - y = 0 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} \frac{4x - y}{3} - \frac{x + 2y}{2} = 2\frac{2}{3} \\ \frac{x + y}{2} + \frac{4x - 9y}{2} = 8 \end{cases}$$

$$\text{d)} \begin{cases} \frac{3x - 2y}{3} - \frac{x + y - 2}{9} = 0 \\ \frac{2(x + 2y)}{5} - \frac{4x - 5y}{10} = 7,8 \end{cases}$$

6. Dany jest układ równań $\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + ay = 1 \end{cases}$, gdzie $a \in \mathbf{R}$. Rozwiąż ten układ, jeśli:

- a) $a = 1$ b) $a = -1$ c) $a = 0$ d) $a = -2$

7. Rozwiąż układ równań $\begin{cases} y - bx = 1 + b \\ b^2x - y = -2 \end{cases}$ z niewiadomymi x, y , jeśli

- a) $b = 4$ b) $b = 1$ c) $b = 0$ d) $b = -1$

8. Wyznacz a i b tak, aby rozwiązaniem układu równań z niewiadomymi x, y , była podana obok tego układu para liczb.

a) $\begin{cases} 4x + 3y = b \\ bx + y = a \end{cases} \quad (1, -2)$

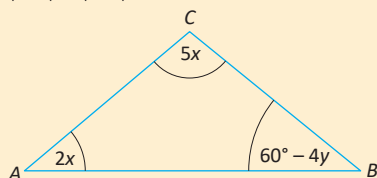
b) $\begin{cases} ax - 4by = 4 \\ bx + 5ay = 3 \end{cases} \quad (0, 2)$

c) $\begin{cases} bx + y = a \\ ax - 2by = 7 \end{cases} \quad (-1, 3)$

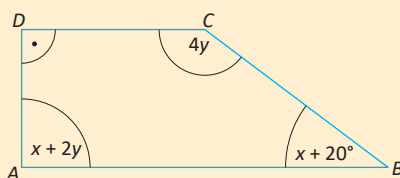
d) $\begin{cases} ax + by = 7 \\ bx - ay = 1 \end{cases} \quad (-3, 4)$

9. Oblicz miary kątów wewnętrznych figury na rysunku poniżej:

a) ABC – trójkąt równoramienny,
 $|AC| = |BC|$

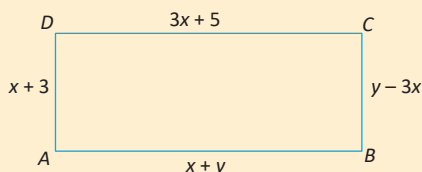


b) $ABCD$ – trapez prostokątny,
 $AB \parallel DC$



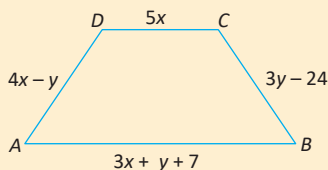
10. Dany jest prostokąt na rysunku poniżej.

- a) Zapisz i rozwiąż układ równań z niewiadomymi x i y .
b) Oblicz pole tego prostokąta.



11. Trapez $ABCD$ na rysunku poniżej jest równoramienny. Podstawa AB jest o 5 dłuższa od podstawy CD .

- a) Zapisz i rozwiąż układ równań z niewiadomymi x i y .
b) Oblicz obwód tego trapezu.



12. Oblicz długości boków równoległoboku, jeśli jego obwód jest równy 35 cm, a jeden z dwóch różnych boków jest o 50% dłuższy od drugiego.

Rozwiązywanie układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi metodą przeciwnych współczynników

Przedstawimy jeszcze jedną metodę algebraiczną rozwiązywania układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi – metodę przeciwnych współczynników. Pomocne nam będzie poniższe twierdzenie:

Twierdzenie 1.

Jeżeli obie strony pierwszego równania układu pomnożymy przez dowolną liczbę różną od zera i obie strony drugiego równania pomnożymy przez dowolną liczbę różną od zera, a następnie równania układu dodamy stronami i tak otrzymanym równaniem zastąpimy dowolne równanie z układu równań, to otrzymamy układ równań równoważny danemu.

Sposób rozwiązywania układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi tą metodą zilustrujemy przykładami.

Przykład 1.

Rozwiążemy metodą przeciwnych współczynników układ równań
$$\begin{cases} 3x - 2y = 13 \\ 4x + 5y = 2 \end{cases}$$

- 1) Pomnożymy pierwsze równanie układu przez (-4) , zaś drugie równanie układu przez 3. Wówczas współczynniki przy niewiadomej x będą liczbami przeciwnymi. Mamy:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 13 & / \cdot (-4) \\ 4x + 5y = 2 & / \cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -12x + 8y = -52 \\ 12x + 15y = 6 \end{cases}$$

- 2) Otrzymane równania układu dodajemy stronami:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -12x + 8y = -52 \\ + \quad 12x + 15y = 6 \end{cases} \\ \hline 23y = -46 \quad / : 23 \\ y = -2 \end{array}$$

- 3) Równanie $y = -2$ dołączamy do dowolnego równania układu (np. do pierwszego) i otrzymujemy układ równoważny danemu:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 13 \\ y = -2 \end{cases}$$

4) Teraz w miejsce y do pierwszego równania podstawiamy liczbę -2 :

$$\begin{cases} 3x - 2 \cdot (-2) = 13 \\ y = -2 \end{cases} \quad \text{skąd} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $(3, -2)$.

Pomnożenie obu stron równań układu przez liczbę różną od zera należy przeprowadzić umiejętnie w taki sposób, aby otrzymać równania, w których współczynniki przy jednej z niewiadomych były liczbami przeciwnymi. Stąd nazwa metody – metoda przeciwnych współczynników.

UWAGA: Mnożąc obie strony pierwszego równania układu przez 5, zaś drugiego równania przez 2, dostaniemy przeciwne współczynniki przy niewiadomej y . Wówczas po dodaniu tak otrzymanych równań stronami otrzymamy równanie z niewiadomą x , które dołączamy do dowolnie wybranego równania początkowego układu. Rozwiąż powyższy układ w taki właśnie sposób.

Przykład 2.

Rozwiążemy metodą przeciwnych współczynników układ równań $\begin{cases} y = 8x - 4 \\ 4x - 0,5y = 2 \end{cases}$

Zanim przystąpimy do zastosowania poznanej metody, porządkujemy układ równań:

$$\begin{cases} 8x - y = 4 \\ 4x - 0,5y = 2 \end{cases}$$

Drugie równanie układu mnożymy przez (-2) i Dodajemy równania stronami.

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 8x - y = 4 \\ + \quad -8x + y = -4 \end{cases} \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

Otrzymana równość jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y . Do tej równości dopisujemy jedno z równań układu początkowego:

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ y = 8x - 4 \end{cases}$$

Układ równań spełnia nieskończenie wiele par liczb postaci $(x, 8x - 4)$, gdzie $x \in \mathbf{R}$. Jest to układ nieoznaczony.

Przykład 3.

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} \frac{x-y}{3} - \frac{2x+y}{2} = 5 \\ 4x+5y=10 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników.

Doprowadzamy układ równań do najprostszej postaci.

$$\begin{cases} \frac{x-y}{3} - \frac{2x+y}{2} = 5 & / \cdot 6 \\ 4x+5y=10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x-y) - 3(2x+y) = 30 \\ 4x+5y=10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x - 5y = 30 \\ + \quad 4x + 5y = 10 \end{cases}$$

$$0 = 40$$

Po zastosowaniu metody przeciwnych współczynników otrzymujemy:

$$\begin{cases} 0 = 40 \\ 4x+5y=10 \end{cases}$$

Równość $0 = 40$ jest fałszywa. To znaczy, że układ równań nie ma rozwiązań. Jest to układ sprzeczny.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Rozwiąż metodą przeciwnych współczynników układ równań:

a) $\begin{cases} 5x+3y=-9 \\ x-2y=6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-2y=-14 \\ 4x+y=16 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -3x+y=3 \\ 6x-2y=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x-8y=-8 \\ x+4y=4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 7x-5y=2 \\ 3x+y=4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 9x-2y=7 \\ 3,6x-0,8y=2,8 \end{cases}$

2. Rozwiąż metodą przeciwnych współczynników układ równań:

a) $\begin{cases} \frac{4x}{5} - \frac{3y}{10} = 1 \\ 3x-y=5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - \frac{5y}{3} = 3 \\ \frac{3x}{2} + y = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x-3y=4 \\ \frac{-16x+3y}{3} = 20-3y \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x-3y=10 \\ \frac{9x-8y}{5} - \frac{2x-3y}{2} = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{3x-2y}{3} - \frac{x+y}{2} = 8 \\ 3x-7y=5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 5x-6y=10 \\ \frac{5x-1}{3} - \frac{4y+3}{2} = 1\frac{1}{2} \end{cases}$

3. Rozwiąż metodą przeciwnych współczynników układ równań:

a)
$$\begin{cases} (x-4)^2 - (y-1)^2 = x^2 - y^2 - 1 \\ -2y + x = 30 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} (x+y)(y-4) = y^2 + (x+2)(y-3) \\ 9x - 5y = 54 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y = (2x-1)^2 - (2x+3)^2 \\ (2y-1)(2y+1) + 96 = 4y(y+3) + x \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} (x+3)(x-2) - (x+4)^2 = 2y - 42 \\ (3x-y)^2 - (y+2)^2 = 3x(3x-2y) - 8x \end{cases}$$

4. Wykresy dwóch funkcji liniowych $f(x) = 2x - 4$ oraz $g(x) = -\frac{1}{3}x + 3$ przecinają się w punkcie A.

a) Oblicz współrzędne punktu A.

b) Narysuj wykresy funkcji f i g we wspólnym układzie współrzędnych.

c) Dla jakich argumentów wartości funkcji f są nie mniejsze niż wartości funkcji g ?

5. Do wykresu funkcji liniowej $y = ax + b$ należą dane punkty P i Q . Ułóż układ równań z niewiadomymi a i b , oblicz współczynniki a i b oraz napisz wzór funkcji liniowej.

a) $P(-24, -20), Q(8, -16)$

b) $P(-4, 13), Q(20, -5)$

c) $P(-5, -130), Q(2, -74)$

d) $P(-36, 110), Q(12, 14)$

6. Miejscem zerowym funkcji liniowej f jest liczba x_0 . Wykres funkcji f przecina się z wykresem funkcji liniowej g w punkcie o rzędnej 7. Wyznacz wzór funkcji f , jeśli:

a) $x_0 = -4, g(x) = 1,5x - 8$

b) $x_0 = -9, g(x) = -5x - 3$.

7. Wykresy funkcji liniowych $g(x) = 1,5x - 5$ oraz $y = f(x)$ przecinają się w punkcie C. Wiedząc, że wykres funkcji f przechodzi również przez punkty $A(2018, -1000)$ i $B(4, 7)$, oblicz współrzędne punktu C.

8. Wykresy trzech funkcji liniowych $f(x) = -0,5x + 23, g(x) = 3x - 5$ oraz $h(x) = ax + a + 1$ przecinają się w jednym punkcie. Wyznacz a .

9. Wyznacz wartości m i n tak, aby wykresy funkcji liniowych $f(x) = \frac{2}{3}x - 1$ oraz

$g(x) = -\frac{1}{3}x + 5$ przecinały się w punkcie $A(n - 0,5m, -4m - n)$.

Zastosowanie układów równań do rozwiązywania zadań

Układy równań liniowych są bardzo pomocne w rozwiązywaniu wielu zadań tekstowych. Tok rozwiązywania takich zadań składa się wówczas z następujących etapów:

1. Analiza treści zadania.
2. Ułożenie i rozwiązanie układu równań.
3. Sprawdzenie poprawności rozwiązania z treścią zadania.
4. Sformułowanie odpowiedzi.

Poszczególne etapy omówimy na konkretnych przykładach. Pierwszy z nich dotyczy postaci historycznej.

Aleksander Wielki urodził się w 356 roku przed Chrystusem. Bardzo wczesnie został królem Macedonii. W wyniku licznych wypraw i podbojów stał się twórcą potężnego i rozległego imperium. Chociaż zmarł młodo, jego imię na zawsze zapisało się na kartach historii.

Przykład 1.

Gdyby Aleksander Wielki umarł o 5 lat wcześniej, panowałby przez $\frac{1}{4}$ swego życia;

gdyby żył o 9 lat dłużej, panowałby przez połowę swego życia. Ile lat żył i panował ten słynny Macedończyk?

- ### 1. Analiza:

x – długość życia Aleksandra Wielkiego (w latach)

y – liczba lat panowania Aleksandra Wielkiego

Zgodnie z treścią zadania musimy rozważyć dwie sytuacje hipotetyczne.

Gdyby król umarł o 5 lat wcześniej, toby żył i panował o 5 lat krócej.	Gdyby król umarł o 9 lat później, toby żył i panował o 9 lat dłużej.
$x - 5$ – długość życia króla; $y - 5$ – liczba lat panowania króla; $\frac{1}{4}(x - 5)$ – liczba lat panowania, wyrażona jako czwarta część długości życia króla; $y - 5 = \frac{1}{4}(x - 5)$ – pierwsze równanie	$x + 9$ – długość życia króla; $y + 9$ – liczba lat panowania króla; $\frac{1}{2}(x + 9)$ – liczba lat panowania, wyrażona jako połowa długości życia króla; $y + 9 = \frac{1}{2}(x + 9)$ – drugie równanie

1. Ułożenie i rozwiązanie układu równań:

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} y-5 = \frac{1}{4}(x-5) \quad / \cdot 4 \\ y+9 = \frac{1}{2}(x+9) \quad / \cdot 2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} -x+4y=15 \\ -x+2y=-9 \end{array} \right. \quad / \cdot (-1) \\ + \left\{ \begin{array}{l} -x+4y=15 \\ x-2y=9 \end{array} \right. \\ \hline 2y=24 \quad / : 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} y=12 \\ x-2 \cdot 12=9 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} y=12 \\ x=33 \end{array} \right. \end{array}$$

3. Sprawdzenie:

Aleksander Wielki żył 33 lata, a panował 12 lat. Gdyby żył o 5 lat krócej, wówczas umarłby, mając 28 lat ($33 - 5$). Okres panowania wynosiłby wówczas 7 lat ($12 - 5$), co stanowiłoby $\frac{1}{4}$ życia króla. Gdyby Aleksander Wielki żył o 9 lat dłużej, czyli 42 lata ($33 + 9$), wówczas panowałby 21 lat ($12 + 9$), a zatem przez połowę swego życia.

4. Odpowiedź: Aleksander Wielki żył 33 lata, a panował przez 12 lat.

Drugi przykład dotyczy funduszy inwestycyjnych. Fundusz inwestycyjny jest formą zbiorowego lokowania środków pieniężnych, wpłaconych przez przedsiębiorstwa, gminy, różne firmy, ale także przez osoby prywatne. Majątek funduszu inwestycyjnego tworzy znaczny kapitał, który umożliwia osiąganie zysków wyższych niż tradycyjna lokata bankowa.

Przykład 2.

Pan Nowak i pan Kowalski ulokowali swoje oszczędności w różnych funduszach inwestycyjnych: pierwszy – kwotę 15 000 zł w funduszu „Skarbczyk”, natomiast drugi – kwotę 12 000 zł w funduszu „Twój Zysk”. Po roku okazało się, że obaj panowie zarobili na tych inwestycjach łącznie 630 zł, ale roczny zysk procentowy funduszu „Twój Zysk” był o 3 punkty procentowe wyższy niż roczny zysk procentowy funduszu „Skarbczyk”. Oblicz, jaki zysk procentowy osiągnął każdy z funduszy w ciągu roku.

1. Analiza:

x – roczny zysk procentowy funduszu „Skarbczyk”

y – roczny zysk procentowy funduszu „Twój Zysk”

$x + 3$ – roczny zysk procentowy funduszu „Twój Zysk”

$y = x + 3$ – pierwsze równanie

$\frac{x}{100} \cdot 15\,000$, czyli $150x$ – kwota, jaką zarobił na inwestycji pan Nowak (w zł)

$\frac{y}{100} \cdot 12\,000$, czyli $120y$ – kwota, jaką zarobił na inwestycji pan Kowalski (w zł)

$150x + 120y$ – łączna kwota zysku obu panów, równa 630 zł

$150x + 120y = 630$ – drugie równanie

2. Ułożenie i rozwiązanie układu równań:

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ 150x + 120y = 630 \end{cases} \quad / : 30 \qquad \begin{cases} y = x + 3 \\ 5x + 4x + 12 = 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ 5x + 4y = 21 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x + 3 \\ 9x = 9 \end{cases} \quad / : 9$$

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ 5x + 4(x + 3) = 21 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

3. Sprawdzenie:

Roczny zysk procentowy funduszu „Twój Zysk” wyniósł 4%, a funduszu „Skarbczyk” był równy 1%, więc zysk funduszu „Twój Zysk” był o 3 punkty procentowe wyższy od zysku funduszu „Skarbczyk”. Po roku pan Nowak zyskał 150 zł ($0,01 \cdot 15\,000$ zł), a pan Kowalski zyskał 480 zł ($0,04 \cdot 12\,000$ zł), co daje łączną kwotę zysku 630 zł.

4. Odpowiedź:

Roczny zysk procentowy funduszu „Twój Zysk” wyniósł 4%, a funduszu „Skarbczyk” był równy 1%.

Kolejny przykład dotyczy prędkości w ruchu jednostajnym prostoliniowym.

Woda w rzece płynie w kierunku ujścia rzeki z prędkością, którą – na niezbyt długim odcinku – możemy obliczyć, korzystając ze wzoru:

$$v [\text{prędkość}] = \frac{s [\text{długość drogi}]}{t [\text{czas}]}$$

W tym celu mierzymy czas, w jakim patyk płynie z prądem rzeki wzdłuż wcześniej wyznaczonej drogi, między wybranymi punktami na brzegu rzeki.

Przykład 3.

Odległość między przystaniami A i B wynosi 120 km. Z przystani A wypłynęła motorówka i płynąc z prądem rzeki, dopłynęła do przystani B po 2 godzinach. Drogę powrotną ta sama motorówka pokonała w czasie 2,5 godziny. Obliczymy prędkość własną motorówki i prędkość prądu rzeki.

1. Analiza

Podróż z prądem



Podróż pod prąd



Zauważ, że:

- prędkość własna motorówki to prędkość, z jaką płynie ona po wodzie stojącej, np. po jeziorze;
- motorówka, płynąc z prądem rzeki, rozwija prędkość większą od prędkości własnej o wartość prędkości prądu rzeki (rzeka „pomaga”);
- motorówka, płynąc pod prąd, rozwija prędkość mniejszą od prędkości własnej o wartość prędkości prądu rzeki (rzeka „przeszkadza”).

x – prędkość własna motorówki (km/h)

y – prędkość prądu rzeki (km/h)

$x + y$ – prędkość motorówki płynącej z prądem (km/h)

$(x + y) \cdot 2$ – odległość między przystaniami (w km), obliczona ze wzoru $s = v \cdot t$

120 – dana odległość między przystaniami (w km)

$(x + y) \cdot 2 = 120$ – pierwsze równanie

$(x - y)$ – prędkość motorówki płynącej pod prąd (w km/h)

$(x - y) \cdot 2,5$ – odległość między przystaniami (w km)

120 – odległość między przystaniami (w km)

$(x - y) \cdot 2,5 = 120$ – drugie równanie

2. Ułożenie i rozwiązanie układu równań:

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (x + y) \cdot 2 = 120 \quad / : 2 \\ (x - y) \cdot 2,5 = 120 \quad / : 2,5 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y = 60 \\ x = 54 \end{array} \right. \\ + \left\{ \begin{array}{l} x + y = 60 \\ x - y = 48 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 54 + y = 60 \\ x = 54 \end{array} \right. \\ \hline \quad \quad \quad 2x = 108 \quad \quad \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 54 \\ y = 6 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x + y = 60 \\ 2x = 108 \end{array} \right. \end{array}$$

3. Sprawdzenie:

Motorówka, płynąc z prądem rzeki, rozwinęła prędkość 60 km/h (54 km/h + 6 km/h). Zatem w czasie 2 godzin pokonała drogę równą 120 km (60 km/h · 2 h), równą odległości między przystaniami. W drodze powrotnej jej prędkość wynosiła 48 km/h (54 km/h – 6 km/h), więc odległość między przystaniami pokonała w czasie 2,5 h (120 km : 48 km/h).

4. Odpowiedź:

Prędkość własna motorówki wynosiła 54 km/h, a prędkość prądu rzeki była równa 6 km/h.

Umiejętność rozwiązywania układów równań przydaje się również do rozwiązywania problemów praktycznych.

W ekonomii rozpatruje się zagadnienie popytu i sprzedaży. Popyt to ilość dobra, jaką nabywcy są skłonni zakupić przy różnych poziomach ceny (w określonym czasie). Podaż to ilość dobra, jaką producenci są gotowi zaoferować przy różnych poziomach ceny. Przy pewnym poziomie ceny zapotrzebowanie zrównuje się z ilością oferowaną. Taką cenę nazywamy ceną równowagi.

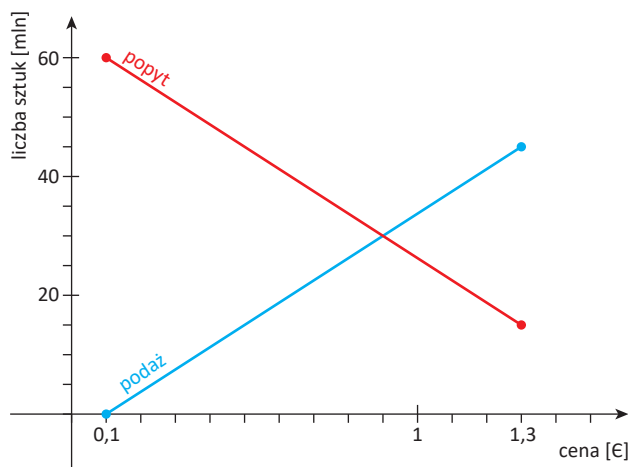
Przykład 4.

W pewnym europejskim kraju przeprowadzono badania dotyczące zainteresowania producentów wytwarzaniem tabliczek czekolady, jak i zainteresowania konsumentów nabywaniem tabliczek czekolady. Okazało się, że jeśli cena tabliczki czekolady

byłaby równa 0,1€, to popyt wyniósłby wówczas 60 mln sztuk (na rok). Natomiast przy cenie za tabliczkę 1,3€ popyt zmalałby do 15 mln sztuk (na rok). Stwierdzono również, że przy cenie 0,1€ za tabliczkę producenci w ogóle nie byłoby zainteresowani wytwarzaniem tabliczek czekolady, czyli podaż byłaby równa zeru. Natomiast przy cenie 1,3€ za tabliczkę czekolady podaż byłaby równa 45 mln sztuk (na rok). Załóżmy dodatkowo, że wraz ze wzrostem ceny od 0,1€ do 1,3€ popyt i podaż zmieniają się liniowo (tzn. wykresy przedstawiające popyt i podaż będą odcinkami prostych).

- Przedstawimy w układzie współrzędnych wykresy obrazujące popyt i podaż (tzw. krzywe popytu i podaży).
- Wyznamy wzory krzywej popytu i krzywej podaży.
- Wyznamy cenę równowagi dla tabliczki czekolady i odpowiadającą tej cenie liczbę wyprodukowanych sztuk.

Ad a) Popyt i podaż są funkcją ceny, więc na osi poziomej przedstawiona jest wartość ceny (w euro), a na osi pionowej zaznaczona jest liczba tabliczek czekolady (w mln sztuk).



Zwróć uwagę, że popyt jest funkcją malejącą: wraz ze wzrostem ceny maleje liczba tabliczek czekolady, którą są skłonni zakupić konsumenci. Natomiast podaż jest funkcją rosnącą: wzrost ceny powoduje, że produkcja staje się atrakcyjna dla coraz większej liczby producentów, którzy chcą wytwarzać coraz więcej tabliczek czekolady.

Ad b) Z założenia wiemy, że popyt zmienia się liniowo, więc wzór funkcji opisującej popyt ma postać:

$$y = ax + b,$$

zaś do wykresu tej funkcji należą punkty: (0,1; 60) oraz (1,3; 15). Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} 60 = 0,1a + b \\ 15 = 1,3a + b \end{cases}$$

Po rozwiązaniu tego układu otrzymujemy: $\begin{cases} a = -37,5 \\ b = 63,75 \end{cases}$

Otrzymaliśmy zatem wzór funkcji f opisującej popyt:

$$f(x) = -37,5x + 63,75, \text{ gdzie } x \in \langle 0,1; 1,3 \rangle.$$

Postępując podobnie, otrzymujemy wzór funkcji g opisującej podaż:

$$g(x) = 37,5x - 3,75, \text{ gdzie } x \in \langle 0,1; 1,3 \rangle.$$

Ad c) Cena równowagi to cena, dla której popyt jest równy podaży. Wyznamy ją więc z równania $f(x) = g(x)$, czyli

$$-37,5x + 63,75 = 37,5x - 3,75$$

Po rozwiązaniu tego równania otrzymamy: $x = 0,9$ (€).

Cena równowagi tabliczki czekolady wynosi 0,9 €. Wówczas popyt i podaż równoważą się i są równe 30 mln tabliczek czekolady (sprawdź!).

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Suma dwóch liczb jest równa 42. Wyznacz te liczby, jeśli wiadomo, że te liczby różnią się o 6.
2. Pewną kwotę pieniędzy podzielono na dwie części w stosunku 3:5. Jedna z tych części jest o 80 zł większa od drugiej. Wyznacz tę kwotę.
3. Za trzy pary skarpetek i dwie bluzki zapłacono 94 zł. Koszt zakupu jednej takiej samej bluzki i ośmiu par takich samych skarpetek jest równy 99 zł. Ile kosztuje bluzka, a ile jedna para skarpetek?
4. Za 5 jednakowych książek i 2 zeszyty zapłacono 109 zł. Gdy cenę książki zwiększono o 30%, a cenę zeszytu obniżono o 20%, wówczas za 4 książki i 3 zeszyty zapłacono 114 zł. Ile kosztowała książka, a ile zeszyt przed zmianą cen?
5. Właściciel sklepu sportowego kupił w hurtowni dwa rowery za 800 zł i sprzedał je z 26,25% zyskiem. Jeden rower przyniósł mu zysk 20%, a drugi – 30%. Oblicz cenę hurtową każdego roweru.
6. Średnia arytmetyczna dwóch liczb jest równa 36. Średnia arytmetyczna 35% pierwszej liczby, 75% drugiej liczby i liczby 57 jest równa 29. Wyznacz te liczby.
7. Zmieszano dwa roztwory soli kuchennej, jeden o stężeniu 10% i drugi o stężeniu 40%. Ile było kilogramów każdego rodzaju roztworu, skoro otrzymano 12 kg roztworu o stężeniu 25%?
8. Jeśli długość danego prostokąta powiększymy o 2 cm, a jego szerokość zmniejszymy o 3 cm, to pole prostokąta zmniejszy się o 66 cm^2 . Jeśli natomiast jego długość zmniejszymy o 10 cm, a jego szerokość powiększymy o 5 cm, to pole prostokąta zmniejszy się o 50 cm^2 . Oblicz długość i szerokość prostokąta.

9. W dwóch koszach znajdują się jabłka. Jeżeli z pierwszego kosza przełożymy 3 jabłka do drugiego kosza, to w obu koszach będzie taka sama liczba owoców. Natomiast jeśli z drugiego kosza przełożymy do pierwszego 8 jabłek, to w pierwszym koszu będzie 2 razy więcej jabłek niż w drugim. Ile jabłek znajduje się w każdym koszu?
10. Dwa lata temu matka była 10 razy starsza od córki. Za 10 lat matka będzie o 27 lat starsza od córki. Ile lat ma obecnie córka, a ile matka?
11. Ola i Paweł są rodzeństwem w wielodzietnej rodzinie. Paweł ma 4 razy więcej siostr niż braci, zaś Ola ma o jednego brata mniej niż siostr. Ile dzieci jest w tej rodzinie?
12. Jeśli licznik ułamka zwiększymy o 1, zaś mianownik ułamka zwiększymy o 3, to otrzymamy ułamek równy $\frac{2}{5}$. Jeśli licznik ułamka zwiększymy dwukrotnie, a mianownik zwiększymy o 5, to ułamek ten będzie równy $\frac{1}{2}$. Wyznacz ten ułamek.
13. W parzystej liczbie trzycyfrowej podzielnej przez 5 cyfra setek jest o 3 większa od cyfry dziesiątek. Wyznacz tę liczbę, jeśli wiadomo, że po zamianie miejscami cyfry dziesiątek i jedności w tej liczbie otrzymamy liczbę o 54 mniejszą od szukanej.
14. Suma cyfr liczby dwucyfrowej jest równa 6. Jeśli pomiędzy cyfrę dziesiątek i jedności wpiszę cyfrę o 2 większą od cyfry jedności, to otrzymamy liczbę trzycyfrową, która jest 11 razy większa od liczby dwucyfrowej. Wyznacz liczbę dwucyfrową.
15. Statek płynący ze stałą prędkością z prądem rzeki pokonuje odległość 60 km w czasie 5 godzin, płynąc zaś pod prąd tę samą odległość pokonuje w czasie 7,5 godziny. Oblicz prędkość własną statku i prędkość prądu rzeki.
16. W tabeli poniżej podana jest wielkość popytu oraz wielkość podaży w zależności od ceny 1 kg truskawek. Najmniejsza cena truskawek u producenta to 3 zł za kilogram, a największa to 11 zł za kilogram. Wiedząc, że popyt i podaż zmieniają się liniowo, wyznacz:
- wzór funkcji popytu oraz wzór funkcji podaży w zależności od ceny za 1 kilogram truskawek
 - cenę równowagi i odpowiadającą tej cenie liczbę kilogramów truskawek.

Wielkość popytu	Cena za 1 kilogram	Wielkość podaży
750 kg	3 zł	250 kg
150 kg	11 zł	650 kg

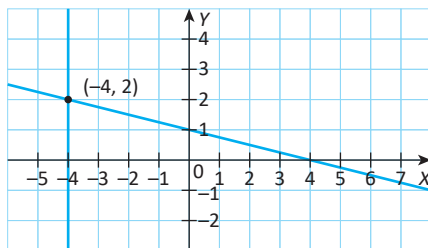
Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 5.

Test

- Jednym z rozwiązań równania $x - 2y = 3$ jest para liczb:
 A. $(-21, -9)$ B. $(27, 15)$ C. $(31, 14)$ D. $(-7, -2)$
- Równanie $x + 0,2y = 0,4$ spełniają wszystkie pary liczb mające postać:
 A. $(x, 2 - 5x), x \in \mathbf{R}$ B. $(x; 3, 2x - 2), x \in \mathbf{R}$
 C. $(x, 5x + 2), x \in \mathbf{R}$ D. $(x, 2x - 5), x \in \mathbf{R}$
- Równanie opisujące zdanie „Połowa sumy liczb x i y jest o 5 mniejsza od 20% różnicy potrójonej liczby x i liczby y ” jest równoważne równaniu:
 A. $x - 7y = 50$ B. $-x + 7y = 50$ C. $3x + 7y = 50$ D. $2x - 5y = 50$
- Wykresem równania $(m + 4)x - (2m - 10)y = 8$ jest prosta równoległa do osi OX tylko wtedy, gdy:
 A. $m = 5$ B. $m = -4$ C. $m = -5$ D. $m = 4$
- Para $(-4, -2)$ jest rozwiązaniem układu równań:
 A. $\begin{cases} -3x - y = 10 \\ x + y = 6 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x - 4y = 4 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$ C. $\begin{cases} 2x - y = -6 \\ y = x + 2 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x - 8y = 12 \\ -x - y = 2 \end{cases}$
- Aby układ równań $\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ \dots\dots\dots \end{cases}$ był sprzeczny, wystarczy dopisać równanie:
 A. $-2x + 3y = -12$ B. $3y - 2x = 12$ C. $y = \frac{1}{3}x - 6$ D. $2x - \frac{3}{2}y = 3$
- Który z poniższych układów jest nieoznaczony?
 I. $\begin{cases} x - 2 = 8 \\ x + y = 6 \end{cases}$ II. $\begin{cases} 6x - 9y = 18 \\ y = \frac{2}{3}x - 2 \end{cases}$ III. $\begin{cases} y - 3 = 0 \\ x + y = x + 3 \end{cases}$
 A. tylko I B. II i III C. tylko II D. tylko III.
- Rozwiązania którego układu równań są parami liczb postaci $(x, 2x - 7), x \in \mathbf{R}$?
 A. $\begin{cases} y = 2x - 7 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$ B. $\begin{cases} y = 2x \\ y = -7 \end{cases}$ C. $\begin{cases} y = 2 \\ y = x - 7 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x - 0,5y = 3,5 \\ 6x - 3y = 21 \end{cases}$
- Na rysunku obok przedstawiona jest graficzna interpretacja układu równań

$$\begin{cases} x + 4y = 4 \\ ax + (b - 2)y = 8 \end{cases}$$

 Wobec tego:
 A. $a + b = -1$ B. $a + b = 1$
 C. $a + b = 0$ D. $-2a + b = -2$



10. Suma dwóch liczb jest równa 36. Różnica podwojonej pierwszej liczby i 75% drugiej liczby wynosi 28. Niech x oznacza pierwszą liczbę, y – drugą liczbę. Który układ równań spełnia warunki zadania?

A. $\begin{cases} x + y = 36 \\ 8x - 3y = 112 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x + y = 36 \\ 2x - 7,5y = 28 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x + y = 36 \\ 2x + 75y = 28 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x + y = 36 \\ 2x - 75y = 28 \end{cases}$

Zadania otwarte

11. Rozwiąż algebraicznie i przedstaw ilustrację graficzną układu równań, jeśli:

a) $\begin{cases} (x+3)(y+5) = (x+1)(y+8) \\ (x+2)(y+1) = (y+4)(x-1) \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x-y}{3} - x = 1 - \frac{x+y-1}{2} \\ \frac{x-5}{2} - \frac{y-6}{4} = x+y \end{cases}$

12. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań:

a) $\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = x^2 + y^2 - 3 \\ (-3-x)^2 - 3x = (x-y)(x+1) + xy + 13 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (x-1)(x+1) = x^2 + x + y \\ (y+2)(y-2) = y^2 + x \end{cases}$

13. Wyznacz a i b tak, aby rozwiązaniem układu równań była podana obok tego układu para liczb.

a) $\begin{cases} (a+2b)x - by = 6 \\ 5x - (a+b)y = 2a \end{cases} \quad (2, 2)$ b) $\begin{cases} (2a+1)x - (b+1)y = b-1 \\ (a-1)x - 2y = 2b-7 \end{cases} \quad (1, 2)$

14. Do wykresu funkcji liniowej f należą punkty $A(-1, 0)$ oraz $B(9, -20)$.

- a) Wyznacz wzór funkcji f .
b) Oblicz współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji f z prostą opisaną równaniem $y - x = 7$.

15. Dwóch pasterzy ma 444 owce. Jeśli pierwszy odda drugiemu 37 owiec, to drugi pasterz będzie miał trzy razy więcej owiec niż pierwszy. Ile owiec ma każdy pasterz?

16. Suma cyfr liczby dwucyfrowej wynosi 15. Wyznacz tę liczbę, jeśli wiadomo, że liczba o przestawionych cyfrach jest o 9 większa od liczby szukanej.

17. Dwa kawałki stopu – pierwszy o zawartości 80% czystego złota, a drugi o zawartości 30% czystego złota stopiono i otrzymano stop o zawartości 40% czystego złota. Oblicz, ile było kilogramów każdego stopu, jeśli wiadomo, że stopu drugiego było o 6 kg więcej niż stopu pierwszego.

18. Wyznacz wszystkie pary liczb naturalnych, spełniających równanie $3x + 7y = 77$.

-  19. Wśród par liczb naturalnych spełniających równanie $2x + 3y = 21$ znajdują się takie, w których co najmniej jedna liczba jest liczbą pierwszą. Wykaż, że są trzy takie pary liczb.

6. Podstawowe własności wybranych funkcji

Funkcja kwadratowa

Definicja 1.

Funkcją kwadratową nazywamy funkcję, którą można opisać wzorem $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$. Liczby rzeczywiste a , b oraz c nazywamy współczynnikami funkcji kwadratowej. Dziedziną funkcji kwadratowej jest zbiór liczb rzeczywistych.

Wzór $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$ nazywamy **wzorem funkcji kwadratowej w postaci ogólnej**.

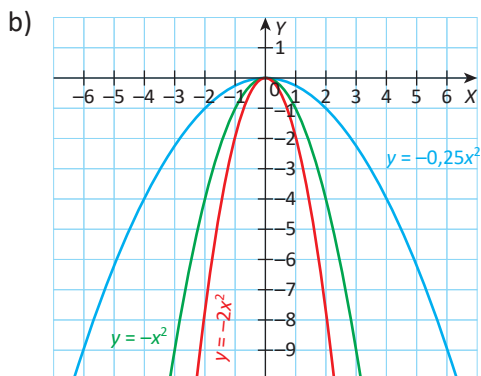
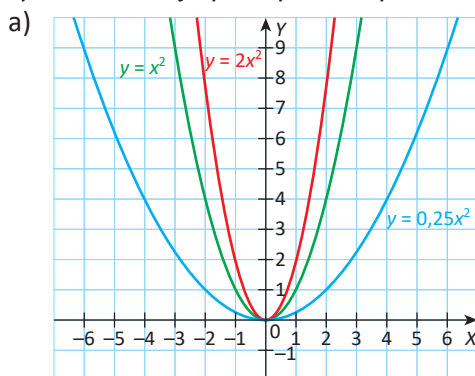
Najpierw omówimy własności funkcji kwadratowych, które można opisać wzorem $y = ax^2$, gdzie $a \neq 0$.

Przykład 1.

W prostokątnym układzie współrzędnych naszkicujemy wykresy funkcji kwadratowych:

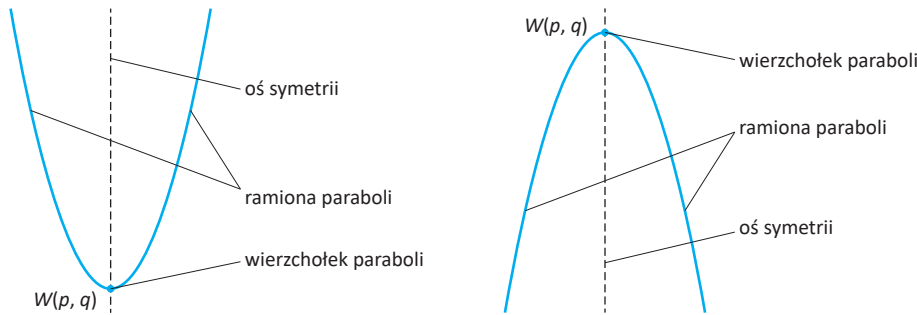
- | | | |
|----------------|------------|----------------|
| a) $y = 2x^2$ | $y = x^2$ | $y = 0,25x^2$ |
| b) $y = -2x^2$ | $y = -x^2$ | $y = -0,25x^2$ |

Szkicując wykresy, możemy wykorzystać komputer, kalkulator graficzny lub możemy posłużyć się tabelką częściową tych funkcji. Im więcej punktów umieścisz w tabelce, tym dokładniejszy otrzymasz wykres.



Wykresem funkcji kwadratowej jest krzywa zwana **parabolą**. Parabola jest figurą nieograniczoną, mającą oś symetrii. Częścią wspólną paraboli i jej osi symetrii jest

punkt, który nazywamy **wierzchołkiem paraboli**. Wierzchołek dzieli parabolę na dwie części, które nazywamy **ramionami paraboli**.



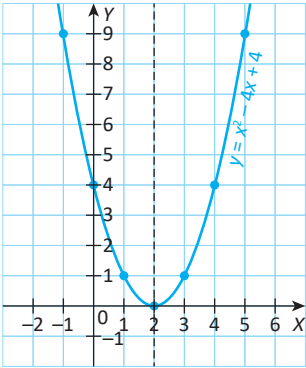
$y = ax^2 + bx + c, \quad a > 0$	$y = ax^2 + bx + c, \quad a < 0$
Ramiona paraboli są skierowane do góry.	Ramiona paraboli skierowane są do dołu.
Funkcja kwadratowa przyjmuje najmniejszą wartość; nie przyjmuje wartości największej.	Funkcja kwadratowa przyjmuje największą wartość; nie przyjmuje wartości najmniejszej.
Najmniejsza wartość jest drugą współrzędną wierzchołka paraboli, równą q .	Największa wartość jest drugą współrzędną wierzchołka paraboli, równą q .
Oś symetrii paraboli jest wyznaczona przez pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli i ma równanie $x = p$.	

Parabola będąca wykresem funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, przecina oś OY w punkcie o współrzędnych $(0, c)$.

Przykład 2.

Naszukujemy wykres funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 4x + 4$.

Korzystając ze wzoru $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$, wzór funkcji f zapisujemy w postaci $f(x) = (x - 2)^2$. Wówczas zauważamy, że najmniejszą wartość (zero) funkcja f przyjmuje dla argumentu 2. Wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji f ma współrzędne $(2, 0)$, oś symetrii paraboli jest prosta opisana równaniem $x = 2$. Znajdujemy jeszcze kilka punktów należących do wykresu funkcji f : $(1, 1)$, $(0, 4)$, $(-1, 9)$. Do wykresu należą też punkty symetryczne do wcześniej wymienionych względem prostej $x = 2$: $(3, 1)$, $(4, 4)$, $(5, 9)$.



Przykład 3.

Naszkicujemy wykres funkcji kwadratowej $g(x) = x^2 + 4x$, wyznaczmy jej miejsca zerowe oraz rozwiążemy nierówność $g(x) > 0$.

Najpierw wyznaczmy miejsca zerowe funkcji g :

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x = 0$$

$$x(x + 4) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x = -4$$

Miejscami zerowymi funkcji g są liczby: 0 i -4 .

Zauważ, że jeśli liczby x_1, x_2 są miejscami zerowymi funkcji kwadratowej, to osią symetrii wykresu tej funkcji jest

prosta o równaniu: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Zatem osią symetrii wy-

kresu funkcji g jest prosta:

$$x = -2$$

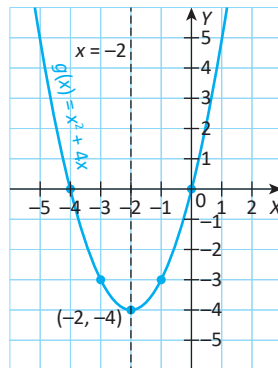
Stąd $p = -2$, $q = g(-2) = -4$, więc

$$W(-2, -4).$$

Ponadto $g(-3) = g(-1) = -3$.

Z wykresu funkcji g odczytujemy:

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$$



Zatrzymajmy się jeszcze przy wzorze funkcji g z ostatniego przykładu. Jest on „częścią” wzoru skróconego mnożenia $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$. Mamy:

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$$

W związku z tym wzór funkcji g możemy przekształcić następująco:

$$x^2 + 4x = x^2 + 4x + 4 - 4 = (x + 2)^2 - 4, \text{ czyli}$$

$$g(x) = (x + 2)^2 - 4.$$

Wzór każdej funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, można zapisać w postaci $y = a(x - p)^2 + q$, $a \neq 0$, gdzie punkt $W(p, q)$ jest wierzchołkiem paraboli będącej wykresem tej funkcji. Wzór $y = a(x - p)^2 + q$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy **wzorem funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej**.

Ze wzoru funkcji kwadratowej $g(x) = (x + 2)^2 - 4$ w postaci kanonicznej odczytujemy:

- współrzędne wierzchołka paraboli będącej jej wykresem: $W(-2, -4)$
- najmniejszą wartość, równą -4 , przyjmowaną dla argumentu -2
- równanie prostej będącą osią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji g : $x = -2$

Możemy też obliczyć wartość tej funkcji dla wybranego argumentu,

np. $g(5) = (5 + 2)^2 - 4 = 45$. Potrafimy również wyznaczyć argumenty, dla których funkcja g przyjmuje daną wartość, na przykład 3:

$$g(x) = 3 \Leftrightarrow (x + 2)^2 - 4 = 3$$

$$(x + 2)^2 = 7$$

$$x + 2 = \sqrt{7} \text{ lub } x + 2 = -\sqrt{7}$$

$$x = \sqrt{7} - 2 \text{ lub } x = -\sqrt{7} - 2$$

UWAGA: Może się zdarzyć, że wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej wygląda tak samo, jak wzór tej funkcji w postaci ogólnej. Tak się dzieje wtedy, gdy współczynnik przy x jest równy zero ($b = 0$), na przykład, $y = 2x^2 - 3$, $y = -x^2 + 5$, $y = 6x^2$, $y = -3x^2$.

Przykład 4.

Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = -2x^2 + 12x - 10$.

- Zapiszemy wzór funkcji f w postaci kanonicznej i wyznaczymy współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f .
- Obliczymy miejsca zerowe funkcji f .
- Naszkicujemy wykres funkcji f i na podstawie wykresu rozwiążemy nierówność $f(x) \geq 0$.

Ad a) Aby zapisać wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, wykonujemy następujące działania:

- wyłączamy przed nawias współczynnik przy x^2 (czyli -2) z dwóch pierwszych składników wyrażenia:

$$-2x^2 + 12x - 10, \text{ czyli } -2(x^2 + 6x) - 10$$

- wyrażenie, w którym występuje x (czyli $6x$) zapisujemy w postaci iloczynu 2, liczby x oraz trzeciej liczby (w naszym przypadku jest to liczba 3):

$$-2(x^2 + 2 \cdot x \cdot 3) - 10$$

Wyrażenie w nawiasie jest „częścią” wzoru skróconego mnożenia:

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x + 3)^2$$

- Wyrażenie w nawiasie „dopełniamy do kwadratu wyrażenia” przez dodanie liczby 3^2 . Jednocześnie odejmujemy 3^2 , aby otrzymać wyrażenie równe danemu:

$$-2(x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2) - 10$$

- Stosujemy wzór skróconego mnożenia:

$$-2[(x + 3)^2 - 9] - 10$$

skąd po pomnożeniu zewnętrznego nawiasu przez -2 otrzymujemy

$$-2(x + 3)^2 + 18 - 10, \text{ czyli}$$

$$-2(x + 3)^2 + 8.$$

Wzór funkcji f w postaci kanonicznej to $f(x) = -2(x + 3)^2 + 8$.

Współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f : $W(-3, 8)$.

Ad b) Aby wyznaczyć miejsca zerowe funkcji f , wystarczy rozwiązać równanie $f(x) = 0$.

Mamy zatem

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2(x + 3)^2 + 8 = 0$$

$$(x + 3)^2 = 4$$

$$x + 3 = 2 \text{ lub } x + 3 = -2$$

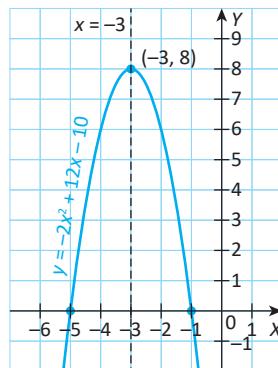
$$x = -1 \text{ lub } x = -5$$

Funkcja f ma dwa miejsca zerowe: -1 oraz -5 .

Ad c) Dodatkowo zauważamy, że osią symetrii wykresu funkcji f jest prosta o równaniu $x = -3$. Szkicujemy wykres funkcji f .

Odczytujemy rozwiązanie nierówności:

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \langle -5, -1 \rangle.$$



Przykład 5.

Dana jest funkcja kwadratowa $g(x) = -x^2 + 2x - 3$.

- Wykażemy, że funkcja g nie ma miejsc zerowych.
- Naszkicujemy wykres funkcji g .
- Wyznamy przedziały monotoniczności funkcji g .

Ad a) Zapisujemy wzór funkcji g w postaci kanonicznej

$$\begin{aligned} -x^2 + 2x - 3 &= -1(x^2 - 2x) - 3 = -1(x^2 - 2 \cdot x \cdot 1) - 3 = \\ &= -1(x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2) - 3 = -1[(x - 1)^2 - 1] - 3 = -(x - 1)^2 - 2 \end{aligned}$$

Tak więc

$$g(x) = -(x - 1)^2 - 2, \text{ gdzie } x \in \mathbb{R}$$

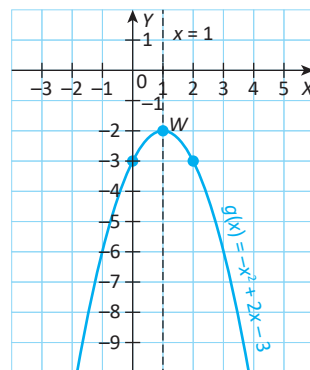
Dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $-(x - 1)^2 \leq 0$, zatem $-(x - 1)^2 - 2 \leq -2 < 0$

Funkcja g przyjmuje tylko wartości ujemne, a więc nie ma miejsc zerowych.

Ad b) $g(x) = -(x - 1)^2 - 2, x \in \mathbb{R}$

- Wierzchołek: $W(1, -2)$
- Oś symetrii: $x = 1$
- Punkt przecięcia z osią OY : $(0, -3)$
- Punkt symetryczny do punktu $(0, -3)$ względem prostej $x = 1$: $(2, -3)$

Zaznaczamy wyznaczone punkty w układzie współrzędnych i szkicujemy wykres funkcji g .



Ad c) Z wykresu odczytujemy, że funkcja g jest:

rosnąca w przedziale $(-\infty, 1)$, malejąca w przedziale $\langle 1, +\infty)$.

Każdy wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, można doprowadzić do postaci kanonicznej $y = a(x - p)^2 + q$ i odwrotnie: każdy wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej można doprowadzić do postaci ogólnej.

Przykład 6.

Wyznamy wzór funkcji kwadratowej $h(x) = \frac{1}{3}x^2 + x - 5$ w postaci kanonicznej.

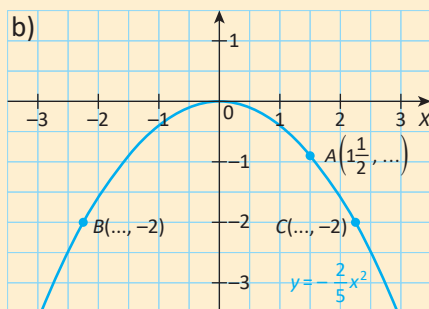
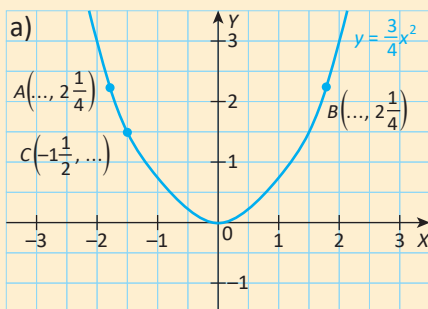
Postępujemy tak, jak w przykładzie 4.

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x^2 + x - 5 &= \frac{1}{3}(x^2 + 3x) - 5 = \frac{1}{3}\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2}\right) - 5 = \\ &= \frac{1}{3}\left[x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] - 5 = \frac{1}{3}\left[\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right] - 5 = \\ &= \frac{1}{3}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} - 5 = \frac{1}{3}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - 5\frac{3}{4}, \text{ zatem } h(x) = \frac{1}{3}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - 5\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Funkcja kwadratowa ma wiele zastosowań. Niektóre z nich zaprezentujemy w kolejnym temacie. Kolejne poznasz w klasie drugiej.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Poniżej znajdują się wykresy funkcji kwadratowych. Uzupełnij brakujące współrzędne punktów A, B, C należących do tych wykresów.



2. Dany jest wzór funkcji kwadratowej. Naszkicuj wykres tej funkcji w prostokątnym układzie współrzędnych i omów jej własności.

a) $y = 0,5x^2$

b) $y = -3x^2$

c) $y = -x^2 + 1$

d) $y = 2x^2 + 3$

e) $y = -0,25x^2 - 1$

f) $y = x^2 - 2$

3. Dany jest wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej. Podaj współrzędne wierzchołka W paraboli będącej wykresem tej funkcji oraz równanie prostej będącej osią symetrii tej paraboli.

a) $y = 2(x + 4)^2 - 5$

b) $y = (x - 6)^2$

c) $y = -x^2 + 2$

d) $y = 3 - (x + 1)^2$

e) $y = 4 + 5x^2$

f) $y = 2 + 3(x - \sqrt{2})^2$

4. Dany jest wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej. Oblicz współrzędne punktu przecięcia wykresu tej funkcji z osią OY . Naskicuj wykres funkcji f , następnie odczytaj z wykresu przedziały monotoniczności oraz zbiór wartości tej funkcji.
- a) $f(x) = -(x+3)^2 + 1$ b) $g(x) = 0,5(x+4)^2$ c) $h(x) = 2(x-1)^2 + 2$
5. Zapisz wzór funkcji kwadratowej f w postaci kanonicznej. Następnie podaj zbiór wartości tej funkcji oraz przedziały monotoniczności.
- a) $f(x) = -10x^2 + 2$ b) $f(x) = x^2 - 7$ c) $f(x) = 25 - 10x + x^2$
d) $f(x) = -2x^2 - 8x$ e) $f(x) = -3x^2 + 0,6x$ f) $f(x) = \sqrt{2}x^2 + \sqrt{32}x + \sqrt{32}$
6. Wyznacz miejsca zerowe, (jeżeli istnieją) funkcji kwadratowej określonej wzorem:
- a) $f(x) = -4x^2$ b) $f(x) = 2x^2 + 7x$ c) $f(x) = 3x^2 - 4x$
d) $f(x) = x^2 + 9$ e) $f(x) = -x^2 + 5$ f) $f(x) = (x-9)^2$
g) $f(x) = 7x^2 - 1$ h) $f(x) = -2(x+\sqrt{3})^2$ i) $f(x) = -x^2 - 16$
7. Wyznacz miejsca zerowe, (jeżeli istnieją) funkcji kwadratowej określonej wzorem:
- a) $f(x) = (x+1)^2 - 4$ b) $f(x) = -2x^2 + 4x - 2$ c) $f(x) = 2(x+7)^2 - 8$
d) $f(x) = 3x^2 - 30x + 75$ e) $f(x) = -(x-5)^2 + 3$ f) $f(x) = 2(x+7)^2 + 8$
8. Napisz wzór funkcji kwadratowej f w postaci kanonicznej. Oblicz miejsca zerowe funkcji f . Naskicuj wykres tej funkcji i podaj zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne, oraz zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie.
- a) $f(x) = (-x^2 + 8x - 16) + 9$ b) $f(x) = x^2 + 2x$ c) $f(x) = 4x^2 - 16x + 16$
d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{7}{2}$ e) $f(x) = -x^2 - 4x + 5$ f) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 4$
9. Napisz wzór funkcji kwadratowej f w postaci kanonicznej. Naskicuj wykres tej funkcji w prostokątnym układzie współrzędnych i omów jej własności.
- a) $f(x) = x^2 - 4$ b) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$ c) $f(x) = 3x^2 + 6x$
d) $f(x) = -0,5x^2 + x + \frac{3}{2}$ e) $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$ f) $f(x) = 0,25x^2 - 2x + 5$
10. Dany jest zbiór wartości funkcji kwadratowej f , równanie osi symetrii paraboli będącej wykresem tej funkcji oraz punkt P należący do tej paraboli. Wyznacz wzór funkcji f w postaci kanonicznej i w postaci ogólnej.
- a) $ZW = \langle -5, +\infty \rangle$; $x = 1$; $P(2, -2)$ b) $ZW = \langle -\infty, 11 \rangle$; $x = 3$; $P(5, 7)$
c) $ZW = \langle -\infty, 4 \rangle$; $x = -5$; $P(-1, -4)$ d) $ZW = \langle 3, +\infty \rangle$; $x = -4$; $P(-6, 5)$

Funkcja kwadratowa – zastosowania

Przykład 1.

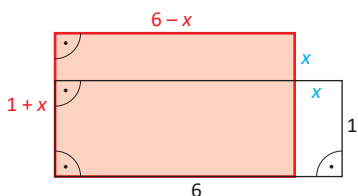
Dany jest prostokąt o bokach długości 1 i 6. Krótszy bok danego prostokąta wydłużamy o x , a dłuższy bok skracamy o x . Powstaje nowy prostokąt o wymiarach $1+x$, $6-x$.

- Obliczymy pole nowego prostokąta w przypadku, gdy x przyjmuje kolejno wartości: 0,5; 2; 4; 5.
- Wyznamy funkcję pola P nowego prostokąta w zależności od zmiennej x i ustalimy jej dziedzinę.
- Naszkieujemy wykres funkcji P .
- Wyznamy największe pole, jakie może mieć nowy prostokąt, i ustalimy, jakie wówczas są długości boków nowego prostokąta.

Ad a) W zależności od różnych wartości x , wymiary nowego prostokąta są różne. Pole prostokąta też przyjmuje różne wielkości. Wyniki przedstawione są w poniższej tabeli.

x	$1+x$	$6-x$	pole nowego prostokąta
0,5	1,5	5,5	8,25
2	3	4	12
4	5	2	10
5	6	1	6

Ad b)



Boki nowego prostokąta mają długość:
($1+x$) oraz ($6-x$).

Liczba x jest dodatnia (krótszy bok danego prostokąta wydłużamy, a nie skracamy), a także mniejsza od 6 (bo $6-x > 0$).

Pole nowego prostokąta jest funkcją zmiennej x :

$$P(x) = (x+1)(6-x), \text{ gdzie } x \in (0, 6).$$

Ad c) Wykres funkcji P jest fragmentem wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = (x+1)(6-x)$, określonej w zbiorze $\mathbf{R}$. Znajdujemy współrzędne (p, q) wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji f . Możemy skorzystać ze wzoru

$$p = \frac{x_1 + x_2}{2}, \text{ gdzie } x_1, x_2 \text{ są miejscami zerowymi funkcji } f.$$

Miejscami zerowymi funkcji f są liczby -1 i 6 (sprawdź!), zatem:

$$p = \frac{-1+6}{2} = 2\frac{1}{2} \quad q = f\left(2\frac{1}{2}\right) = \left(2\frac{1}{2}+1\right)\left(6-2\frac{1}{2}\right) = \left(3\frac{1}{2}\right)^2 = 12\frac{1}{4}$$

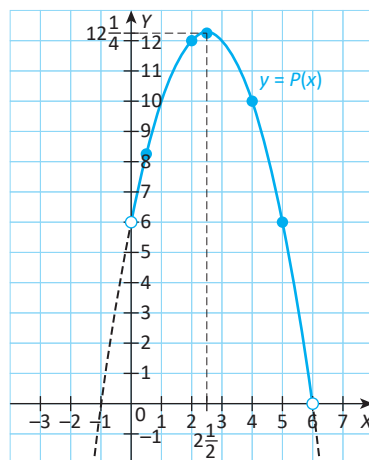
Do wykresu funkcji f należą punkty o współrzędnych:

$$(-1, 0), (0, 6), \left(2\frac{1}{2}, 12\frac{1}{4}\right), (6, 0),$$

a także punkty wyznaczone w punkcie a):

$$(0,5; 8,25), (2, 12), (4, 10), (5, 6).$$

Linią przerywaną szkicujemy wykres funkcji f . Kolorem niebieskim zaznaczamy wykres funkcji P .



Ad d) Z wykresu funkcji P odczytujemy, że pole nowego prostokąta jest największe wtedy, gdy $x = 2\frac{1}{2}$. Wówczas nowy prostokąt jest kwadratem o boku mającym długość $3\frac{1}{2}$, a jego pole jest równe $12\frac{1}{4}$.

Przykład 2.

Z punktu $h_0 = 125$ m nad powierzchnią ziemi upuszczono kamień.

Funkcja $h(t) = h_0 - \frac{gt^2}{2}$ opisuje odległość kamienia od ziemi po t sekundach spadania ($t > 0$); g oznacza przyspieszenie ziemskie, $g \approx 10$ m/s².

a) Obliczmy:

- na jakiej wysokości od ziemi będzie kamień po 1 sekundzie spadania?
- po ilu sekundach (od momentu upuszczenia) kamień będzie na wysokości 80 m od powierzchni ziemi?
- po ilu sekundach kamień spadnie na ziemię?

b) Naszkicujemy wykres funkcji h .

Ad a) Uwzględniając warunki zadania, otrzymujemy:

$$h(t) = 125 - 5t^2 \quad \text{zatem}$$

$$h(1) = 125 - 5 \cdot 1^2 = 120$$

Kamień będzie na wysokości 120 m po 1 sekundzie spadania.

Obliczamy, po ilu sekundach spadania kamień będzie 80 m nad ziemią.

$$h(t) = 80 \Leftrightarrow 125 - 5t^2 = 80$$

$$5t^2 = 45 \quad / : 5$$

$$t^2 = 9$$

$$t = 3 \text{ lub } t = -3, \quad -3 < 0$$

Po 3 sekundach kamień będzie na wysokości 80 m.

Gdy kamień spadnie na ziemię, to jego odległość od ziemi będzie równa zero.

$$h(t) = 0 \Leftrightarrow 125 - 5t^2 = 0$$

$$5t^2 = 125 \quad / : 5$$

$$t^2 = 25$$

$$t = 5 \text{ lub } t = -5, \quad -5 < 0$$

Kamień spadnie na ziemię po 5 sekundach.

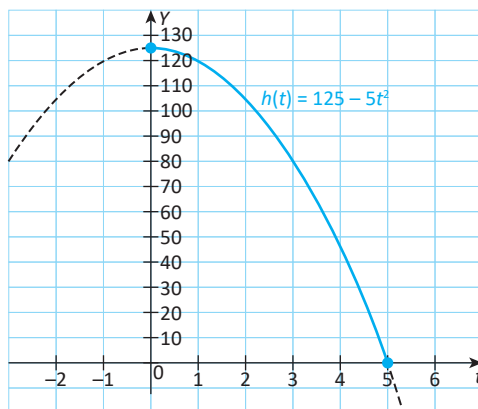
Ad b)

Wykresem funkcji

$$h(t) = 125 - 5t^2, \quad t \in \langle 0, 5 \rangle$$

jest część paraboli, której wierzchołek znajduje się w punkcie $(0, 125)$ i do której należą punkty $(-5, 0)$ i $(5, 0)$.

Aby wygodniej było naszkicować wykres, zastosowaliśmy różne skale na ośiach układu współrzędnych.



Przykład 3.

Z wysokości $h_0 = 15$ m wyrzucano pionowo do góry piłeczkę kauczukową z prędkością początkową $v = 10$ m/s. Funkcja $h(t) = h_0 + vt - \frac{gt^2}{2}$, ($g \approx 10$ m/s²) wyznacza odległość $h(t)$ piłeczki od ziemi, po t sekundach lotu ($t > 0$).

a) Odpowiemy na pytania:

- Po jakim czasie piłeczka spadnie na ziemię?
- Na jaką maksymalną wysokość wzniesie się piłeczka?
- W jakim czasie odległość piłeczki od ziemi będzie rosła, a w jakim będzie malała?
- Po jakim czasie piłeczka będzie znów na wysokości 15 m?

b) Naszkicujemy wykres funkcji h .

Ad a) Z danych zadania wynika, że wzór funkcji h jest następujący:

$$h(t) = -5t^2 + 10t + 15$$

Zapisujemy wzór funkcji h w postaci kanonicznej:

$$\begin{aligned} -5t^2 + 10t + 15 &= -5(t^2 - 2t) + 15 = -5(t^2 - 2 \cdot t \cdot 1 + 1^2 - 1^2) + 15 = \\ &= -5[(t - 1)^2 - 1] + 15 = -5(t - 1)^2 + 20 \end{aligned}$$

czyli

$$h(t) = -5(t - 1)^2 + 20$$

Określmy dziedzinę funkcji h . W tym celu wyznaczmy czas, po którym piłeczka spadła na ziemię.

$$\begin{aligned} h(t) = 0 &\Leftrightarrow -5(t-1)^2 + 20 = 0 \\ (t-1)^2 &= 4 \\ t-1 &= 2 \text{ lub } t-1 = -2 \\ t &= 3 \text{ lub } t = -1, \quad -1 < 0 \end{aligned}$$

Piłeczka poruszała się przez 3 sekundy, więc

$$D_h = \langle 0, 3 \rangle.$$

Ze wzoru funkcji h w postaci kanonicznej $h(t) = -5(t-1)^2 + 20$ wynika natychmiast, że maksymalna wysokość, na jaką wzniosła się piłeczka, to 20 m. Ta wysokość była osiągnięta po 1 sekundzie lotu ($h(1) = 20$). W czasie $t \in \langle 0, 1 \rangle$ odległość piłeczki od ziemi rosta, a w czasie $t \in \langle 1, 3 \rangle$ odległość piłeczki od ziemi malała. Aby wyznaczyć czas, po którym piłeczka była znów na wysokości 15 m, rozwiążemy równanie $h(t) = 15$. Posłużymy się wzorem funkcji h w postaci kanonicznej, ale w tym przypadku można też wykorzystać wzór w postaci ogólnej – sprawdź to!

$$\begin{aligned} h(t) = 15 &\Leftrightarrow -5(t-1)^2 + 20 = 15 \\ (t-1)^2 &= 1 \\ t-1 &= 1 \text{ lub } t-1 = -1 \\ t &= 2 \text{ lub } t = 0 \end{aligned}$$

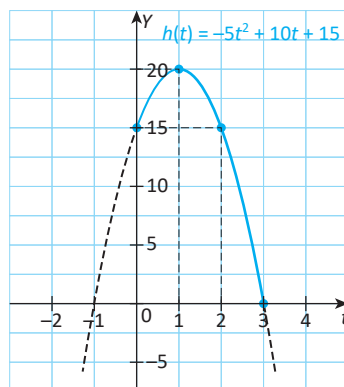
Po 2 sekundach piłeczka była ponownie na wysokości 15 m nad ziemią.

Ad b) Wykresem funkcji

$$h(t) = -5(t-1)^2 + 20, \quad t \in \langle 0, 3 \rangle$$

jest część paraboli, której wierzchołkiem jest punkt $(1, 20)$, oś symetrii prosta o równaniu $t = 1$, i do której należą punkty

$$(0, 15), (2, 15), (3, 0).$$



Przykład 4.

Pewien rzemieślnik produkuje ozdobne okucia, które sprzedaje producentom drzwi. Comiesięczny dochód rzemieślnika (w zł) w zależności od liczby n sprzedanych okuć opisuje funkcja $f(n) = n^2 + 40n - 1200$, $n \in \mathbf{N}$. Ile okuć musi sprzedać rzemieślnik, aby:

- pokryć stałe koszty comiesięcznej działalności,
- uzyskać dochód w wysokości 6500 zł?

Zapisujemy wzór funkcji f w postaci kanonicznej:

$$\begin{aligned} n^2 + 40n - 1200 &= (n^2 + 2 \cdot n \cdot 20 + 20^2 - 20^2) - 1200 = (n + 20)^2 - 1600, \text{ więc} \\ f(n) &= (n + 20)^2 - 1600, \quad n \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

Ad a) Zauważ, że jeśli rzemieślnik nie sprzedaje żadnego okucia lub sprzedaje ich bardzo mało, jego dochód będzie ujemny (mówiąc inaczej, będzie miał stratę), na przykład, $f(0) = -1200$, $f(10) = -700$. Aby ustalić, ile okuc musi sprzedać rzemieślnik, aby pokryć stałe koszty swej działalności, wystarczy rozwiązać równanie $f(n) = 0$.

$$\begin{aligned} f(n) = 0 &\Leftrightarrow (n+20)^2 - 1600 = 0 \\ (n+20)^2 &= 1600 \\ n+20 &= 40 \text{ lub } n+20 = -40 \\ n &= 20 \text{ lub } n = -60, -60 < 0 \end{aligned}$$

Aby pokryć stałe koszty, rzemieślnik musi sprzedać 20 okuc.

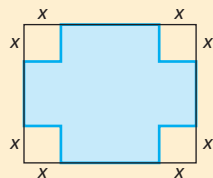
Ad b) Rozwiązujemy równanie $f(n) = 6500$:

$$\begin{aligned} f(n) = 6500 &\Leftrightarrow (n+20)^2 - 1600 = 6500 \\ (n+20)^2 &= 8100 \\ n+20 &= 90 \text{ lub } n+20 = -90 \\ n &= 70 \text{ lub } n = -110, -110 < 0 \end{aligned}$$

Aby uzyskać dochód w wysokości 6500 zł, rzemieślnik powinien sprzedać 70 okuc.

Sprawdź, czy rozumiesz

- Dany jest trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długość 8 cm i 2 cm. Krótszą przyprostokątną wydłużamy o x cm, a dłuższą skracamy o x cm.
 - Wyznacz pole trójkąta w przypadku, gdy x przyjmuje kolejno wartości: 1, 2, 4, 6.
 - Napisz wzór funkcji opisującej pole tego trójkąta w zależności od x i podaj dziedzinę tej funkcji.
 - Zapisz otrzymany wzór funkcji w postaci kanonicznej, a następnie naszkicuj jej wykres.
 - Podaj, jakie największe pole może mieć trójkąt po zmianie długości boków i jaką wartość ma wówczas x .
- Z kawałka papieru w kształcie prostokąta o wymiarach 5 cm na 4 cm odcinamy cztery kwadratowe naroża o boku długości x , jak na rysunku obok.
 - Oblicz pole figury pozostałej po odcięciu tych naroży (kolor niebieski), jeśli x przyjmuje kolejno wartości: 0,5 cm; 1 cm; 2 cm.
 - Napisz wzór funkcji opisującej pole tej figury w zależności od x i podaj jej dziedzinę.
 - Naszkicuj wykres otrzymanej funkcji.
 - Czy otrzymana funkcja przyjmuje wartość najmniejszą? Jeśli tak, to dla jakiego argumentu jest ona przyjmowana?



3. Podstawa danego trójkąta ma długość 10, zaś wysokość poprowadzona na tę podstawę jest równa 4.
- Podaj wzór funkcji opisującej pole trójkąta w przypadku, gdy podstawę danego trójkąta skrócimy o x , zaś wysokość wydłużymy o x . Wyznacz dziedzinę tej funkcji.
 - Oblicz wartość x , dla której pole nowego trójkąta jest równe 12.
 - Uzasadnij, że funkcja pola przyjmuje wartość największą. Podaj największe możliwe pole, jakie może mieć nowy trójkąt powstały w wyniku zmiany długości podstawy i wysokości danego trójkąta.
4. Z wysokości H nad ziemią upuszczono kamień, który po 2 sekundach spadania przebył $\frac{1}{4}$ wysokości. Wiedząc, że odległość (w metrach) kamienia od ziemi opisuje wzór funkcji $h(t) = H - 5t^2$, oblicz:
- wysokość H ;
 - po ilu sekundach spadania kamień dotknął ziemi.
- Pomijamy opory powietrza.
5. Piłkarz kopnął piłkę, która poszybowała pionowo do góry z prędkością początkową v . Odległość (w metrach) piłki od ziemi opisuje funkcja $h(t) = vt - 5t^2$. Wiedząc, że piłka spadła na ziemię po 6 sekundach lotu, oblicz:
- prędkość początkową piłki;
 - największą odległość piłki od ziemi;
 - po ilu sekundach od chwili kopnięcia piłka była na wysokości 25 metrów nad ziemią.
- Pomijamy opory powietrza.
6. Stolarz zajmuje się produkcją ozdobnych szkatulek drewnianych na biżuterię, które sprzedaje do hurtowni. Miesięczny dochód stolarza (w zł) opisuje funkcja $d(n) = n^2 + 20n - 2400$, gdzie n oznacza liczbę sprzedanych szkatulek w ciągu jednego miesiąca. Oblicz:
- ile, co najmniej, szkatulek musi sprzedać stolarz, aby działalność nie przynosiła strat;
 - miesięczny dochód stolarza, wiedząc, że w ciągu miesiąca sprzedał 70 szkatulek;
 - ile szkatulek co miesiąc powinien sprzedawać, aby miesięczny dochód był równy 5600 zł.
7. „Bawiły się raz małpy – wieść indyjska niesie –
Ósma ich część w kwadracie już skacze po lesie,
Pozostałych dwanaście w płasach i z wrzaskami
Pomiędzy zielonymi hasa pagórkami.
Ileż ich wszystkich było? – pyta się Bhâskara
Zagadka nie jest trudna, chociaż bardzo stara.”

Proporcjonalność odwrotna

W naczyniu znajduje się gaz o małej gęstości. Objętość tego gazu jest równa 8 dm^3 , a ciśnienie 1000 hPa . Gaz ten utrzymywany jest w stałej temperaturze. Wówczas zmiana objętości V gazu powoduje zmianę jego ciśnienia p (również zmiana ciśnienia p powoduje zmianę jego objętości V), przy czym iloczyn ciśnienia p i objętości V jest stały. W tym przypadku mamy

$$p \cdot V = 8000 \quad (8000 = 1000 \cdot 8)$$

Jeśli, na przykład, objętość gazu **zmniejszymy dwukrotnie** – do 4 dm^3 , to jego ciśnienie **wzrośnie dwukrotnie** – do 2000 hPa . Jeśli natomiast objętość gazu **zwiększymy 2,5-krotnie** – do 20 dm^3 , to jego ciśnienie **zmaleje 2,5-krotnie** – do 400 hPa .

Powiemy, że – w stałej temperaturze – objętość gazu i jego ciśnienie to wielkości odwrotnie proporcjonalne.

Definicja 1.

Proporcjonalnością odwrotną nazywamy zależność między dwiema wielkościami zmiennymi x , y , określoną wzorem $x \cdot y = a$, gdzie a jest liczbą różną od zera. O zmiennych x , y mówimy, że są odwrotnie proporcjonalne. Współczynnik a nazywamy **współczynnikiem proporcjonalności odwrotnej**.

Przykład 1.

Piętnastu robotników wykona pewną pracę w ciągu 14 dni. Ilu potrzeba robotników, aby wykonać tę pracę w czasie 6 dni? Zakładamy, że wszyscy robotnicy pracują z taką samą wydajnością.

Zauważmy, że jeśli jeden robotnik wykonuje pewną pracę w ustalonym czasie, to dwóch robotników wykona tę pracę w czasie dwa razy krótszym, a pięciu robotników wykona tę pracę w czasie pięć razy krótszym. Można więc przyjąć, że liczba robotników i czas ich pracy to wielkości odwrotnie proporcjonalne (dla ustalonej do wykonania pracy).

Oznaczmy przez n – liczbę robotników potrzebnych do wykonania pracy w czasie 6 dni. Otrzymujemy wtedy równanie

$$n \cdot 6 = 15 \cdot 14 \quad \text{stąd}$$

$$n = 35$$

Potrzeba 35 robotników do wykonania pracy w czasie 6 dni.

Przykład 2.

Maciek i Kamil mieszkają w miejscowościach położonych przy tej samej trasie. Maciek często odwiedza Kamila. Pokonuje wówczas tę trasę w czasie 15 minut, jadąc na motocyklu ze średnią prędkością 48 km/h .

- a) Obliczymy, ile czasu zajęłoby mu pokonanie tej drogi pieszo ze średnią prędkością 4 km/h.
- b) Wyznamy średnią prędkość autokaru, który pokonuje tę trasę w czasie 12 minut.

W ruchu jednostajnym prostoliniowym długość drogi s przebytej w czasie t z prędkością v wyraża wzór $s = v \cdot t$. Jeśli długość drogi jest wielkością stałą, to we wzorze

$$s = v \cdot t$$

wielkości v i t są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, zaś s jest współczynnikiem tej proporcjonalności odwrotnej.

Ad a) Maciek drogę s pokonuje na motocyklu w czasie 15 minut, jadąc ze średnią prędkością 48 km/h. Po przeliczeniu czasu na godziny (15 min = 0,25 h) mamy:

$$s = 48 \cdot 0,25 = 12 \text{ (km)}$$

Idąc, Maciek pokonałby tę drogę ze średnią prędkością 4 km/h. Zatem

$$4 \cdot t = 12 \quad \text{gdzie } t \text{ oznacza czas (w godzinach) tej wędrówki, stąd}$$
$$t = 3 \text{ (h)}$$

Maciek szedłby pieszo 3 godziny.

Ad b) Autokar pokonuje tę trasę w czasie krótszym od pozostałych, zatem prędkość v autokaru powinna być większa od prędkości motocykla. Przeliczamy czas jazdy autokaru na godziny (12 min = 0,2 h) i obliczamy

$$v \cdot 0,2 = 12$$

$$v = 60 \text{ (km/h)}$$

Autokar jedzie z prędkością 60 km/h.

Przeanalizujmy otrzymane wyniki. Zauważ, że:

- na pokonanie trasy motocyklem ze średnią prędkością 48 km/h Maciek potrzebuje 15 minut, a idąc z prędkością 12 razy mniejszą, potrzebuje 12 razy więcej czasu, czyli

$$12 \cdot 15 \text{ min} = 180 \text{ min} = 3 \text{ h}$$

- autobus pokonuje trasę w czasie 12 minut, czyli w czasie 1,25 razy krótszym niż Maciek na motocyklu, zatem jego prędkość jest 1,25 razy większa niż prędkość motoru i wynosi

$$1,25 \cdot 48 \text{ km/h} = 60 \text{ km/h}$$

Przykład 3.

Wyznamy wszystkie pary liczb rzeczywistych (x, y) , których iloczyn jest stały i równy -3 .

Interesują nas wszystkie pary liczb rzeczywistych, spełniające równanie

$$x \cdot y = -3$$

Wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne; liczba -3 jest współczynnikiem proporcjonalności.

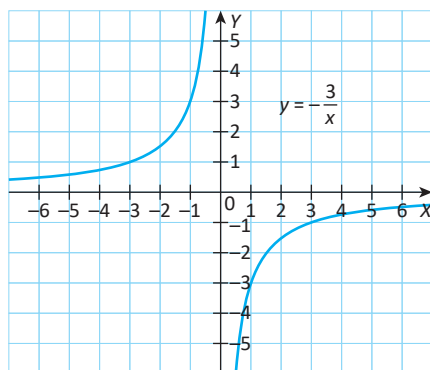
Zauważamy, że żadna z liczb x , y nie może być równa 0.

Powyższe równanie przekształcamy do postaci:

$$y = -\frac{3}{x}, \text{ gdzie } x \neq 0.$$

Pary (x, y) spełniające równanie $x \cdot y = -3$ to współrzędne punktów należących do wykresu funkcji $y = -\frac{3}{x}$, gdzie $x \neq 0$ (zobacz

rysunek obok).

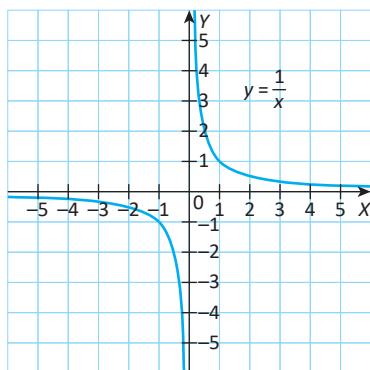


Jest nieskończenie wiele takich par. Możemy je opisać następująco: $\left(x, -\frac{3}{x}\right)$, gdzie $x \in \mathbf{R} - \{0\}$.

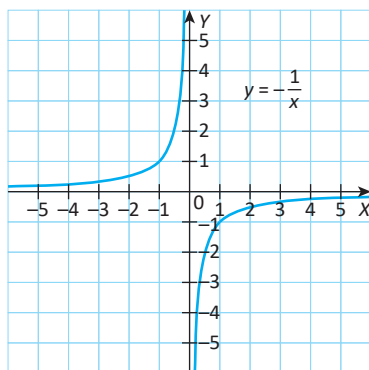
Jeśli $a \neq 0$, to wykresem funkcji $y = \frac{a}{x}$, gdzie $x \in \mathbf{R} - \{0\}$, jest **hiperbola**. Składa się ona z dwóch części, z których każdą nazywamy **gałęzią hiperboli**.

Porównajmy wykresy funkcji opisanych wzorem $y = \frac{a}{x}$ w dwóch przypadkach: jeśli $a = 1$ ($a > 0$) oraz $a = -1$ ($a < 0$).

$$y = \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbf{R} - \{0\}$$



$$y = \frac{-1}{x}, \quad x \in \mathbf{R} - \{0\}$$



Zauważmy:

$y = \frac{a}{x} \quad a > 0$	$y = \frac{a}{x} \quad a < 0$
Gałęzie hiperboli znajdują się w I i III ćwiartce układu współrzędnych.	Gałęzie hiperboli znajdują się w II i IV ćwiartce układu współrzędnych.
Funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty, 0)$ oraz $(0, +\infty)$	Funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty, 0)$ oraz $(0, +\infty)$
Zbiorem wartości funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od zera, $ZW = \mathbf{R} - \{0\}$.	
Funkcja nie jest malejąca w zbiorze $\mathbf{R} - \{0\}$.	Funkcja nie jest rosnąca w zbiorze $\mathbf{R} - \{0\}$.

Przykład 4.

Odcinek AB o długości 12 cm chcemy podzielić na x jednakowych odcinków, każdy mający y cm długości, tak aby długość każdej części była liczbą naturalną. Wyznamy wszystkie rozwiązania.

Związek między liczbą odcinków, a ich długością możemy zapisać tak:

$$x \cdot y = 12, \text{ gdzie } x \in \mathbf{N}_+ \text{ i } y \in \mathbf{N}_+$$

Liczba równych odcinków, na które dzielimy odcinek AB, jest odwrotnie proporcjonalna do ich długości. Liczba 12 jest współczynnikiem proporcjonalności odwrotnej.

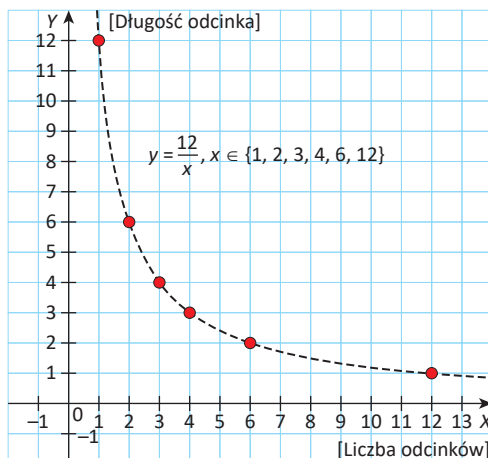
Zależność $x \cdot y = 12$, możemy zapisać

w postaci $y = \frac{12}{x}$ gdzie $x \in \mathbf{N}_+$ i $y \in \mathbf{N}_+$.

Na gałęzi hiperboli umieszczonej w I ćwiartce układu współrzędnych znajdujemy wszystkie punkty o obu współrzędnych naturalnych.

Istnieje sześć par liczb spełniających warunki zadania:

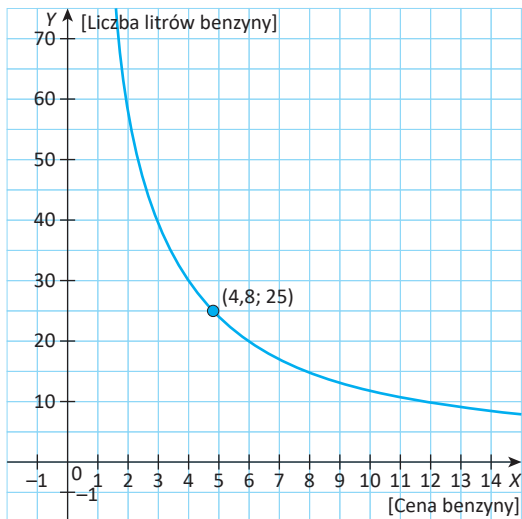
$(1, 12), (2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2), (12, 1)$.



Przykład 5.

Pewien kierowca ma zwyczaj kupowania benzyny za stałą kwotę. Poniższy wykres przedstawia zależność między ceną 1 litra benzyny, a liczbą litrów zatankowanego paliwa, przy stałej kwocie przeznaczonej na ten cel. Na wykresie (rysunek poniżej) zaznaczono punkt odpowiadający transakcji z dnia 20.04.2018 r.

- a) Napiszemy wzór opisujący zależność między ceną 1 litra benzyny a liczbą kupionych litrów paliwa. Wskażemy współczynnik proporcjonalności.
- b) Obliczymy, ile litrów paliwa kupić kierowca 30.05.2018 r., jeśli cena benzyny wzrosła o 6,25% w stosunku do ceny z 20.04.2018 r.
- c) W dniu 20.07.2017 r. kierowca kupił za tę samą kwotę o 2,5 litra benzyny więcej niż 20.04.2018 r. Obliczymy, ile kosztował wtedy litr benzyny.



Ad a) Cena 1 litra benzyny i liczba zakupionych litrów benzyny to wielkości odwrotnie proporcjonalne. Współczynnikiem proporcjonalności jest stała kwota k przeznaczona na zakup paliwa. Zatem

$$k = 4,8 \cdot 25 = 120 \text{ (zł)}$$

Wzór opisujący zależność, której wykres jest przedstawiony na rysunku, to

$$x \cdot y = 120, \text{ gdzie } x > 0.$$

Ad b) W dniu 30.05.2018 r. cena 1 litra benzyny była równa 106,25% ceny z dnia 20.05.2018 r. Za kwotę 120 zł kierowca kupił

$$\frac{120}{1,0625 \cdot 4,8} \approx 23,5 \text{ litra benzyny.}$$

Ad c) W dniu 20.07.2018 r. kierowca za kwotę 120 zł kupił 27,5 litra benzyny. Zatem litr benzyny kosztował $120 : 27,5 \approx 4,36$ (zł).

Sprawdź, czy rozumiesz

- Mama Kasi usmażyła powidła ze śliwek na zimę, które przełożyła do 12 słoików o pojemności 0,5 l każdy. Ile użyłaby słoików o pojemności 0,3 l każdy, a ile o pojemności 0,75 l każdy?
- Piętnastu robotników wykonałoby pewną pracę w czasie 12 dni.
 - ile dni zajęłoby wykonanie tej samej pracy sześciu robotnikom?
 - ilu robotników potrzeba do wykonania całej pracy w czasie 10 dni?
- Książki Oli stoją na sześciu półkach, na każdej półce po tyle samo. Gdyby na każdej półce zmieścić o 3 książki więcej, to zmieściłyby się wszystkie książki Oli na czterech półkach. Ile książek ma Ola?

4. Motocyklista poruszający się ze stałą prędkością przejechał drogę z miasta A do miasta B w ustalonym czasie. Jeśli jechałby z prędkością o 10 km/h większą, to przyjechałby o godzinę wcześniej, jeśli zaś jechałby z prędkością o 10 km/h mniejszą, to przyjechałby o 2 godziny później. W jakim czasie i z jaką prędkością przejechał drogę z A do B?
5. Maciek trenuje kolarstwo. W poniedziałek podczas treningu przejechał pewną drogę w czasie 1 godziny i 20 minut. We wtorek, jadąc z prędkością o 7 km/h większą, pokonał ten sam dystans w czasie o 14 minut krótszym. Oblicz prędkość, z jaką jechał Maciek drugiego dnia. Jak długi dystans zaplanował chłopiec na poniedziałkowy i wtorkowy trening?
6. Każda z 16 klas w liceum, wystawiła jedną sztukę podczas szkolnego festiwalu teatralnego. Rada rodziców przeznaczyła pewną kwotę pieniędzy na nagrody, po tyle samo dla każdej z nagrodzonych klas. Gdyby zostało nagrodzonych pięć klas, to każda z nich otrzymałaby o 400 zł mniej, niż gdyby zostały nagrodzone tylko trzy klasy.
 - a) Oblicz, jaką kwotę przeznaczyła rada rodziców na nagrody podczas szkolnego festiwalu teatralnego.
 - b) Napisz wzór funkcji opisującej kwotę y otrzymanej nagrody przez każdą klasę, w zależności od liczby x nagrodzonych klas.
7. Rozpatrujemy wszystkie prostokąty o polu 18, których długości boków są równe x i y .
 - a) Napisz wzór i naszkicuj wykres funkcji opisującej długość boku y w zależności od długości boku x .
 - b) Wypisz wszystkie pary liczb naturalnych (x, y) , dla których pole prostokąta jest równe 18.
8. Trójkąt o podstawie długości x i wysokości h poprowadzonej na tę podstawę ma pole równe 20 cm^2 .
 - a) Oblicz x , jeśli wysokość jest równa 8 cm.
 - b) Oblicz h , jeśli podstawa ma długość 15 cm.
 - c) Naszkicuj wykres funkcji opisującej wysokość h w zależności od długości podstawy x trójkąta.
9. Naszkicuj wykres funkcji $y = \frac{-6}{x}$, gdzie $x \in \mathbf{R} - \{0\}$. Następnie zaznacz na wykresie wszystkie punkty, których obie współrzędne są całkowite. Ile ich jest?
10. Wyznacz wszystkie pary liczb naturalnych (x, y) , spełniające równanie $x \cdot y = 24$. Ile ich jest?
11. Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych (x, y) , spełniające równanie $(x + 3) \cdot y = 10$

Funkcja wykładnicza

Definicja 1.

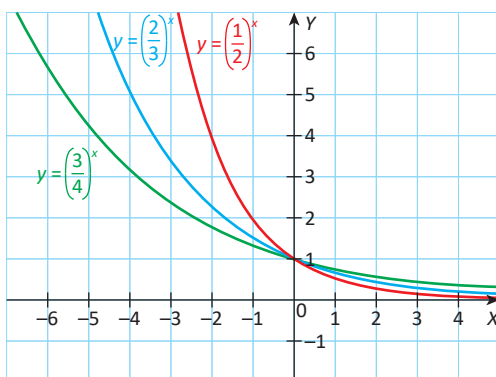
Funkcją wykładniczą nazywamy funkcję, którą można opisać wzorem $y = a^x$, gdzie a jest ustaloną liczbą rzeczywistą dodatnią i różną od 1 ($a > 0$ i $a \neq 1$). Dziedziną funkcji wykładniczej jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$.

Rozważmy dwa przypadki ze względu na podstawę potęgi.

I przypadek: $a \in (0, 1)$

Na rysunku poniżej znajdują się wykresy przykładowych funkcji wykładniczych:

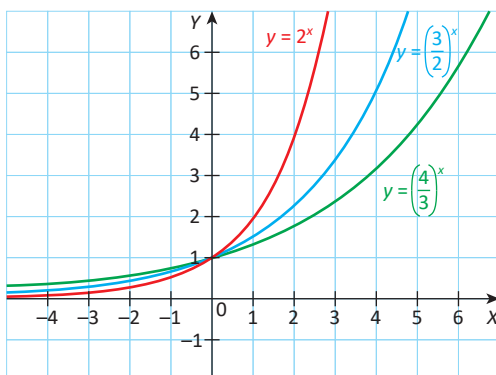
$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad y = \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$$



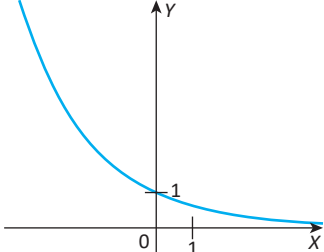
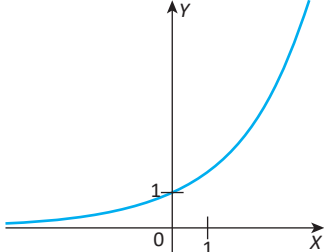
II przypadek: $a \in (1, +\infty)$

Na rysunku poniżej znajdują się wykresy przykładowych funkcji wykładniczych:

$$y = 2^x \quad y = \left(\frac{3}{2}\right)^x \quad y = \left(\frac{4}{3}\right)^x$$



Własności funkcji wykładniczej $y = a^x$, gdy $a > 0$ i $a \neq 1$.

$y = a^x, \quad 0 < a < 1$	$y = a^x, \quad a > 1$
	
Wykresem funkcji jest krzywa wykładnicza, która przecina oś OY w punkcie $(0, 1)$.	
Funkcja wykładnicza nie ma miejsc zerowych.	
Funkcja wykładnicza przyjmuje tylko wartości dodatnie, $ZW = (0, +\infty)$.	
Funkcja wykładnicza jest różnowartościowa.	
Funkcja wykładnicza jest malejąca.	Funkcja wykładnicza jest rosnąca.

Z monotoniczności funkcji wykładniczej wynika, że:

- 1) jeśli $a \in (0, 1)$ oraz $x_1 < x_2$, to $a^{x_1} > a^{x_2}$,
- 2) jeśli $a \in (1, +\infty)$ oraz $x_1 < x_2$, to $a^{x_1} < a^{x_2}$.

Przykład 1.

Porównamy liczby: a) $0,1^{\sqrt{2}}$; $0,01$; $10^{-1,5}$

b) 2^π ; $4^{\sqrt{3}}$; 8

Ad a) Zapisujemy kolejne liczby jako potęgi o tej samej podstawie:

$$0,1^{\sqrt{2}}$$

$$0,01 = 0,1^2$$

$$10^{-1,5} = 0,1^{1,5}$$

Ponieważ

$$1,5 < \sqrt{2} < 2 \text{ oraz } 0,1 \in (0, 1), \text{ więc}$$

$$0,1^2 < 0,1^{\sqrt{2}} < 0,1^{1,5} \quad \text{czyli}$$

$$0,01 < 0,1^{\sqrt{2}} < 10^{-1,5}$$

Ad b) Każdą z danych liczb możemy zapisać w postaci potęgi o podstawie 2:

$$2^\pi$$

$$4^{\sqrt{3}} = 2^{2\sqrt{3}}$$

$$8 = 2^3$$

W tym przypadku mamy:

$$3 < \pi < 2\sqrt{3} \text{ oraz } 2 \in (1, +\infty) \quad \text{zatem}$$

$$8 < 2^\pi < 4^{\sqrt{3}}$$

Funkcje wykładnicze odgrywają dużą rolę w fizyce, chemii, biologii, medycynie, meteorologii, ekonomii oraz w innych dziedzinach. Służą do modelowania różnych procesów i zjawisk. Niektóre z zastosowań funkcji wykładniczej pokażemy w kolejnych przykładach. Inne jej zastosowania poznasz w kolejnych latach nauki.

Przykład 2.

Zauważono na podstawie eksperymentu, że liczba bakterii pewnej kolonii – w sprzyjających warunkach – podwaja się każdego dnia. Wyniki badań przedstawiono w tabeli.

czas [dni]	0	1	2	3	4
liczba bakterii (w przybliżeniu)	100	200	400	800	1600

Jeśli oznaczymy przez t czas (w dniach) obserwacji kolonii bakterii, a przez $f(t)$ – przybliżoną liczbę bakterii po dniu t , to zależność tę opisuje wzór $f(t) = c \cdot a^t$, gdzie $a > 0$ i $t \geq 0$.

- Wyznaczmy liczby a i c we wzorze funkcji f .
- Obliczmy przybliżoną liczbę bakterii tej kolonii po $1\frac{1}{4}$ dnia.
- Korzystając z komputera, naszkicujemy wykres funkcji f i na podstawie tego wykresu ustalimy, po jakim czasie liczba bakterii w kolonii przekroczy 7000.

Ad a) Skoro dla $t = 0$ liczba bakterii była równa (w przybliżeniu) 100, to

$$f(0) = c \cdot a^0 = 100, \text{ skąd } c = 100$$

$$f(t) = 100 \cdot a^t$$

Ponadto

$$f(1) = 200, \text{ więc } 200 = 100 \cdot a^1, \text{ czyli } a = 2.$$

Wzór funkcji przyjmuje postać:

$$f(t) = 100 \cdot 2^t, \text{ gdzie } t \in \langle 0, +\infty \rangle.$$

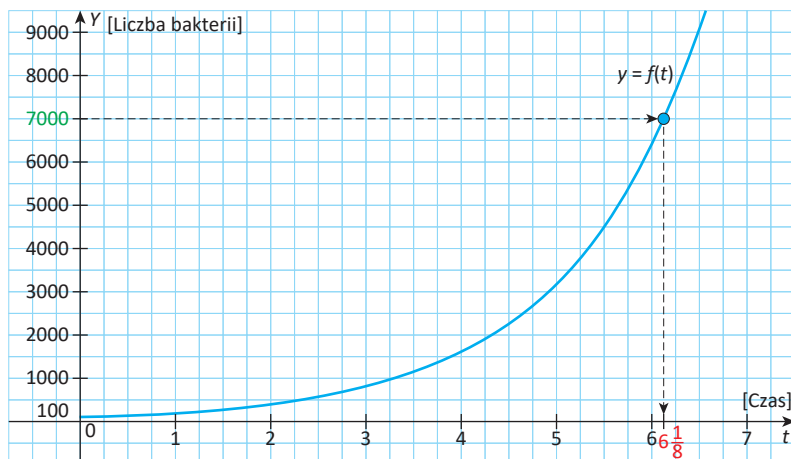
Ad b) Po upływie $1\frac{1}{4}$ dnia (czyli po 1 dniu i 6 godzinach) liczba bakterii była równa

$$f\left(1\frac{1}{4}\right). \text{ Obliczamy:}$$

$$f\left(1\frac{1}{4}\right) = 100 \cdot 2^{\frac{5}{4}} = 100 \cdot \left(\sqrt[4]{2}\right)^5 \approx 238$$

W obliczeniach skorzystaliśmy z funkcji pierwiastka kwadratowego na kalkulatorze.

Ad c) Szkicujemy wykres funkcji f .



Z wykresu odczytujemy, że liczba bakterii w kolonii przekroczy 7000 po ok. $6\frac{1}{8}$ dnia, czyli po 6 dniach i 3 godzinach.

Przykład 3.

Lekarstwa, które przyjmuje człowiek, są stopniowo eliminowane przez organizm. Ilość leku, która pozostaje w organizmie, zależy od wielkości dawki leku d (mg) oraz czasu t (h) liczonego od momentu zażycia lekarstwa i wyraża się wzorem $P(t) = d \cdot (0,7)^t$, gdzie $t \geq 0$.

Założmy, że chory przyjął 20 mg leku.

- Oszacujemy, ile mg leku znajduje się w organizmie chorego po upływie 6 godzin od momentu zażycia lekarstwa.
- Wyznamy, ile procent leku pozostającego w organizmie jest eliminowane w ciągu każdej godziny.
- Korzystając z wykresu funkcji P , oszacujemy w jakim czasie, od momentu zażycia leku, jego zawartość w organizmie była mniejsza od 14 mg i większa od 8 mg.

Ad a) Dla dawki d leku równej 20 mg wzór funkcji P ma postać:

$$P(t) = 20 \cdot (0,7)^t, \text{ gdzie } t \in \langle 0, +\infty \rangle$$

Obliczamy, ile mg leku pozostanie w organizmie chorego po upływie 6 godzin:

$$P(6) = 20 \cdot (0,7)^6 = 20 \cdot 0,117649 \approx 2,35$$

Po 6 godzinach w organizmie chorego pozostanie ok. 2,35 mg leku.

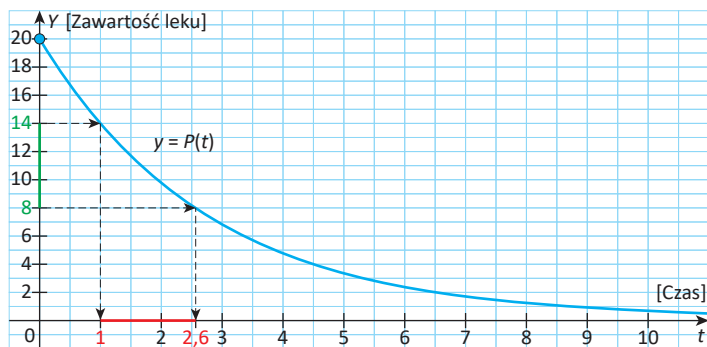
Ad b) Obliczamy:

$$\frac{P(t) - P(t+1)}{P(t)} \cdot 100\% = \frac{20 \cdot (0,7)^t - 20 \cdot (0,7)^{t+1}}{20 \cdot (0,7)^t} \cdot 100\% = \frac{20 \cdot (0,7)^t \cdot [1 - 0,7]}{20 \cdot (0,7)^t} \cdot 100\% =$$

$$= 0,3 \cdot 100\% = 30\%$$

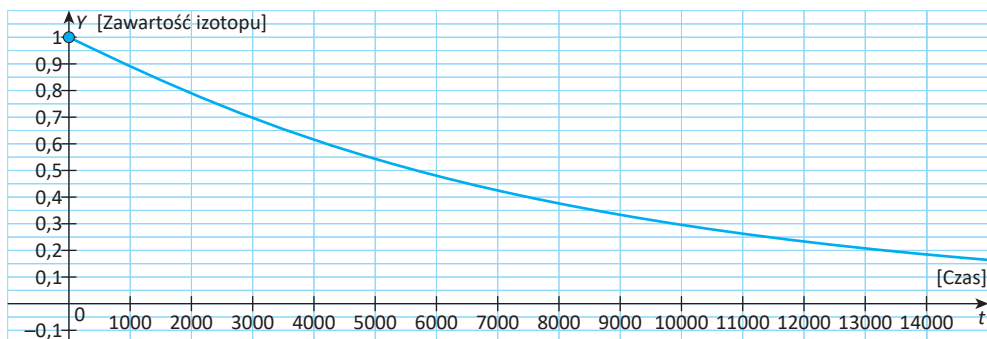
W ciągu każdej godziny 30% leku pozostającego w organizmie jest neutralizowane.

Ad c) Szkicujemy wykres funkcji, korzystając z komputera.



Zawartość leku w organizmie była mniejsza od 14 mg i większa od 8 mg po pierwszej godzinie od podania leku do upłynięcia 2 godzin i 36 minut od podania leku.

W połowie XX wieku opracowany został sposób określania wieku skamieliny lub innego antycznego przedmiotu. Metoda ta polega na zbadaniu proporcji między izotopem promieniotwórczym węgla ^{14}C , a trwałymi izotopami ^{12}C i ^{13}C . Zakłada się, że ^{14}C jest izotopem, którego zawartość w atmosferze ziemskiej jest stała. Żyjące organizmy pochłaniają izotop ^{14}C wraz z pożywieniem lub przez oddychanie. Niezależnie od sposobów absorbowania izotopu ^{14}C , jego zawartość w organizmach żywych jest stała. Wraz ze śmiercią osobnika absorpcja izotopu ^{14}C ustaje i ilość nagromadzonego ^{14}C w organizmie z upływem lat maleje. Szybkość rozpadu izotopu ^{14}C ilustruje wykres poniżej.



Na osi poziomej zaznaczone są lata, na osi pionowej zaznaczony jest ułamek wskazujący, ile izotopu ^{14}C pozostanie w badanej skamielinie (lub innym antycznym przedmiocie) po upływie danej liczby lat.

Okres połowicznego rozpadu izotopu ^{14}C , tzn. liczba lat, po których ilość izotopu ^{14}C zmniejszy się o połowę, jest równy ok. 5730 lat. Określanie wieku za pomocą ilości izotopu ^{14}C można stosować tylko do przedmiotów, których wiek nie przekracza 50 000 lat. (Dla przedmiotów starszych błąd pomiaru staje się zbyt duży.)

Funkcję, której wykres przedstawiliśmy wyżej, można opisać wzorem

$$C(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}, \quad t \in \langle 0, 50\,000 \rangle.$$

Przykład 4.

Pewien paleontolog znalazł czaszkę prehistorycznego zwierzęcia i wstępnie ocenił, że zwierzę to żyło ok. 10 000 lat temu. Badanie zawartości izotopu ^{14}C wykazało, że obecnie ilość tego izotopu w czaszce jest równa 0,4 zawartości początkowej.

- Czy paleontolog dobrze ocenił czas, w którym żyło prehistoryczne zwierzę?
- Jaki jest prawdopodobny wiek znalezionej czaszki?

Ad a) Korzystając z przedstawionego wyżej wykresu, możemy odczytać, że dla 10 000 lat zawartość izotopu ^{14}C jest równa ok. 0,3 wartości początkowej – co wskazuje, że czaszka ma mniej lat niż przypuszczał paleontolog.

Do weryfikacji hipotezy paleontologa możemy też wykorzystać wzór funkcji. Mamy

$$C(10\,000) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10\,000}{5730}} \approx 0,298$$

Ad b) Korzystając z wykresu funkcji, stwierdzamy, że wartości 0,4 odpowiada argument równy w przybliżeniu 7600. Możemy zatem stwierdzić, że znaleziona czaszka ma prawdopodobnie ok. 7600 lat, czyli 2400 lat mniej niż przypuszczał paleontolog.

Sprawdź, czy rozumiesz

- Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = 3^x$, gdzie $x \in \mathbf{R}$. Odczytaj z wykresu:
 - wartości funkcji przyjmowane dla argumentów mniejszych od 0;
 - dla jakich argumentów wartości funkcji należą do przedziału $\left(\frac{1}{3}, 9\right)$.
- Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = 3^{-x}$, gdzie $x \in \mathbf{R}$. Odczytaj z wykresu:
 - jake wartości funkcja f przyjmuje dla argumentów nie większych niż 1;
 - dla jakich argumentów wartości funkcji f są mniejsze od 3.
- Porównaj liczby a, b, c bez użycia kalkulatora, jeśli:

- $a = 4^\pi, \quad b = 16^{1,5}, \quad c = 2^7$

- $a = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^\pi, \quad b = (0,5)^{1,5}, \quad c = 0,25$
- Paleontolog znalazł kość prehistorycznego zwierzęcia. Badanie kości wykazało, że zawarty w niej obecnie izotop ^{14}C stanowi 65% ilości początkowej. Ile lat temu żyło zwierzę, którego kość odnalazł paleontolog?

Funkcja logarytmiczna

W rozdziale drugim omówiliśmy pojęcie logarytmu i przykładowe zastosowania logarytmów. Teraz przedstawimy podstawowe własności funkcji logarytmicznej.

Definicja 1.

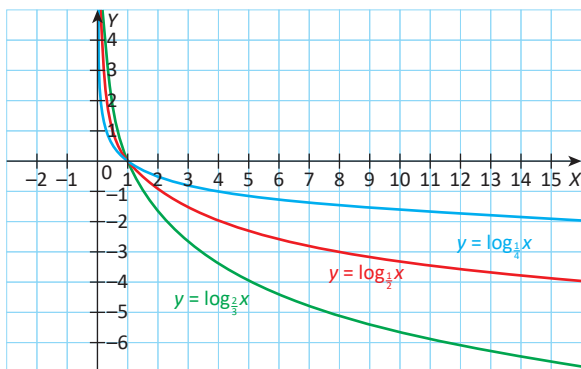
Funkcją logarytmiczną o podstawie a , dodatniej i różnej od 1 ($a \in \mathbb{R}_+ - \{1\}$), nazywamy funkcję, którą można opisać wzorem $y = \log_a x$. Dziedziną funkcji logarytmicznej jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich.

Omówimy własności funkcji logarytmicznej. W tym celu rozpatrzmy dwa przypadki w zależności od podstawy logarytmu.

I przypadek: $a \in (0, 1)$

Wykresy przykładowych funkcji logarytmicznych:

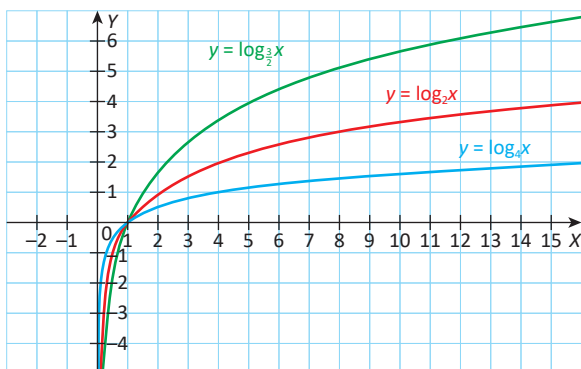
$$y = \log_{\frac{1}{4}} x, \quad y = \log_{\frac{1}{2}} x, \quad y = \log_{\frac{2}{3}} x$$



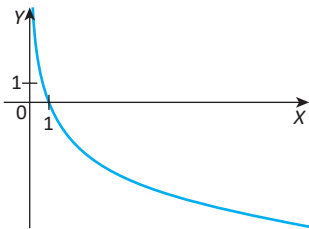
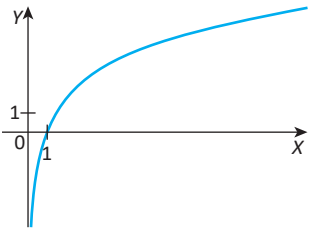
II przypadek: $a \in (1, +\infty)$

Wykresy przykładowych funkcji logarytmicznych:

$$y = \log_{\frac{3}{2}} x, \quad y = \log_2 x, \quad y = \log_4 x$$



Własności funkcji logarytmicznej.

$y = \log_a x, \quad 0 < a < 1$	$y = \log_a x, \quad a > 1$
	
Wykresem funkcji logarytmicznej jest krzywa logarytmiczna, położona w I i IV ćwiartce układu współrzędnych.	
Funkcja przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste, $ZW = \mathbb{R}$	
Funkcja ma jedno miejsce zerowe. Jest to liczba 1.	
Funkcja przyjmuje wartości dodatnie w przedziale $(0, 1)$, a ujemne w przedziale $(1, +\infty)$.	Funkcja przyjmuje wartości dodatnie w przedziale $(1, +\infty)$, a ujemne w przedziale $(0, 1)$.
Funkcja jest różnowartościowa.	
Funkcja logarytmiczna jest malejąca.	Funkcja logarytmiczna jest rosnąca.

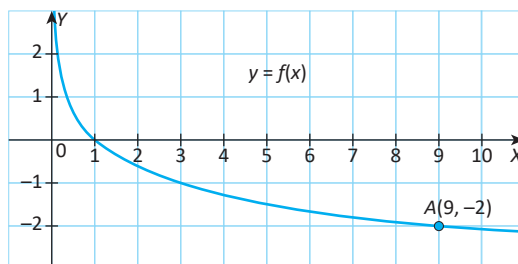
Zwróć uwagę, że:

- 1) jeśli $a \in (0, 1)$ oraz $0 < x_1 < x_2$, to $\log_a x_1 > \log_a x_2$,
- 2) jeśli $a \in (1, +\infty)$ oraz $0 < x_1 < x_2$, to $\log_a x_1 < \log_a x_2$.

Przykład 1.

Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a x$, gdzie $a \in \mathbb{R}_+ - \{1\}$ i $x \in \mathbb{R}_+$. Do tego wykresu należy punkt $A(9, -2)$.

- a) Wyznamy liczbę a .
- b) Odczytamy, jakie wartości funkcja f przyjmuje dla argumentów należących do przedziału $(0, 3)$.



Ad a) Wzór funkcji f ma postać

$$f(x) = \log_a x, \text{ gdzie } a \in \mathbb{R}_+ - \{1\} \text{ i } x \in \mathbb{R}_+$$

Wiemy, że dla argumentu 9 wartość funkcji wynosi -2 , czyli $-2 = \log_a 9$

Korzystając z definicji logarytmu, otrzymujemy równanie:

$$a^{-2} = 9, \text{ skąd } a^2 = \frac{1}{9}, \text{ czyli}$$

$$a = \frac{1}{3} \text{ lub } a = -\frac{1}{3}$$

Tylko liczba $\frac{1}{3}$ spełnia warunki zadania, ponieważ podstawa logarytmu jest dodatnia i różna od 1.

Funkcja f opisana jest wzorem $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$.

Ad b) Wiemy, że $\log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$. Z wykresu funkcji f odczytujemy, że dla argumentów należących do przedziału $(0, 3)$ funkcja przyjmuje wartości należące do przedziału $(-1, +\infty)$.

Przykład 2.

W odległości 10 m od punkowego źródła dźwięku poziom jego natężenia jest równy 110 dB. Załóżmy, że tym źródłem dźwięku jest głośnik, z którego emitowana jest muzyka rockowa.

- a) W jakiej minimalnej odległości od głośnika powinien stanąć słuchacz – tak aby nie uszkodzić sobie słuchu – jeśli chciałby słuchać muzyki:
- 1) nie dłużej niż 45 minut;
 - 2) ponad 3,5 godziny?
- b) Czy w odległości 1000 m od głośnika można prowadzić spokojną rozmowę, czy też będzie ona zagłuszana przez muzykę? Zakładamy, że jest to przestrzeń otwarta.

Ad a) Słuchanie zbyt długo zbyt głośnej muzyki może doprowadzić do nieodwracalnego uszkodzenia słuchu. Okazuje się, że aby takie uszkodzenie nie nastąpiło, można słuchać dźwięku o poziomie natężenia:

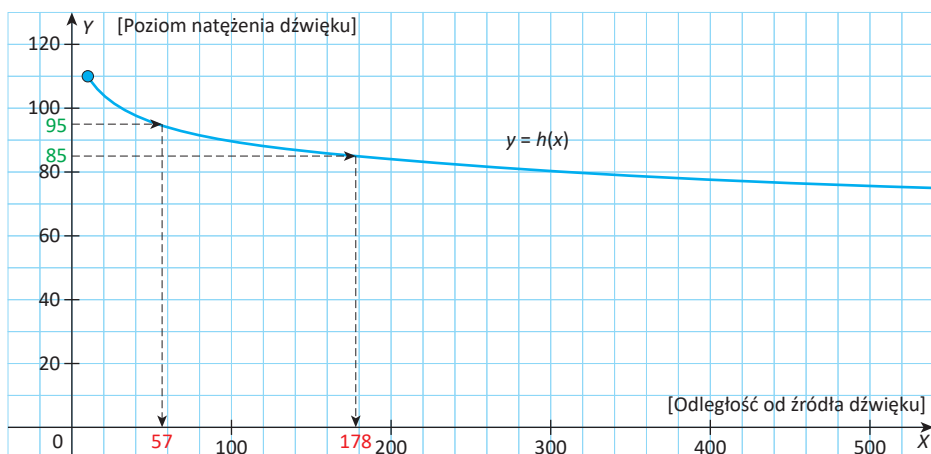
95 dB – nie dłużej niż 47 minut

90 dB – nie dłużej niż 2,5 godziny

85 dB – nie dłużej niż 8 godzin.

Możemy zatem przyjąć, że w pierwszym przypadku słuchacz powinien stanąć w takiej odległości od głośnika, aby poziom natężenia dźwięku był nie większy niż 95 dB, a w drugim przypadku był równy ok. 85 dB.

Jak już wiesz, poziom natężenia dźwięku maleje wraz ze wzrostem odległości słuchacza od źródła dźwięku (zobacz zadanie 7., str.108). W przypadku naszego zadania zależność tę opisuje funkcja $h(x) = 130 - 20 \cdot \log x$, gdzie $x \in \langle 10, +\infty \rangle$, której fragment wykresu przedstawia rysunek poniżej.



Z wykresu odczytujemy, że poziom natężenia dźwięku równy 95 dB odpowiada odległości ok. 57 m od źródła dźwięku, a poziom natężenia dźwięku równy 85 dB odpowiada odległości ok. 178 m.

Tak więc w pierwszym przypadku słuchacz powinien stanąć w odległości ok. 60 m, w drugim przypadku – w odległości ok. 180 m.

Ad b) Spokojna rozmowa to ok. 60 dB. Poziom natężenia muzyki o odległości 1000 m od głośnika wyznaczmy, korzystając ze wzoru funkcji h .

$$h(1000) = 130 - 20 \cdot \log 1000 = 130 - 20 \cdot 3 = 70 \text{ (dB)}$$

Poziom natężenia muzyki będzie równy 70 dB, czyli będzie utrudniał prowadzenie spokojnej rozmowy.

Sprawdź, czy rozumiesz

- Do wykresu funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a x$ należy punkt $P(36, 2)$. Oblicz a . Następnie:
 - wyznacz wartość wyrażenia $f(2) + f(3)$;
 - wykaż, że $f(\sqrt{2} - 1) = -1 \cdot f(\sqrt{2} + 1)$;
 - ocen, która z liczb jest większa: $f(2^{-1})$ czy $f(3^{-1})$.
- Na podstawie wykresu funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_{0,5} x$:
 - porównaj liczby: $a = \log_{0,5} \sqrt{2}$, $b = \log_{0,5} \sqrt{3}$, $c = 0,5 \log_{0,5} 5$
 - wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą k , dla której spełniony jest warunek $\log_{0,5} k < \log_{0,5} 6$
- Odczytaj z wykresu funkcji h z przykładu 2. poziom natężenia dźwięku w odległości 300 metrów od głośnika. Następnie, korzystając ze wzoru funkcji h , oblicz przybliżoną wartość liczby $\log 3$.

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 6.

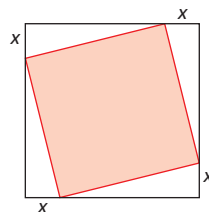
Test

1. Współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = 3(x - 1)^2 + 2$ są równe:
A. (3, 1) B. (1, 2) C. (2, 1) D. (-1, 2)
2. Funkcja kwadratowa $f(x) = -2(x - 1)^2 + 4$ jest rosnąca w przedziale:
A. $(-\infty, 1)$ B. $(-2, +\infty)$ C. $(4, +\infty)$ D. $(1, +\infty)$
3. Funkcja $f(x) = -(x + 5)^2 + 1$ przyjmuje:
A. najmniejszą wartość dla argumentu 5;
B. największą wartość dla argumentu 5;
C. najmniejszą wartość dla argumentu -5;
D. największą wartość dla argumentu -5.
4. Samochód drogę s przejechał w czasie 3 godzin i 45 minut z prędkością 68 km/h. Jaka byłaby średnia prędkość samochodu, gdyby drogę s przejechał w czasie o pół godziny dłuższym?
A. 56 km/h B. 58 km/h C. 60 km/h D. 64 km/h
5. Nieprawdą jest, że funkcja wykładnicza $f(x) = 4^{-x}$ jest:
A. monotoniczna B. różnowartościowa C. malejąca D. rosnąca
6. O liczbach dodatnich a, b, c wiadomo, że $a + b = c$ oraz $b - a < 0$. Zatem:
A. $\log a < \log b < \log c$ B. $\log b < \log a < \log c$
C. $\log c < \log b < \log a$ D. $\log c < \log a < \log b$

Zadania otwarte

7. Funkcja kwadratowa jest określona wzorem $f(x) = 2(x - 1)(x + 3)$.
 - a) Podaj miejsca zerowe funkcji f oraz wartość funkcji f dla argumentu 0.
 - b) Wyznacz równanie osi symetrii paraboli będącej wykresem funkcji f .
 - c) Zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej.
 - d) Naskicuj wykres funkcji f w prostokątnym układzie współrzędnych.
8. Doprowadź wzór funkcji kwadratowej f do postaci kanonicznej. Następnie podaj przedziały monotoniczności funkcji f oraz wyznacz miejsca zerowe tej funkcji (o ile istnieją).
a) $f(x) = 0,5x^2 - 5x + 8$ b) $f(x) = 3x^2 - 0,6x$ c) $f(x) = -x^2 + x + 6$
9. Do wykresu funkcji kwadratowej należy punkt $A(-1, -4)$. Wiedząc, że największą wartość, równą 5, funkcja przyjmuje dla argumentu 2, wyznacz wzór tej funkcji:
a) w postaci kanonicznej b) w postaci ogólnej.

10. W dany kwadrat, którego bok ma długość 4 wpisujemy nowe kwadraty w taki sposób, jak na rysunku obok.



- Wyznacz wzór funkcji P opisującej pole wpisanego kwadratu w zależności od x . Podaj dziedzinę tej funkcji.
- Naszkicuj wykres funkcji P .
- Podaj najmniejsze możliwe pole wpisanego kwadratu i dla jakiego argumentu x jest ono przyjmowane.

11. Wyznacz wszystkie punkty o obu współrzędnych całkowitych, należące do wykresu funkcji $f(x) = \frac{4}{x}$, gdzie $x \neq 0$.

12. Ekipa robotników może wykonać pewną pracę w ciągu pewnej liczby dni. Gdyby robotników było o 4 więcej, to wykonaliby tę pracę o 2 dni wcześniej. Gdyby natomiast ekipa liczyła o 3 robotników mniej, to czas wykonania pracy byłby o 3 dni dłuższy. Ile robotników jest w tej ekipie? Ile dni potrzebuje ta ekipa na wykonanie pracy?

13. Dane są dwie funkcje $f(x) = \frac{-2}{x}$ oraz $g(x) = -x + 1$.

- Naszkicuj wykresy obydwu funkcji w jednym układzie współrzędnych.
- Odczytaj argumenty, dla których $f(x) = g(x)$. Następnie sprawdź rachunkowo poprawność odczytu.

14. Funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ oraz logarytmiczna $g(x) = \log_{0,5} x$ dla argumentu $\frac{1}{4}$ przyjmują tę samą wartość.

- Oblicz a .
- Naszkicuj wykresy obydwu funkcji w jednym układzie współrzędnych. Przyjmij za jednostkę cztery kratki w zeszytcie.
- Dla jakich argumentów prawdziwa jest nierówność $f(x) > g(x)$?

15. Liczbę bakterii w kolonii po upływie t minut od chwili rozpoczęcia pomiarów można obliczyć (w przybliżeniu) ze wzoru: $f(t) = 10^4 \cdot 1,2^t$, gdzie $t \geq 0$.

- Ile bakterii było na początku eksperymentu?
- Ile bakterii (z dokładnością do 100) było w tej kolonii po 10 minutach obserwacji?
- O ile procent zwiększa się liczebność kolonii w ciągu każdej minuty?

16. Ilość leku (w mg) pozostałego w organizmie pacjenta po czasie t (w godzinach) od chwili zażycia pewnej dawki opisuje wzór $d(t) = 10 \cdot 0,8^t$, gdzie $t \geq 0$.

- Jaką dawkę leku zażył pacjent?
- Po ilu godzinach od chwili zażycia leku w organizmie pacjenta pozostało 6,4 mg leku?
- Ile mg leku pozostało w organizmie po pięciu godzinach?
- Jaki procent dawki leku pozostałego w organizmie pacjenta jest eliminowana w ciągu jednej godziny?

7 Geometria płaska – pojęcia wstępne. Trójkąty

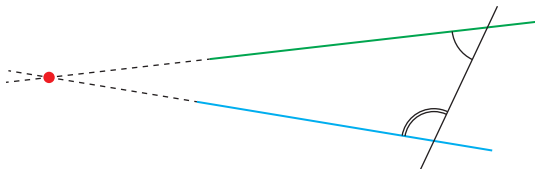
Punkt, prosta, odcinek, półprosta, kąt, figura wypukła, figura ograniczona

W geometrii – podobnie jak w innych dziedzinach nauki – wyróżniamy pojęcia pierwotne, czyli takie, których się nie definiuje. Należą do nich: punkt, prosta, płaszczyzna. Własności pojęć pierwotnych określają aksjomaty, czyli zdania logiczne uznane za prawdziwe bez dowodu. Z aksjomatów oraz z przyjętych definicji, po zastosowaniu określonych reguł logicznych, wyprowadzane są kolejne twierdzenia.

Bardzo ważnym wydarzeniem w rozwoju geometrii, jak i całej matematyki było powstanie dzieła „**Elementy**” (ok. 300 r. przed Chrystusem). Jego autorem jest grecki matematyk Euklides. „Elementy” składają się z 13 ksiąg, w których zawarto całą ówczesną wiedzę matematyczną. Są tam podane m. in.: własności figur płaskich, twierdzenie Pitagorasa, twierdzenie Talesa, twierdzenie mówiące, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele. Ostatnie trzy księgi dotyczą geometrii przestrzennej. „Elementy” są pierwszym aksjomatycznym wykładem matematyki.

Euklides podał pięć aksjomatów dotyczących geometrii płaskiej:

- I. Z dowolnego punktu można poprowadzić prostą do dowolnego innego punktu.
- II. Ograniczoną prostą można dowolnie przedłużyć.
- III. Z każdego punktu można zakreślić okrąg o dowolnym promieniu.
- IV. Wszystkie kąty proste są równe.
- V. Jeżeli dwie proste na płaszczyźnie tworzą z przecinającą je prostą kąty jednostronne wewnętrzne o sumie mniejszej od dwóch kątów prostych, to te proste, po dostatecznym przedłużeniu, przetną się i to z tej właśnie strony, z której tworzą te kąty.



Pierwsze cztery aksjomaty są krótkie i intuicyjnie oczywiste. Natomiast V aksjomat jest dłuższy i bardziej skomplikowany. Euklides powołał się na ten aksjomat dopiero w dowodzie 29. twierdzenia. To nasunęło pomysł komentatorom „Elementów”, że jest on twierdzeniem wynikającym z czterech pierwszych aksjomatów. Ale liczne próby udowodnienia V aksjomatu zawsze kończyły się niepowodzeniem. Dopiero

w XIX w. udowodniono, że V aksjomatu nie można wyprowadzić z pozostałych czterech. Współczesne sformułowanie V aksjomatu Euklidesa podajemy na str. 273.

W tym rozdziale powtórzymy i usystematyzujemy Twoje wiadomości dotyczące podstaw geometrii płaskiej i trójkątów.

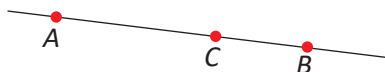
Dowolny zbiór punktów płaszczyzny jest **figurą geometryczną** płaską. Najprostszą figurą jest punkt. Punkty oznaczamy dużymi literami: A, B, C itd. Przez dwa dowolne różne punkty możemy poprowadzić tylko jedną prostą. Do prostej należy nieskończenie wiele punktów. Proste oznaczamy małymi literami: k, l, m itd. Prostą przechodzącą przez dwa punkty A i B będziemy nazywać prostą AB i oznaczać pr. AB .



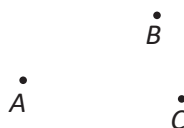
Jeśli trzy punkty należą do jednej prostej, to zawsze jeden z nich leży na prostej pomiędzy dwoma pozostałymi.

O trzech (lub więcej) punktach leżących na jednej prostej powiemy, że są współliniowe (rys. a). Jeśli przez trzy punkty nie można poprowadzić jednej prostej, to powiemy, że te punkty nie są współliniowe (rys. b).

a)



b)



Definicja 1.

Odcinkiem o końcach A, B nazywamy figurę utworzoną z punktów A i B oraz ze wszystkich punktów prostej AB , leżących między A i B .



Długość odcinka AB oznaczamy $|AB|$.

Przykład 1.

Punkt C należy do odcinka DE . Środkiem odcinka DC jest punkt A , natomiast środkiem odcinka CE jest punkt B . Obliczymy długość odcinka DE , wiedząc, że $|AB| = 17$ cm.



Z warunków zadania wynika, że

$$|DC| = 2|AC| \text{ oraz } |CE| = 2|CB| \text{ i } |AB| = 17 \text{ (cm)}$$

Ponieważ $|DE| = |DC| + |CE|$, więc
 $|DE| = 2|AC| + 2|CB| = 2(\underbrace{|AC| + |CB|}_{|AB|}) = 2|AB| = 34 \text{ (cm)}$

Odcinek DE ma długość 34 cm.

Figurę nazywamy **figurą wypukłą** wtedy, gdy dla dowolnych punktów A, B , należących do tej figury, odcinek AB zawiera się w tej figurze. Figurę, która nie jest wypukłą, nazywamy **figurą wklęsłą** albo niewypukłą.

Przykład 2.

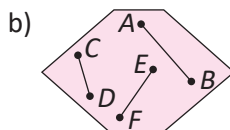
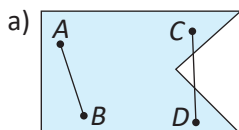
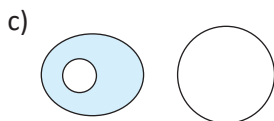


Figura na rysunku a) jest wklęsła, ponieważ istnieją takie dwa punkty (np. C i D), należące do tej figury, dla których odcinek o końcach w tych punktach nie zawiera się w tej figurze.

Figura na rysunku b) jest wypukła. Każdy odcinek wyznaczony przez dwa dowolne punkty należące do tej figury zawiera się w tej figurze.

Inne przykłady figur wklęsłych przedstawia rys. c), a figur wypukłych – rys. d).



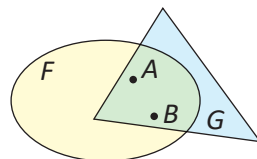
Twierdzenie 1.

Część wspólna dwóch figur wypukłych jest figurą wypukłą.

Założenie: F, G – figury wypukłe

A, B – dowolne punkty należące do $F \cap G$

Teza: $F \cap G$ – figura wypukła



Dowód: Z definicji iloczynu zbiorów wynika, że jeśli punkty A, B należą do $F \cap G$, to punkty A, B należą do figury F i punkty A, B należą do figury G . Z założenia, że figura F jest wypukła, wynika, że odcinek AB zawiera się w F . Stwierdzamy, że odcinek AB zawiera się w G . Zatem odcinek AB zawiera się w $F \cap G$, co – wobec tego, że A, B były dowolnymi punktami – dowodzi, że $F \cap G$ jest figurą wypukłą.

Można też udowodnić twierdzenie ogólniejsze.

Twierdzenie 2.

Część wspólna skończonej liczby figur wypukłych jest figurą wypukłą.

Kolejną figurą, którą przypomnimy, jest półprosta.

Rozważmy prostą k , do której należy punkt A . **Półprostą** nazywamy figurę geometryczną składającą się z punktów prostej k leżących po jednej stronie punktu A , wraz z tym punktem. Punkt A jest nazywany początkiem półprostej.

Półprostą o początku w punkcie A przechodzącą przez punkt B oznaczamy symbolem $AB^{\rightarrow}$.

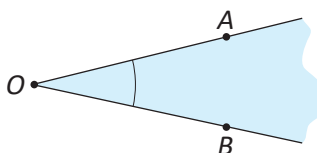


O dwóch półprostych o wspólnym początku, dających w sumie prostą, mówimy, że się dopełniają.

Wiedząc, czym jest półprosta, możemy zdefiniować kąt.

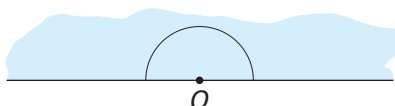
Definicja 2.

Kąt jest to suma dwóch półprostych o wspólnym początku i jednej z dwóch figur (zwanej wnętrzem kąta), wyciętych z płaszczyzny przez sumę tych półprostych. Półproste $OA^{\rightarrow}$ i $OB^{\rightarrow}$ to **ramiona kąta**, punkt O to **wierzchołek kąta** (zobacz rysunek poniżej).



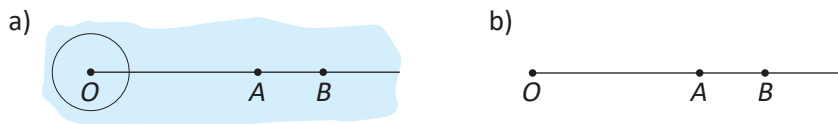
Kąt oznaczamy w ten sposób: $\sphericalangle AOB$. Pierwsza litera oznacza punkt na jednym ramieniu kąta, środkowa litera – wierzchołek kąta, a trzecia litera – punkt na drugim ramieniu kąta. Kąty oznaczać też będziemy za pomocą liter greckich: $\sphericalangle \alpha$, $\sphericalangle \beta$, $\sphericalangle \gamma$, ...

Kąt, którego ramiona tworzą prostą, nazywamy **kątem półpełnym**.



Jeśli ramiona kąta się pokrywają, to otrzymujemy kąt pełny lub kąt zerowy.

Kąt pełny to płaszczyzna z wyróżnioną półprostą (rys. a), a **kąt zerowy** to wyróżniona półprosta na płaszczyźnie (rys. b).



Aby łatwo porównywać kąty, wprowadza się ich miarę nazywaną też rozwartością.

Powszechnie używa się miary stopniowej. Kąt o mierze 1° stanowi $\frac{1}{360}$ kąta pełnego.



Jeden stopień dzieli się na 60 minut ($1^\circ = 60'$), a jedna minuta – na 60 sekund ($1' = 60''$).

Kąt pełny ma miarę 360° , a miara kąta półpełnego jest równa 180° . Kąt, którego miara jest równa 90° , nazywamy kątem prostym. Na rysunku kąt prosty oznaczamy symbolem $\perp$.

Przykład 3.

Miarę $0,73^\circ$ zapiszemy za pomocą minut i sekund. Aby to zrobić, przedstawimy ułamek $0,73$ jako sumę dwóch ułamków zwykłych, których mianowniki są odpowiednio równe 60 i 3600 ($= 60^2$). Wynika to stąd, że minuta to $\frac{1}{60}$ stopnia, a sekunda to $\frac{1}{3600}$ stopnia.

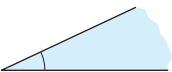
$$\begin{aligned} 0,73 &= \frac{73}{100} = \frac{(70+3) \cdot 6}{100 \cdot 6} = \frac{42}{60} + \frac{18}{600} = \frac{42}{60} + \frac{18 \cdot 6}{600 \cdot 6} = \frac{42}{60} + \frac{108}{60^2} = \\ &= \frac{42}{60} + \frac{60+48}{60^2} = \frac{43}{60} + \frac{48}{60^2} \end{aligned}$$

Zatem $0,73^\circ = 43'48''$.

Oprócz miary stopniowej są używane również inne miary kątów, na przykład miara, w której jednostką jest 1 gradus (1^g) równy $\frac{1}{400}$ kąta pełnego. Tej miary używa się głównie we Francji. Natomiast w nawigacji morskiej kątem jednostkowym jest 1 rumb, równy $\frac{1}{32}$ kąta pełnego.

Miarę kąta AOB będziemy oznaczać $|\sphericalangle AOB|$ lub pojedynczą literą grecką: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

O kątach, które mają te same miary, będziemy mówić krócej: „są to kąty równe”. Jeśli kąt α ma miarę większą niż kąt β , to powiemy krócej: „kąt α jest większy od kąta β ”. Zamiast mówić: „suma miar kątów jest równa”, będziemy mówić krócej: „suma kątów jest równa”.

podział kątów		przykład
Kąt wypukły – ich miary są nie większe od 180° .	kąty ostre (mają mniej niż 90°)	
	kąty proste (mają 90°)	
	kąty rozwarte (mają więcej niż 90° i nie więcej niż 180°)	
Kąty wklęsłe – miary ich są większe od 180° i mniejsze od 360° .		

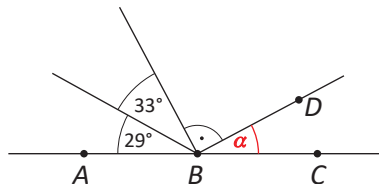
Dwa kąty są **przyległe**, jeśli mają jedno ramię wspólne, a dwa pozostałe ramiona tworzą prostą.



Suma kątów przyległych tworzy kąt półpełny, zatem suma ich miar jest równa 180° .

Przykład 4.

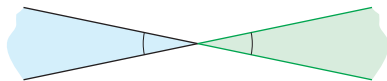
Punkty A, B, C są współliniowe. Korzystając dodatkowo z informacji na rysunku obok, obliczmy α .



Zauważmy, że kąty ABD i DBC są kątami przyległymi i $|\sphericalangle DBC| = \alpha$, więc $|\sphericalangle ABD| + \alpha = 180^\circ$ oraz $|\sphericalangle ABD| = 29^\circ + 33^\circ + 90^\circ$, czyli $|\sphericalangle ABD| = 152^\circ$. Zatem $\alpha + 152^\circ = 180^\circ$

Stąd już łatwo obliczyć, że $\alpha = 28^\circ$.

Dwa kąty mniejsze od kąta półpełnego nazywamy **kątami wierzchołkowymi** wtedy, gdy ramiona jednego kąta są przedłużeniem ramion drugiego kąta.



Kąty wierzchołkowe są równe.

Na koniec tego tematu powiemy, jakie figury nazwiemy ograniczonymi.

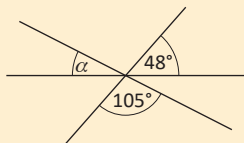
Figura płaska F jest **ograniczona** wtedy, gdy istnieje takie koło, które zawiera figurę F . Figurami ograniczonymi są np.: punkt, odcinek, koło, trójkąt, siedmiokąt.

Figurę, która nie jest ograniczona, nazwiemy **figurą nieograniczoną**. Takimi figurami są np.: prosta, półprosta, płaszczyzna, kąt, parabola.

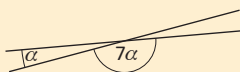
Sprawdź, czy rozumiesz

- Na płaszczyźnie danych jest: a) 3, b) 4, c) 7, d) n punktów, z których dowolne trzy nie są współliniowe. Ile półprostych wyznaczają te punkty?
- Punkty C, D dzielą kolejno odcinek AB o długości 27 cm na trzy odcinki, których stosunek długości jest równy $5 : 3 : 1$. Jaka jest długość każdego z tych odcinków?
- Punkty A, B, C są współliniowe oraz $|AB| = 6$ cm i $|AC| = 8$ cm. Narysuj, jak są położone względem siebie punkty A, B, C , i oblicz $|BC|$. Rozważ różne przypadki.
- Czy suma albo różnica dwóch figur wypukłych jest zawsze figurą wypukłą? Jeśli nie, narysuj odpowiednie przykłady.
- Zapisz miarę α za pomocą minut i sekund, jeśli: a) $\alpha = 0,52^\circ$ b) $\alpha = 0,84^\circ$
- Wyznacz miary kątów przyległych, jeśli:
 - jeden z kątów ma miarę o 42° większą od drugiego;
 - stosunek ich miar jest równy $3 : 2$.
- Oblicz miarę kąta α na rysunku poniżej:

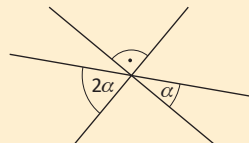
a)



b)



c)



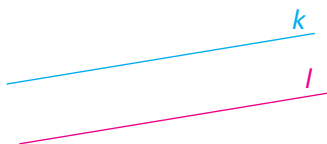
- Podaj przykład dwóch figur nieograniczonych F i G , których część wspólna jest:
 - figurą ograniczoną;
 - figurą nieograniczoną.

Wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie, odległość punktu od prostej, odległość między prostymi równoległymi, symetralna odcinka, dwusieczna kąta

Na płaszczyźnie dwie proste mogą być albo równoległe albo nierównoległe (przecinające się).

Proste k i l nazywamy **prostymi równoległymi**, jeśli nie mają punktów wspólnych lub się pokrywają.

a)



b)



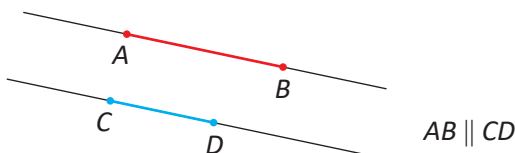
Równoległość prostych k oraz l zapisujemy tak: $k \parallel l$ (i czytamy: prosta k jest równoległa do prostej l).

V Aksjomat Euklidesa

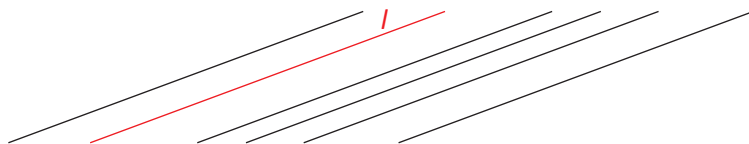
Przez punkt nieleżący na prostej można poprowadzić tylko jedną prostą równoległą do danej prostej.



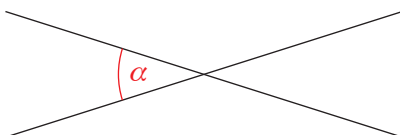
Dwa **odcinki** są **równoległe** wtedy, gdy proste zawierające te odcinki są równoległe.



Kierunkiem prostej l nazywamy zbiór wszystkich prostych leżących na płaszczyźnie, równoległych do prostej l .

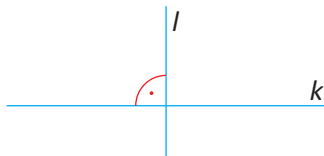


Dwie proste nazwiemy **prostymi przecinającymi się** wtedy, gdy mają tylko jeden punkt wspólny.



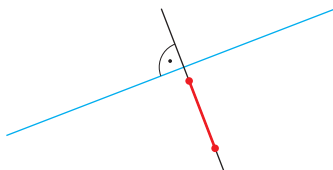
Kątem między przecinającymi się prostymi nazywamy kąt nie większy od kąta prostego, wyznaczony przez te proste. Na rysunku powyżej takim kątem jest kąt o mierze α .

Dwie proste przecinające się pod kątem prostym nazywamy **prostymi prostopadłymi**.

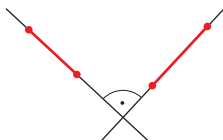


Zapis: $k \perp l$ czytamy: prosta k jest prostopadła do prostej l .

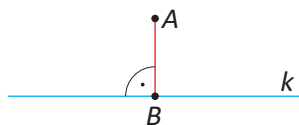
Odcinek jest prostopadły do prostej wtedy, gdy zawiera się w prostej prostopadłej do danej prostej



Dwa odcinki są prostopadłe wtedy, gdy proste wyznaczone tymi odcinkami są prostopadłe.

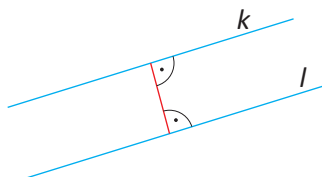


Odległością punktu A od prostej k ($A \notin k$) nazywamy długość odcinka prostopadłego do prostej k , którego jednym końcem jest punkt A , drugim punkt B należący do prostej k . Jeśli $A \in k$, to odległością punktu A od prostej k jest liczba zero.



Odległość punktu A od prostej k oznaczamy $d(A, k)$

Odległością różnych prostych równoległych nazywamy długość odcinka prostopadłego do tych prostych, o końcach należących do tych prostych. Odległość ta nie zależy od wyboru tego odcinka.



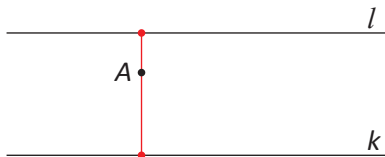
Odległość prostych równoległych k, l oznaczamy $d(k, l)$

Przykład 1.

Odległość punktu A od prostej k jest równa 6 cm, a od prostej l , równoległej do k , 4 cm. Jaka jest odległość między prostymi k i l ?

Zauważ, że istnieją dwa rozwiązania spełniające warunki zadania.

Przypadek I



Przypadek II

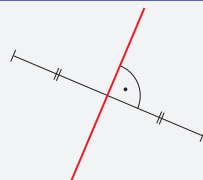


W pierwszym przypadku szukana odległość jest równa 10 cm ($6 \text{ cm} + 4 \text{ cm}$), a w drugim przypadku – 2 cm ($6 \text{ cm} - 4 \text{ cm}$).

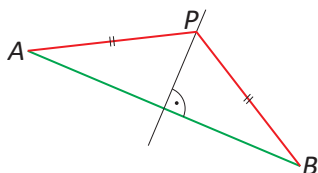
Podamy teraz określenie i własność symetralnej odcinka oraz dwusiecznej kąta.

Definicja 1.

Symetralną odcinka nazywamy prostą prostopadłą do odcinka, dzielącą go na dwie równe części.

**Twierdzenie 1.**

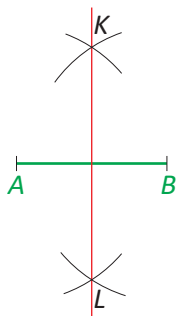
Symetralna odcinka jest zbiorem punktów płaszczyzny, równoodległych od końców tego odcinka.



Twierdzenie 1. informuje, że punkt P należy do symetralnej odcinka AB wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|PA| = |PB|$$

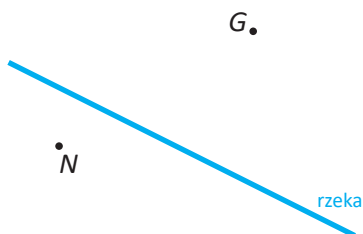
Opiszemy konstrukcję symetralnej odcinka. Załóżmy, że mamy dany odcinek AB o długości a .



1. Kreślimy dwa okręgi: jeden o środku w punkcie A i promieniu r , gdzie $r > \frac{1}{2}a$, drugi o środku w punkcie B i promieniu r , które przecinają się w punktach K i L .
2. Kreślimy prostą KL , która jest symetralną odcinka AB .

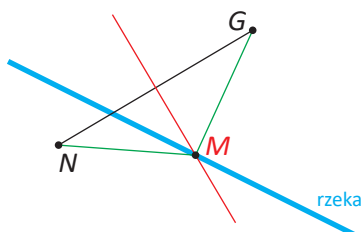
Przykład 2.

Dwie miejscowości Nowinki i Gacki leżą po różnych stronach rzeki. Rysunek schematyczny poniżej przedstawia tę sytuację; punkt N oznacza Nowinki, punkt G – Gacki.



W którym miejscu należy wybudować most na tej rzece, aby znajdował on się w takiej samej odległości od obu miejscowości?

Prowadzimy symetralną odcinka NG . Przecięcie symetralnej z linią symbolizującą rzekę wyznacza miejsce budowy mostu.



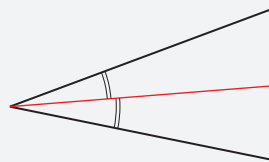
$$|MN| = |MG|$$

M – miejsce budowy mostu

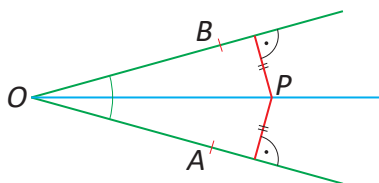
Otrzymaliśmy jedno rozwiązanie zadania. Przy jakim położeniu miejscowości otrzymalibyśmy nieskończenie wiele rozwiązań, a przy jakim położeniu nie otrzymalibyśmy żadnego rozwiązania?

Definicja 2.

Dwusieczną kąta nazywamy półprostą o początku w wierzchołku kąta, dzielącą kąt na dwa kąty równe.

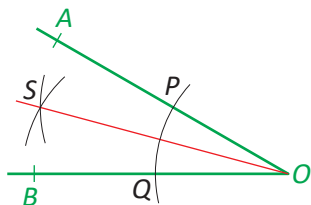
**Twierdzenie 2.**

Dwusieczna kąta wypukłego jest zbiorem punktów kąta równoodległych od ramion tego kąta.



Twierdzenie 2. informuje, że punkt P należący do kąta AOB , jest punktem dwusiecznej tego kąta, wtedy i tylko wtedy, gdy odległości punktu P od ramion kąta AOB są równe.

Opiszemy teraz, jak kreśli się dwusieczną kąta za pomocą cyrkla i linijki. Załóżmy, że mamy dany kąt AOB o mierze α , $\alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$.

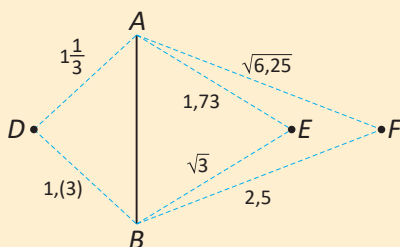


1. Kreślimy okrąg o środku w punkcie O i dowolnym promieniu r . Okrąg ten przecina ramiona kąta w punktach P i Q .
2. Kreślimy okręgi o promieniach r i środkach odpowiednio w punktach P i Q . Okręgi te przecinają się w punktach O i S .
3. Kreślimy półprostą OS , która jest dwusieczną kąta AOB .

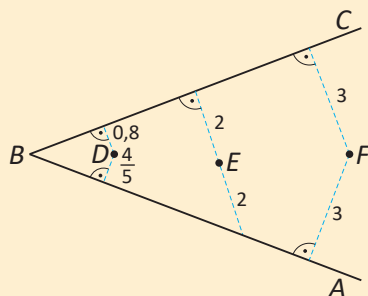
Sprawdź, czy rozumiesz

1. O trzech różnych prostych k, l, m leżących na płaszczyźnie wiadomo, że $k \perp l$ i $l \perp m$. Jak są położone względem siebie proste k i m ? Wykonaj odpowiedni rysunek.
2. Proste k, l, m są równoległe. Odległość między prostymi k i l jest równa 3 cm, a między prostymi l i m wynosi 1 cm. Jaka jest odległość między prostymi k i m ? Rozważ dwa przypadki. Wykonaj odpowiednie rysunki.
3. Czy punkty D, E, F należą do symetralnej odcinka AB ? Potrzebne informacje odczytaj z rysunku a).

a)



b)

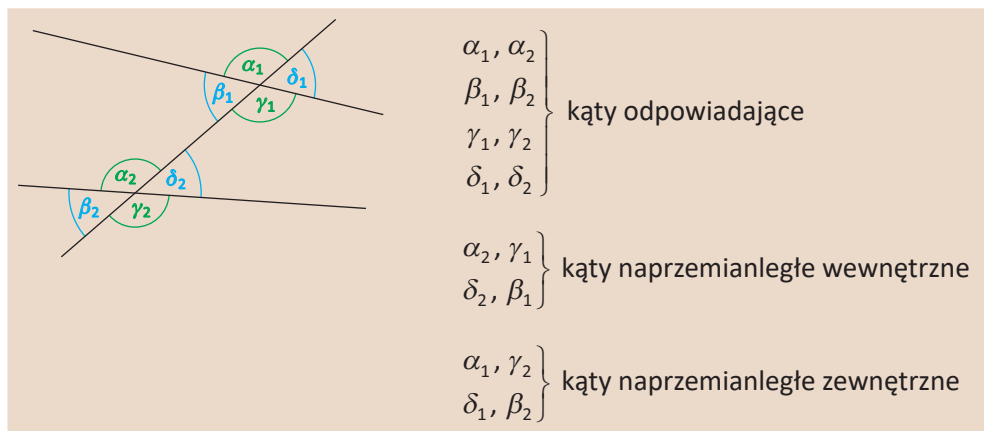


4. Czy punkty D, E, F należą do dwusiecznej kąta ABC ? Potrzebne informacje odczytaj z rysunku b).
5. Za pomocą cyrkla i linijki skonstruuj:
 - a) środek danego odcinka;
 - b) prostą prostopadłą do danej prostej k i przechodzącą przez dany punkt P .
6. Za pomocą cyrkla i linijki skonstruuj kąt, którego miara jest równa:

a) 45°	b) $22,5^\circ$	c) 30°	d) 15°
---------------	-----------------	---------------	---------------
7. Narysuj kąt ostry o wierzchołku O . Poprowadź prostą przecinającą ramiona kąta w punktach A i B tak, by kąty przecięcia tej prostej z ramionami kąta miały różne miary. Za pomocą cyrkla i linijki skonstruuj we wnętrzu kąta punkt, który jest równoodległy od ramion kąta AOB i jednocześnie równoodległy od punktów A i B . Ile jest takich punktów?
8. Wykaż, że dwusieczne kątów przyległych tworzą kąt prosty.

Dwie proste przecięte trzecią prostą. Suma kątów w trójkącie

Jeśli dwie proste przetniemy trzecią prostą (w taki sposób, że trzy proste nie przecinają się w jednym punkcie), to otrzymamy grupy kątów, które w odpowiednich parach mają nazwy: kąty odpowiadające, kąty naprzemianległe wewnętrzne, kąty naprzemianległe zewnętrzne.



W kolejnych twierdzeniach pokażemy zależności między wymienionymi kątami a równoległością prostych, jak również wnioski wynikające z tych zależności.

Twierdzenie 1.

Jeżeli dwie proste tworzą z trzecią prostą kąty naprzemianległe wewnętrzne równe, to są równoległe.

Przykład 1.

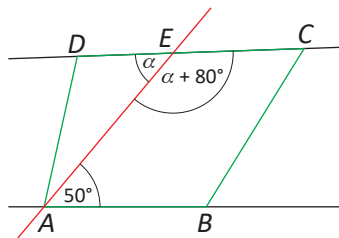
W czworokącie $ABCD$ punkt E należy do boku DC oraz $|\angle AEC| = |\angle AED| + 80^\circ$. Wykażemy, że jeśli $|\angle BAE| = 50^\circ$, to czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

Założenie: $ABCD$ – czworokąt

$$|\angle BAE| = 50^\circ$$

$$|\angle AED| = \alpha, |\angle AEC| = \alpha + 80^\circ$$

Teza: czworokąt $ABCD$ jest trapezem



Dowód:

Kąty AED i AEC są przyległe. Obliczamy miarę α :

$$\alpha + (\alpha + 80^\circ) = 180^\circ$$

$$2\alpha = 100^\circ$$

$$\alpha = 50^\circ$$

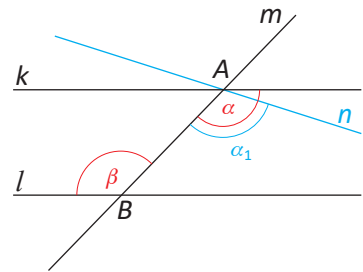
Z założenia $|\angle BAE| = 50^\circ$, więc $|\angle AED| = |\angle BAE|$. Kąty AED i BAE są naprzemianległe wewnętrzne i mają równe miary. Z twierdzenia 1. wynika, że proste AB i DC są równoległe. To znaczy, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

Twierdzenie 2.

Jeżeli dwie proste równoległe są przecięte trzecią prostą, to kąty naprzemianległe wewnętrzne są równe.

Założenie: proste k, l są położone jak na rysunku obok oraz
 $k \parallel l$
 $k \cap m = \{A\}$, $l \cap m = \{B\}$
 $\angle \alpha, \angle \beta$ – kąty naprzemianległe wewnętrzne

Teza: $\alpha = \beta$



Dowód (nie wprost): Załóżmy przeciwnie, że kąty α i β są różne. Odkładając od półprostej $AB \rightarrow$ kąt α_1 taki, że $\alpha_1 = \beta$, otrzymalibyśmy prostą n , która – na mocy twierdzenia 1. – jest równoległa do prostej l (zobacz rysunek powyżej). Zatem przez punkt A przechodziłyby dwie proste (k oraz n) równoległe do prostej l , co jest sprzeczne z V aksjomatem Euklidesa. Tak więc kąty naprzemianległe wewnętrzne są równe.

Przykład 2.

Proste k i l są równoległe. Prosta m przecina prostą k pod kątem α . Prosta l tworzy z prostą m kąty β i γ , jak na rysunku obok. Wyznamy kąt α , wiedząc, że $\gamma = 3\beta$.

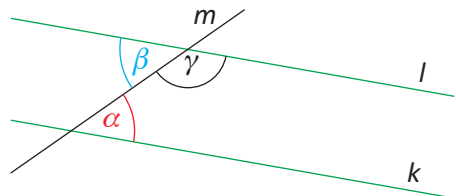
Z treści zadania wynika, że

$$\gamma = 3\beta \text{ oraz}$$

$$\gamma + \beta = 180^\circ \text{ bo kąty } \gamma \text{ i } \beta \text{ są kątami przyległymi}$$

Otrzymujemy $3\beta + \beta = 180^\circ$, skąd $\beta = 45^\circ$.

Ponieważ proste k i l są równoległe, to z twierdzenia o dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią prostą wynika, że kąty naprzemianległe α i β są równe. Zatem $\alpha = 45^\circ$.



Zauważ, że kąty naprzemianległe wewnętrzne są równe tylko wtedy, gdy:

- a) równe są kąty odpowiadające,
- b) równe są kąty naprzemianległe zewnętrzne.

Jeśli w twierdzeniu 1. i 2. zamiast zwrotu „kąty naprzemianległe wewnętrzne są równe” wstawimy zwrot a) lub b), to wówczas otrzymamy twierdzenia prawdziwe.

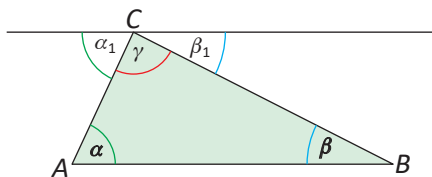
UWAGA: Twierdzenie 2. nazywamy „twierdzeniem o dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią prostą”, a twierdzenie 1. – „twierdzeniem odwrotnym do twierdzenia o dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią prostą”.

Twierdzenie 3.

Suma kątów wewnętrznych w dowolnym trójkącie jest równa 180° .

Założenie: ABC – dowolny trójkąt
 $|\sphericalangle A| = \alpha, |\sphericalangle B| = \beta, |\sphericalangle C| = \gamma$

Teza: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$



Dowód: Przez wierzchołek C trójkąta ABC prowadzimy prostą równoległą do boku AB . Wówczas z twierdzenia 2. wynika, że:

$$\alpha_1 = \alpha \quad \sphericalangle \alpha_1, \sphericalangle \alpha - \text{kąty naprzemianległe wewnętrzne}$$

$$\beta_1 = \beta \quad \sphericalangle \beta_1, \sphericalangle \beta - \text{kąty naprzemianległe wewnętrzne}$$

Suma kątów o miarach $\alpha_1, \gamma, \beta_1$ tworzy kąt półpełny, więc

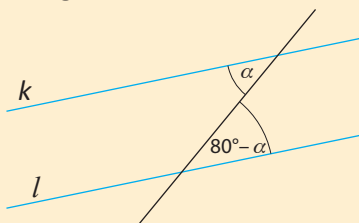
$$\alpha_1 + \gamma + \beta_1 = \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

co kończy dowód.

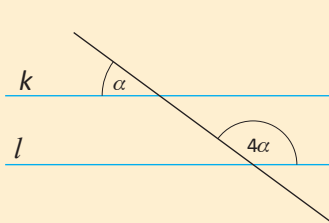
Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wyznacz miarę α kąta zaznaczonego na rysunku, wiedząc, że proste k i l są równoległe.

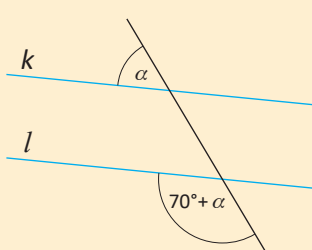
a)



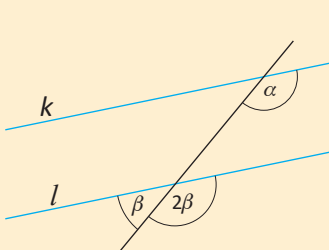
b)



c)

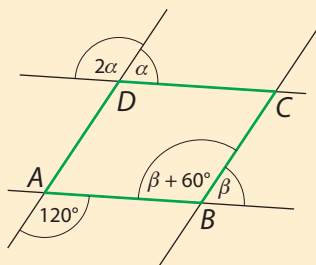


d)

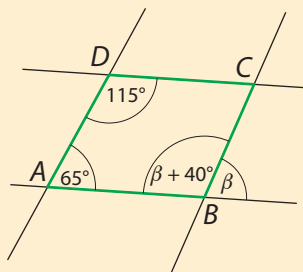


2. Czy dany na rysunku czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem? Odpowiedź uzasadnij, powołując się na odpowiednie twierdzenie.

a)

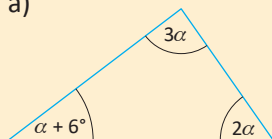


b)

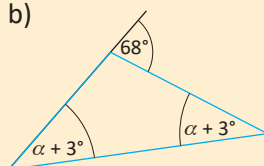
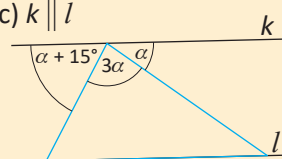


3. Wyznacz miary kątów wewnętrznych trójkąta, korzystając z danych na rysunku poniżej.

a)



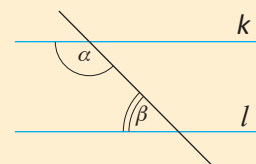
b)

c) $k \parallel l$ 

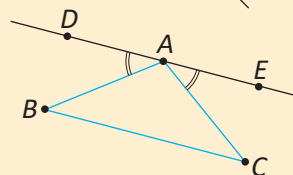
- D** 4. Korzystając z twierdzenia o dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią prostą, wykaż, że:

- suma miar dwóch kątów równoległoboku leżących przy jednym boku jest równa 180° ;
- suma miar dwóch kątów trapezu leżących przy jednym ramieniu jest równa 180° .

- D** 5. Udowodnij, że jeśli $k \parallel l$, zobacz rysunek obok, to dwusieczne kątów α i β są prostopadłe.



- D** 6. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AB| = |AC|$. Przez punkt A poprowadzono prostą DE (zobacz rysunek obok). Wykaż, że jeśli $|\angle DAB| = |\angle CAE|$, to $BC \parallel DE$.



- D** 7. Dany jest kąt wypukły AOB i punkt P leżący na dwusiecznej tego kąta. Wykaż, że jeśli $|PB| = |BO|$, to prosta PB jest równoległa do prostej AO .

- D** 8. W czworokącie $ABCD$ długości boków AD i DC są równe. Wykaż, że jeśli przekątna AC zawiera się w dwusiecznej kąta przy wierzchołku A lub przy wierzchołku C , to czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

Wielokąt. Wielokąt foremny. Suma kątów w wielokącie

W definicji wielokąta posłużymy się pojęciem łamanej.

Definicja 1.

Łamana jest to figura geometryczna, którą można przedstawić jako sumę skończonej liczby odcinków tak, aby:

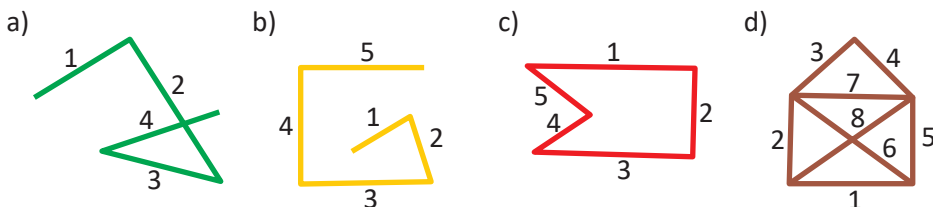
- dowolne dwa odcinki miały co najwyżej jeden punkt wspólny,
- odcinki można było tak uporządkować, żeby koniec każdego odcinka (oprócz ewentualnie ostatniego) był początkiem następnego.

Odcinki tworzące łamaną nazywamy **bokami łamanej**, a końce boków – **wierzchołkami łamanej**.

Mówiąc potocznie: łamana to taka figura zbudowana z odcinków, którą można „przejsć” od pierwszego odcinka do ostatniego, „przechodząc” przez każdy odcinek tylko jeden raz.

Przykład 1.

Następujące figury są łamanymi:



Liczby przy odcinkach wskazują przykładowe uporządkowanie, o którym mówi drugi warunek definicji 1.

Z definicji łamanej wynika, że nie wszystkie figury zbudowane ze skończonej liczby odcinków są łamanymi. Podaj przykład trzech figur zbudowanych z odcinków, które nie są łamanymi.

Definicja 2.

Łamana zwyczajna jest to łamana, której odcinki spełniają następujące warunki:

- dwa odcinki mające wspólny koniec nie zawierają się w jednej prostej,
- dwa odcinki niemające wspólnego końca nie mają punktów wspólnych,
- każdy z punktów łamanej może być końcem co najwyżej dwóch jej boków.

Łamana zwyczajna jest **zamknięta**, jeśli początek pierwszego i koniec ostatniego odcinka się pokrywają.

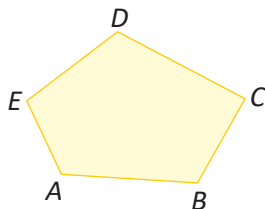
Łamane zwyczajne są przedstawione w przykładzie 1. na rysunkach b) i c). Łamana na rysunku c) jest zamknięta.

Definicja 3.

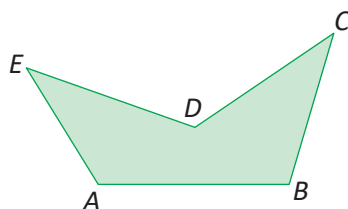
Wielokątem nazywamy figurę ograniczoną, wyciętą z płaszczyzny przez łamaną zwyczajną zamkniętą, wraz z tą łamaną.

Przykładami wielokątów są: trójkąty, czworokąty, pięciokąty, sześciokąty. Rysunek a) poniżej przedstawia pięciokąt wypukły, rysunek b) – pięciokąt wklęsły.

a)



b)



Na obu rysunkach: odcinki AB , BC , CD , DE , EA to boki pięciokąta, a punkty A , B , C , D , E to wierzchołki pięciokąta.

Wielokąt mający n boków nazywamy n -bokiem lub n -kątem.

Definicja 4.

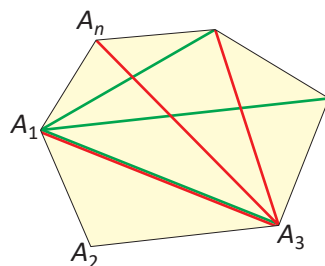
Przekątną wielokąta nazywamy odcinek łączący dwa wierzchołki i niebędący bokiem.

Twierdzenie 1.

Liczba przekątnych w n -kącie ($n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$) wyraża się wzorem $\frac{n(n-3)}{2}$.

Założenie: n – liczba boków wielokąta
 $A_1, A_2, \dots, A_n$ – wierzchołki wielokąta

Teza: $\frac{n(n-3)}{2}$ – liczba przekątnych n -kąta



Dowód:

Z wierzchołka A_1 możemy poprowadzić $(n - 3)$ przekątne (wszystkich wierzchołków jest n , ale nie możemy poprowadzić przekątnych do wierzchołków A_1 , A_2 , A_n). Dalej postępujemy podobnie, tzn. z każdego następnego wierzchołka prowadzimy

$(n - 3)$ przekątne, zaznaczając je innym kolorem. Każda przekątna została zaznaczona dwoma kolorami, więc w iloczynie $n(n - 3)$ była liczona dwukrotnie. Wszystkich przekątnych jest zatem $\frac{n(n-3)}{2}$,

co kończy dowód.

Przykład 2.

Liczba przekątnych pewnego wielokąta jest 5 razy większa od liczby boków. Jaki to wielokąt?

Niech n oznacza liczbę boków wielokąta, $n \geq 3$; wtedy – na mocy twierdzenia 1.

– liczba przekątnych w tym wielokącie jest równa $\frac{n(n-3)}{2}$. Z warunków zadania

otrzymujemy równanie:

$$\frac{n(n-3)}{2} = 5n \quad \text{skąd}$$

$$n(n-3) = 10n \quad \text{czyli}$$

$$(n-13)n = 0$$

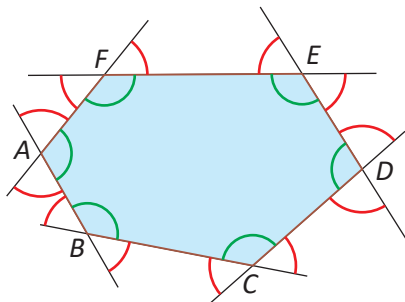
$$n = 13 \quad \text{lub} \quad n = 0 \quad (\text{zauważmy, że } 0 < 3, \text{ zatem } 0 \text{ nie spełnia warunku zadania})$$

Szukany wielokąt to trzynastokąt.

Kąt wewnętrzny wielokąta wypukłego jest to kąt, który zawiera dany wielokąt i w którego ramionach są zawarte dwa sąsiednie boki wielokąta, a wierzchołkiem jest punkt wspólny tych boków.

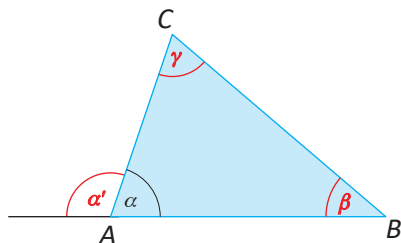
Kąty wewnętrzne wielokąta będziemy czasem oznaczać pojedynczą literą, np. $\sphericalangle A$ zamiast $\sphericalangle FAB$, ale tylko w takich sytuacjach, gdy nie będzie to prowadzić do nieporozumień.

Kąt zewnętrzny wielokąta wypukłego jest to kąt przyległy do kąta wewnętrznego.



Na rysunku kolorem zielonym zostały zaznaczone kąty wewnętrzne, a kolorem czerwonym – kąty zewnętrzne wielokąta. Każdy kąt wewnętrzny wielokąta wypukłego jest kątem wypukłym.

Można stwierdzić – korzystając z twierdzenia 4. z poprzedniego tematu – że w dowolnym trójkącie kąt zewnętrzny jest równy sumie kątów wewnętrznych do niego nieprzyległych.



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\alpha + \alpha' = 180^\circ$$

$$\alpha' = \beta + \gamma$$

Definicja 5.

Wielokątem foremnym nazywamy taki wielokąt, którego wszystkie boki mają taką samą długość i wszystkie kąty są równe.

Wielokątem foremnym jest np. trójkąt równoboczny, kwadrat, pięciokąt foremny.

Przykład 3.

Romb i prostokąt niebędący kwadratem są przykładami wielokątów, które nie są foremne.

a) Na rysunku poniżej romb ma wszystkie boki tej samej długości, ale sąsiednie kąty rombu nie są równe.



b) Na rysunku poniżej prostokąt ma wszystkie kąty równe 90° , ale sąsiednie boki prostokąta są różnej długości.



Wiedząc, że suma kątów trójkąta jest równa 180° , możemy wyprowadzić wzór na sumę kątów wewnętrznych dowolnego wielokąta wypukłego.

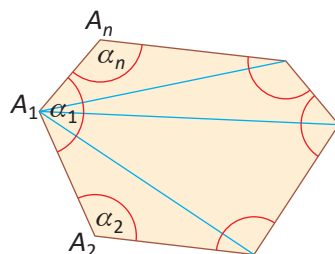
Twierdzenie 2.

Suma kątów wewnętrznych wielokąta wypukłego jest równa $180^\circ \cdot (n - 2)$, gdzie n oznacza liczbę boków wielokąta ($n \in \mathbf{N}$, $n > 2$).

Założenie: n – liczba boków wielokąta $A_1A_2...A_n$

$$|\angle A_1| = \alpha_1, |\angle A_2| = \alpha_2, \dots, |\angle A_n| = \alpha_n$$

Teza: $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 180^\circ \cdot (n - 2)$



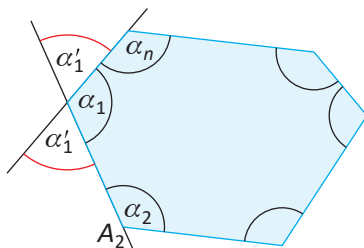
Dowód: Z dowolnego wierzchołka wielokąta (np. A_1) możemy poprowadzić $(n - 3)$ przekątne, które dzielą ten wielokąt na $(n - 2)$ trójkąty (dlaczego?). Suma kątów w tych trójkątach jest równa sumie kątów wielokąta. W każdym trójkącie suma kątów jest równa 180° , więc

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 180^\circ \cdot (n - 2)$$

co kończy dowód.

Wyznamy teraz sumę kątów zewnętrznych n -kąta wypukłego.

Niech $\angle \alpha_1, \angle \alpha_2, \dots, \angle \alpha_n$ oznaczają kąty wewnętrzne danego wielokąta.



Do każdego kąta wewnętrznego przylegają dwa kąty zewnętrzne. Suma kątów zewnętrznych przylegających do $\angle \alpha_1$ wynosi $2\alpha'_1$, czyli

$$2 \cdot (180^\circ - \alpha_1)$$

Sumujemy wszystkie kąty zewnętrzne. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & 2 \cdot (180^\circ - \alpha_1) + 2 \cdot (180^\circ - \alpha_2) + \dots + 2 \cdot (180^\circ - \alpha_n) = \\ & = 2 \cdot 180^\circ \cdot n - 2 \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) = \\ & = 2 \cdot 180^\circ \cdot n - 2 \cdot 180^\circ \cdot (n - 2) = \\ & = 2 \cdot 180^\circ \cdot n - 2 \cdot 180^\circ \cdot n + 4 \cdot 180^\circ = 720^\circ \end{aligned}$$

W obliczeniach wykorzystaliśmy twierdzenie 2. Otrzymaliśmy ciekawy wynik: suma kątów zewnętrznych dowolnego wielokąta jest stała, czyli nie zależy od liczby boków. Tym samym udowodniliśmy następujące twierdzenie.

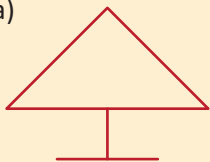
Twierdzenie 3.

W dowolnym wielokącie wypukłym suma wszystkich kątów zewnętrznych jest stała i wynosi 720° .

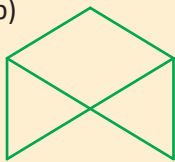
Sprawdź, czy rozumiesz

1. Czy rysunek poniżej przedstawia łamaną? Odpowiedź uzasadnij.

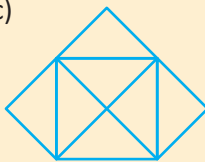
a)



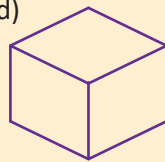
b)



c)



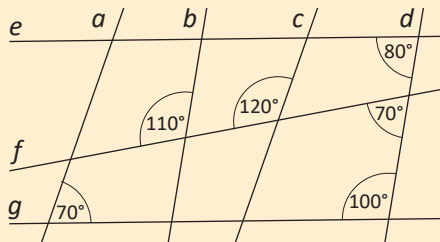
d)



2. Oblicz liczbę przekątnych:
 - a) siedmiokąta
 - b) dwunastokąta.
3. Który wielokąt ma tyle samo boków co przekątnych?
4. Wyznacz wielokąt, którego liczba przekątnych jest:
 - a) 6 razy
 - b) 8 razy większa od liczby boków.
5. Wyznacz sumę miar kątów wewnętrznych:
 - a) dziewięciokąta
 - b) dwudziestokąta.
6. Oblicz liczbę przekątnych wielokąta, którego suma miar kątów wewnętrznych jest równa:
 - a) 1440°
 - b) 2700° .
7. Ile stopni ma kąt wewnętrzny:
 - a) pięciokąta foremnego
 - b) dziesięciokąta foremnego?
8. Skonstruuj w zeszycie za pomocą cyrkla i linijki dowolny:
 - a) trójkąt równoboczny
 - b) kwadrat
 - c) sześciokąt foremny
 - d) ośmiokąt foremny.
 Podaj miarę kąta wewnętrznego narysowanego wielokąta foremnego.
9. Czy istnieje wielokąt, którego każdy kąt ma miarę:
 - a) 140°
 - b) 100°
 - c) 150° ?

Odpowiedź uzasadnij.

10. Oto schematyczny plan alejek w parku. Które alejki są równoległe? Odpowiedź uzasadnij, powołując się na odpowiednie twierdzenie.



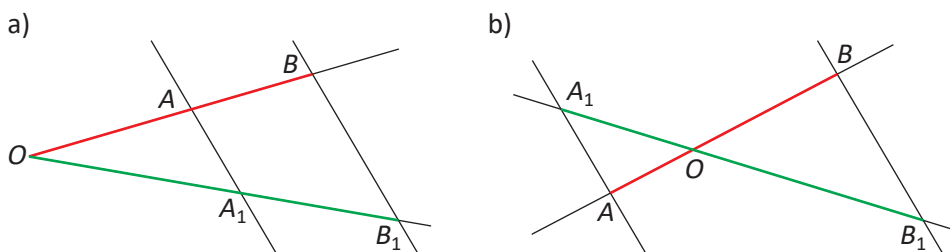
- D** 11. Wykaż, że liczba wszystkich odcinków łączących n punktów na płaszczyźnie, $n \geq 3$, z których żadne trzy punkty nie są współliniowe, jest równa $\frac{n(n-1)}{2}$.
12. Na przyjęciu spotkało się 12 osób. Ile nastąpiło powitań, jeśli każda osoba przywitała się z każdą inną osobą?
13. W turnieju siatkówki spotkało się 8 drużyn, przy czym każda drużyna rozegrała z każdą inną drużyną 2 mecze. Ile meczów rozegrano w turnieju?
14. Narysuj:
 - a) sześciokąt wypukły, którego wszystkie boki mają taką samą długość, ale nie jest to sześciokąt foremny (możesz skorzystać z linijki z podziałką);
 - b) sześciokąt wypukły, którego wszystkie kąty mają taką samą miarę, ale nie jest to sześciokąt foremny (możesz skorzystać z kątomierza).

Twierdzenie Talesa

Twierdzenie, które omówimy w tym temacie, nosi imię filozofa i matematyka greckiego, Talesa z Miletu, żyjącego na przełomie VII i VI wieku przed Chrystusem.

Twierdzenie 1. Twierdzenie Talesa

Jeżeli ramiona kąta AOA_1 lub ich przedłużenia przetniemy dwiema prostymi równoległymi AA_1 i BB_1 , to stosunek długości odcinków wyciętych przez te proste na ramieniu OA lub na jego przedłużeniu jest równy stosunkowi długości odpowiednich odcinków na ramieniu OA_1 lub na jego przedłużeniu.



Założenie: $\angle AOA_1$, proste AA_1 i BB_1 są położone jak na rysunku oraz $pr. AA_1 \parallel pr. BB_1$

Teza: $\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OA_1|}{|A_1B_1|}$ i $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OA_1|}{|OB_1|}$

Z twierdzenia Talesa wynika wniosek dotyczący odcinków wyznaczonych na prostych równoległych.

Wniosek z twierdzenia Talesa:

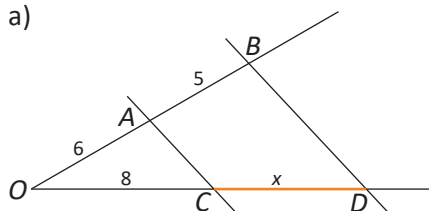
Przy założeniach twierdzenia Talesa (patrz rys. powyżej) stosunek długości odcinków utworzonych na obu prostych równoległych będzie równy stosunkowi długości tych odcinków na każdym z ramion, których końcem jest wierzchołek kąta,

$$\text{czyli: } \frac{|AA_1|}{|BB_1|} = \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OA_1|}{|OB_1|}$$

Przykład 1.

Obliczymy x i y , wykorzystując dane z rysunku poniżej oraz wiedząc, że proste AC i BD są równoległe.

a)

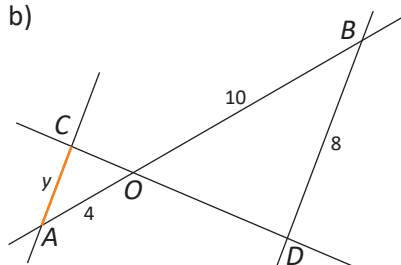


Z twierdzenia Talesa otrzymujemy proporcję:

$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OC|}{|CD|}, \text{ czyli } \frac{6}{5} = \frac{8}{x}, \text{ skąd}$$

$$x = 6\frac{2}{3}$$

b)



Z wniosku z twierdzenia Talesa otrzymujemy

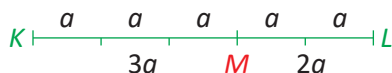
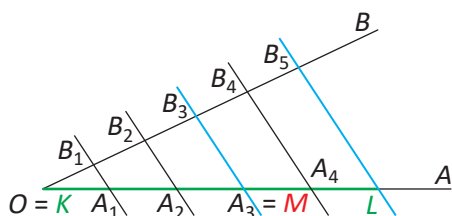
$$\frac{|AC|}{|BD|} = \frac{|OA|}{|OB|}, \text{ czyli } \frac{y}{8} = \frac{4}{10}, \text{ skąd}$$

$$y = 3\frac{1}{5}$$

Przykład 2.

Dany odcinek KL podzielimy konstrukcyjnie na dwa odcinki KM i ML , dla których

$$\frac{|KM|}{|ML|} = \frac{3}{2}.$$

Aby wyznaczyć punkt M wystarczy podzielić odcinek KL na pięć równych części.W tym celu rozważmy dowolny kąt AOB . Odłóżmy na ramieniu tego kąta dany odcinek KL , tak aby punkt K pokrył się z punktem O .

Na drugim ramieniu kąta odkładamy odcinek OB_1 , następnie takiej samej długości odcinek B_1B_2 i tak dalej, aż odłożymy pięć odcinków jednakowej długości. Koniec ostatniego odcinka oznaczmy przez B_5 . Prowadzimy prostą LB_5 , a następnie proste do niej równoległe, przechodzące przez punkty B_1, B_2, B_3, B_4 .

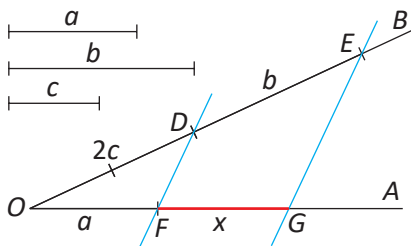
Te proste przecinają odcinek KL w punktach A_1, A_2, A_3, A_4 . Oznaczmy punkt A_3 przez M . Wówczas odcinki KM i ML spełniają warunki zadania. Poprawność konstrukcji wynika z twierdzenia Talesa. Zadanie ma zawsze jedno rozwiązanie.

Przykład 3.

Dane są odcinki mające długość a, b, c . Zbudujemy odcinek mający długość x , gdzie

$$x = \frac{a \cdot b}{2 \cdot c}.$$

Równość $x = \frac{a \cdot b}{2 \cdot c}$ możemy zapisać w postaci $\frac{2c}{b} = \frac{a}{x}$. Rozważmy dowolny kąt AOB .

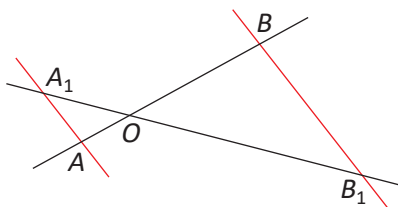
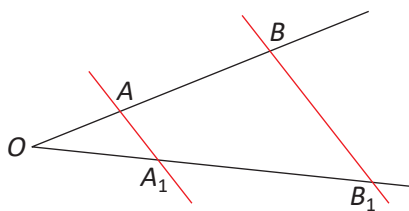


Na ramieniu $OB \rightarrow$ odkładamy kolejno odcinek OD , $|OD| = 2c$, a następnie odcinek DE , $|DE| = b$. Teraz na ramieniu $OA \rightarrow$ odkładamy odcinek OF , $|OF| = a$. Przez punkty D, F prowadzimy prostą. Następnie przez punkt E prowadzimy prostą równoległą do prostej DF . Ta prosta przecina ramię $OA \rightarrow$ w punkcie, który oznaczamy G . Długość odcinka FG jest równa x . Poprawność konstrukcji wynika z twierdzenia Talesa. Zadanie ma zawsze jedno rozwiązanie.

Można też udowodnić następujące twierdzenie zwane „twierdzeniem odwrotnym do twierdzenia Talesa”.

Twierdzenie 2.

Jeśli ramiona kąta AOA_1 lub ich przedłużenia przetniemy dwiema prostymi AA_1 i BB_1 oraz stosunek długości odcinków wyciętych przez te proste na ramieniu OA lub na jego przedłużeniu będzie równy stosunkowi długości odpowiednich odcinków wyciętych na ramieniu OA_1 lub na jego przedłużeniu, to proste AA_1 i BB_1 są równoległe.



Założenie: $\angle AOA_1$, proste AA_1 i BB_1 są położone jak na rysunku powyżej oraz

$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OA_1|}{|A_1B_1|} \quad \left(\text{lub} \quad \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OA_1|}{|OB_1|} \right)$$

Teza: $\text{pr. } AA_1 \parallel \text{pr. } BB_1$

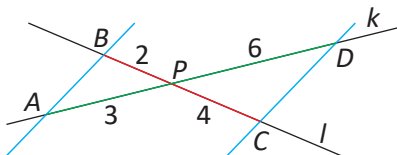
Przykład 4.

Na prostych k, l dane są długości odcinków:

$$|AP| = 3, |PD| = 6, |BP| = 2, |PC| = 4.$$

Zauważamy, że prawdziwa jest równość

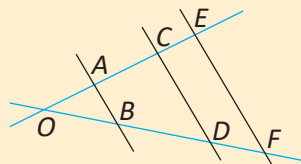
$$\frac{|AP|}{|PD|} = \frac{|BP|}{|PC|} = \frac{1}{2}$$



Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika, że proste AB i CD są równoległe

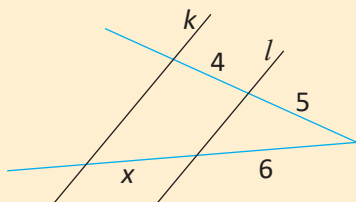
Sprawdź, czy rozumiesz

1. Proste AB , CD , EF na rysunku obok są równoległe. Ułóż pięć różnych proporcji, których wyrazami będą długości odcinków wyznaczonych przez te proste.

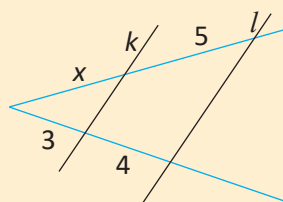


2. Na rysunkach poniżej proste k i l są równoległe. Oblicz x .

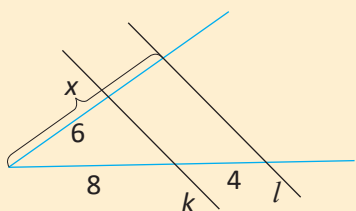
a)



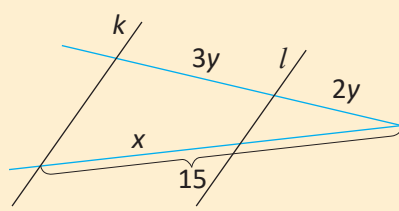
b)



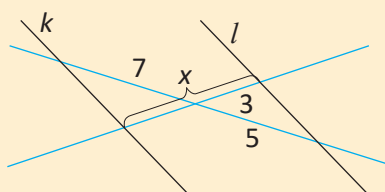
c)



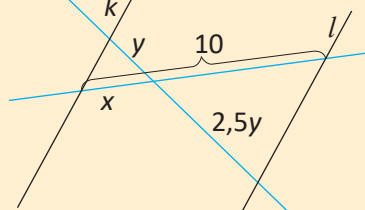
d)



e)



f)



3. W trójkącie ABC na boku AC zaznaczono punkt K , zaś na boku BC – punkt L . Sprawdź, czy odcinek KL jest równoległy do podstawy AB , jeśli:

- a) $|AK| = 14$, $|KC| = 7$, $|BL| = 6$, $|LC| = 3$ b) $|BL| = 7$, $|LC| = 6$, $|KL| = 12$, $|AB| = 14$
 c) $|AB| = 2|KL|$, $|BL| = 2|LC|$ d) $|AB| = 3|KL|$, $|AK| = 2|KC|$.

4. Dany jest odcinek o długości a oraz odcinek o długości 1 , $a > 1$. Zbuduj odcinek mający długość:

a) $\frac{2a}{3}$

b) $\frac{a+1}{5}$

c) $\frac{7a}{6}$

d) $\frac{4a-2}{3}$

5. Dane są trzy odcinki mające różne długości: a , b , c . Zbuduj odcinek mający długość:

a) $\frac{ab}{c}$

b) $\frac{a^2}{c}$

c) $\frac{2bc}{a+b}$

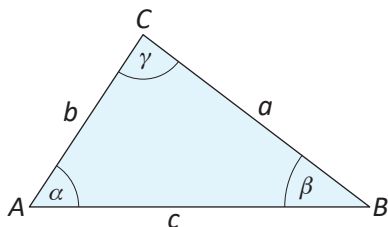
d) $\frac{cb+c^2}{3a}$

Podział trójkątów. Nierówność trójkąta. Odcinek łączący środki boków w trójkącie

Przypomnijmy określenie trójkąta.

Definicja 1.

Trójkąt to wielokąt mający trzy boki.



Przypomnijmy, że jeśli wierzchołki trójkąta oznaczmy literami A , B , C , to miary kątów i długości boków będziemy zapisywać tak, jak zostało to pokazane na rysunku. Przy wierzchołku A – kąt α , naprzeciwko wierzchołka A – bok o długości a .

Suma długości boków trójkąta jest obwodem L tego trójkąta, $L = a + b + c$.

Jak udowodniliśmy na str. 280, suma kątów w trójkącie jest stała (nie zależy od rodzaju trójkąta). Przypomnijmy to twierdzenie.

Twierdzenie 1.

Suma kątów w dowolnym trójkącie jest równa 180° .

Trójkąty możemy podzielić ze względu na rodzaje kątów i długości boków. Przypomnijmy te podziały.

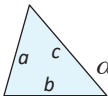
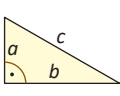
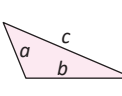
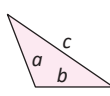
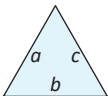
Ze względu na rodzaje kątów trójkąty dzielimy na:

- ostrokątne (wszystkie kąty są ostre)
- prostokątne (jeden kąt jest prosty, dwa ostre)
- rozwartokątne (jeden kąt jest rozwarty, dwa ostre).

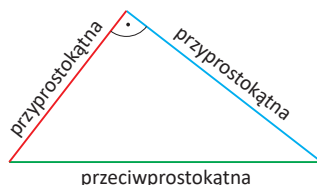
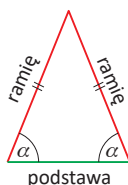
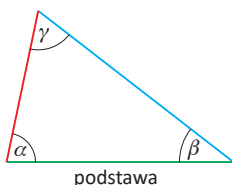
Ze względu na długości boków trójkąty dzielimy na:

- różnoboczne (wszystkie boki mają różne długości)
- równoramienne (co najmniej dwa boki mają tę samą długość), wśród których wyróżniamy trójkąty równoboczne (trzy boki mają tę samą długość).

Zależności między tymi podziałami pokazuje tabela.

	ostrokątne	prostokątne	rozwartokątne
różnoboczne	 $a < b < c$ $\alpha, \beta, \gamma \in (0^\circ, 90^\circ)$	 $a < b < c$ $\gamma = 90^\circ$	 $a < b < c$ $\gamma > 90^\circ$
równoramienne	 $a = b$ $\alpha, \beta, \gamma \in (0^\circ, 90^\circ)$	 $a = b$ $\gamma = 90^\circ$	 $a = b$ $\gamma > 90^\circ$
równoboczne	 $a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$	nie istnieje	nie istnieje

W trójkącie jeden bok (dowolny) nazywa się podstawą, a pozostałe dwa – ramionami. W przypadku trójkąta równoramiennego ramionami nazywa się boki mające tę samą długość.



W trójkącie prostokątnym boki zawarte w ramionach kąta prostego to przyprostokątne, bok przeciwległy do kąta prostego to przeciwprostokątna.

Zależności pomiędzy bokami i kątami w trójkącie określają następujące dwa twierdzenia.

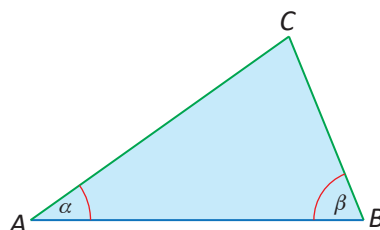
Twierdzenie 2.

Jeśli dwa boki trójkąta mają różne długości, to kąt leżący naprzeciw dłuższego boku jest większy.

Założenie: ABC – dany trójkąt
 $|AC| > |BC|$

Teza: $\beta > \alpha$

Dowód tego twierdzenia pomijamy.



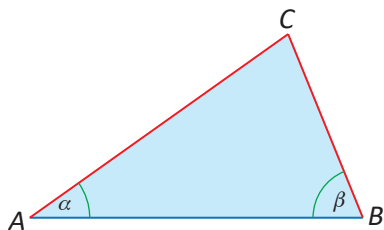
Twierdzenie 3.

Jeżeli dwa kąty trójkąta mają różne miary, to bok leżący naprzeciw większego kąta jest dłuższy.

Założenie: ABC – dany trójkąt
 $\beta > \alpha$

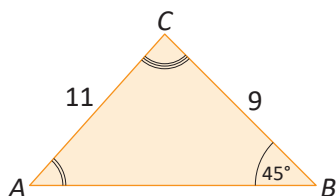
Teza: $|AC| > |BC|$

Dowód twierdzenia pomijamy.

**Przykład 1.**

W trójkącie ABC mamy dane: $|AC| = 11$, $|BC| = 9$ i $|\angle B| = 45^\circ$.

- Czy trójkąt ten jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny?
- Czy obwód tego trójkąta jest mniejszy od 30?



Ad a) Bok BC jest krótszy od boku AC , zatem, na mocy twierdzenia 2., $|\angle A| < 45^\circ$, czyli

$$|\angle A| + |\angle B| < 90^\circ, \text{ zatem} \\ |\angle C| > 90^\circ$$

(bo suma kątów w trójkącie jest równa 180°).

Trójkąt ABC jest rozwartokątny.

Ad b) W punkcie a) otrzymaliśmy, że $|\angle C| > |\angle B|$, tak więc – na mocy twierdzenia 3. – $|AB| > 11$

Obwód trójkąta ABC jest zatem większy od $11 + 9 + 11$, czyli od 31.

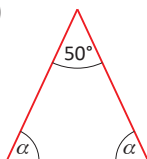
W trójkącie równoramiennym dwa kąty przy podstawie są równe. Natomiast w trójkącie równobocznym każdy kąt ma 60° .

Przykład 2.

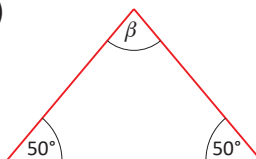
W trójkącie równoramiennym jeden z kątów ma 50° . Wyznamy pozostałe kąty tego trójkąta.

Musimy rozważyć dwa przypadki. W pierwszym kąt między ramionami trójkąta ma 50° ; w drugim kąty przy podstawie są równe 50° .

a)



b)



a) Oznaczmy literą α kąty trójkąta przy podstawie. Wówczas otrzymujemy równanie $50^\circ + 2\alpha = 180^\circ$, zatem $\alpha = 65^\circ$

b) Oznaczmy literą β kąt między ramionami trójkąta. Wówczas otrzymujemy równanie

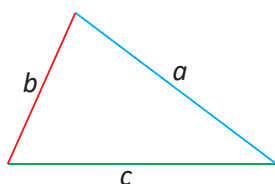
$$\beta + 2 \cdot 50^\circ = 180^\circ, \text{ stąd } \beta = 80^\circ$$

Zadanie ma dwa rozwiązania. Kąty trójkąta równoramiennego są równe 65° , 65° , 50° albo 50° , 50° , 80° .

Między długościami boków trójkąta zachodzi ważna zależność, zwana nierównością trójkąta.

Twierdzenie 4.

W dowolnym trójkącie suma długości dwóch boków jest większa od długości trzeciego boku.



$$\begin{aligned} b + c &> a \\ a + c &> b \\ a + b &> c \end{aligned}$$

UWAGA: W praktyce nie trzeba sprawdzać trzech nierówności, by stwierdzić, czy z trzech odcinków o danych długościach można zbudować trójkąt. Jeśli potrafimy wskazać odcinek najdłuższy, to wystarczy sprawdzić, czy suma długości dwóch krótszych odcinków jest większa od długości odcinka najdłuższego.

Przykład 3.

Wyznamy długości boków trójkąta, wiedząc, że są one liczbami naturalnymi i obwód tego trójkąta jest równy 9.

Niech liczby a, b, c oznaczają długości boków trójkąta. Możemy przyjąć, że

$$0 < a \leq b \leq c$$

Z nierówności trójkąta wiemy, że $a + b > c$, stąd $a + b + c > 2c$, $\frac{a+b+c}{2} > c$, więc

najdłuższy bok c jest krótszy niż połowa obwodu. Otrzymujemy

$$c \leq 4 \text{ (ponieważ } c \in \mathbf{N}). \text{ Z drugiej strony}$$

$$c \geq 3$$

w przeciwnym wypadku obwód byłby równy co najwyżej 6. Zatem

$$c = 3 \text{ (wtedy } a + b = 6) \text{ albo } c = 4 \text{ (wtedy } a + b = 5)$$

Bok c jest najdłuższy oraz a i b są liczbami naturalnymi, więc:

– jeśli $c = 3$, to otrzymujemy trójkąt równoboczny:

$$a = 3 \quad b = 3 \quad c = 3$$

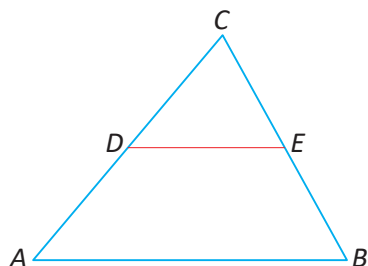
– jeśli $c = 4$, to otrzymujemy dwa trójkąty:

$$a = 1 \quad b = 4 \quad c = 4$$

$$a = 2 \quad b = 3 \quad c = 4$$

Trzy wskazane trójkąty spełniają warunki zadania.

Jeśli w dowolnym trójkącie połączymy środki dwóch boków, to otrzymany odcinek będzie miał pewne charakterystyczne cechy.



Oznaczmy wierzchołki trójkąta literami A, B, C , środek boku AC – literą D , środek boku BC – literą E . Łatwo zauważyć, że

$$\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad \frac{|CE|}{|BC|} = \frac{1}{2}, \quad \text{więc}$$

$$\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{|CE|}{|BC|}$$

Z twierdzenia 2. ze str. 290 wynika, że odcinek DE jest równoległy do boku AB

$$DE \parallel AB$$

Możemy teraz zastosować wniosek z twierdzenia Talesa; otrzymujemy

$$\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|CE|}{|BC|} = \frac{1}{2}, \quad \text{czyli}$$

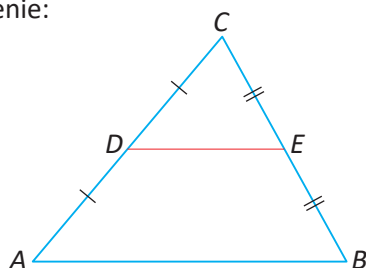
$$|DE| = \frac{1}{2}|AB|$$

Otrzymaliśmy twierdzenie:

Twierdzenie 5. *O odcinku łączącym środki boków trójkąta*

Jeśli w trójkącie połączymy środki dwóch boków, to powstały odcinek jest równoległy do boku trzeciego i jego długość jest równa połowie długości boku trzeciego.

Założenie:



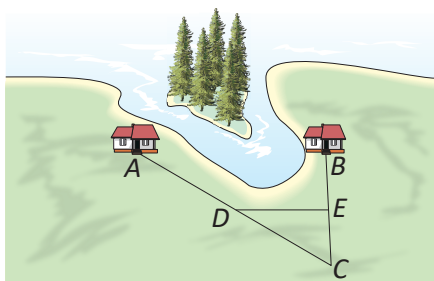
Teza:

$$DE \parallel AB$$

$$|DE| = \frac{1}{2}|AB|$$

Przykład 4.

Chcemy zmierzyć odległość między dwoma budynkami, które przedziela mała zatoka.



Wybieramy takie miejsce (punkt C), z którego możemy zmierzyć odległość do budynku A i do budynku B. Następnie znajdujemy punkt D, leżący pośrodku drogi z C do budynku A. Podobnie wyznaczamy punkt E, a następnie mierzymy długość odcinka DE. Otrzymaną wielkość mnożymy przez dwa. Jest to szukana odległość między budynkami A i B. Gdyby odcinek DE „wpadł” w zatokę, należałoby punkt C wybrać w większej odległości od brzegu.

Przykład 5.

Na boisku szkolnym postanowiono wybudować bieżnię do biegów krótkodystansowych. Wytyczono jeden brzeg bieżni i ustalono jej szerokość, wybierając na płaszczyźnie boiska punkt A.

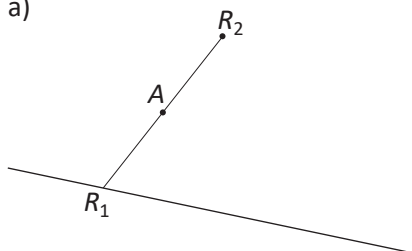
A•



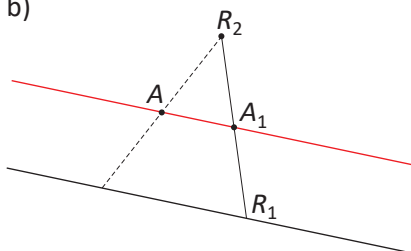
Pojawił się problem, jak wytyczyć inne punkty leżące na prostej, przechodzącej przez dany punkt A, równoległej do wytyczonego brzegu bieżni. Okazało się bowiem, że żaden z dwóch robotników mających budować bieżnię nie ma przy sobie taśmy mierniczej. Jeden z robotników miał tylko dość długi sznurek. Kierujący grupą zaproponował następujący sposób rozwiązania problemu:

- należy najpierw złożyć sznurek na pół i wyznaczyć jego środek;
- następnie dwaj robotnicy, trzymający za końce sznurka tak, by sznurek był naciągnięty, powinni stanąć: jeden (R_1) na wytyczonym brzegu bieżni, a drugi (R_2) tak, by środek sznurka pokrywał się z punktem A (rys. a);

a)



b)



- teraz robotnik R_1 przechodzi do drugiego miejsca na wytyczonym brzegu bieżni tak, by sznurek był w dalszym ciągu naciągnięty; robotnik R_2 nie zmienia swego położenia;
- środek sznurka (A_1) wyznacza punkt leżący na prostej przechodzącej przez punkt A i równoległej do wytyczonego brzegu bieżni (rys. b).

Postępując podobnie można wyznaczyć więcej takich punktów.

Uzasadnij, że konstrukcja zaproponowana przez kierownika jest poprawna.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wyznacz miary kątów w trójkącie, wiedząc, że:
 - a) pozostają w stosunku 2 : 3 : 4;
 - b) trójkąt jest równoramienny i jeden z kątów ma miarę dwa razy większą od drugiego;
 - c) największy kąt trójkąta jest równy sumie dwóch pozostałych, a kąt środkowy jest równy średniej arytmetycznej dwóch pozostałych kątów.
2. Czy trójkąt ABC jest ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątny? Odpowiedź uzasadnij.
 - a) $|AB| = 4$, $|BC| = 5$, $|\sphericalangle A| = 30^\circ$
 - b) $|AB| = 6$, $|AC| = 7$, $|\sphericalangle C| = 45^\circ$
 - c) $|AB| = |AC|$, $|\sphericalangle B| = 45^\circ$
 - d) $|AC| = |BC|$, $|\sphericalangle B| = 30^\circ$
- D** 3. Jeden z kątów trójkąta jest równy różnicy dwóch pozostałych. Wykaż, że jest to trójkąt prostokątny.
- D** 4. W trójkącie równoramiennym ABC dwusieczne kątów przy podstawie AB przecinają się w punkcie O . Wykaż, że jeśli $|\sphericalangle AOB| = 2|\sphericalangle ACB|$, to trójkąt jest równoboczny.
5. Czy można zbudować trójkąt o bokach mających długość:
 - a) $\sqrt{3} - 1$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3} + 1$
 - b) $2a$, $3a$, $4a$, gdzie $a > 0$
 - c) $3 - \sqrt{2}$, 5 , $3 + \sqrt{2}$?Odpowiedź uzasadnij.
- D** 6. Wiadomo, że boki trójkąta mają długość a , $a + 1$, $a + 2$. Wykaż, że $a \in (1, +\infty)$.
7. Dwa boki trójkąta różnobocznego mają długość 2 i 5. Wyznacz długość trzeciego boku, wiedząc, że bok ten leży naprzeciw największego kąta i jego długość jest liczbą naturalną.
8. Dwa boki trójkąta różnobocznego mają długość 5 i 4. Trzeci bok leży naprzeciw najmniejszego kąta. Wiedząc, że obwód trójkąta jest liczbą naturalną, oblicz długość trzeciego boku.
9. Boki trójkąta mają długość a , b , c . Oblicz obwód trójkąta powstałego w wyniku połączenia środków tych boków, jeśli:
 - a) $a = 6$ cm, $b = 7$ cm, $c = 8$ cm;
 - b) $a + b + c = 10$.
- D** 10. Punkty K , L , M są środkami boków odpowiednio AB , BC i AC trójkąta ABC . Wykaż, że:
 - a) czworokąt $AKLM$ jest równoległobokiem;
 - b) jeśli równoległobok $AKLM$ jest rombem, to trójkąt ABC jest równoramienny.
- D** 11. W trapezie $ABCD$, w którym $AB \parallel DC$, poprowadzono przekątną DB . Niech punkty K , L , M oznaczają odpowiednio środki odcinków AD , DB , BC . Wykaż, że:
 - a) punkty K , L , M są współliniowe;
 - b) długość odcinka KM jest średnią arytmetyczną długości podstaw AB i DC .

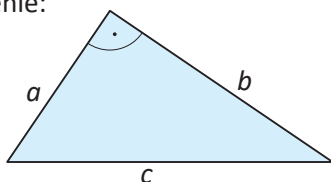
Twierdzenie Pitagorasa. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Ze szkoły podstawowej znasz ważne twierdzenie charakteryzujące trójkąty prostokątne. Przypomnijmy je.

Twierdzenie 1. Twierdzenie Pitagorasa

Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to kwadrat długości przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów długości przyprostokątnych.

Założenie:



Teza:

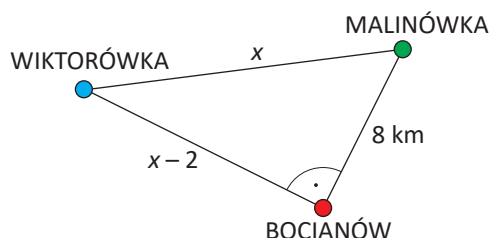
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Przykład 1.

Do niedawna droga z Malinówki do Wiktorówki prowadziła przez Bocianów. Droga Malinówka – Bocianów jest prostopadła do drogi Bocianów – Wiktorówka i ma długość 8 km. Władze samorządowe Wiktorówki i Malinówki sfinansowały budowę drogi, łączącą oba miasta w linii prostej. Wiedząc, że nowo wybudowana droga jest dłuższa od drogi z Bocianowa do Wiktorówki jedynie o 2 km, obliczmy:

- długość nowo wybudowanej drogi;
- o ile kilometrów skróciła się podróż z Malinówki do Wiktorówki.

Ad a) Schemat poniżej reprezentuje układ dróg między miejscowościami. Ma on kształt trójkąta prostokątnego.



Niech x oznacza długość drogi między Malinówką, a Wiktorówką; wówczas droga Bocianów – Wiktorówka ma długość $x - 2$ ($x > 2$). Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa:

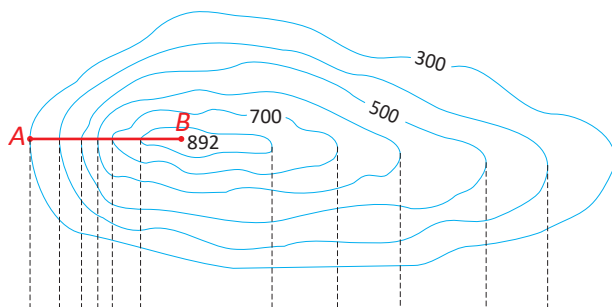
$$\begin{aligned} 8^2 + (x - 2)^2 &= x^2 \\ 64 + x^2 - 4x + 4 &= x^2 \\ -4x &= -68 \\ x &= 17 \end{aligned}$$

Nowo wybudowana droga ma długość 17 km.

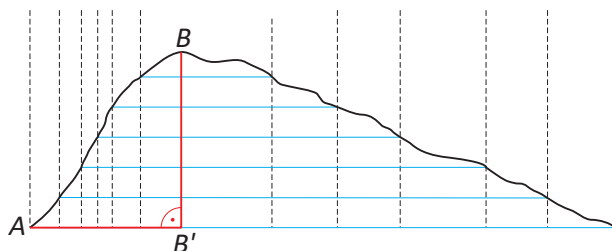
Ad b) Droga Bocianów – Wiktorówka ma długość 15 km. Zatem podróż z Malinówki do Wiktorówki skróciła się o $((15 + 8) - 17)$ km, czyli o 6 km.

Przykład 2.

Oszacujmy – na podstawie fragmentu mapy wykonanej w skali 1 : 20 000 – długość drogi prowadzącej od podnóża góry (punkt A) na szczyt (punkt B).



Odległość między punktami A i B na mapie wynosi 2 cm. Nie oznacza to, że długość drogi z A do B jest równa $2 \cdot 200$ m, czyli 400 m. „Przekrój góry” wygląda tak:



Rozpatrzmy trójkąt prostokątny $AB'B$. Przeciwprostokątna tego trójkąta przybliża długość drogi. Mamy:

$$|AB'| = 400 \text{ (m)}$$

$$|BB'| = 592 \text{ (m)} \quad \text{względna wysokość góry: } 892 \text{ m} - 300 \text{ m} = 592 \text{ m}$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta $AB'B$ otrzymujemy, że:

$$|AB| = \sqrt{|AB'|^2 + |BB'|^2}$$

$$|AB| = \sqrt{400^2 + 592^2} \approx 714 \text{ (m)}$$

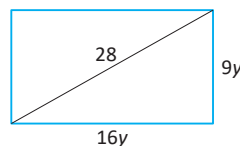
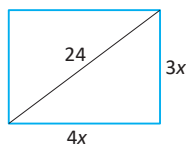
Długość drogi z punktu A na szczyt jest równa ok. 714 m.

Przykład 3.

Pan Kowalski chce zamienić swój stary telewizor 24-calowy (format ekranu jest równy 4 : 3) na panoramiczny telewizor LCD (format ekranu jest równy 16 : 9). Jednocześnie pan Kowalski chce, żeby wysokość ekranu nowego telewizora była nie mniejsza niż wysokość ekranu starego telewizora. Ma do wyboru dwa modele: 28-calowy i 32-calowy. Który telewizor powinien wybrać?

Przypomnijmy: wielkość telewizora wyraża się długością przekątnej ekranu (mierzonej w calach, 1 cal = 2,54 cm). Format ekranu 4 : 3 oznacza, że szerokość ekranu ma długość $4x$, a wysokość $3x$, gdzie x jest pewną jednostką długości.

Obliczymy, jaką wysokość (w calach) ma ekran starego telewizora i telewizora 28-calowego. Przyjmijmy, że prostokąty przedstawione na rysunkach reprezentują ekrany telewizorów.



Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$(4x)^2 + (3x)^2 = 24^2$$

$$25x^2 = 24^2$$

$$x^2 = \left(\frac{24}{5}\right)^2 \quad \text{i} \quad x > 0 \quad \text{więc}$$

$$x = \frac{24}{5} \quad \text{czyli} \quad x = 4,8 \text{ (cala)}$$

$$(16y)^2 + (9y)^2 = 28^2$$

$$256y^2 + 81y^2 = 28^2$$

$$337y^2 = 28^2 \quad \text{i} \quad y > 0, \quad \text{stąd}$$

$$y = \frac{28}{\sqrt{337}} \quad \text{czyli} \quad y \approx 1,53 \text{ (cala)}$$

Obliczamy wysokość ekranu telewizora (w calach)

$$3 \cdot 4,8 = 14,4 \text{ (cala)}$$

$$9 \cdot 1,53 = 13,77 \approx 13,8 \text{ (cala)}$$

$$14,4 > 13,8$$

Telewizor 28-calowy jest zbyt niski. Sprawdź, że telewizor 32-calowy spełnia oczekiwania pana Kowalskiego.

Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.

Twierdzenie 2. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Jeśli długości boków a , b , c trójkąta spełniają zależność $a^2 + b^2 = c^2$, to trójkąt jest prostokątny, przy czym boki długości a i b są przyprostokątnymi tego trójkąta, a bok długości c – przeciwprostokątną tego trójkąta.

Przykład 4.

Dane są długości boków trzech trójkątów:

a) 3 cm; 2,4 cm; 1,8 cm b) 5 cm; 6 cm; 8 cm c) 5 cm; 6 cm; 7 cm

Czy któryś z tych trójkątów jest prostokątny?

Licząc sumę kwadratów, bierzemy – oczywiście – pod uwagę boki krótsze.

W punkcie a) otrzymujemy

$$(2,4)^2 + (1,8)^2 = 5,76 + 3,24 = 9 \quad \text{i} \quad 3^2 = 9$$

Trójkąt ten jest prostokątny.

W punkcie b) mamy:

$$5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61, \text{ ale } 8^2 = 64, \quad 61 \neq 64$$

Trójkąt nie jest prostokątny.

W punkcie c) obliczamy:

$$5^2 + 6^2 = 61, \text{ natomiast } 7^2 = 49, \quad 61 \neq 49$$

Trójkąt nie jest prostokątny.

Znając długości boków trójkąta, potrafisz sprawdzić, czy dany trójkąt jest prostokątny. Pozostaje pytanie, czy równie łatwo można ustalić, że dany trójkąt jest ostrokątny lub rozwartokątny. Okazuje się, że tak.

Twierdzenie 3.

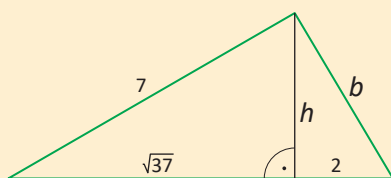
Jeśli długości boków trójkąta oznaczmy literami a, b, c w taki sposób, że $a \leq b \leq c$ oraz $a^2 + b^2 < c^2$, to trójkąt jest rozwartokątny; jeśli natomiast $a^2 + b^2 > c^2$, to trójkąt jest ostrokątny.

Z Twierdzenia 3. wynika, że trójkąt z punktu b) ostatniego przykładu jest rozwartokątny, a trójkąt z punktu c) jest ostrokątny.

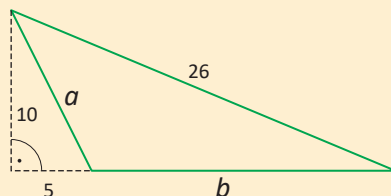
Sprawdź, czy rozumiesz

1. Oblicz długości nieznanymi odcinków na rysunkach poniżej:

a)

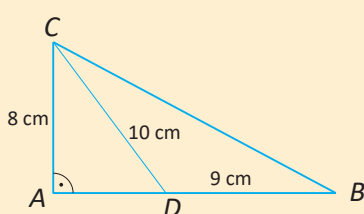


b)

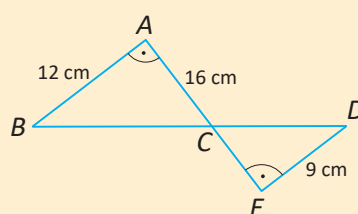


2. O ile centymetrów odcinek CD jest krótszy od odcinka BC ?

a)



b)

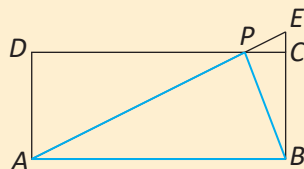


3. Ile cali ma telewizor, którego wymiary ekranu wynoszą 42 cm na 31,5 cm?
4. Dwa samochody minęły się na skrzyżowaniu: pierwszy jechał w kierunku wschodnim z prędkością 96 km/h, a drugi w kierunku południowym z prędkością 72 km/h. Ile kilometrów przejechał każdy z nich w czasie 5 minut i jaka była wtedy odległość między tymi samochodami w linii prostej?

5. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego pozostają w stosunku 5 : 12. Oblicz długości boków tego trójkąta, jeśli jego obwód jest równy 90 cm.
6. Jeden bok prostokąta ma długość 11 cm, a drugi jest o 1 cm krótszy od przekątnej. Oblicz obwód tego prostokąta.
7. Wyznacz wzór na długość przekątnej kwadratu w zależności od długości a jego boku. Następnie oblicz długość boku kwadratu, którego przekątna jest o 2 cm dłuższa od boku.
8. Wyznacz długość odcinka AB , wiedząc, że punkt P leży w odległości $3 + 2\sqrt{3}$ od prostej AB oraz w odległości $6 + \sqrt{3}$ od punktu A i od punktu B .
9. Dane są odcinki o długościach a i b ($a > b > 0$). Skonstruuj odcinek długości:
 - a) $a\sqrt{5}$
 - b) $\sqrt{a^2 + b^2}$
 - c) $\sqrt{a^2 - b^2}$
 - d) $\sqrt{3b^2}$
10. Wyznacz liczbę a , dla której podane liczby są długościami boków trójkąta prostokątnego. Rozważ dwa przypadki.
 - a) $0,5a$; 12; 20
 - b) 8; $9a$; 10
11. Sprawdź, czy trójkąt o podanych długościach boków jest ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątny.
 - a) 2,5 cm; 6 cm; 6,5 cm
 - b) $\sqrt{2}$ cm, 2 cm, 3 cm
 - c) 9 cm; 8 cm; 5 cm
 - d) $3\sqrt{2}$ cm; $\sqrt{15}$ cm; $\sqrt{3}$ cm
 - e) $a\sqrt{2}$; $a\sqrt{3}$; $a\sqrt{6}$, gdzie $a > 0$
 - f) $(\sqrt{3} + 1)$ cm; $(\sqrt{3} - 1)$ cm; $2\sqrt{2}$ cm
12. Sprawdź, czy dany trójkąt jest prostokątny, ostrokątny, czy rozwartokątny, jeśli długości jego boków pozostają w stosunku:
 - a) $1 : \sqrt{3} : 2$
 - b) 4: 5: 6
 - c) 5 : 12 : 13
 - d) $\sqrt{11} : 7 : 8$
13. W prostokącie $ABCD$ bok AD ma długość 10 cm. Na boku AB zaznaczono punkt E w taki sposób, że $|AE| = 4$ cm. Punkt E połączono z punktami D i C . Wyznacz długość boku AB wiedząc, że kąt DEC jest prosty.

- D** 14. Boki prostokąta $ABCD$ mają długość: $|AB| = 4$, $|BC| = 6$. Niech K oznacza środek boku DC , zaś L – punkt leżący na boku BC i dzielący ten bok na dwa odcinki w stosunku 1 : 2. Wykaż, że trójkąt ALK jest prostokątny. Rozważ dwa przypadki.

- D** 15. W prostokącie $ABCD$ boki mają długość: $|AB| = 30$, $|BC| = 9$. Bok BC przedłużono poza punkt C do punktu E . Odcinek AE przecina bok DC w punkcie P . Wykaż, że jeśli $|EC| = 1$, to kąt APB jest prosty.

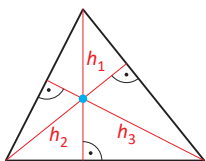


Wysokości w trójkącie. Środkowe w trójkącie

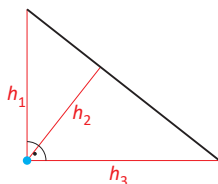
Definicja 1.

Wysokością trójkąta nazywamy odcinek (a także jego długość) łączący wierzchołek trójkąta z prostą zawierającą przeciwległy bok.

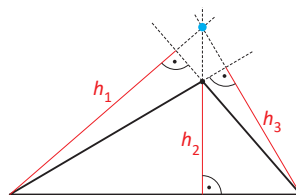
Każdy trójkąt ma trzy wysokości.



Trójkąt ostrokątny



Trójkąt prostokątny



Trójkąt rozwartokątny

Twierdzenie 1.

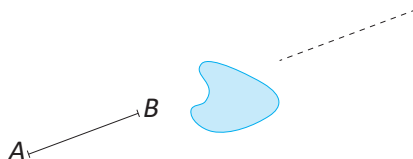
W dowolnym trójkącie wysokości lub ich przedłużenia przecinają się w jednym punkcie.

Punkt przecięcia wysokości trójkąta nazywamy **ortocentrum**.

W trójkącie ostrokątnym punkt ten leży wewnątrz trójkąta. W przypadku trójkąta prostokątnego punktem przecięcia się wysokości jest wierzchołek kąta prostego. W trójkącie rozwartokątnym przedłużenia wysokości przecinają się w punkcie leżącym poza trójkątem.

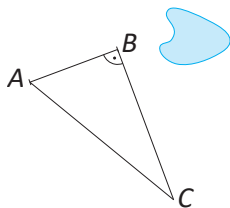
Przykład 1.

Wzdłuż półprostej $AB \rightarrow$ mamy zbudować ogrodzenie. Na przedłużeniu odcinka AB znajduje się jezioro (zobacz rysunek poniżej). Jak zbudować ogrodzenie po drugiej stronie jeziora?

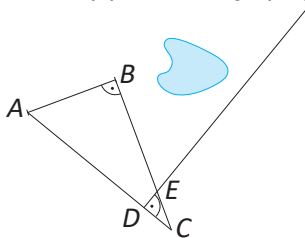


Aby ogrodzenie było zbudowane wzdłuż półprostej $AB \rightarrow$, wystarczy znaleźć po drugiej stronie jeziora dwa punkty współliniowe z punktami A, B . Do tego celu można wykorzystać własność wysokości trójkąta, podaną w ostatnim twierdzeniu.

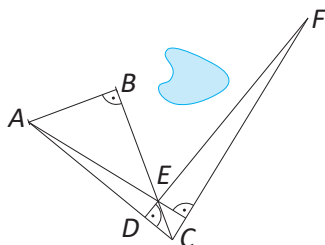
Wyznaczamy prostopadłą do odcinka AB , przechodzącą przez punkt B .



Na prostopadłej wybieramy dowolny punkt C i łączymy go z punktem A .



Na odcinku AC wybieramy taki punkt D , aby prostopadła do AC wystawiona w tym punkcie „nie wpadła” do jeziora. Punkt przecięcia z odcinkiem BC oznaczamy przez E .

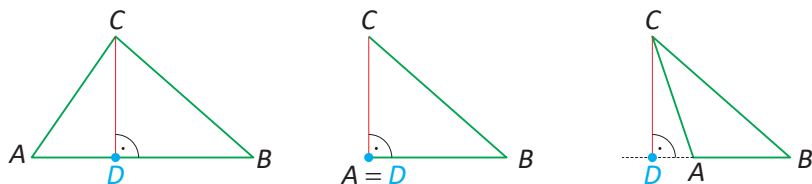


Prowadzimy półprostą $AE \rightarrow$, a następnie prostopadłą do niej półprostą o początku w punkcie C . Ta półprosta przecina półprostą $DE \rightarrow$ w punkcie F . Punkt F jest szukanym punktem współliniowym z punktami A i B . Jak to uzasadnić?

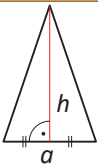
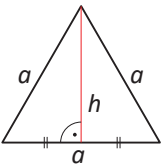
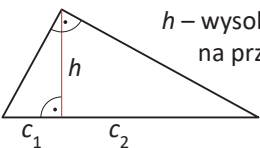
Zauważ, że punkty A, C, F wyznaczają trójkąt, którego wysokości zawierają się w półprostych $BC \rightarrow$, $AE \rightarrow$ i $DE \rightarrow$.

Opisz, jak wyznaczyć drugi punkt, współliniowy z punktami A, B .

Punkt wspólny wysokości i boku trójkąta (lub jego przedłużenia), na który została opuszczona wysokość, nazywa się **spodkiem** tej wysokości.



Na rysunku powyżej punkt D jest spodkiem wysokości trójkąta ABC .

wysokości w wybranych trójkątach		
trójkąt równoramienny		
	a – długość podstawy h – wysokość	W trójkącie równoramiennym wysokość poprowadzona na podstawę dzieli ją na połowy.
trójkąt równoboczny		
	a – długość podstawy h – wysokość	W trójkącie równobocznym wszystkie wysokości są równe. Wysokość h trójkąta o boku mającym długość a wyraża się wzorem $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
trójkąt prostokątny		
	h – wysokość opuszczona na przeciwprostokątną $h = \sqrt{c_1 \cdot c_2}$	W trójkącie prostokątnym wysokość h , poprowadzona z wierzchołka kąta prostego, dzieli przeciwprostokątną na odcinki mające długość c_1, c_2 dla których $h = \sqrt{c_1 \cdot c_2}$.

Przykład 2.

Wykażemy, że w trójkącie prostokątnym wysokość h poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki c_1, c_2 , dla których $h = \sqrt{c_1 \cdot c_2}$.

Założenie:

Dany jest trójkąt prostokątny ABC ,
 jak na rysunku obok.

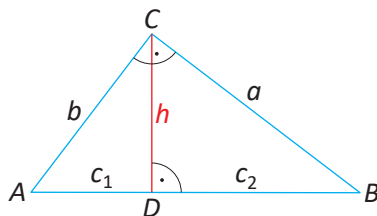
$$|\angle ACB| = 90^\circ, |AB| = c, |AC| = b, |BC| = a$$

$$CD \perp AB, |CD| = h$$

$$|AD| = c_1, |DB| = c_2 \quad c = c_1 + c_2$$

Teza:

$$h = \sqrt{c_1 \cdot c_2}$$



Dowód:

Z twierdzenia Pitagorasa dla trzech trójkątów prostokątnych DBC, ADC, ABC otrzymujemy kolejno:

$$a^2 = h^2 + c_2^2$$

$$b^2 = h^2 + c_1^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Mamy więc:

$$c^2 = a^2 + b^2 = h^2 + c_2^2 + h^2 + c_1^2, \quad \text{czyli}$$

$$c^2 = c_1^2 + 2h^2 + c_2^2$$

Uwzględniamy teraz równość $c = c_1 + c_2$.

$$(c_1 + c_2)^2 = c_1^2 + 2h^2 + c_2^2$$

$$c_1^2 + 2 \cdot c_1 \cdot c_2 + c_2^2 = c_1^2 + 2h^2 + c_2^2$$

$$h^2 = c_1 \cdot c_2$$

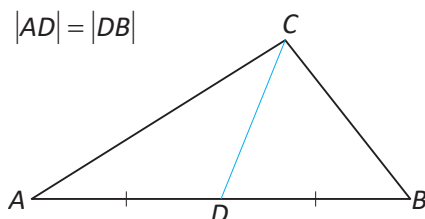
$$h = \sqrt{c_1 \cdot c_2}, \text{ bo } h > 0,$$

co kończy dowód.

Omówimy teraz własności środkowych w trójkącie.

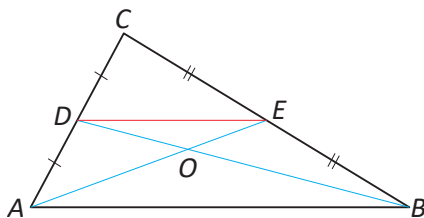
Definicja 2.

Środkową trójkąta nazywamy odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.



Każdy trójkąt ma trzy środkowe.

Niech ABC będzie trójkątem oraz AE i BD jego środkowymi przecinającymi się w punkcie O .



Wiemy już, że odcinek DE jest równoległy do AB i $|DE| = \frac{1}{2}|AB|$ (zobacz str. 296).

Zatem z twierdzenia Talesa otrzymujemy, że:

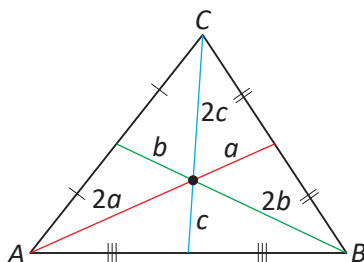
$$\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{1}{2} = \frac{|OE|}{|OA|} = \frac{|OD|}{|OB|}$$

Środki przecięły się w punkcie O , który podzielił je w stosunku 1 : 2. Można pokazać, że trzecia środkowa też przejdzie przez punkt O , który podzieli ją w stosunku 1 : 2.

Podsumujmy:

Twierdzenie 2. O środkowych w trójkącie

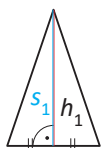
W dowolnym trójkącie trzy środkowe przecinają się w jednym punkcie, który dzieli każdą z nich w stosunku 1 : 2.



Punkt przecięcia środkowych nazywamy **środkiem ciężkości trójkąta**.

środkowe w wybranych trójkątach

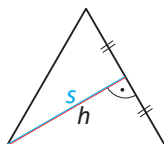
trójkąt równoramienny



s_1 – środkowa poprowadzona do podstawy
 h_1 – wysokość poprowadzona do podstawy
 $h_1 = s_1$

W trójkącie równoramiennym środkowa poprowadzona do podstawy jest jednocześnie wysokością.

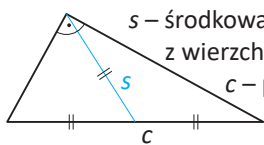
trójkąt równoboczny



s – środkowa
 h – wysokość

W trójkącie równobocznym środkowe i wysokości się pokrywają. Dlatego wysokości w trójkącie równobocznym przecinają się w punkcie, który dzieli je w stosunku 1 : 2.

trójkąt prostokątny

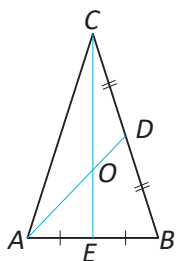


s – środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta prostego
 c – przeciwprostokątna
 $s = \frac{1}{2}c$

W trójkącie prostokątnym środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma długość połowy przeciwprostokątnej.

Przykład 3.

W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość 6 cm, a środkowa CE ma długość 12 cm. Obliczmy długość środkowej AD .



W trójkącie ABC środkowa CE jest jednocześnie wysokością poprowadzoną na podstawę AB , a punkt E dzieli tę podstawę na połowy:

$$|AE| = |EB| = 3 \text{ cm}$$

Punkt O przecięcia środkowych CE i AD dzieli je w stosunku $1 : 2$.

$$|OE| : |CO| = 1 : 2 \quad \text{stąd} \quad |OE| = \frac{1}{3}|CE|, \text{ czyli}$$

$$|OE| = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4 \text{ (cm)}$$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AEO , wyznaczamy długość odcinka AO :

$$|AO|^2 = |AE|^2 + |OE|^2 \quad |AO|^2 = 3^2 + 4^2, \quad \text{zatem}$$

$$|AO| = 5 \text{ (cm)}$$

Obliczamy długość środkowej AD :

$$|AD| = |AO| + |OD| \text{ i } |OD| = \frac{1}{2}|AO|, \text{ więc}$$

$$|AD| = 5 + 2,5 = 7,5 \text{ (cm)}$$

Środkowa AD ma długość 7,5 cm.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Oblicz wysokość:

- w trójkącie prostokątnym równoramiennym, poprowadzoną na przeciwprostokątną o długości 2;
- w trójkącie równobocznym, którego bok ma długość 14;
- w trójkącie równoramiennym, którego boki mają długość 5, 5, 6, poprowadzoną na podstawę.

D 2. Wykaż, że w trójkącie równobocznym o boku a wysokość jest równa $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

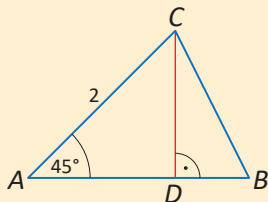
Następnie oblicz długość boku trójkąta równobocznego w przypadku, gdy jest on o 3 cm dłuższy od wysokości. Podaj przybliżenie dziesiętne wyniku z dokładnością do 0,1 cm.

D 3. Wykaż, że w trójkącie prostokątnym równoramiennym o przyprostokątnej długości a wysokość poprowadzona na przeciwprostokątną jest równa $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

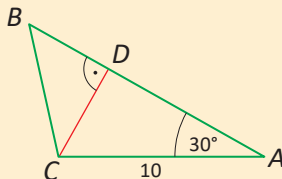
Następnie oblicz obwód trójkąta prostokątnego równoramiennego w przypadku, gdy najkrótsza wysokość jest o 5 cm krótsza od przyprostokątnej. Podaj przybliżenie wyniku z dokładnością do 1 cm.

4. Oblicz wysokość CD trójkąta ABC na rysunku poniżej:

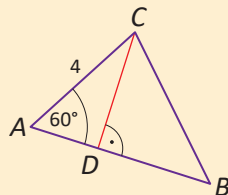
a)



b)



c)



5. Oblicz długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego, wiedząc, że wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki o długości:
- a) 4 cm; 9 cm b) 3 cm; 1,2 dm c) 0,9 dm; 1,6 dm.
6. W trójkącie równoramiennym o obwodzie L wysokość poprowadzona na podstawę ma długość h . Wyznacz długości boków tego trójkąta, jeśli:
- a) $L = 50$, $h = 5$ b) $L = 8$, $h = 2$ c) $L = 48$, $h = 12$.
7. W trójkącie równobocznym odległość środka ciężkości od boków jest równa 1 cm. Oblicz:
- a) wysokość trójkąta b) długość boku trójkąta.
8. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długość 15 cm i 20 cm. Oblicz:
- a) wysokość h trójkąta poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego;
 b) odległość spodka wysokości h od środka przeciwprostokątnej;
 c) różnicę długości środkowej poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego i wysokości h .
9. Przyprostokątne w trójkącie prostokątnym równoramiennym mają długość $\sqrt{8}$. Oblicz:
- a) długości środkowych w tym trójkącie;
 b) odległość środka ciężkości od wierzchołka kąta prostego.
10. Oblicz długości środkowych w trójkącie równoramiennym, którego boki mają długość:
- a) 18 cm, 15 cm, 15 cm b) 16 cm, 10 cm, 10 cm.
11. Oblicz długości boków trójkąta równoramiennego, jeśli środkowe w tym trójkącie mają długość:
- a) 6 cm, 6 cm, 9 cm b) 9 cm, 9 cm, 6 cm.
- D** 12. Wykaż, że jeśli środkowa trójkąta równa się połowie boku, do którego została poprowadzona, to ten trójkąt jest prostokątny.
- D** 13. Przekątne równoległoboku $ABCD$ przecinają się w punkcie O . Punkt K jest środkiem boku AB . Odcinek DK przecina się z przekątną AC w punkcie P . Wykaż, że $6 \cdot |OP| = |AC|$.

Przystawanie trójkątów

Mówiąc, że dwie figury są przystające, intuicyjnie rozumiemy, że te figury są takie same, czyli mają taki sam kształt i taką samą wielkość. Można je nałożyć na siebie w taki sposób, że będą się pokrywały. W tym temacie zajmiemy się przystawaniem trójkątów.

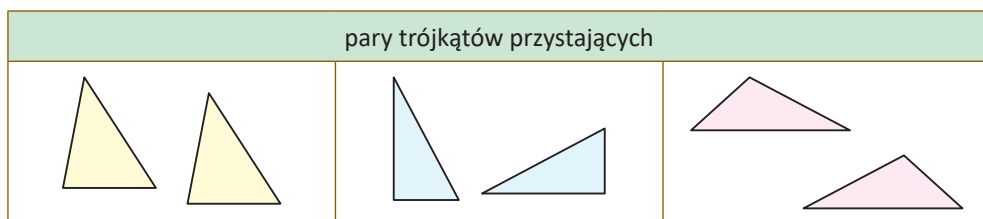
Definicja 1.

Dwa trójkąty nazwiemy **trójkątami przystającymi** wtedy i tylko wtedy, gdy boki i kąty jednego trójkąta są równe odpowiednim bokom i kątom drugiego trójkąta.

W zapisie symbolicznym:

Trójkąty ABC i $A_1B_1C_1$ są przystające (oznaczenie $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$) wtedy, gdy:

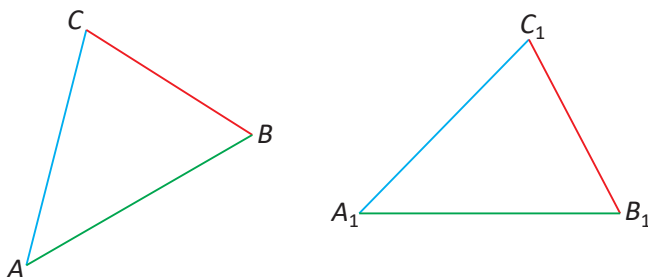
$$\begin{aligned} |AB| &= |A_1B_1|, & |BC| &= |B_1C_1|, & |AC| &= |A_1C_1| & \text{ i } \\ \sphericalangle A &= \sphericalangle A_1, & \sphericalangle B &= \sphericalangle B_1, & \sphericalangle C &= \sphericalangle C_1 \end{aligned}$$



Aby stwierdzić, że dwa trójkąty są przystające, nie trzeba sprawdzać wszystkich sześciu równości. O tym, które równości wystarczy sprawdzić, mówią następujące twierdzenia, zwane cechami przystawania trójkątów.

Twierdzenie 1. 1 cecha przystawania trójkątów, bbb

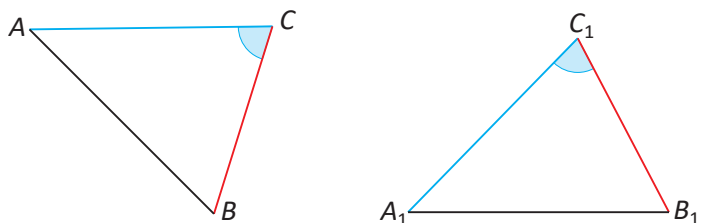
Jeżeli długości trzech boków w jednym trójkącie są odpowiednio równe długościom trzech boków w drugim trójkącie, to te trójkąty są przystające.



Jeśli $|AB| = |A_1B_1|$, $|BC| = |B_1C_1|$, $|AC| = |A_1C_1|$, to $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$.
Wówczas $\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B_1$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C_1$

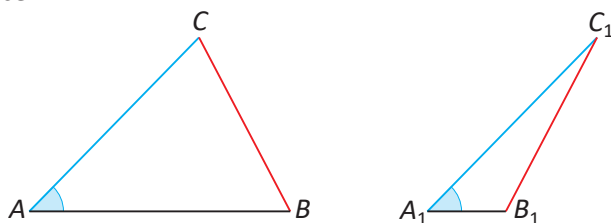
Twierdzenie 2. II cecha przystawania trójkątów, bkb

Jeżeli dwa boki i kąt między tymi bokami w jednym trójkącie są równe odpowiednio dwóm bokom i kątowi między tymi bokami w drugim trójkącie, to trójkąty te są przystające.

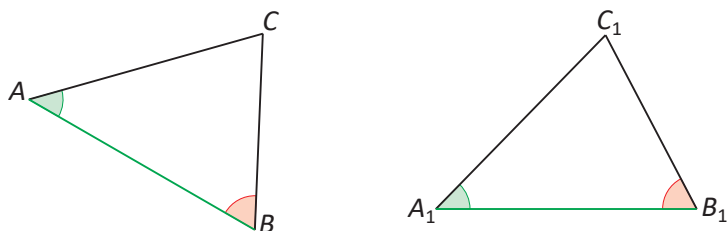


Jeśli $|AC| = |A_1C_1|$, $|BC| = |B_1C_1|$, $|\sphericalangle C| = |\sphericalangle C_1|$, to $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$.
Wówczas $|AB| = |A_1B_1|$, $|\sphericalangle A| = |\sphericalangle A_1|$, $|\sphericalangle B| = |\sphericalangle B_1|$

UWAGA: Założenie, że równe kąty muszą znajdować się pomiędzy odpowiednio równymi bokami, jest bardzo istotne. W trójkątach na poniższym rysunku równe kąty nie znajdują się między odpowiednio równymi bokami i trójkąty ABC i $A_1B_1C_1$ nie są przystające.

**Twierdzenie 3. III cecha przystawania trójkątów, kbk**

Jeżeli bok i dwa przyległe do niego kąty w jednym trójkącie są odpowiednio równymi bokowi i dwóm przyległym do niego kątom w drugim trójkącie, to trójkąty te są przystające.



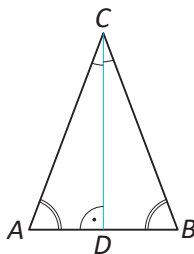
Jeśli $|AB| = |A_1B_1|$, $|\sphericalangle A| = |\sphericalangle A_1|$, $|\sphericalangle B| = |\sphericalangle B_1|$, to $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$.
Wówczas $|AC| = |A_1C_1|$, $|BC| = |B_1C_1|$, $|\sphericalangle C| = |\sphericalangle C_1|$

Cechy przystawania trójkątów wykorzystuje się w dowodach twierdzeń geometrycznych. My będziemy je stosować w prostych wnioskowaniach dotyczących własności figur. W pierwszym przykładzie pokażemy, jak uzasadnić – znane Ci już wcześniej – wybrane własności trójkąta równoramiennego.

Przykład 1.

Niech ABC będzie trójkątem równoramiennym, w którym $|AC| = |BC|$, odcinek CD – środkową poprowadzoną na podstawę. Wykażemy, że:

- kąty przy podstawie trójkąta ABC są równe;
- środkowa CD zawiera się w dwusiecznej kąta przy wierzchołku C ;
- środkowa CD jest wysokością trójkąta ABC .



Rozpatrujemy trójkąty ADC i BDC :

CD – wspólny bok trójkątów ADC i BDC ;

$|AD| = |DB|$ – z założenia, że CD jest środkową;

$|AC| = |CB|$ – z założenia, że trójkąt jest równoramienny.

Zatem z I cechy przystawania trójkątów (bbb) otrzymujemy:

$\triangle ADC \equiv \triangle BDC$, skąd wynika, że:

- $|\angle CAD| = |\angle CBD|$, więc kąty przy podstawie są równe;
- $|\angle ACD| = |\angle DCB|$, czyli CD zawiera się w dwusiecznej kąta przy wierzchołku C ;
- $|\angle CDA| = |\angle CDB|$ oraz $\angle CDA$ i $\angle CDB$ są kątami przyległymi, więc są to kąty proste. Stąd $CD \perp AB$, czyli CD jest wysokością trójkąta ABC .

Przykład 2.

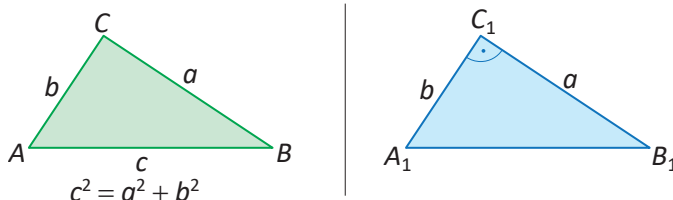
Udowodnimy twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa: *Jeśli długości boków a, b, c trójkąta spełniają zależność $a^2 + b^2 = c^2$, to trójkąt jest prostokątny, przy czym boki długości a i b są przyprostokątnymi tego trójkąta, a bok długości c – przeciwprostokątną tego trójkąta.*

Założenie: W trójkącie ABC boki mają odpowiednio długość a, b, c oraz $a^2 + b^2 = c^2$

Teza: trójkąt ABC jest prostokątny, przy czym boki długości a i b są przyprostokątnymi tego trójkąta, a bok długości c – przeciwprostokątną tego trójkąta

Dowód:

Rozważmy trójkąt ABC oraz trójkąt prostokątny $A_1B_1C_1$, w którym przyprostokątne mają długość a oraz b .



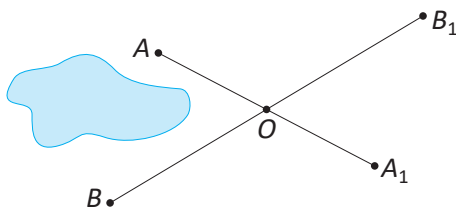
Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta $A_1B_1C_1$ wynika, że przeciwprostokątna w tym trójkącie ma długość $\sqrt{a^2 + b^2}$. Z założenia $a^2 + b^2 = c^2$ dotyczącego boków trójkąta ABC wynika, że najdłuższy bok tego trójkąta również ma długość $\sqrt{a^2 + b^2}$. Zatem trójkąty ABC i $A_1B_1C_1$ mają boki o takich samych długościach, odpowiednio równych: $a, b, \sqrt{a^2 + b^2}$.

Na mocy I cechy przystawania trójkątów – bbb – trójkąty ABC i $A_1B_1C_1$ są przystające. To znaczy, że odpowiednie kąty w tych trójkątach też są równe. W szczególności trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym, w którym krótsze boki długości a, b są przyprostokątnymi, a bok długości c jest przeciwprostokątną tego trójkąta;

co kończy dowód.

Przykład 3.

Pokażemy, jak przy pomocy długiej taśmy mierniczej można obliczyć odległość między dwoma punktami A i B w terenie, między którymi rozciąga się zatoka.



Na łódzie znajdujemy takie miejsce – punkt O – z którego widać punkty A i B . Wyznaczamy odcinek AO , przedłużamy go, otrzymujemy punkt A_1 , dla którego $|OA_1| = |OA|$. Następnie wyznaczamy odcinek BO , który przedłużamy, i otrzymujemy punkt B_1 tak, że $|OB| = |OB_1|$. Na koniec mierzymy odległość między punktami A_1 i B_1 . Jest ona równa szukanej odległości między punktami A i B . Uzasadnienie:

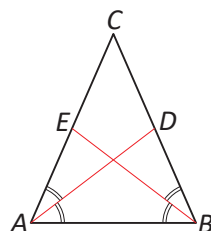
$$\begin{aligned} |OA| &= |OA_1| - \text{z wyboru punktu } A_1 \\ |OB| &= |OB_1| - \text{z wyboru punktu } B_1 \\ |\sphericalangle AOB| &= |\sphericalangle A_1OB_1| - \text{kąty wierzchołkowe są równe.} \end{aligned}$$

Zatem z II cechy przystawania trójkątów (bkb) wynika, że $\triangle AOB \equiv \triangle A_1OB_1$.

$$\text{Wówczas } |AB| = |A_1B_1|$$

Przykład 4.

Wykażemy, że w trójkącie równoramiennym ABC dwusieczne AD i BE kątów przy podstawie mają taką samą długość. Przez dwusieczną kąta w trójkącie rozumiemy odcinek będący częścią wspólną trójkąta i dwusiecznej odpowiedniego kąta.



Rozpatrujemy trójkąty ABE i ABD :

AB – wspólny bok;

$|\angle EAB| = |\angle ABD|$ – kąty przy podstawie trójkąta równoramiennego są równe;

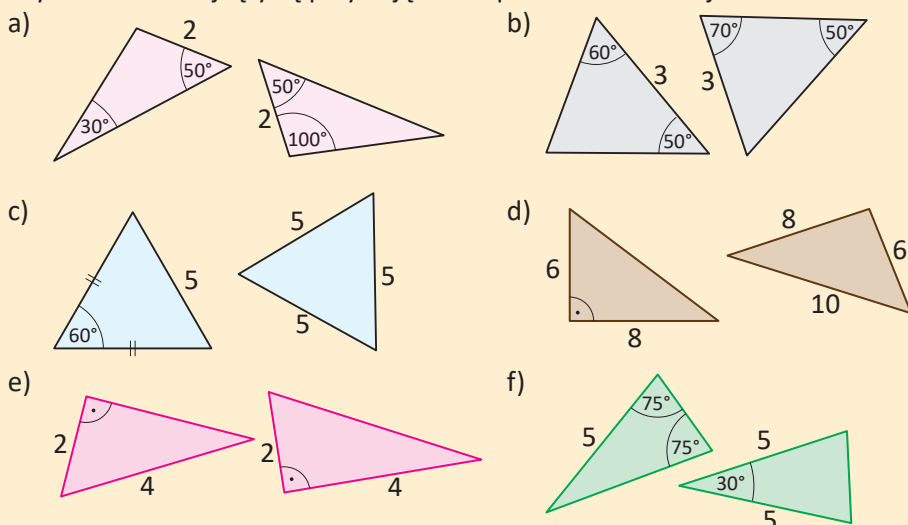
$|\angle ABE| = |\angle BAD|$ – połowy kątów równych są równe.

Z III cechy przystawiania trójkątów (kbk) otrzymujemy, że $\triangle ABE \equiv \triangle ABD$.

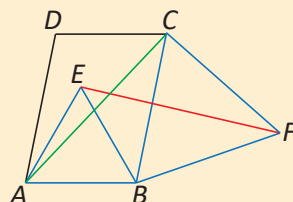
Wówczas $|AD| = |BE|$.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Czy dane dwa trójkąty są przystające? Odpowiedź uzasadnij.



- D** 2. Korzystając z odpowiedniej cechy przystawiania trójkątów, wykaż, że w dowolnym równoległoboku przekątne się połowią.
- D** 3. Wykaż, że w trójkącie równoramiennym wysokości poprowadzone do równych boków są równej długości.
- D** 4. Wykaż, że jeśli dwie wysokości trójkąta poprowadzone do dwóch różnych boków są równej długości, to trójkąt ten jest równoramienny.
- D** 5. W trójkącie różnobocznym połączono środki trzech boków. Wykaż, że powstałe cztery trójkąty są przystające.
- D** 6. Wykaż, że w trójkącie równoramiennym środkowe poprowadzone do równych boków są równej długości.
- D** 7. Wykaż, że jeśli dwie środkowe trójkąta poprowadzone do różnych boków są równej długości, to trójkąt ten jest równoramienny.
- D** 8. Na bokach AB i BC równoległoboku $ABCD$, $|AB| < |BC|$, zbudowano trójkąty równoboczne ABE i CBF – jak na rysunku obok. Wykaż, że $|EF| = |AC|$.



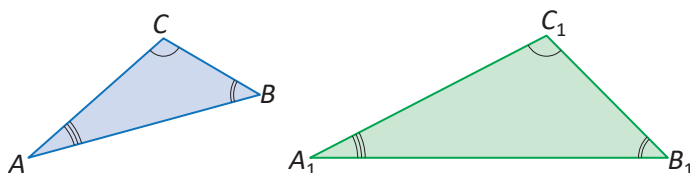
Podobieństwo trójkątów

Wyobrażenie o figurach podobnych mogą dać dwa zdjęcia, z których jedno jest powiększeniem lub pomniejszeniem drugiego. Również rysunek dowolnej figury płaskiej i jego kserokopia wykonana w dowolnej skali to figury podobne. Figury podobne mają taki sam kształt i mogą się różnić jedynie wielkością.

W klasie pierwszej nauczysz się rozpoznawać trójkąty podobne.

Definicja 1.

Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest podobny do trójkąta ABC wtedy, gdy $\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|B_1C_1|}{|BC|} = \frac{|A_1C_1|}{|AC|}$ oraz $|\sphericalangle A_1| = |\sphericalangle A|$, $|\sphericalangle B_1| = |\sphericalangle B|$ i $|\sphericalangle C_1| = |\sphericalangle C|$.



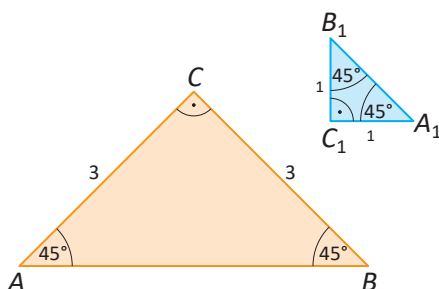
Liczbę k , $k = \frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|B_1C_1|}{|BC|} = \frac{|A_1C_1|}{|AC|}$, nazywamy **skalą podobieństwa** trójkąta $A_1B_1C_1$ do trójkąta ABC . Skala podobieństwa jest zawsze liczbą dodatnią.

Jeśli trójkąt $A_1B_1C_1$ jest podobny do trójkąta ABC w skali k , to trójkąt ABC jest podobny do trójkąta $A_1B_1C_1$ w skali $\frac{1}{k}$, bowiem $\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|BC|}{|B_1C_1|} = \frac{|AC|}{|A_1C_1|} = \frac{1}{k}$.

Podobieństwo trójkątów $A_1B_1C_1$ i ABC zapisujemy symbolicznie: $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$.

Przykład 1.

Na rysunku poniżej dane są dwa trójkąty prostokątne równoramienne: trójkąt ABC o przyprostokątnych długości 3 oraz trójkąt $A_1B_1C_1$ o przyprostokątnych długości 1. Sprawdźmy, czy trójkąty ABC i $A_1B_1C_1$ są podobne. Jeśli tak, to w jakiej skali.



- Oba trójkąty mają takie same kąty: $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$.
- Obliczamy długości przeciwprostokątnych: $|AB| = 3\sqrt{2}$, $|A_1B_1| = \sqrt{2}$.

Mamy:

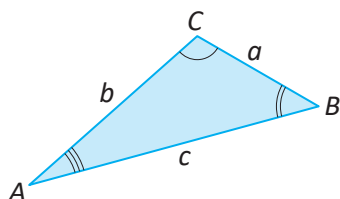
$$\frac{|B_1C_1|}{|BC|} = \frac{|A_1C_1|}{|AC|} = \frac{1}{3} \quad \text{oraz} \quad \frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}.$$

Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest podobny do trójkąta ABC w skali $\frac{1}{3}$. Długości boków trójkąta

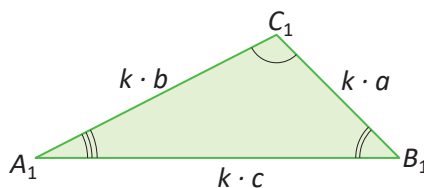
$A_1B_1C_1$ stanowią trzecią część długości odpowiadających im boków w trójkącie ABC . Z kolei boki trójkąta ABC są trzy razy dłuższe od boków trójkąta $A_1B_1C_1$, czyli trójkąt ABC jest podobny do trójkąta $A_1B_1C_1$ w skali 3.

UWAGA: Dowolne dwa trójkąty przystające są do siebie podobne, mają bowiem takie same kąty oraz stosunek długości boków w jednym trójkącie do długości odpowiednich boków w drugim trójkącie jest stały i równy 1. Skala podobieństwa tych trójkątów jest równa 1.

Zastanowimy się teraz, jaka jest zależność między obwodami trójkątów podobnych. Niech boki trójkąta ABC mają długość a, b, c . Z definicji 1. wynika, że trójkąt $A_1B_1C_1$ podobny do trójkąta ABC w skali k , ma boki długości: $k \cdot a, k \cdot b, k \cdot c$. Obliczamy obwody L_{ABC} i $L_{A_1B_1C_1}$ tych trójkątów:



$$L_{ABC} = a + b + c$$



$$L_{A_1B_1C_1} = k \cdot a + k \cdot b + k \cdot c = k \cdot (a + b + c)$$

Zatem $L_{A_1B_1C_1} = k \cdot L_{ABC}$

Jeżeli trójkąt $A_1B_1C_1$ jest podobny do trójkąta ABC , to stosunek obwodu trójkąta $A_1B_1C_1$ do obwodu trójkąta ABC jest równy skali tego podobieństwa.

Przykład 2.

Wiadomo, że różnica obwodów dwóch trójkątów podobnych jest równa 15 cm. Wyznamy obwody tych trójkątów, wiedząc, że większy trójkąt jest podobny do mniejszego w skali $\frac{3}{2}$.

Niech x, y oznaczają odpowiednio obwody większego i mniejszego trójkąta, $x > y > 0$. Wówczas

$$x = y + 15 \quad \text{oraz} \quad \frac{x}{y} = \frac{3}{2}$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} x = y + 15 \\ 2x = 3y \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} 2x = 2y + 30 \\ 2x = 3y \end{cases} \quad \text{skąd} \quad \begin{cases} y = 30 \\ x = 45 \end{cases}$$

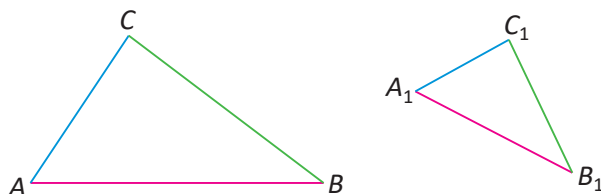
Obwód większego trójkąta jest równy 45 cm, a obwód mniejszego wynosi 30 cm.

Aby stwierdzić, że dwa trójkąty są podobne, nie trzeba sprawdzać wszystkich równości podanych w definicji trójkątów podobnych. O tym, które równości wystarczy sprawdzić, mówią trzy twierdzenia, zwane cechami podobieństwa trójkątów.

Twierdzenie 1. Cecha bbb podobieństwa trójkątów

Jeżeli długości boków trójkąta ABC są proporcjonalne do odpowiednich długości

boków trójkąta $A_1B_1C_1$, czyli $\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|B_1C_1|}{|BC|} = \frac{|A_1C_1|}{|AC|}$, to te trójkąty są podobne.



Przykład 3.

W trójkącie ABC połączono środki boków i otrzymano trójkąt KLM (zobacz rysunek poniżej). Wykażemy, że trójkąt KLM jest podobny do trójkąta ABC i podamy skalę tego podobieństwa.

Założenie: ABC – dany trójkąt

Teza:

$$\triangle KLM \sim \triangle ABC$$

Dowód:

Z twierdzenia o odcinku łączącym środki boków w trójkącie wynika, że:

$$\frac{|KL|}{|AB|} = \frac{1}{2} \quad \frac{|LM|}{|CB|} = \frac{1}{2} \quad \frac{|MK|}{|AC|} = \frac{1}{2}$$

Na podstawie cechy bbb podobieństwa trójkątów wnioskujemy, że $\triangle KLM \sim \triangle ABC$,
co kończy dowód.

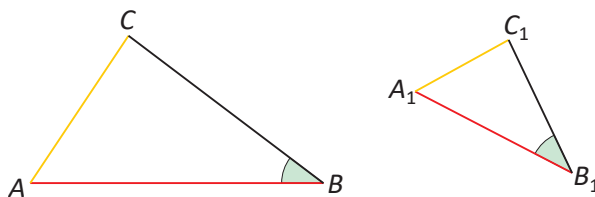
K, L, M – środki odcinków
 BC, AC, AB

Jednocześnie stwierdzamy, że trójkąt KLM jest podobny do trójkąta ABC w skali $\frac{1}{2}$.

Twierdzenie 2. Cecha bkb podobieństwa trójkątów

Jeżeli długości dwóch boków trójkąta ABC są proporcjonalne do odpowiednich

długości dwóch boków trójkąta $A_1B_1C_1$, czyli $\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|B_1C_1|}{|BC|}$, oraz kąty między tymi bokami są równe, to trójkąty te są podobne.



Przykład 4.

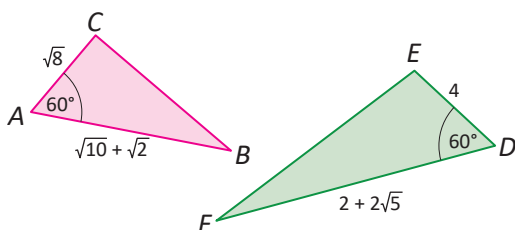
Dane są dwa trójkąty: trójkąt ABC , w którym $|AC| = \sqrt{8}$, $|AB| = \sqrt{10} + \sqrt{2}$, oraz trójkąt DEF , w którym $|DE| = 4$ i $|DF| = 2 + 2\sqrt{5}$. Ponadto, $|\sphericalangle A| = |\sphericalangle D| = 60^\circ$. Wykażemy, że trójkąt DEF jest podobny do trójkąta ABC w skali $\sqrt{2}$.

Założenie: ABC i DEF – dane trójkąty

Teza:

$$\triangle DEF \sim \triangle ABC,$$

skala podobieństwa jest równa $\sqrt{2}$



Dowód: Mamy

$$|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle FDE| = 60^\circ \quad \text{z założenia}$$

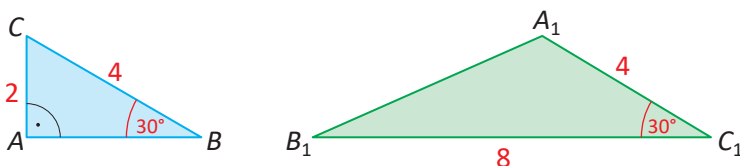
Obliczamy $\frac{|ED|}{|AC|}$ i $\frac{|FD|}{|AB|}$.

$$\frac{|ED|}{|AC|} = \frac{4}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{16}{8}} = \sqrt{2} \quad \text{oraz} \quad \frac{|FD|}{|AB|} = \frac{2+2\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{20}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{10})}{\sqrt{2} + \sqrt{10}} = \sqrt{2}$$

Na mocy cechy bkb podobieństwa trójkątów otrzymujemy, że trójkąt DEF jest podobny do trójkąta ABC , a skala tego podobieństwa jest równa $\sqrt{2}$,

co kończy dowód.

UWAGA: W twierdzeniu 2. bardzo istotne jest założenie, że równe kąty w obu trójkątach znajdują się pomiędzy bokami, których długości tworzą odpowiednią proporcję. Na rysunku poniżej mamy dwa trójkąty ABC i $A_1B_1C_1$:



Na podstawie danych informacji o długościach boków tych trójkątów zauważamy, że spełniona jest równość $\frac{|A_1C_1|}{|AC|} = \frac{|B_1C_1|}{|BC|} = 2$. Jednocześnie w obu trójkątach jeden

z kątów ma 30° . Ale trójkąty ABC i $A_1B_1C_1$ nie są podobne. Trójkąt ABC jest „połową” trójkąta równobocznego, a jego kąty są równe:

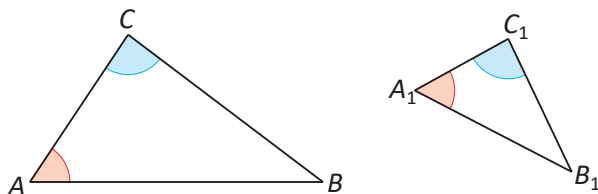
$$|\angle A| = 90^\circ, |\angle B| = 30^\circ, |\angle C| = 60^\circ.$$

Można obliczyć, że $\angle B_1$ jest równy w przybliżeniu 24° (metodę poznasz w klasie drugiej). Zatem kąty trójkąta $A_1B_1C_1$ są równe:

$$|\angle A_1| \approx 126^\circ, |\angle B_1| \approx 24^\circ, |\angle C_1| = 30^\circ.$$

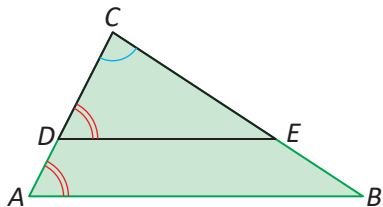
Twierdzenie 3. Cecha kkk podobieństwa trójkątów

Jeżeli dwa kąty trójkąta ABC są odpowiednio równe dwóm kątom trójkąta $A_1B_1C_1$, czyli $|\angle A_1| = |\angle A|$ oraz $|\angle C_1| = |\angle C|$, to trójkąty te są podobne.



Przykład 5.

- a) W trójkącie ABC punkt D należy do boku AC , punkt E – do boku BC oraz $DE \parallel AB$. Wówczas $\triangle ABC \sim \triangle DEC$.

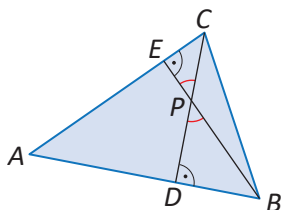


Uzasadnienie:

- $|\angle ACB| = |\angle DCE|$ – wspólny kąt
- $|\angle CAB| = |\angle CDE|$ – z twierdzenia o dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią prostą wynika, że kąty odpowiadające są równe

Na podstawie cechy kkk podobieństwa trójkątów mamy $\triangle ABC \sim \triangle DEC$.

- b) W trójkącie ostrokątnym ABC wysokości CD i BE przecinają się w punkcie P . Wówczas $\triangle DBP \sim \triangle ECP$.



Uzasadnienie:

- $|\angle EPC| = |\angle DPB|$ – kąty wierzchołkowe
- $|\angle PEC| = |\angle PDB| = 90^\circ$ – CD, BE – wysokości

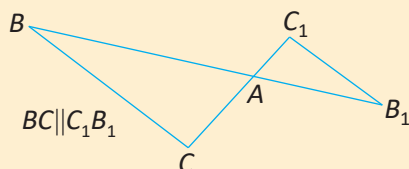
Z cechy kkk wynika, że trójkąty DBP i ECP są podobne.

Sprawdź, czy rozumiesz

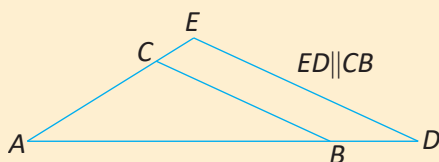
- Korzystając z definicji 1. odpowiedz na pytania:
 - Czy dowolne dwa trójkąty równoboczne są podobne?
 - Czy dowolne dwa trójkąty równoramienne są podobne?
 - Czy dowolne dwa trójkąty prostokątne równoramienne są podobne?

- D** 2. Wykaż, że podane trójkąty są podobne.

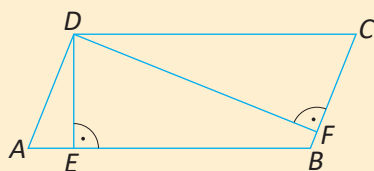
a) $\triangle ABC$ i $\triangle AB_1C_1$



b) $\triangle ABC$ i $\triangle ADE$

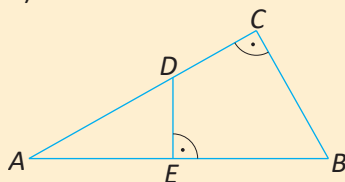


c) $\triangle AED$ i $\triangle FCD$



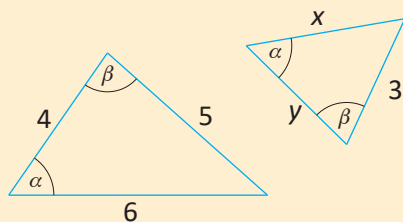
$ABCD$ – równoległobok

d) $\triangle ABC$ i $\triangle AED$

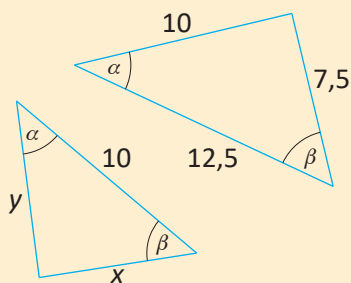


- Wyznacz długości x i y boków w danych trójkątach podobnych:

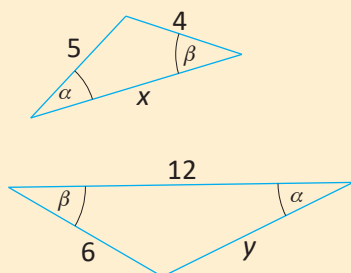
a)



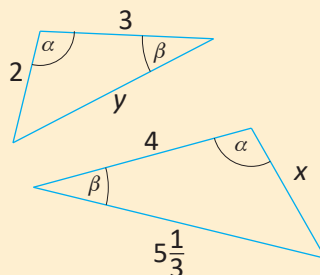
b)



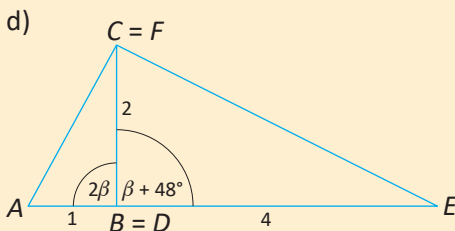
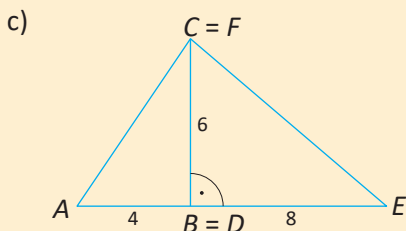
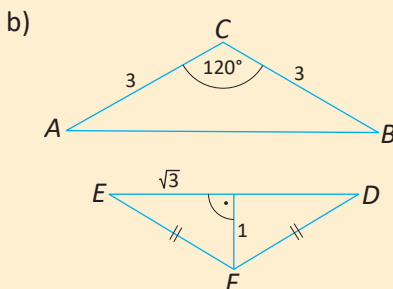
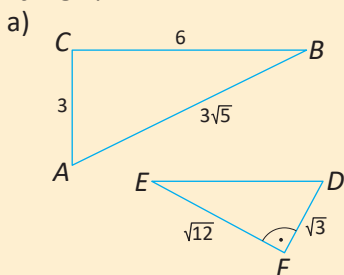
c)



d)



4. Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta $A_1B_1C_1$ w skali k . Oblicz brakujące długości boków tych trójkątów, jeśli:
- $|AB| = 10,5$ cm, $|B_1C_1| = 9$ cm, $|A_1C_1| = 6$ cm, $k = 1,5$
 - $|BC| = 1,5$ dm, $|AC| = 1$ dm, $|A_1B_1| = 1,6$ dm, $k = 0,75$
5. Boki trójkąta ABC mają długość: $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 10$ cm, $|AC| = 12$ cm. Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest podobny do trójkąta ABC , a jego obwód jest równy 6 cm. Oblicz:
- skalę tego podobieństwa
 - długości boków trójkąta $A_1B_1C_1$.
6. Dana jest skala k podobieństwa trójkąta $A_1B_1C_1$ do trójkąta ABC oraz różnica r obwodów tych trójkątów. Oblicz te obwody, jeśli:
- $k = 3$, $r = 14$
 - $k = \frac{1}{4}$, $r = 9$
 - $k = \frac{5}{6}$, $r = 2,5$
 - $k = 2\frac{1}{3}$, $r = 2,8$
7. Obwód trójkąta $A_1B_1C_1$ jest o 20% mniejszy od obwodu trójkąta ABC . Wiedząc, że trójkąt ABC jest podobny do trójkąta $A_1B_1C_1$, oblicz skalę k tego podobieństwa.
8. Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta $A_1B_1C_1$ w skali $\frac{5}{7}$. O ile procent obwód trójkąta $A_1B_1C_1$ jest większy od obwodu trójkąta ABC ?
9. Sprawdź, czy trójkąt DEF jest podobny do trójkąta ABC . Jeśli tak, to podaj skalę tego podobieństwa.

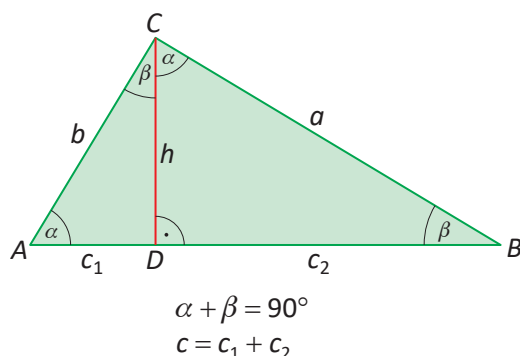


Podobieństwo trójkątów – zastosowanie w zadaniach

Cechy podobieństwa trójkątów wykorzystuje się, podobnie jak cechy przystawiania trójkątów, w dowodach własności figur geometrycznych. Stosując własności trójkątów podobnych, można udowodnić twierdzenie Pitagorasa i wyprowadzić wzór na wysokość w trójkącie prostokątnym, poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego.

Przykład 1.

W dowolnym trójkącie prostokątnym ABC poprowadźmy wysokość CD na przeciwprostokątną AB i przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku poniżej.



Wykażemy, że:

a) $a^2 + b^2 = c^2$

b) $h = \sqrt{c_1 \cdot c_2}$

Ad a) Niech trójkąt ABC ma kąty $\alpha, \beta, 90^\circ$. W trójkącie ADC dwa kąty są z założenia równe α i 90° , zatem trzeci kąt jest równy β . Analogicznie w trójkącie DBC dwa kąty są z założenia równe β i 90° , więc trzeci kąt jest równy α .

Trójkąt ABC jest podobny do każdego z trójkątów CBD i ACD na mocy cechy kkk.

$$\triangle ABC \sim \triangle CBD, \text{ skąd otrzymujemy równość } \frac{a}{c} = \frac{c_2}{a}, \text{ więc } a^2 = c \cdot c_2$$

$$\triangle ABC \sim \triangle ACD, \text{ skąd otrzymujemy równość } \frac{b}{c} = \frac{c_1}{b}, \text{ więc } b^2 = c \cdot c_1$$

Mamy:

$$a^2 + b^2 = c \cdot c_2 + c \cdot c_1 = c(c_2 + c_1) = c^2, \text{ czyli}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Ad b) Rozpatrzmy teraz podobieństwo trójkątów ADC i CDB :

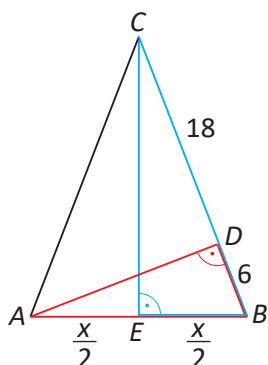
$$\triangle ADC \sim \triangle CDB, \text{ więc } \frac{h}{c_1} = \frac{c_2}{h}, \text{ skąd}$$

$$h^2 = c_1 \cdot c_2, \text{ czyli}$$

$$h = \sqrt{c_1 \cdot c_2} \quad \text{bo } h > 0$$

Przykład 2.

W trójkącie równoramiennym ABC wysokość AD podzieliła ramię BC na odcinki mające długość 18 i 6. Jaką długość ma podstawa AB tego trójkąta?



Oznaczmy długość podstawy AB przez x , $x > 0$.

Poprowadźmy wysokość CE na tę podstawę.

Otrzymujemy

$$|AE| = |EB| = \frac{x}{2}$$

Trójkąty ABD i CEB są trójkątami prostokątnymi o wspólnym kącie ostrym B . Zatem – na mocy cechy kkk – są to trójkąty podobne.

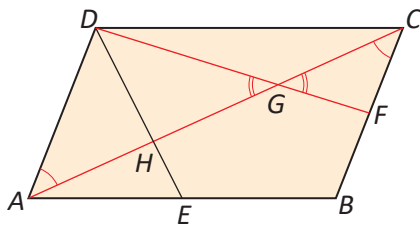
$$\triangle ABD \sim \triangle CBE, \text{ więc } \frac{|EB|}{|DB|} = \frac{|CB|}{|AB|}, \text{ czyli } \frac{\frac{x}{2}}{6} = \frac{24}{x}, \text{ skąd otrzymujemy}$$

$$x^2 = 12 \cdot 24 \text{ i } x > 0, \text{ zatem } x = 12\sqrt{2}$$

Podstawa trójkąta ma długość $12\sqrt{2}$.

Przykład 3.

Dany jest równoległobok $ABCD$, punkt E jest środkiem boku AB , punkt F – środkiem boku BC . Odcinki DE i DF przecięły przekątną AC równoległoboku odpowiednio w punktach H i G . Wykażemy, że $|AH| = |HG| = |GC|$.



Rozważmy trójkąty AGD i CGF . Mamy:

$|\angle GCF| = |\angle GAD|$ kąty naprzemianległe wewnętrzne dla prostych równoległych AD i BC przeciętych prostą AC

$|\angle DGA| = |\angle FGC|$ kąty wierzchołkowe

Zatem z cechy kkk podobieństwa trójkątów mamy

$$\triangle AGD \sim \triangle CGF$$

Ponadto

$$\frac{|GC|}{|AG|} = \frac{|CF|}{|AD|} = \frac{1}{2} \quad \text{bo punkt } F \text{ – z założenia – jest środkiem boku } BC.$$

Z tego wynika, że

$$|GC| = \frac{1}{2}|AG| \quad \text{czyli} \quad |GC| = \frac{1}{3}|AC| \quad (1)$$

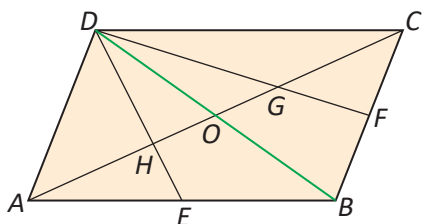
Postępując podobnie, można pokazać, że trójkąt AEH jest podobny do trójkąta CDH w skali $\frac{1}{2}$. Stąd otrzymujemy:

$$|AH| = \frac{1}{2} |HC| \quad \text{czyli} \quad |AH| = \frac{1}{3} |AC| \quad (2)$$

Z równości (1) i (2) wynika, że

$$|AH| = |HG| = |GC| = \frac{1}{3} |AC|$$

UWAGA: Zadanie można rozwiązać nieco krócej, jeśli dorysuje się przekątną BD równoległoboku. Niech O oznacza punkt przecięcia z przekątną AC .



Ponieważ punkt O jest środkiem przekątnej BD (i oczywiście przekątnej AC), więc odcinki AO i DE są środkowymi w trójkącie ABD , a odcinki CO i DF są środkowymi w trójkącie BCD . Z własności środkowych (twierdzenie 2, str. 308) wynika, że

$$|AH| = 2|HO| = \frac{2}{3} |AO| = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} |AC| = \frac{1}{3} |AC| \quad \text{i} \quad |GC| = 2|GO| = \frac{2}{3} |CO| = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} |AC| = \frac{1}{3} |AC|$$

$$\text{Zatem } |AH| = |HG| = |GC| = \frac{1}{3} |AC|.$$

Przykład 4.

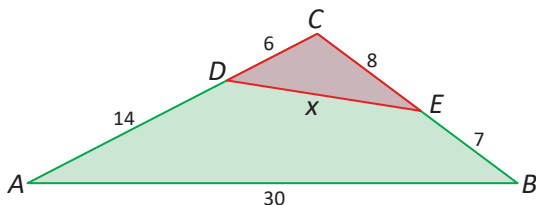
Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AB| = 30$, $|BC| = 15$, $|AC| = 20$. Na boku AC zaznaczono punkt D tak, że $|CD| = 8$, a na boku BC zaznaczono punkt E tak, że $|CE| = 6$. Jaką długość ma odcinek DE ?

Oznaczmy długość odcinka DE przez x , $x > 0$.

Zauważmy, że

$$\frac{|BC|}{|DC|} = \frac{15}{6} = 2,5 \quad \text{oraz}$$

$$\frac{|AC|}{|EC|} = \frac{20}{8} = 2,5$$



Zatem

$$\frac{|BC|}{|DC|} = \frac{|AC|}{|EC|} \quad \text{ponadto}$$

$$|\angle DCE| = |\angle ACB| \quad \text{wspólny kąt trójkątów } ABC \text{ i } DEC$$

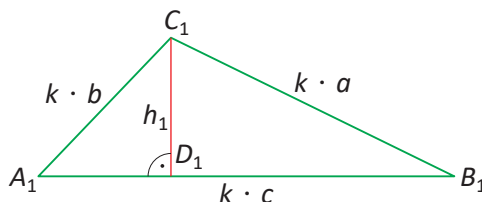
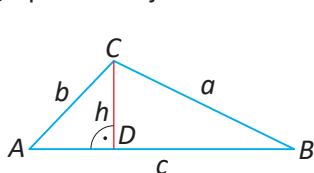
Tak więc

$\triangle ABC \sim \triangle EDC$ (cecha bkb podobieństwa trójkątów), zatem

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|DC|} \quad \text{czyli} \quad \frac{30}{x} = \frac{15}{6} \quad \text{skąd otrzymujemy} \quad x = 12$$

Odcinek DE ma długość 12.

Założmy, że mamy dane dwa trójkąty podobne ABC i $A_1B_1C_1$ oraz boki trójkąta $A_1B_1C_1$ są k razy dłuższe od odpowiednich boków trójkąta ABC . Czy wysokość w trójkącie $A_1B_1C_1$, opuszczona na bok A_1B_1 , też jest k razy dłuższa od wysokości w trójkącie ABC , opuszczonej na bok AB ?



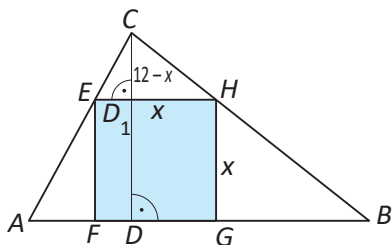
Aby odpowiedzieć na postawione pytanie, przyjrzyjmy się trójkątom ADC i $A_1D_1C_1$. Są one podobne (oba są prostokątne i dodatkowo $|\sphericalangle A| = |\sphericalangle A_1|$ cecha kkk). Skala podobieństwa jest równa $\frac{|A_1C_1|}{|AC|} = \frac{k \cdot b}{b} = k$, a zatem $k = \frac{|C_1D_1|}{|CD|} = \frac{h_1}{h}$, skąd otrzymujemy

$h_1 = k \cdot h$. Tak więc odpowiedź na postawione pytanie jest twierdząca.

W trójkątach podobnych proporcjonalne są nie tylko długości boków, ale również długości innych odpowiadających sobie odcinków np. wysokości.

Przykład 5.

Z kawałka tektury w kształcie trójkąta ostrokątnego, o podstawie mającej długość 20 cm i wysokości opuszczonej na tę podstawę, równej 12 cm, chcemy wyciąć możliwie największy kwadrat, którego bok zawiera się w podstawie trójkąta. Jaka będzie długość boku kwadratu?



Niech trójkąt ABC symbolizuje kawałek tektury, o którym była mowa w zadaniu, a $EFGH$ – wycięty z niej kwadrat. Łatwo zauważyć, że kwadrat będzie największy wtedy, gdy jego wierzchołki E , H będą należeć odpowiednio do boków AC i CB trójkąta.

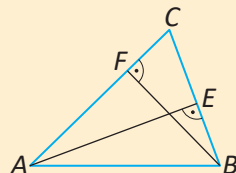
Oznaczmy długość boku kwadratu przez x .

Wówczas $\triangle ABC \sim \triangle EHC$ (uzasadnij to!). Odpowiadające sobie wysokości w tych trójkątach to CD i CD_1 . Zapisujemy proporcję: $\frac{|EH|}{|AB|} = \frac{|CD_1|}{|CD|}$, czyli $\frac{x}{20} = \frac{12-x}{12}$, skąd $x = 7,5$ (cm).

Bok kwadratu będzie miał długość 7,5 cm.

Sprawdź, czy rozumiesz

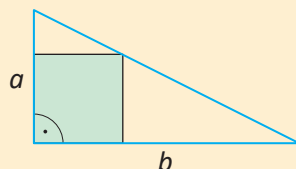
1. W trójkącie prostokątnym ABC odcinek CD jest wysokością poprowadzoną na przeciwprostokątną AB . Wiedząc, że $|CD| = 6$ cm, $|DB| = 4$ cm, oblicz obwód trójkąta ABC .
2. W prostokącie $ABCD$ poprowadzono odcinek DE prostopadły do przekątnej AC , który podzielił tę przekątną w stosunku $1 : 4$. Wiedząc, że $E \in AC$ oraz $|DE| = 2$, oblicz długości boków prostokąta $ABCD$.
3. W trójkącie ABC bok AB ma długość 18 cm. Bok AC podzielono punktami K i L w stosunku $2 : 3 : 4$ – licząc od wierzchołka A . Przez punkty podziału poprowadzono odcinki KM i LN , równoległe do boku AB . Oblicz długości odcinków KM i LN .
4. W trapezie $ABCD$ podstawy mają długość: $|AB| = 14$ cm, $|DC| = 3,5$ cm, a ramię $AD = 6$ cm. Ramiona AD i BC przedłużono do przecięcia w punkcie E . Oblicz $|DE|$.
5. W trójkącie ostrokątnym równoramiennym ABC , $|AC| = |BC|$, wysokość AD podzieliła ramię BC na odcinki długości $|BD| = 5$ cm i $|DC| = 7$ cm. Oblicz długość podstawy AB .
6. W trójkącie ABC poprowadzono wysokości AE i BF , jak na rysunku obok. Wiedząc, że $|CE| = 5$ cm, $|EB| = 4$ cm oraz $|AF| = 2|FC|$, oblicz długość boku AC .



7. W trójkącie prostokątnym ABC dane są: $\angle A = 90^\circ$, $|BC| = 20$ cm, $|AC| = 12$ cm. Oblicz odległość punktu P , będącego środkiem boku AB , od boku BC .
8. Przyprostokątne AC i BC trójkąta prostokątnego mają długość: $|AC| = 12$ cm, $|BC| = 5$ cm. Punkt P należy do boku AC , a jego odległość od punktu C jest taka sama, jak od boku AB . Wyznacz tę odległość.
9. W trójkącie ABC odcinek KL ($K \in AC$, $L \in BC$) jest równoległy do boku AB . Punkt K dzieli bok AC w stosunku $2 : 3$, licząc od punktu A . Wysokość CD przecina odcinek KL w punkcie P . Wiedząc, że odcinek CP jest krótszy od wysokości CD o 8 cm, wyznacz wysokość CD .

D 10. W prostokącie $ABCD$ punkt E jest środkiem boku BC . Odcinek DE przecina przekątną AC w punkcie F . Wykaż, że $|AF| = 2|FC|$.

D 11. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długość a i b . W ten trójkąt wpisano kwadrat, jak na rysunku obok. Wykaż, że długość boku kwadratu jest równa $\frac{ab}{a+b}$.



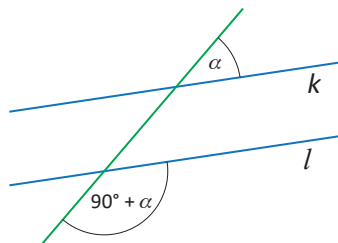
Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 7.

Test

1. Na rysunku obok proste k i l są równoległe.

Zatem:

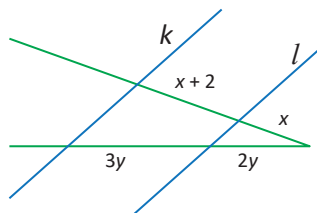
- A. $\alpha = 40^\circ$ B. $\alpha = 45^\circ$
C. $\alpha = 50^\circ$ D. $\alpha = 55^\circ$



2. Kąt wewnętrzny wielokąta foremnego jest równy 140° . Wielokąt ten ma:
A. 7 boków B. 8 boków C. 9 boków D. 10 boków
3. Wielokąt, którego liczba przekątnych jest trzy razy większa od liczby boków, jest:
A. dziewięciokątem B. dziesięciokątem C. siedmiokątem D. ośmiokątem.
4. Na rysunku obok proste k i l są równoległe.

Wówczas:

- A. $x = 3$ B. $x = 4$
C. $x = 5$ D. $x = 6$



5. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C ma 110° . Dwusieczne kątów BAC i ABC przecięły się w punkcie P . Ile stopni ma kąt wypukły APB ?
A. 125° B. 145° C. 235° D. 225°
6. Boki trójkąta mają długość $2c + 5$, $2c$, $c + 2$, gdzie c jest liczbą pierwszą. Wówczas liczba c może być równa:
A. 1 B. 2 C. 3 D. 5
7. W trójkącie równoramiennym jeden z kątów jest równy 120° , a najdłuższy bok ma długość 6. Wówczas wysokość poprowadzona na ten bok jest równa:
A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. 3
8. W trójkącie ostrokątnym różnobocznym ABC wysokości AD i CE przecinają się w punkcie O . Wskaż trójkąty podobne.
A. $\triangle AOC$ i $\triangle OED$ B. $\triangle CEB$ i $\triangle ADC$ C. $\triangle AEO$ i $\triangle COD$ D. $\triangle AED$ i $\triangle EDC$

Zadania otwarte

9. Podstawy trapezu $ABCD$ mają długość: $|AB| = 6$ cm i $|DC| = 3$ cm. Ramiona przedłużono do przecięcia się w punkcie P . Wiedząc, że suma długości ramion trapezu jest równa 7 cm, oblicz obwód trójkąta DCP .

10. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest równa 7 cm, a druga jest o 1 cm krótsza od przeciwprostokątnej. Oblicz:
- długość odcinka łączącego środki przyprostokątnych;
 - wysokość poprowadzoną na przeciwprostokątną.
11. Sprawdź, czy trójkąt o danych długościach boków jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny.
- 5 cm; 1,2 dm; 1,3 dm
 - 0,6 dm; 4 cm; 3 cm

D 12. W trójkącie ABC bok AB ma długość $2\sqrt{5}$ cm oraz dane są długości środkowych AE i BD : $|AE| = 6$ cm, $|BD| = 3$ cm. Wykaż, że $AE \perp BD$.

13. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długość 12 cm, 18 cm. Oblicz odległość środka ciężkości od wierzchołków tego trójkąta.

14. Trójkąty ABC i DEF są podobne, a obwód trójkąta ABC jest o 25% większy od obwodu trójkąta DEF . Wyznacz skalę podobieństwa trójkąta DEF do trójkąta ABC .

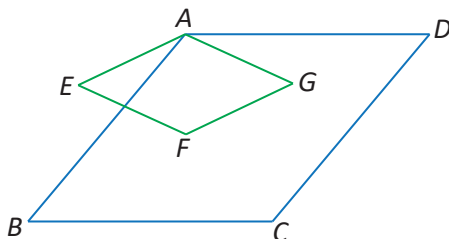
15. Długości przyprostokątnych w trójkącie prostokątnym pozostają w stosunku 3 : 4. Obwód tego trójkąta jest równy 48 cm. Wyznacz:

- długości boków tego trójkąta;
- długość odcinka będącego częścią wspólną danego trójkąta i symetralnej najdłuższego boku tego trójkąta.

16. W trójkącie równoramiennym ABC , $|AC| = |BC|$, odcinek AD jest wysokością trójkąta ABC poprowadzoną na bok BC . Odcinek DE jest wysokością trójkąta ABD poprowadzoną na bok AB . Wiedząc, że $|DE| = 2$ oraz $|EB| = 1$, oblicz obwód trójkąta ABC .

D 17. W trójkącie równoramiennym ABC , $|AC| = |BC|$, punkty K , L , M są odpowiednio środkami boków AC , AB , BC . Prosta ML przecina się w punkcie P z prostą prostopadłą do odcinka KM i przechodzącą przez punkt K . Wykaż, że $\triangle KPM \equiv \triangle LBC$.

D 18. Czworokąty $ABCD$ i $AEFG$ na rysunku obok są rombami, w których kąty ostre mają miarę 50° . Wykaż, że $|BE| = |DG|$.



D 19. W trójkącie prostokątnym równoramiennym ABC , $|\angle A| = 90^\circ$, punkt D jest środkiem boku AB . Z punktu D poprowadzono odcinek DE taki, że $E \in BC$ oraz $DE \perp BC$. Wykaż, że trójkąt EDB jest podobny do trójkąta ABC , i oblicz skalę tego podobieństwa.

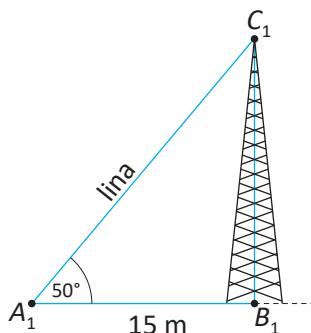
D 20. W trójkącie równobocznym ABC poprowadzono środkowe AE i CD , które przecięły się w punkcie P . Wykaż, że trójkąt ADE jest podobny do trójkąta EPD , i oblicz skalę tego podobieństwa.

8. Trygonometria kąta ostrego

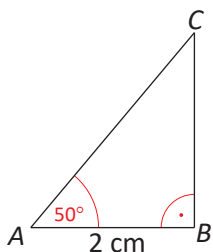
Określenie sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa w trójkącie prostokątnym

Lina podtrzymująca maszt jest umocowana w odległości 15 m od podstawy masztu i jest nachylona do ziemi pod kątem 50° . Czy na podstawie powyższych danych można określić przybliżoną wysokość masztu?

Niech trójkąt $A_1B_1C_1$ przedstawia sytuację opisaną w zadaniu.



Zbudujmy trójkąt ABC podobny do trójkąta $A_1B_1C_1$. Na podstawie cechy (kkk) podobieństwa trójkątów wiemy, że wystarczy skonstruować trójkąt o takich samych kątach, jakie ma trójkąt $A_1B_1C_1$. Niech $|\sphericalangle A| = 50^\circ$, $|\sphericalangle B| = 90^\circ$ i dodatkowo przyprostokątna AB ma długość 2 cm.



Po zmierzeniu przyprostokątnej BC stwierdzamy, że jej długość jest w przybliżeniu równa 2,4 cm. Zatem

$$\frac{|BC|}{|AB|} = 1,2$$

W trójkątach podobnych ABC i $A_1B_1C_1$ prawdziwa jest równość

$$\frac{|B_1C_1|}{|A_1B_1|} = \frac{|BC|}{|AB|}, \text{ stąd } |B_1C_1| \approx 1,2 \cdot |A_1B_1|, \text{ zatem}$$

$$|B_1C_1| \approx 1,2 \cdot 15 = 18 \text{ (m)}$$

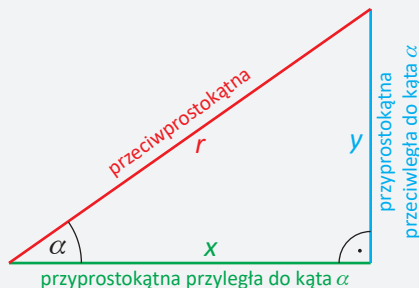
Maszt ma wysokość w przybliżeniu równą 18 m.

W rozwiązaniu tego zadania kluczowym elementem było wyznaczenie stosunku długości pewnych boków w trójkącie prostokątnym. Wszystkie trójkąty prostokątne, których jednym z kątów ostrych jest kąt α , są podobne. Zatem stosunki długości

odpowiednich boków w tych trójkątach są równe. Ta własność pozwoli nam wprowadzić następującą definicję.

Definicja 1.

W trójkącie prostokątnym dany jest kąt ostry α .



- a) **Tangensem kąta ostrego α** w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej do kąta α do przyprostokątnej przyległej do kąta α :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

- b) **Cotangensem kąta ostrego α** w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do przyprostokątnej przeciwległej do kąta α :

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$$

- c) **Sinusem kąta ostrego α** w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej do kąta α do przeciwprostokątnej:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}$$

- d) **Cosinusem kąta ostrego α** w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do przeciwprostokątnej:

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

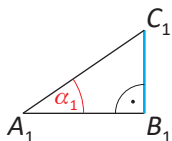
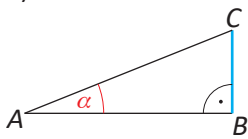
Tangens, cotangens, sinus i cosinus zwyczajowo nazywamy funkcjami trygonometrycznymi.

Zauważ, że tangens i cotangens kąta ostrego są liczbami, które należą do przedziału $(0, +\infty)$. Inaczej mówiąc, stosunek przyprostokątnych trójkąta prostokątnego może wyrażać się dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią.

Natomiast sinus i cosinus kąta ostrego to liczby z przedziału $(0, 1)$, ponieważ przyprostokątna jest zawsze krótsza od przeciwprostokątnej.

Na rysunku poniżej przedstawione są trójkąty prostokątne ABC i $A_1B_1C_1$.

a)



Założmy, że $|BC| = |B_1C_1|$ oraz $\alpha_1 > \alpha$.

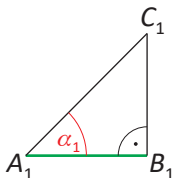
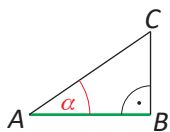
Wówczas $|A_1C_1| < |AC|$ oraz

$|A_1B_1| < |AB|$. Zatem

$\sin \alpha_1 > \sin \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha_1 > \operatorname{tg} \alpha$

Wraz ze wzrostem kąta rośnie wartość sinusa i tangensa.

b)



Założmy, że $|AB| = |A_1B_1|$ i $\alpha_1 > \alpha$.

Wówczas $|A_1C_1| > |AC|$ oraz

$|B_1C_1| > |BC|$. Zatem

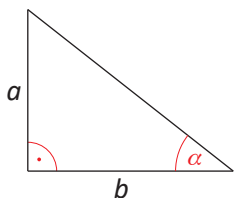
$\cos \alpha_1 < \cos \alpha$ i $\operatorname{ctg} \alpha_1 < \operatorname{ctg} \alpha$

Wraz ze wzrostem kąta maleje wartość cosinusa i cotangensa.

Przykład 1.

Pod jakim kątem padają promienie słoneczne, jeśli kij mający długość 162 cm, ustawiony prostopadłe do powierzchni Ziemi na płaskim terenie, rzuca cień, którego długość jest równa 200 cm?

Założmy, że trójkąt prostokątny na rysunku poniżej reprezentuje sytuację opisaną w zadaniu.



Niech α oznacza kąt padania promieni słonecznych, a – długość kija, b – długość cienia.

Wówczas

$$a = 162 \text{ (cm)}$$

$$b = 200 \text{ (cm)}$$

Zatem

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{162}{200} = 0,81$$

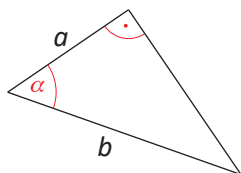
Promienie słoneczne padają pod takim ostrym kątem α , którego tangens jest równy 0,81. Aby wyznaczyć α możemy postąpić dwojako: wykorzystać tablice matematyczne i tam odczytać szukaną wartość lub posłużyć się kalkulatorem, którym można obliczać wartości funkcji trygonometrycznych. Takie kalkulatory zwykle umożliwiają również obliczanie miary kąta, jeśli znana jest wartość funkcji trygonometrycznej. W przypadku naszego zadania powinniśmy wykorzystać przycisk oznaczony TAN^{-1} . Używając go, otrzymalibyśmy wynik w przybliżeniu równy 39° .

Promienie słoneczne padają pod kątem w przybliżeniu równym 39° .

Przykład 2.

Dany jest trójkąt prostokątny, w którym przyprostokątna przyległa do kąta ostrego α ma długość a oraz przeciwprostokątna ma długość b . Wiadomo, że $\cos \alpha = \frac{3}{4}$.

Wyznamy wartość ułamka $\frac{b^2 + 2a^2}{3ab}$.



Zauważamy, że $\frac{a}{b} = \cos \alpha = \frac{3}{4}$, zatem

$$a = \frac{3}{4}b$$

w ułamku $\frac{b^2 + 2a^2}{3ab}$ podstawiamy w miejsce a wyrażenie $\frac{3}{4}b$

i obliczamy:

$$\frac{b^2 + 2a^2}{3ab} = \frac{b^2 + 2 \cdot \left(\frac{3}{4}b\right)^2}{3 \cdot \frac{3}{4}b \cdot b} = \frac{b^2 + \frac{9}{8}b^2}{\frac{9}{4}b^2} = \frac{\frac{17}{8}b^2}{\frac{9}{4}b^2} = \frac{17}{8} \cdot \frac{4}{9} = \frac{17}{18}$$

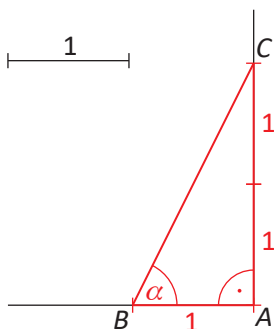
Wartość ułamka $\frac{b^2 + 2a^2}{3ab}$ jest równa $\frac{17}{18}$.

Przykład 3.

Zbudujemy kąt ostry α , dla którego:

a) $\operatorname{tg} \alpha = 2$ b) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$

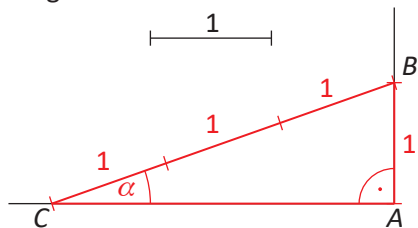
Ad a) Na podstawie definicji tangensa kąta α , wystarczy skonstruować trójkąt prostokątny, w którym stosunek długości przyprostokątnych jest równy 2 : 1. Załóżmy, że dany jest odcinek mający długość 1.



Opis konstrukcji:

1. Kreślimy kąt prosty o wierzchołku A.
2. Na jednym ramieniu kąta odkładamy taki odcinek AB, że $|AB| = 1$, na drugim ramieniu kąta odkładamy taki odcinek AC, że $|AC| = 2$.
3. Kąt ABC jest szukany kąt.

Ad b) Z definicji sinusa kąta α wynika, że wystarczy zbudować trójkąt prostokątny, w którym jedna z przyprostokątnych ma długość 1, a przeciwprostokątna ma długość 3.



Opis konstrukcji:

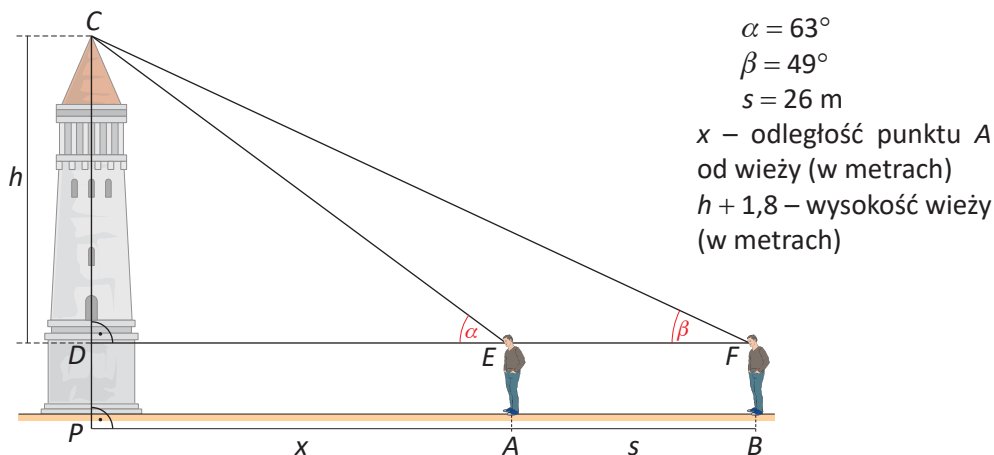
1. Kreślimy kąt prosty o wierzchołku A.
2. Na jednym ramieniu kąta odkładamy taki odcinek AB, że $|AB| = 1$.
3. Zakreślamy okrąg o środku w punkcie B i promieniu 3. Okrąg ten przecina drugie ramię kąta w punkcie C.
4. Kąt ACB jest szukany kąt.

Przykład 4.

Obserwator dwukrotnie zmierzył kąt wzniesienia wieży: raz w punkcie A, drugi raz w takim punkcie B, odległym od A o 26 m, że punkt podstawy P wieży należy do prostej AB ((zobacz rysunek poniżej)). W pierwszym przypadku otrzymał kąt 63° , w drugim kąt 49° . Wiedząc, że oczy obserwatora znajdowały się 1,8 m od ziemi, obliczymy wysokość wieży.

UWAGA: Jeśli patrzymy do góry, to prosta, wzdłuż której patrzymy, tworzy z płaszczyzną poziomą, będącą na wysokości oczu obserwatora, kąt. Kąt ten nazywamy kątem wzniesienia. Jeśli patrzymy do dołu, to odpowiedni kąt nazywamy kątem depresji.

Niech dwa trójkąty prostokątne CDE i CDF reprezentują sytuację opisaną w zadaniu.



W trójkącie CDE jeden kąt ostry ma miarę α , przyprostokątna przyległa do tego kąta ma długość x , natomiast przeciwległa h . Zatem prawdziwa jest równość:

$$\frac{x}{h} = \text{ctg } \alpha \quad \text{skąd} \quad (1) \quad x = h \cdot \text{ctg } \alpha$$

Z kolei dla trójkąta prostokątnego CDF zachodzi równość:

$$\frac{x+s}{h} = \text{ctg } \beta \quad \text{zatem} \quad (2) \quad x+s = h \cdot \text{ctg } \beta$$

Jeśli wartość $h \cdot \operatorname{ctg} \alpha$, wyliczoną z równania (1) wstawimy w miejsce x do równania (2), to otrzymamy równanie z niewiadomą h :

$$h \cdot \operatorname{ctg} \alpha + s = h \cdot \operatorname{ctg} \beta$$

$$h \cdot \operatorname{ctg} \beta - h \cdot \operatorname{ctg} \alpha = s$$

$$h \cdot (\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha) = s$$

z treści zadania wynika, że $\operatorname{ctg} \beta \neq \operatorname{ctg} \alpha$,
czyli $\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha \neq 0$

$$h = \frac{s}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}$$

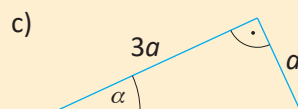
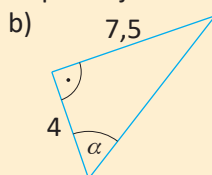
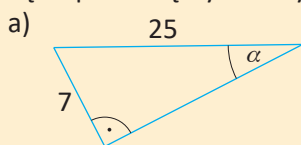
Po wstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy:

$$h = \frac{26}{\operatorname{ctg} 49^\circ - \operatorname{ctg} 63^\circ} \approx 72,3 \text{ (m)} \quad 72,3 + 1,8 = 74,1 \text{ (m)}$$

Wieża ma ok. 74 m wysokości.

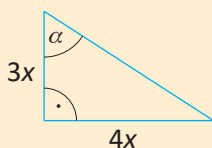
Sprawdź, czy rozumiesz

1. Oblicz wartość sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym na rysunku poniżej:

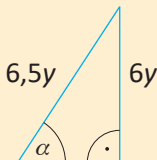


2. Na podstawie danych na rysunku poniżej, oblicz wartość wyrażenia:

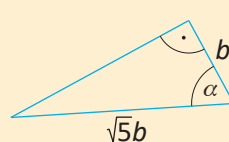
a) $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}$



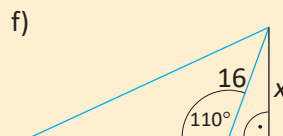
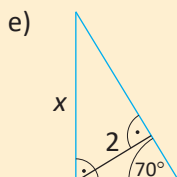
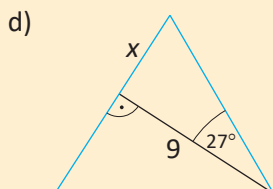
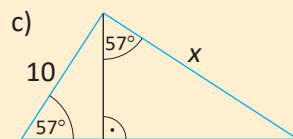
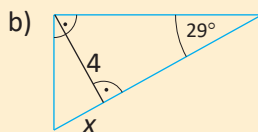
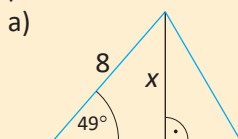
b) $\frac{3 \cos \alpha + \sin \alpha}{13 \cos \alpha \cdot \sin \alpha}$



c) $\frac{\operatorname{tg} \alpha + 2 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \operatorname{ctg} \alpha}$

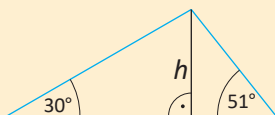


3. Oblicz długość odcinka x zaznaczonego na rysunku poniżej. Skorzystaj z tablic trygonometrycznych. Wynik podaj z dokładnością do pierwszego miejsca po przecinku.

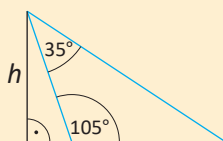


4. Na podstawie podanych niżej informacji oblicz obwód danego trójkąta. Wynik podaj z dokładnością do 1 cm.

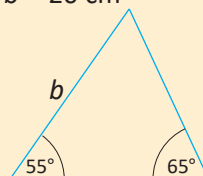
a) $h = 4$ cm



b) $h = 6$ cm



c) $b = 20$ cm



5. W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości a i b oraz przeciwprostokątnej długości c kąt ostry α leży naprzeciw boku długości a . Wiedząc, że:

a) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, oblicz $\frac{2c-a}{c}$

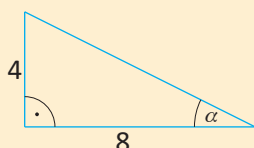
b) $\cos \alpha = \frac{1}{4}$, oblicz $1 - \frac{a^2}{c^2}$

c) $\operatorname{tg} \alpha = 4$, oblicz $\frac{a+5b}{2b+a}$

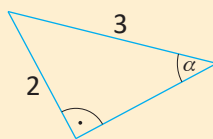
d) $\operatorname{ctg} \alpha = 3$, oblicz $\frac{a+b}{b-a}$

6. Wyznacz miarę kąta α , korzystając z danych na rysunku:

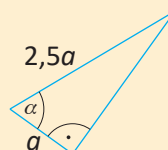
a)



b)



c)

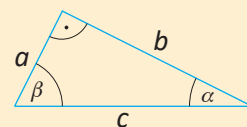


7. Dany jest trójkąt prostokątny o bokach długości a , b , c i kątach ostrych α , β – jak na rysunku obok. Wyznacz wielkości, podane obok danych:

a) $a = 4$, $b = 6$; c , α , β

b) $b = 8$, $\alpha = 37^\circ$; a , c , β ,

c) $c = 15$, $\beta = 76^\circ$; a , b , α



8. Skonstruuj kąt ostry α , wiedząc, że:

a) $\operatorname{tg} \alpha = 2$

b) $\sin \alpha = \frac{2}{5}$

c) $\cos \alpha = \frac{3}{7}$

d) $\operatorname{ctg} \alpha = 0,5$

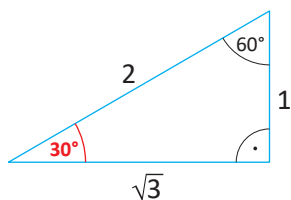
e) $\cos \alpha = 0,8$

f) $\sin \alpha = 0,75$

9. Droga wznosi się pod kątem 6° . Janek przeszedł tą drogą 650 metrów. Jaką pokonał wysokość?
10. Wieża ma wysokość 34 m. W jakiej odległości od podstawy wieży zmierzono kąt wzniesienia tej wieży, jeśli był równy 26° ?
11. Pilot samolotu lecącego na wysokości 2000 m z prędkością 230 km/h spostrzegł pewną miejscowość pod kątem depresji równym 5° . Po ilu minutach samolot znajdzie się nad tą miejscowością?
12. Do miski mającej kształt półkuli o promieniu 10 cm nalano wodę do wysokości 6 cm. Jaki jest największy kąt α , o który można przechylić miskę tak, żeby woda się nie wylała?

Wartości sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa kątów 30° , 45° i 60°

Kąty 30° i 60° znajdują się w trójkącie prostokątnym, będącym „połową” trójkąta równobocznego. Możemy wybrać do obliczeń dowolny taki trójkąt. Obliczenia będą stosunkowo proste, jeśli przyjmimy, że przeciwprostokątna ma długość 2. Wówczas długości przyprostokątnych w tym trójkącie wynoszą odpowiednio 1 i $\sqrt{3}$. Stąd otrzymujemy:

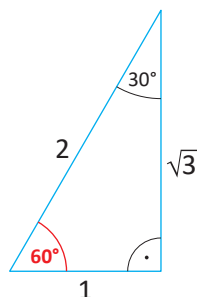


$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$



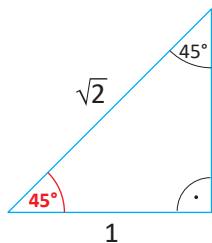
$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

W trójkącie prostokątnym równoramiennym kąty ostre mają po 45° . Jeśli przyjmemy, że każda przyprostokątna ma długość 1, to przeciwprostokątna będzie mieć długość $\sqrt{2}$. Zatem:



$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

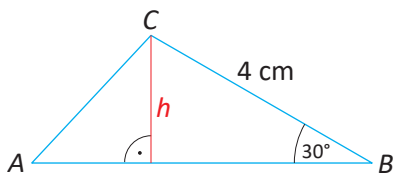
$$\operatorname{ctg} 45^\circ = 1$$

Otrzymane wyniki przedstawmy w tabeli.

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Przykład 1.

W trójkącie ABC bok BC ma długość 4 cm, a kąt ABC jest równy 30° . Wyznamy wysokość trójkąta opuszczoną na bok AB .



$$\alpha = 30^\circ$$

$$|BC| = 4 \text{ cm}$$

h – szukana wysokość

Obliczamy:

$$\frac{h}{|BC|} = \sin \alpha$$

$$\frac{h}{4} = \sin 30^\circ, \text{ skąd } h = 4 \cdot \sin 30^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$h = 2 \text{ (cm)}$$

Wysokość trójkąta opuszczona na bok AB jest równa 2 cm.

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $2\sin 30^\circ + \tg 45^\circ + 3\cos 60^\circ$

b) $\tg 30^\circ \cdot \ctg 60^\circ - \ctg 45^\circ$

c) $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cos 45^\circ$

d) $(\tg 30^\circ - \ctg 30^\circ) : \cos 30^\circ$

e) $\ctg 45^\circ \cdot \cos 60^\circ - \sin 60^\circ \cdot \tg 60^\circ$

f) $4\ctg^2 30^\circ - \tg^2 30^\circ$

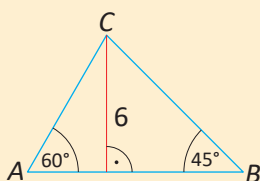
g) $(\sin 60^\circ + \cos 60^\circ)(\sin 60^\circ - \cos 60^\circ)$

h) $4(\cos 45^\circ + \cos 30^\circ)^2$

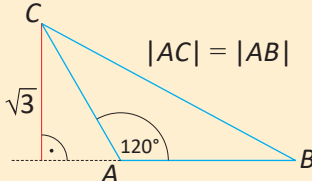
2. W trójkącie równoramiennym ramię ma długość 12 cm, a kąt przy podstawie jest równy 30° . Oblicz wszystkie wysokości tego trójkąta.

3. Oblicz obwód trójkąta ABC na rysunkach poniżej.

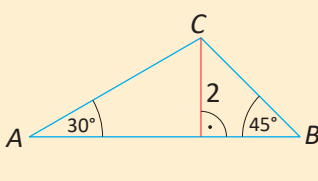
a)



b)



c)



4. W prostokącie $ABCD$ przekątne AC i BD mają długość 4 cm i przecinają się pod kątem α . Oblicz odległość wierzchołka D od przekątnej AC , jeśli:

a) $\alpha = 60^\circ$

b) $\alpha = 45^\circ$

c) $\alpha = 30^\circ$

d) $\alpha = 90^\circ$

5. W trójkącie ABC kąty α i β są ostre. Wyznacz miary kątów tego trójkąta, jeśli:

a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\ctg \beta = 1$

b) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\tg \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\tg \alpha = \sqrt{3}$ i $\ctg \beta = \sqrt{3}$

d) $\sin \alpha = 0,5$ i $\cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Zależności między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta ostrego

Równość, w której zmienne występują wyłącznie w argumentach funkcji trygonometrycznych i która jest prawdziwa dla wszystkich wartości tych zmiennych (dla których funkcje są określone), nazywamy **tożsamością trygonometryczną**.

Poniższe twierdzenie podaje podstawowe tożsamości trygonometryczne dla funkcji trygonometrycznych kąta ostrego.

Twierdzenie 1. Postawowe tożsamości trygonometryczne

Jeśli α jest kątem ostrym, to:

$$1) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$2) \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$3) \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$4) \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1.$$

UWAGA: Zapis $\sin^2 \alpha$ oznacza $(\sin \alpha)^2$, podobnie $\cos^2 \alpha$ oznacza $(\cos \alpha)^2$.

Równość $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ nazywamy **jedynką trygonometryczną**.

Udowodnimy punkty 1) i 2).

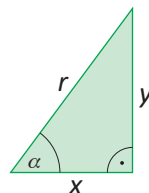
Załóżmy, że mamy dany trójkąt prostokątny, w którym jeden z kątów ostrych jest równy α , przyprostokątne mają długość x , y , a przeciwprostokątna ma długość r (jak na rysunku poniżej).

Korzystając z definicji 1., str. 367, otrzymujemy:

Ad 1)

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

Równość $x^2 + y^2 = r^2$ wynika z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do danego trójkąta prostokątnego.



Ad 2)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Postępując podobnie, udowodnij punkty 3) i 4).

Przykład 1.

Wiedząc, że $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ i α jest kątem ostrym, obliczmy $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$.

I sposób

Z jedynki trygonometrycznej wyznaczamy $\sin \alpha$.

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \quad \text{stąd} \quad \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} \quad \text{zatem}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{16}{25} \quad \text{i} \quad \sin \alpha > 0$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}$$

Teraz obliczamy $\operatorname{tg} \alpha$ i $\operatorname{ctg} \alpha$.

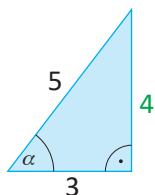
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \text{czyli} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3} \quad \text{oraz} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad \text{czyli} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$$

Szukane wartości są równe: $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$.

II sposób

Ponieważ α jest kątem ostrym, to możemy rozpatrzyć trójkąt prostokątny, w którym jeden z kątów ostrych jest równy α i dla którego $\cos \alpha = \frac{3}{5}$. Takim trójkątem jest,

na przykład, trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej mającej długość 5 i jednej przyprostokątnej, przyległej do kąta α , mającej długość 3. Wtedy druga przyprostokątna ma długość 4.



Otrzymujemy:

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$$

Przykład 2.

Wiedząc, że $\operatorname{tg} \alpha = 3$ i α jest kątem ostrym, obliczmy $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$.

Najpierw obliczamy $\operatorname{ctg} \alpha$.

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad \text{więc} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{3}$$

Z tożsamości 3) twierdzenia 1. otrzymujemy zależność:

$$3 = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \text{ skąd } \sin \alpha = 3 \cdot \cos \alpha$$

Do wzoru $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ w miejsce $\sin \alpha$ wstawiamy $(3 \cdot \cos \alpha)$.

$$(3 \cdot \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1, \text{ stąd } 10 \cdot \cos^2 \alpha = 1, \text{ zatem}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{10} \text{ i } \cos \alpha > 0, \text{ więc}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Na koniec obliczamy $\sin \alpha$.

$$\sin \alpha = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Szukane wartości są równe: $\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{3}$.

Przykład 3.

Sprawdźmy, czy poniższa równość jest tożsamością trygonometryczną:

$$(\cos^2 \alpha - 1)(\operatorname{tg}^2 \alpha + 1) = -\operatorname{tg}^2 \alpha, \text{ jeśli } \alpha \text{ jest kątem ostrym.}$$

Aby pokazać, że podana równość jest tożsamością, wystarczy tak przekształcić jedną stronę tej równości, aby otrzymać drugą. Oczywiście łatwiej jest przekształcać stronę bardziej rozbudowaną (w tym przypadku – lewą).

$$\begin{aligned} L &= (\cos^2 \alpha - 1)(\operatorname{tg}^2 \alpha + 1) = \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha - 1 = \\ &= \cos^2 \alpha \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \cos^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha - 1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha - 1 = \\ &= 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha - 1 = -\operatorname{tg}^2 \alpha = P \end{aligned}$$

Wykorzystując poznane wzory, pokazaliśmy, że lewa strona równa się prawej dla dowolnego kąta ostrego, więc rozpatrywana przez nas równość jest tożsamością trygonometryczną.

Prawdziwe jest również następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.

Jeśli liczby a, b należące do przedziału $(0, 1)$ spełniają zależność $a^2 + b^2 = 1$, to istnieje taki kąt ostry α , że $\sin \alpha = a$, $\cos \alpha = b$.

Zastanówmy się, dlaczego tak jest. Otóż jeśli a, b należą do przedziału $(0, 1)$, to $a > a^2$ i $b > b^2$, zatem $a + b > a^2 + b^2$

$a^2 + b^2 = 1$, więc otrzymujemy $a + b > 1$.

Z nierówności trójkąta wynika, że istnieje trójkąt o bokach długości a , b i 1 (a , b są długościami krótszych boków w tym trójkącie). Z równości $a^2 + b^2 = 1$ i twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa wynika, że trójkąt ten jest prostokątny i przeciwprostokątna ma długość 1. Jeśli teraz przez α oznaczymy kąt ostry w tym trójkącie, leżący naprzeciwko przyprostokątnej długości a , to (na mocy definicji 1. ze str. 331) $\sin \alpha = a$ i $\cos \alpha = b$.

Przykład 4.

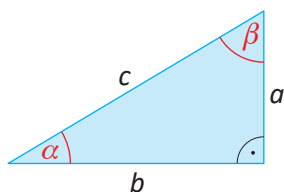
Sprawdźmy, czy liczby $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ i $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ są odpowiednio sinusem i cosinusem tego samego kąta ostrego.

Zauważamy, że dane liczby należą do przedziału $(0, 1)$. Obliczamy sumę kwadratów tych liczb:

$$\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3-2\sqrt{3}+1}{8} + \frac{3+2\sqrt{3}+1}{8} = \frac{4+4}{8} = 1$$

Liczby $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ i $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ są odpowiednio sinusem i cosinusem pewnego kąta ostrego.

Rozpatrzmy teraz trójkąt prostokątny o kątach ostrych α i β oraz o bokach długości a , b , c (jak na rysunku poniżej).



Z definicji 1., str. 331, wynika, że liczba $\frac{a}{c}$ jest war-

tością sinusa α . Zauważ, że jest to jednocześnie wartość cosinusa β . Stąd otrzymujemy równość

$$(*) \quad \sin \alpha = \cos \beta \quad \text{ale} \quad \alpha + \beta = 90^\circ \quad \text{więc} \quad \beta = 90^\circ - \alpha$$

Wstawiając wartość β do równości $(*)$ otrzymujemy wzór

$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$

Twierdzenie 3.

Jeśli α jest kątem ostrym, to:

- 1) $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$
- 2) $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$
- 3) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)$
- 4) $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$.

Wykaż, że prawdziwe są wzory: 2), 3) i 4).

Wzory z twierdzenia 3. nazywamy wzorami redukcyjnymi dla kątów $90^\circ - \alpha$.

Przykład 5.

Obliczymy wartość wyrażeń (bez korzystania z kalkulatora i tablic trygonometrycznych):

a) $\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ$

b) $\operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 50^\circ$

Zauważamy, że $20^\circ + 70^\circ = 90^\circ$ oraz $40^\circ + 50^\circ = 90^\circ$

Ad a) Korzystamy ze wzoru 1) z twierdzenia 2., a następnie stosujemy „jedynkę trygonometryczną”:

$$\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ = \sin^2 20^\circ + \cos^2(90^\circ - 70^\circ) = \sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ = 1$$

Ad b) Najpierw stosujemy wzór 3) z twierdzenia 2., a następnie wzór 4) z twierdzenia 1.:

$$\operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 50^\circ = \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{ctg}(90^\circ - 50^\circ) = \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{ctg} 40^\circ = 1$$

Wiesz już, że jeśli α jest kątem ostrym, to $0 < \sin \alpha < 1$ i podobnie $0 < \cos \alpha < 1$.

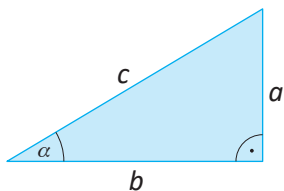
Zatem $0 < \sin \alpha + \cos \alpha < 2$.

W kolejnym przykładzie oszacujemy dokładniej sumę $\sin \alpha + \cos \alpha$.

Przykład 6.

Wykażemy, że jeśli α jest kątem ostrym, to $1 < \sin \alpha + \cos \alpha \leq \sqrt{2}$.

1. Aby udowodnić, że $\sin \alpha + \cos \alpha > 1$, rozważmy trójkąt prostokątny, w którym jeden z kątów ostrych jest równy α , a boki mają długość: a, b, c – jak na rysunku poniżej.



$$\text{Wtedy } \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

Z nierówności trójkąta wynika, że $a + b > c$.

$$\text{Zatem } \frac{a+b}{c} > \frac{c}{c} = 1, \text{ skąd } \sin \alpha + \cos \alpha > 1$$

2. Teraz pokażemy, że prawdziwa jest nierówność

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha \leq \frac{1}{2}.$$

Wiemy, że dla dowolnego kąta ostrego α mamy:

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 \geq 0, \text{ skąd}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \geq 0, \text{ czyli}$$

$$1 - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \geq 0$$

$$(*) \sin \alpha \cdot \cos \alpha \leq \frac{1}{2}$$

3. Na koniec szacujemy wartość wyrażenia $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2$, korzystając z zależności (*):

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha =$$

$$= 1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \leq 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 + 1 = 2$$

Zatem

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 \leq 2, \quad \text{skąd otrzymujemy}$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha \leq \sqrt{2}, \quad \text{bo } \sin \alpha + \cos \alpha > 0 \text{ dla dowolnego kąta ostrego } \alpha, \\ \text{co kończy dowód.}$$

Sprawdź, czy rozumiesz

1. Wyznacz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α , jeśli:

a) $\sin \alpha = \frac{7}{25}$

b) $\cos \alpha = \frac{8}{17}$

c) $\operatorname{tg} \alpha = 1\frac{1}{3}$

d) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{11}{60}$

e) $\sin \alpha = 0,9$

f) $\cos \alpha = \frac{2}{3}$

g) $\operatorname{tg} \alpha = 4$

h) $\operatorname{ctg} \alpha = 2\sqrt{2}$

2. Wiedząc, że α jest kątem ostrym oraz $\sin \alpha = 0,6$, oblicz:

a) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$

b) $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2$

3. Wiedząc, że α jest kątem ostrym oraz $\cos \alpha = \frac{4}{7}$, oblicz:

a) $2\sin^2 \alpha - 1$

b) $\sin^2 \alpha \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha$

4. Wiedząc, że α jest kątem ostrym oraz $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{5}$, oblicz:

a) $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2$

b) $\frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$

5. Wiedząc, że α jest kątem ostrym oraz $\sin \alpha = \sqrt{\sqrt{3} - 1}$, oblicz:

a) $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$

b) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$

6. Wiedząc, że α jest kątem ostrym oraz $\cos \alpha = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, oblicz:

a) $\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$

b) $\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$

7. Sprawdź, czy podana równość jest tożsamością, jeśli α jest kątem ostrym.

a) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$

b) $\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha + 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1$

c) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

d) $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = (\operatorname{tg} \alpha - 1)(\operatorname{ctg} \alpha + 1)$

- D** 8. Wykaż, że jeśli α jest kątem ostrym, to podana równość jest tożsamością.

a) $\frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha = \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$

b) $1 + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}$

c) $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 = \frac{1}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}$

d) $\frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha - \cos^3 \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

D 9. Wykaż, że jeśli α jest kątem ostrym, to:

$$\text{a) } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

$$\text{b) } \sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

10. Oblicz bez użycia tablic trygonometrycznych i kalkulatora:

$$\text{a) } \sin^2 61^\circ + \sin^2 29^\circ$$

$$\text{b) } \operatorname{ctg} 30^\circ \cdot \operatorname{ctg} 40^\circ \cdot \operatorname{ctg} 50^\circ$$

$$\text{c) } \operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 75^\circ$$

$$\text{d) } \sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ + \sin^2 70^\circ$$

$$\text{e) } \operatorname{tg}^2 1^\circ \cdot \cos^2 1^\circ + \operatorname{ctg}^2 1^\circ \cdot \sin^2 1^\circ$$

$$\text{f) } \sin^2 57^\circ \cdot \operatorname{ctg}^2 57^\circ + \cos^2 57^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 57^\circ$$

D 11. Wykaż, że:

$$\text{a) } \cos^3 80^\circ + \sin^2 80^\circ \cdot \cos 80^\circ = \sin 10^\circ \quad \text{b) } \sin^3 46^\circ + \cos 44^\circ \cdot \cos^2 46^\circ = \cos 44^\circ$$

12. Ustaw liczby w porządku rosnącym, bez korzystania z tablic trygonometrycznych i kalkulatora:

$$\text{a) } \operatorname{tg} 45^\circ, \sin 50^\circ, \sin 20^\circ, \cos 45^\circ$$

$$\text{b) } \cos 25^\circ, \operatorname{tg} 60^\circ, \cos 75^\circ, \sin 30^\circ$$

$$\text{c) } \operatorname{ctg} 10^\circ, \operatorname{tg} 12^\circ, \operatorname{ctg} 14^\circ, \operatorname{tg} 16^\circ$$

$$\text{d) } \operatorname{ctg} 15^\circ, \operatorname{tg} 85^\circ, \sin 25^\circ, \cos 35^\circ$$

13. Wiedząc, że α jest kątem ostrym oraz $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{60}{169}$, oblicz:

$$\text{a) } (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$$

$$\text{b) } \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$$

14. Wiedząc, że α jest kątem ostrym oraz $\sin \alpha + \cos \alpha = 1\frac{1}{5}$, oblicz:

$$\text{a) } \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\text{b) } \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$$

15. Wiedząc, że α jest kątem ostrym oraz $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, oblicz:

$$\text{a) } \sin \alpha + \cos \alpha$$

$$\text{b) } \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$$

16. Wiedząc, że α jest kątem ostrym oraz $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 3$, oblicz:

$$\text{a) } \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$$

$$\text{b) } (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)^2$$

17. W trójkącie ostrokątnym ABC naprzeciw boków długości a, b, c leżą odpowiednio kąty α, β, γ . Bez wyznaczania miar kątów trójkąta rozstrzygnij, który bok trójkąta jest najkrótszy, a który najdłuższy, jeśli:

$$\text{a) } \sin \alpha = \frac{12}{13}, \sin \beta = \frac{56}{65}, \sin \gamma = \frac{4}{5}$$

$$\text{b) } \sin \alpha = \frac{297}{425}, \cos \beta = \frac{7}{25}, \cos \gamma = \frac{8}{17}$$

$$\text{c) } \cos \alpha = \frac{1}{2}, \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{d) } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \beta = 0,9$$

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 8.

Test

- W danym trójkącie prostokątnym na rysunku obok sinus kąta α jest równy:

A. $1\frac{1}{3}$ B. 0,75

C. 0,6 D. 0,8
- Liczba $\sin 25^\circ$ jest równa:

A. $\sin 65^\circ$ B. $\cos 65^\circ$ C. $\sin 75^\circ$ D. $\cos 75^\circ$
- Wartość wyrażenia $\cos 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$ jest równa:

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$
- Jeśli $\sin \alpha = \cos \alpha$ dla pewnego kąta ostrego α , to:

A. $\alpha = 30^\circ$ B. $\alpha = 45^\circ$ C. $\alpha = 60^\circ$ D. $\alpha = 75^\circ$
- Tangens pewnego kąta ostrego α jest równy $2 + \sqrt{3}$. Wówczas tangens kąta $(90^\circ - \alpha)$ jest równy:

A. $2 - \sqrt{3}$ B. $2 + \sqrt{3}$ C. $\frac{2 - \sqrt{3}}{7}$ D. $\frac{2 + \sqrt{3}}{7}$
- Jeśli cosinus kąta ostrego jest równy 0,96, to sinus tego kąta jest równy:

A. 0,04 B. 0,07 C. 0,14 D. 0,28
- Dla dowolnego kąta ostrego α wyrażenie $2\cos \alpha \cdot (\sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha + \cos \alpha)$ przyjmuje wartość:

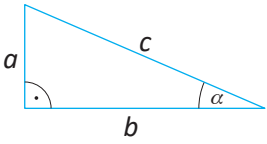
A. 0 B. 0,5 C. 1 D. 2
- Tangens kąta ostrego α jest cztery razy większy od cotangensa tego kąta tylko wtedy, gdy:

A. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4}$ B. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ C. $\operatorname{tg} \alpha = 2$ D. $\operatorname{tg} \alpha = 4$
- Jeśli długości przyprostokątnych w pewnym trójkącie prostokątnym pozostają w stosunku 5 : 12 oraz α jest najmniejszym kątem w tym trójkącie, to wartość wyrażenia $\cos \alpha - \sin \alpha$ jest równa:

A. $\frac{7}{13}$ B. $-\frac{7}{13}$ C. $\frac{5}{12}$ D. $-\frac{5}{12}$
- Niech $a = \operatorname{tg} 50^\circ$, $b = \sin 50^\circ$, $c = \cos 50^\circ$. Wówczas prawdziwa jest nierówność:

A. $a < b < c$ B. $c < a < b$ C. $b < c < a$ D. $c < b < a$

Zadania otwarte

11. Tangens kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym jest równy $\frac{4}{3}$. Wyznacz długość przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α , wiedząc, że obwód tego trójkąta jest równy 36 cm.
12. Cosinus kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym jest równy 0,8. Wyznacz długość najkrótszego boku tego trójkąta, jeśli najdłuższy bok ma długość 25 cm.
13. Dwa kąty trójkąta są równe 61° i 32° , a najkrótszy bok ma długość 20 cm. Korzystając z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych (str. 392), oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta. Wyniki podaj z dokładnością do 0,1 cm.
14. Na podstawie danych na rysunku obok wyznacz wartość wyrażenia $1 - \frac{b^2}{c^2}$, wiedząc, że $\sin \alpha = 5 \cdot 13^{-1}$
- 
15. Skonstruuj kąt ostry α , jeśli:
- a) $\sin \alpha = \frac{4}{7}$ b) $\cos \alpha = 0,4$ c) $\operatorname{tg} \alpha = 2\frac{1}{3}$ d) $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3}$
16. Oblicz wartość wyrażenia:
- a) $(\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ) \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ - \sin^2 45^\circ$ b) $(\cos 30^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ)(\sin 60^\circ - \operatorname{ctg} 45^\circ)$
17. Oblicz wartość wyrażenia:
- a) $(\sin 15^\circ - \cos 15^\circ)^2 + 2\sin 75^\circ \cdot \cos 75^\circ$ b) $\operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 50^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$
 c) $(\sin 20^\circ + \sin 70^\circ)^2 - 2\cos 20^\circ \cos 70^\circ$ d) $\operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 75^\circ$
18. Dana jest wartość jednej funkcji trygonometrycznej kąta ostrego α . Wyznacz pozostałe funkcje trygonometryczne tego kąta.
- a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ b) $\cos \alpha = \frac{60}{61}$ c) $\operatorname{tg} \alpha = 2\frac{2}{5}$ d) $\operatorname{ctg} \alpha = 1\frac{7}{8}$
19. Kąt α jest ostry. Oblicz wartość wyrażenia:
- a) $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$, jeśli $\operatorname{tg} \alpha = 3$ b) $\frac{6\sin \alpha + 2\cos \alpha}{3\cos \alpha - 2\sin \alpha}$, jeśli $\operatorname{ctg} \alpha = 2$
- D** 20. Kąt α jest ostry. Wykaż, że dana równość jest tożsamością trygonometryczną.
- a) $\sin \alpha + \sin \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}$ b) $\frac{\sin \alpha + 2\cos(90^\circ - \alpha)}{\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)\cos \alpha} = 3$
21. Wiedząc, że α jest miarą kąta ostrego oraz $\sin \alpha + \cos \alpha = 1\frac{1}{3}$, oblicz:
- a) $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2$ b) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$
22. Wiedząc, że α jest miarą kąta ostrego oraz $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 3$, oblicz:
- a) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$ b) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) + \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)$

Skorowidz ważniejszych terminów

- aksjomaty Euklidesa 266
- alternatywa zdań 112
- argument funkcji 136
- błąd bezwzględny przybliżenia 66
- błąd procentowy 67
- błąd względny przybliżenia 67
- cosinus kąta ostrego 331
- cotangens kąta ostrego 331
- część wspólna zbiorów 10
- definicja 116
- dopełnienie zbioru 11
- dowód nie wprost 119
- dowód wprost 118
- dwusieczna kąta 276
- dziedzina funkcji 136, 147
- dziedzina nierówności 47
- dziedzina równania 38
- dzielenie z resztą 33, 35
- dzielnik 30, 34
- figura nieograniczona 272
- figura ograniczona 272
- figura wklęsła 228
- figura wypukła 268
- funkcja 136
- funkcja kwadratowa 235
- funkcja liczbowa 137
- funkcja liniowa 182
- funkcja logarytmiczna 260
- funkcja malejąca 160
- funkcja niemalejąca 161
- funkcja nierosnąca 161
- funkcja rosnąca 160
- funkcja różnowartościowa 165
- funkcja stała 160
- funkcja wykładnicza 254
- funkcje monotoniczne 162
- iloczyn zbiorów 10
- implikacja zdań 113
- jednomian 81
- jednomiany podobne 81
- kąt 269
- kąt między przecinającymi się prostymi 274
- kąt pełny 270
- kąt półpełny 269
- kąt wewnętrzny wielokąta wypukłego 284
- kąt zerowy 270
- kąt zewnętrzny wielokąta wypukłego 284
- kąty przyległe 271
- kąty wierzchołkowe 272
- kierunek prostej 273
- koniunkcja zdań 112
- kwadrat liczby 73
- kwantifikator ogólny 110
- kwantifikator szczegółowy 110
- liczba nieparzysta 34
- liczba parzysta 34
- liczba pierwsza 30
- liczba złożona 30
- licznik ułamka 15
- logarytm 102
- logarytm dziesiętny 102
- łamana 282
- łamana zrywczajna 282
- mianownik ułamka 15
- miejsce zerowe 154
- najmniejsza wspólna wielokrotność 32
- największy wspólny dzielnik 32
- nierówności nieostre 22
- nierówności równoważne 48
- nierówności ostre 22
- nierówność sprzeczna 52
- nierówność tożsamościowa 51
- odcinek 267
- odcinek prostopadły do prostej 274
- odcinki prostopadłe 274
- odcinki równoległe 273
- odległość prostych równoległych 274
- odległość punktu od prostej 274
- okres rozwinięcia dziesiętnego 15
- ortocentrum 304
- oś liczbowa 18
- pierwiastek arytmetyczny 78
- pierwiastek kwadratowy 78
- pierwiastek stopnia nieparzystego z liczby ujemnej 78
- pierwiastek sześcienny 78

- podzbiór 8
 potęga o wykładniku całkowitym ujemnym 91
 potęga o wykładniku naturalnym 73
 potęga o wykładniku wymiernym 96
 półprosta 269
 procent 56
 proporcjonalność odwrotna 248
 proporcjonalność prosta 179
 proste prostopadłe 274
 proste przecinające się 273
 proste równoległe 273
 przeciwdziedzina funkcji 136
 przedział domknięty 25
 przedział lewostronnie domknięty 25
 przedział lewostronnie domknięty
 nieograniczony 27
 przedział lewostronnie otwarty 26
 przedział lewostronnie otwarty
 nieograniczony 27
 przedział otwarty 25
 przedział prawostronnie domknięty 26
 przekątna wielokąta 283
 przybliżenie dziesiętne 67
 punkt bazowy 64
 punkt procentowy 63

 rozkład liczby na czynniki pierwsze 31
 rozwiązanie nierówności 47
 rozwiązanie równania 39
 rozwiązanie układu dwóch równań pierwszego
 stopnia z dwiema niewiadomymi 212
 rozwinięcie dziesiętne ułamka 15
 równania równoważne 42
 równanie liniowe 43
 równanie pierwszego stopnia
 z dwiema niewiadomymi 208
 równanie sprzeczne 40
 równanie tożsamościowe 40
 równoważność zdań 113
 różnica zbiorów 10

 sinus kąta ostrego 331
 spodek wysokości 305
 suma zbiorów 9
 symetralna odcinka 275
 sześćcian liczby 73

 średnia arytmetyczna 127
 średnia geometryczna 127
 średnia harmoniczna 129
 średnia ważona 127
- środek ciężkości trójkąta 308
 środkowa trójkąta 307

 tangens kąta ostrego 331
 tożsamość trygonometryczna 339
 trójkąt 292
 trójkąty podobne 316
 trójkąty przystające 311
 twierdzenie 116
 twierdzenie odwrotne 117

 układ nieoznaczony 213
 układ oznaczony 213
 układ sprzeczny 213

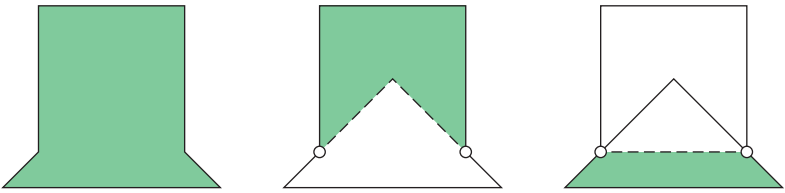
 wartość bezwzględna 17
 wielokąt 283
 wielokąt foremny 285
 wielokrotność 30
 wykres funkcji 138, 141
 wykres równania pierwszego stopnia
 z dwiema niewiadomymi 209
 wyrażenie algebraiczne 81
 wysokość trójkąta 304
 wzór funkcji kwadratowej
 w postaci kanonicznej 237
 wzór funkcji kwadratowej
 w postaci ogólnej 235

 zaprzeczenie zdania 111
 zbiory rozłączne 10
 zbiory równe 8
 zbiór liczb całkowitych 14
 zbiór liczb naturalnych 14
 zbiór liczb niewymiernych 16
 zbiór liczb wymiernych 14
 zbiór liczbowy 7
 zbiór nieskończony 8
 zbiór pusty 8
 zbiór skończony 8
 zbiór wartości funkcji 136, 150
 zdanie 109

Odpowiedzi do zadań

1. Zbiory liczbowe. Liczby rzeczywiste

Zbiór. Działania na zbiorach

- $A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ $b) B = \{-5, -4, -3, 0, 1, 7\}$
 - $c) C = \{-2\sqrt{5}, -\sqrt{5}, 0, 17\sqrt{5}, 100\sqrt{5}\}$ $d) D = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots, 81\}$
 - $e) E = \left\{4, 2, \frac{4}{3}, 1, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{1}{25}\right\}$ $f) F = \{-1, -9, -81, -729, \dots\}$
- $b) B$ – zbiór naturalnych dzielników liczby 60 $d) D$ – zbiór całkowitych liczb dwucyfrowych dodatnich podzielnych przez 4 $f) F$ – zbiór pierwiastków arytmetycznych stopnia drugiego z liczb naturalnych jednocyfrowych dodatnich
- $c)$ Zbiór A ma 16 podzbiorów (15 właściwych i 1 niewłaściwy)
- $a) A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 3, 5, 8\}, A \cap B = \{1\}, A - B = \{-2, -1, 0, 5\}, B - A = \{3, 8\}$
 - $b) A \cup B = A, A \cap B = B, A - B = \{5, 11\}, B - A = \emptyset$
 - $c) A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A \cap B = \{2, 3, 4\}, A - B = \{1\}, B - A = \{5, 6\}$
 - $d) A \cup B = B, A \cap B = A, A - B = \emptyset, B - A = \{6, 7\}$
 - $e) A \cup B = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}, A \cap B = \emptyset, A - B = A, B - A = B$
 - $f) A \cup B = A = B, A \cap B = A = B, A - B = \emptyset, B - A = \emptyset$
- $a) A \cup B$
 - $A - B$
 - $B - A$

Uwaga: Odcinek zaznaczony linią przerywaną nie należy do danej figury; niezamalowane kółko oznacza, że punkt nie należy do danej figury.
- Zbiór $X \cup Y$ ma 10 elementów
- Zbiór $X \cap Y$ ma 3 elementy
- 14 uczniów
- 13 samochodów białych
- 120 uczniów $b)$ 4 klasy
- $a) A' = \{0, 7, 10, 15, 20\}, B' = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}, A' \cup B' = \{0, 5, 7, 10, 15, 20\}, B' \cap A = \{1, 2, 3, 4, 6\}, A' - B' = \{0, 10, 15, 20\}$ $b) A' = \{2, 3, 5\}, B' = \{2, 3, 4, 5, 16\}, A' \cup B' = \{1, 2, 3, 5, 9, 25\}, B' \cap A = \{4, 16\}, A' - B' = \emptyset$
- $a) A' = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}, B' = \{0, 2, 4, 6, 8\}, A' \cup B' = (A \cap B)' = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}, A' \cap B' = (A \cup B)' = \{2, 4, 8\}$ $b) A' = \{0, 3, 5, 6, 7, 9\}, B' = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}, A' \cup B' = (A \cap B)' = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}, A' \cap B' = (A \cup B)' = \{3, 5, 6, 7, 9\}$

Zbiory liczbowe. Oś liczbowa

1. a) nie istnieje b) istnieje; tą liczbą jest 0 c) istnieje, na przykład zbiór liczb naturalnych podzielnych przez 3
2. b) np. $\sqrt{3}$ i $\frac{1}{\sqrt{3}}$
3. a) dodawanie, mnożenie; b) dodawanie, odejmowanie, mnożenie; c) mnożenie;
d) dodawanie, mnożenie; e) dodawanie i odejmowanie; f) żadne działanie nie jest wykonalne
4. a) $\mathbf{Z}$ b) $\mathbf{Z}$ c) $\mathbf{N}$ d) $\emptyset$ e) $\mathbf{Q}$ f) $\emptyset$ g) $\mathbf{Q}$ h) $\langle 0, +\infty \rangle$
5. $A = \{x: x \in \mathbf{R} \text{ i } x \geq 0\}$
6. A – zbiór liczb naturalnych mniejszych od 100; C – zbiór potęg o podstawie 2 i wykładniku naturalnym mniejszym od 11;
7. $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ $B = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0\}$ $C = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\}$ $D = \{3, 5, 7, 9, \dots\}$
8. a) 1,(6) b) -26,05 c) 0,41(6) d) 1,024 e) 1,(63) f) 3,(571428)
9. a) $\frac{25}{111}$ b) $\frac{2}{11}$ (wskazówka.: niech $x = 0,181818\dots$; wtedy $100x = 18,1818\dots$, skąd $99x = 18$);
c) $\frac{22}{9}$ (wskazówka: pomnóż $x = 2,4444\dots$ przez 10 i oblicz $9x$);
d) $\frac{163}{30}$; e) $\frac{1201}{990}$; f) $-\frac{137}{1110}$
10. a) prawdziwa b) fałszywa c) prawdziwa d) fałszywa
11. Obie liczby są równe
12. a) $a < b$ b) $a > b$ c) $a < b$ d) $a > b$
13. a) -1; liczba wymierna b) 2; liczba wymierna c) 0; liczba wymierna
d) $2\sqrt{5} - 3$; liczba niewymierna

Prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych

2. a) $9\frac{15}{17}$ b) 3,7 c) 24,95
3. a) 0,24 b) $6\frac{4}{5}$ c) 44
4. a) 3,5 b) $2\frac{7}{8}$ c) 34,79
5. a) 0,9 b) $\frac{\pi}{60}$ c) -11

6. a) 42 b) 59 c) 86 d) 30 e) 3564 f) 8704
7. a) $3(2 + \sqrt{2})$ b) $-0,5(\sqrt{5} - 1)$ c) $\frac{1}{6}(\sqrt{2} + 3\pi)$ d) $\frac{1}{12}(2\sqrt{3} - 5)$
8. a) $5 - \sqrt{3}$ b) $\pi - 2$ c) $\sqrt{3} - 1$ d) $-1 - 3\pi$
9. b) np. $a = -3, b = 26$
10. b) np. $x = 0,5; y = 0,5\sqrt{2}$
11. a), b) – nierówności prawdziwe; c) – nierówność nieprawdziwa (zobacz przykład 6. str. 23)

Przedziały

3. a) np. $\frac{1}{2}$
4. a) np. 3
5. a) $A \cup B = (-4, 5)$ b) $A \cup B = (-\infty, 1) \cup \langle 5, +\infty)$ c) $A \cup B = B$ d) $A \cup B = \langle -1, +\infty)$
6. a) $A \cap B = \langle -2, 5)$ c) $A \cap B = A$ d) $A \cap B = \{7\}$ f) $A \cap B = \emptyset$
7. a) $A - B = (0, 3)$, $B - A = (5, 7)$ b) $A - B = (-3, -2) \cup \langle 4, +\infty)$, $B - A = \emptyset$
e) $A - B = (-5, 0) \cup (3, 8)$, $B - A = \emptyset$ f) $A - B = \{4\}$, $B - A = (-\infty, -6)$
9. a) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ b) $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ c) $\{5, 6, 7, 8, \dots\}$ d) $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2\}$
e) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ f) $\{-1\}$
10. b) $(2, \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$ c) $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ f) $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2)$
11. a) $A' = (-\infty, -3)$ b) $A' = \langle 7, +\infty)$ c) $A' = \mathbf{R}_- \cup \{0\}$
12. a) $A' = (-\infty, -4) \cup \langle 5, +\infty)$

Zbiór liczb naturalnych i zbiór liczb całkowitych

1. a) $a = 2 \cdot 3 \cdot 7^2$; $b = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$; $NWD(294, 210) = 42$; $NWW(294, 210) = 1470$
b) $NWD(312, 260) = 52$; $NWW(312, 260) = 1560$
c) $NWD(158, 316) = 158$; $NWW(158, 316) = 316$
d) $NWD(648, 1620) = 324$; $NWW(648, 1620) = 3240$
2. a) 2, 3, 4, 6, 8 b) 2, 3, 4, 6, 9 c) 2, 3, 5, 6 d) 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9
3. a) 4 b) 0, 5 c) 2, 6 d) 1, 7 e) 2
4. Tylko liczba z punktu b) nie jest podzielna przez 17.
5. Obydwie liczby są złożone.
6. a) 11 b) 4 c) 5 d) 9 e) 9 f) 6
7. a) $A = \{\dots, -28, -21, -14, -7, 0, 7, 14, 21, \dots\}$ b) $B = \{0, 4, 8, 12, 16, \dots\}$
c) $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ d) $D = \{-10, -7, -4, -1, 2, 5\}$ e) $E = \{-17, -13, -9, -5, -1\}$
f) $F = \{\dots, -13, -8, -3, 2, 7, 12, \dots\}$

8. a) $n-2, n-1, n$ gdzie $n \in \mathbf{N} - \{0, 1\}$ b) $2k, 2k+2, 2k+4$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$
 c) $2k-3, 2k-1, 2k+1$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$ d) np. $6n+5$, gdzie $n \in \mathbf{N}$
 e) np. $5k+3$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$ f) np. $3k+1, 3k+4$, gdzie $k \in \mathbf{N}$
9. a) 2 b) 2 c) 6 d) 1 e) 4 f) 2, bo $a = 12k - 9 + 2 = 3(4k - 3) + 2$
10. a) 3 b) 0 c) 0
11. Nie, bo reszta z dzielenia tej sumy przez 4 jest równa 2.
12. Tak; wskazówka: $s = (2k+1) + (2k+3) + (2k+5) + (2k+7) = 8k + 16 = 8(k+2)$; ponieważ $k \in \mathbf{Z}$, więc $k+2 \in \mathbf{Z}$; to znaczy, że liczba $8(k+2)$ jest podzielna przez 8.
13. a) 1 b) 2 c) 2 d) 4 e) 1 f) 4
 wskazówka: $a = 5k+3, b = 5n+4$, gdzie $k \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}$; c) $a+b = 5(k+n+1) + 2$;
 f) $2a-3b = 10k-15n-6 = (10k-15n-10) + 4$
14. a) 25 b) 5 c) 1 d) 1
 wskazówka: $a = 4k+2, b = 4k+3$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$; wtedy $5(a+b) = 40k+25$;
 b) $5(a+b) = 20 \cdot (2k+1) + 5$
15. a) $n \in \{0, 1, 3, 7\}$ wskazówka: liczba $n+1$ jest naturalnym dzielnikiem liczby 8
 b) $n \in \{0, 2\}$

Przypomnienie i uzupełnienie wiadomości o równaniach

1. a) $D = \mathbf{R}$; tak b) $D = \mathbf{R}$; tak c) $D = \mathbf{R} - \{3\}$; tak d) $D = \mathbf{R} - \{-1, -2\}$; nie
 e) $D = \langle 0, +\infty \rangle$; 9 – tak; 1 – nie f) $D = \langle 0, +\infty \rangle$; liczby 0, 1 – tak; 4 – nie
2. a) $a = 5$ b) $a = 2$ c) $a = -8$ d) $a = -6$ e) $a = 16$ f) $a = -3$ lub $a = 3$
3. a) $D = \mathbf{R}$; $x \in \{-1, 1\}$ b) $D = \mathbf{R}$; równanie sprzeczne c) $D = \mathbf{R}$; $x \in \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$
 d) $D = \mathbf{R}$; $x = 0$ e) $D = \langle 0, +\infty \rangle$; $x = 0$ f) $D = \langle 0, +\infty \rangle$; równanie sprzeczne
4. a) $D = \mathbf{R} - \{0\}$; $x = 3$ b) $D = \mathbf{R} - \{-2\}$, $x = 5$ c) $D = \mathbf{R} - \{3\}$, $x = 1$
5. a) $x \in \{0, 3\}$ b) $x \in \{-4, 7\}$ c) $x = -1$ d) $x = 10$ e) $x = 0$ f) $x \in \{0; 0,25\}$
6. b) np. $(x+1)(x-2) = 0$
7. a) tak; zobacz przykład 5. str. 40 b) tak c) tak d) nie; $D = \mathbf{R} - \{1\}$; np. liczba 2 nie spełnia równania (sprawdź!)
8. a) wyrażenie po lewej stronie równania ma wartość o 2 większą od wyrażenia po prawej stronie równania, jeśli $x \in \mathbf{R}$

Rozwiązywanie równań metodą równań równoważnych

1. a) $x = -12$ b) $x = 0$ c) $x = \frac{-1}{3}$ d) $x = 15$ e) $x \in \mathbf{R}$ f) równanie sprzeczne
2. a) $x = \frac{1}{8}$ b) $x = 1$ c) $x = -11,1$ d) $x = 2,5$ e) $x = -1\frac{1}{3}$ f) $x = 11$

3. a) $x = -2\sqrt{3}$ b) $x = \frac{2}{3}$ c) $x = -\sqrt{5}$ d) równanie sprzeczne e) $x = -11$ f) $x \in \mathbf{R}$
4. a) nie są równoważne, bo pierwsze równanie spełniają liczby 2 i -2 , zaś drugie – tylko liczba 2 b) są równoważne c) nie są równoważne, bo pierwsze równanie spełniają liczby 0 i 1, a drugie – tylko liczba 1 d) nie są równoważne e) są równoważne; wskazówka: wyłącz x poza nawias z drugiego równania f) nie są równoważne; dziedzina równań to zbiór $D = \langle 0, +\infty \rangle$; pierwsze równanie spełniają liczby 0 i 1, zaś drugie równanie – tylko liczba 1.
5. 15
6. Dziadek miał 18 orzechów, rozdzielił wnukom po 9 orzechów.
7. 75, 77, 79
8. Nie istnieją. Niech $3x - 3$, $3x$, $3x + 3$, $3x + 6$ będą szukanymi liczbami naturalnymi, $x \in \mathbf{N}_+$. Wówczas otrzymujemy równanie $3x - 3 + 3x + 3 + 3x + 3 + 3x + 6 = 780$, którego jedynym rozwiązaniem jest liczba 64,5 która nie jest naturalna.
9. 36, 37, 38, 39
10. $\frac{2}{\sqrt{2}-1}$ cm
11. $\frac{6}{2-\sqrt{3}}$ cm
12. 3 cm
13. $a = 4$
14. o godz. 7²⁰

Nierówność z jedną niewiadomą. Rozwiązanie nierówności metodą nierówności równoważnych

1. a) -2 spełnia, 0 nie spełnia b) 5 nie spełnia, -2 spełnia c) spełniają d) spełniają
2. b) np. $\frac{1}{2}$, 0, $-0,9$
3. a) $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ b) $x \in (-\infty, -4)$ c) $x \in (0, +\infty)$ d) $x \in \langle 5, +\infty \rangle$ e) $x \in \langle -3, +\infty \rangle$
f) $x \in (-\infty, -2)$ g) $x \in \left(-\infty, 3\frac{3}{4}\right)$ h) $x \in (-\infty, 0)$
4. a) $x \in \langle -6, +\infty \rangle$ b) $x \in (-\infty, 0)$ c) $x \in \mathbf{R}$ d) $x \in \left(-\infty, -\frac{2}{5}\right)$ e) nierówność sprzeczna
f) $x \in \left(\frac{-1}{2}, +\infty\right)$

5. a) $x \in (-\infty, 1)$ b) $x \in \left(-\infty, 1\frac{1}{3}\right)$ c) $x \in \left(-1\frac{1}{2}, +\infty\right)$ d) $x \in (-\infty, -3)$

6. a) $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ b) $x \in (-\infty, -1)$ c) $x \in \left(-\frac{17}{20}, +\infty\right)$ d) $x \in \left(-\infty, -3\frac{1}{3}\right)$

e) $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ f) $x \in \left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$

7. a) $x \in (-1, 2)$ b) nierówność sprzeczna c) $x = -1$ d) $x \in (2, +\infty)$ e) $x \in \mathbf{R}$

f) $x \in \left(\frac{2}{7}, \frac{9}{16}\right)$

8. a) $x \in (-1, +\infty)$ b) $x \in (-\infty, 1)$ c) $x \in (-\infty, 2)$ d) $x \in \left(\frac{1}{\pi-4}, +\infty\right)$

wskazówka: zobacz przykład 4 c)

9. $a = 3$

10. $x \in (3, +\infty)$

11. 2

12. $x \in \{0, 1, 2\}$

13. $-5, -3$ lub $-3, -1$; wskazówka: Jeśli x jest większą z szukanych liczb, to zachodzi nierówność podwójna: $x^2 \leq x(x-2) \leq x^2 + 6$, której zbiorem rozwiązań jest przedział $\langle -3, 0 \rangle$. Stąd $x = -3$ lub $x = -1$.

14. 16, 17, 18, 19

15. $x \in \{2, 3\}$

wskazówka: liczba naturalna x spełnia jednocześnie dwie nierówności: $x(x+5) \leq x^2 + 15$ oraz $x(x+5) \geq x^2 + 6$

Procenty

1. a) 4,2 b) 18 c) 21,25

2. a) 2 b) 5000 c) 320

3. a) 65% b) 680% c) $\frac{b}{a} \cdot 100\%$

4. a) $K_1 = 1440 - 883,98 \cdot (11\,500 - 8000) : 5000 = 821,21$ (zł);

$p = 0,18 \cdot 11\,500 - 821,21 = 1248,79 \approx 1249$ (zł); 10,86%

b) $p = 3944$ zł; 15,78% c) $K_2 = 391,49$ zł; $p = 18\,931$ zł; 19,36%

d) $p = 49\,850$ zł; 25,8% e) $K_2 = 227,92$ zł; $p = 22\,998$ zł; 20,9%

f) $K_1 = 1440 - 141,44 = 1298,56$ (zł); $p = 285$ zł; 3,24%

5. a) $a = 33$ b) $b = 235$

6. Kasia ma o 50% więcej płyt niż Monika; Monika ma o $33\frac{1}{3}\%$ mniej płyt niż Kasia.

7. a) $\frac{b-0,2b}{b} \cdot 100\% = 80\%$ b) $\frac{5a-a}{a} \cdot 100\% = 400\%$
8. O $9\frac{1}{11}\%$
9. a) dziewczęta trenujące koszykówkę stanowią 6% uczniów szkoły, chłopcy trenujący pływanie stanowią 15% uczniów tej szkoły b) o 60%
10. a) 12,8% b) 30,6% c) o 73,1% d) o 51,7%
11. 64,80 zł
12. O ok. 13,9%
13. a) 97,92 zł b) $0,9 \cdot 0,8 \cdot a$, czyli $0,72a$
14. a) 3200 zł b) $\frac{z}{1,2 \cdot 1,05}$ zł czyli $\frac{z}{1,26}$ zł
15. Cena końcowa stanowi 96% ceny początkowej
16. O 30%

Punkty procentowe

1. a) 6,9% b) o ok. 4,55%
2. partia A: spadek o 20%; 7 p.p. partia B: wzrost o 18,75%; 6 p.p.
3. a) wzrost o 25 punktów bazowych, czyli o 0,25 p.p. b) wzrost o ok. 4,17%
4. a) stopa referencyjna przed zmianami 2,5%, po zmianach 1,5%; stopa lombardowa przed zmianami 4%; po zmianach 2,5% b) stopa referencyjna zmalała o 40%, stopa lombardowa zmalała o 37,5%
5. a) grupa osób w wieku $\langle 0, 14 \rangle$ o 1 p.p.; grupa osób w wieku $\langle 15, 24 \rangle$ o 5 p.p.; b) udział grupy osób od 25 do 44 lat w społeczeństwie wzrósł o 3 punkty procentowe i był większy w 2016 r. niż w 2006 r. o ok. 10,7%; udział w społeczeństwie grupy osób w wieku 65 lat i więcej wzrósł o 3 punkty procentowe i był większy w 2016 r. niż w 2006 r. o ok. 23%; c) o 48 punktów procentowych; o 184,6%

Przybliżenia, błąd bezwzględny i błąd względny, szacowanie

1. a) 8,07 b) 0,27 c) 13,71 d) 35,64 e) 2,51 f) 0,24
2. a) błąd bezwzględny: 74,72 m²; błąd względny: ok. 0,04
b) błąd bezwzględny: 6 s, błąd względny: ok. 0,05
3. a) A: 2,9 tys. zł; B: 4,1 tys. zł b) A: 1,04%; B: 0,93%
4. tak

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 1.**Test**

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	A	D	D	B	B	A	B	D	C	C
Nr zadania	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Odpowiedź	B	B	C	C	A	C	D	D	C	C

Zadania otwarte

21. a) $A' = (-3, +\infty)$, $B' = (-\infty, -4) \cup (7, +\infty)$ b) $A \cup B = (-\infty, 7)$ c) $A' \cap B = (-3, 7)$
d) $B' - A = (7, +\infty)$
22. a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ $C = \{-1, 1, 3, 5, 7, 9\}$
 $D = \{\dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$
23. a) 1 b) 11 c) 3 d) 2
24. a) 15 b) 0 c) 5 d) 3
25. a) $2\sqrt{3}$ b) 0, -4, 2 c) równanie sprzeczne d) $x \in \mathbf{R}$
26. $x \in (-\infty, 4)$ a) 2 b) 5
27. $x \in \left(-\infty, 2\frac{1}{3}\right)$ a) np. 2; b) $-\pi$ oraz $\pi - 1$
28. a) -1 b) 2
29. o 70 punktów bazowych; o 28%
30. o 3%

2. Wyrażenia algebraiczne**Potęga o wykładniku naturalnym**

1. a) $5^0 = (-5)^0$ b) $-2^4 = -16$, $(-2)^4 = 16$, więc $-2^4 < (-2)^4$
d) $\frac{2^3}{3} = \frac{8}{3}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$, więc $\frac{2^3}{3} > \left(\frac{2}{3}\right)^3$
2. a) 0,000001 b) $2\frac{10}{27}$ c) -243 d) 361 e) -0,6 f) 6,25 g) -4 h) 1 i) -1000
3. a) 256 b) -81 c) 125 d) -100 000 e) $(0,1)^7 \cdot 10^8 = (0,1 \cdot 10)^7 \cdot 10 = 10$
f) $-8 \cdot 2^4 = -128$
4. a) 25 b) 1,5 c) 100 d) -4 e) $\frac{1}{64}$ f) -0,2
5. a) 3^{21} b) 2^{18} c) $0,7^6$ d) $(-6)^{11}$ e) 5^5 f) $(-0,5)^5$

6. a) a^3 b) a^8 c) a^{11}

7. a^4 ; $7\frac{58}{81}$

8. $3x^6y^4$; 1,5

9. a) $3 \cdot 3^{20} = 3^{21}$ b) 2^{11} c) 5^8 d) 6^{10} e) $(-7)^{13}$ f) 9^4

10. a) wskazówka: wyłącz liczbę 2^{10} przed nawias i oblicz wartość wyrażenia w nawiasie

11. a) 343 b) 16 c) 125 d) 9 e) -1,5 f) -1000

Pierwiastek arytmetyczny. Pierwiastek stopnia nieparzystego z liczby ujemnej

1. a) 14; 18; 0,4; 2,5 b) 4; 0; 6; 0,1 c) 2; 0,3; 1; 5; d) -3; -1; -4; -2

2. a) 9 b) 0,4 c) 1,7 d) 5

3. a) 15 b) 15 c) $\frac{17}{52}$ d) 6

4. a) 135 b) 4,4 c) 60 d) 24 e) 30 f) -18 g) 6 h) -20

5. a) $1\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{50}$ c) $4\frac{8}{23}$ d) 24 e) 4 f) $-\frac{6}{7}$ g) $-\frac{2}{5}$ h) $1\frac{1}{2}$

6. a) $1\frac{2}{3}$ b) $1\frac{1}{4}$ c) $1\frac{1}{3}$ d) $2\frac{1}{4}$

7. a) 2 b) 5 c) 25 d) 2

8. a) 14 b) 26 c) 294 d) 6

9. a) π b) -2 c) 121 d) 25 e) 49 f) 2 g) 3 h) 2

10. a) $5\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{3}$ c) 0 d) $2\sqrt{3}$ e) $-\sqrt[3]{2}$ f) $2\sqrt[3]{5}$ g) $18\sqrt{3}$ h) $13\sqrt[3]{2}$

Działania na wyrażeniach algebraicznych

1. a) $a(b+c)$ b) $\frac{2a}{\sqrt{b}}$ c) np. $(2k)^2 + (2k+2)^2$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$

d) np. $(2k+3)^2 - (2k+1)^2$, $k \in \mathbf{N}$ e) $\left(3x + \frac{1}{3}y\right)^2$ f) $(x-a^2)^3$

2. a) $3b - 5a - ab + 15$ b) $2a^2 + 11ab + 12b^2$ c) $-105a^2 + 114a - 24$ d) $3b^2 + 10b - 8$

3. a) $-6x^4y^5$ b) $16x^8$ c) $32x^{12}$

4. a) $-3x^3 - 5x^2$ b) $-21x^2 + 38x - 9$ c) $-6x^3 + 40x^2 - 28x$ d) $63x^3 - 4x^2 + 45$

5. a) $6a$; 3 b) $3b^3 - 2b^2$; -32 c) $2a^2 - 1$; 11,5 d) $-4x^2 + 3x + 2$; -25

6. a) 6,25 b) $\frac{3}{43}$ c) 0,8 d) -10

7. a) $x \in \langle -1, \infty \rangle$ b) $x \in (-\infty, 2\rangle$ c) $x \in \mathbf{R}$ d) $x \in \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$
8. a) $-1(4+2y)$ d) $-1(-x\sqrt{2}-2y+1)$
9. a) $2x^2(x-2)$ b) $3y(2x+y)$ c) $xy(1-4xy)$ d) $12x^3(2y+1)$
10. a) $6(0,5x-y^2)$ b) $\frac{1}{2}(x^3+2y^2)$ c) $\frac{-1}{3}(6x-y)$ d) $\sqrt{2}(x-\sqrt{2}y+2z)$
11. a) $(a+3)(x+y)$ b) $(2b-c)(x-y^2)$ c) $(5-y)(3-x^2)$ d) $x(y+1)(x-1)$
12. a) $x \in \{-3, 5\}$ b) $x \in \{-5, 0\}$ c) $x \in \{0, 4\}$ d) $x \in \left\{\frac{1}{3}, 7\right\}$ e) $x \in \{-4, -1\}$
 f) $x \in \left\{-2, 1\frac{1}{2}\right\}$

Wzory skróconego mnożenia stopnia 2.

1. a) $(100+3)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 3 + 3^2 = 10\,000 + 600 + 9 = 10\,609$
 c) $(50-2)^2 = 2500 - 2 \cdot 50 \cdot 2 + 4 = 2304$
2. a) $(20+1)(20-1) = 20^2 - 1^2 = 399$ c) $(40-3)(40+3) = 1600 - 9 = 1591$
3. a) $7+4\sqrt{3}$ b) $27+10\sqrt{2}$ c) $21+4\sqrt{5}$ d) $27+18\sqrt{2}$
4. a) $81+18b+b^2$ d) $3+2\sqrt{3}x+x^2$ e) $1+4z+4z^2$ g) $16x^2+8\sqrt{5}x+5$
5. a) $6-4\sqrt{2}$ b) $97-56\sqrt{3}$ c) $171-110\sqrt{2}$ d) $32-16\sqrt{3}$
6. a) a^2-6a+9 d) $8-4\sqrt{2}x+x^2$ f) $25y^2-10\sqrt{3}y+3$ h) $3x^2-6\sqrt{2}xy+6y^2$
7. a) -1 b) 1 c) -4 d) -3 e) 16 f) 245
8. a) $\sqrt{3}+1$ b) $2-\sqrt{2}$ c) $\frac{3\sqrt{5}+5}{4}$ d) $2-\sqrt{3}$ e) $\frac{-7-3\sqrt{5}}{2}$ f) $\frac{17-7\sqrt{7}}{9}$
9. a) $2+\sqrt{5}$ b) $-3-2\sqrt{2}$ c) $1-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
10. a) x^4-1 b) y^4+64 c) $12b$ d) $28a+98$ e) 45 f) $-2n^2+140n$
11. $(x+y)^2=81$; $(x-y)^2=1$
12. $x^2+y^2=163$; $xy=61$ *wskazówka: skorzystaj w obydwu równościach ze wzorów skróconego mnożenia; wyznacz $2xy$ z pierwszej zależności i podstaw otrzymane wyrażenie do drugiej zależności (w miejsce $2xy$), następnie oblicz x^2+y^2 .*
13. a) $(x-11)(x+11)$ b) $(2x-7)(2x+7)$ c) $(x-3)^2$ d) $(4+x)^2$ e) $(2x-1)^2$
 f) $(3x+1)(x+1)$ g) $(x-5)(3x+5)$ h) $(x-2)(x+2)(x^2+4)$
14. a) $x=1$ b) $x=-5$ c) $x \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ d) $x \in \{-2, 2\}$ e) $x = -\frac{2}{3}$ f) $x = \frac{1}{9}$

Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym

1. a) $\frac{1}{81}$ b) 343 c) $-0,01$ d) $\frac{9}{28}$ e) -16 f) 10 000 g) $\frac{64}{729}$ h) $\frac{1}{8}$
2. a) 64,5 b) $2\frac{31}{81}$ c) 2 d) $6\frac{1}{4}$ e) 729 f) 11
3. a) 4; $3\frac{1}{3}$; 16 b) $\frac{1}{25}$; $\frac{1}{9}$; $-\frac{5}{6}$; c) 32; 0,343; -1 d) -128 ; $\frac{-1}{32}$; $\frac{1}{16}$
4. a) $\frac{1}{5}$ b) 3 c) 0 d) 1 e) $\frac{1}{841}$ f) $\frac{1}{2}$
5. a) 10^{-4} ; 10^{-3} ; 10^{-5} b) 10^{-3} ; 10^{-5} ; 10^{-4} ; c) 10^{-10} ; 10^{-5} ; 10^{-2} d) 10^{-6} ; 10^{-5} ; 10^{-4}
6. Słoń waży $6 \cdot 10^3$ kg, chomik waży $1,2 \cdot 10^{-1}$ kg; słoń jest $5 \cdot 10^4$ razy cięższy od chomika
7. Długość gekona jest równa $3,5 \cdot 10^{-2}$ m; anakonda jest dłuższa od gekona 300 razy
8. a) $2x^{-3} + 1, x \neq 0$ b) $2x^{-1} - x - 1, x \neq 0$ c) $y^{-1} - y^2, y \neq 0$ d) $x^{-4} - x^4, x \neq 0$
e) $y^4 + 2 + y^{-4}, y \neq 0$ f) $81y^{-4} - 18 + y^4, y \neq 0$

Potęga o wykładniku wymiernym

1. a) 7; 2; 0,2; $\frac{1}{2}$; 0,1 b) 256; 27; 3; 16; 0,125 c) 0,5; 4; $4\frac{17}{27}$; $\frac{1}{125}$; $97\frac{21}{32}$
2. a) 3 b) $\sqrt{5}$ c) 2 d) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ e) 0,7 f) 3 g) 4 h) 4 i) 5 j) $1\frac{61}{64}$ k) 0,027 l) $\frac{32}{243}$
3. a) 1 b) 2 c) 243 d) 0,216 e) 3 f) $\frac{1}{2}$ g) 32 h) 100 i) 6,25 j) 9 k) $\frac{1}{3}$ l) 7
4. a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{1}{7}$ c) 5 d) 8 e) 0,25 f) 18
5. a) $3^{\frac{3}{2}}$ b) $2^{\frac{3}{4}}$ c) $4^{\frac{13}{9}}$ d) $6^{\frac{5}{6}}$ e) $5^{\frac{3}{2}}$ f) $7^{\frac{5}{8}}$
6. a) $10^{\frac{3}{2}}$ b) $4^{\frac{5}{3}}$ c) $2^{2,5}$ d) $3^{3,5}$ e) $6^{\frac{5}{3}}$ f) $5^{3,25}$
7. a) 5,624 b) 0,056 c) 0,006 d) 562,386
8. a) 3 b) $14 + 6\sqrt{5}$ c) $9 - 6\sqrt{2}$ d) $\frac{2}{9}$ e) $7 - 2\sqrt{10}$ f) $20 + 8\sqrt{6}$

Potęga o wykładniku rzeczywistym

1. a) 8 b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{1}{64}$ d) 5 e) 125 f) 49
2. a) 9 b) 1 c) 16
3. a) 128 b) 2187 c) 1 000 000 000

Określenie logarytmu

1. a) 5 b) -2 c) 0 d) -3 e) 4 f) -4 g) $\frac{-1}{4}$ h) $\frac{-1}{3}$
2. a) 20 b) 0,1 c) $\frac{1}{2}$ d) 10 e) 5 f) 128 g) 9 h) 2
3. a) -3 b) 4 c) 2 d) $\frac{1}{2}$ e) 1 f) $\frac{-1}{3}$
4. a) $6a + b$ b) $2a + \frac{1}{2}b$ c) $b - a - 1$; wskazówka: $0,15 = \frac{1,5}{10} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{10}$ d) $b - 2a + 1$
5. a) $n = 0$ b) $n = 4$ c) $n = 1$ d) $n = 5$ e) $n = 0$ f) $n = 9$
9. a) 1; wskazówka: zauważ, że $\log 4 = 2\log 2$ i zastosuj wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy liczb b) 4 c) 4 d) $\frac{3}{2}$; wskazówka: zapisz dane logarytmy za pomocą logarytmów o podstawie 4

Zastosowanie logarytmów

1. $10^{-6,6} \text{ mol/dm}^3$
2. $\text{pH} = 2,4$
3. $\text{pH} = 5,5$
4. pH zmalało o ok. 1,7 (zmalało dokładnie o $\log 50$)
5. wzrośnie o ok. 3 dB (wzrośnie dokładnie o $\log 2^{10}$)
6. 120 dB; wskazówka: $60 = 10 \cdot \log \frac{I_1}{I_0}$, gdzie $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$, I_1 – natężenie dźwięku podczas rozmowy; $I_1 = 10^{-6} \text{ W/m}^2$; I_2 – natężenie dźwięku podczas startu helikoptera, $I_2 = 10^6 \cdot I_1 = 1 \text{ W/m}^2$;
7. 80 dB; wskazówka: $100 = 10 \cdot \log \frac{I_1}{I_0}$, gdzie $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$, I_1 – natężenie dźwięku słyszanego przez obserwatora w odległości 20 m od źródła; $I_1 = 10^{-2} \text{ W/m}^2$; $r_2 : r_1 = 200 : 20 = 10$; $10^2 = 100$; I_2 – natężenie dźwięku słyszanego przez obserwatora w odległości 200 m od źródła, $I_2 = I_1 : 100 = 10^{-4} \text{ W/m}^2$;

Definicja. Twierdzenie. Dowód twierdzenia

1. wskazówka: Jeśli $x > \frac{1}{3}$, to $3x > 1$, jeśli $y > \frac{-1}{2}$, to $2y > -1$, zatem $3x + 2y > 1 + (-1) = 0$
3. wskazówka: Jeśli $a > -2$, to $a + 2 > 0$, jeśli $b < 3$, to $b - 3 < 0$, zatem $(a + 2)(b - 3) < 0$, czyli $ab - 3a + 2b - 6 < 0$.
5. wskazówka: Jeśli $a > 3b$, to $a - b > 2b$, skąd $\frac{a-b}{2b} > 1$, bo $b > 0$

6. *wskazówka:* Mamy $2k + 1, 2k + 3, 2k + 5, 2k + 7$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$,
zatem $(2k + 1) + (2k + 3) + (2k + 5) + (2k + 7) = 8k + 16 = 8(k + 2)$
7. *wskazówka:* Mamy $4k + 1, 4k + 2, 4k + 3$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$,
zatem $(4k + 1) + (4k + 2) + (4k + 3) = 12k + 6 = 6(2k + 1)$.
8. *wskazówka:* Mamy $7k + 1, 7k + 2, 7k + 3, 7k + 4, 7k + 5, 7k + 6$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$,
zatem $(7k + 1) + (7k + 2) + (7k + 3) + (7k + 4) + (7k + 5) + (7k + 6) = 42k + 21 = 7(6k + 3)$
9. *wskazówka:* zapisz liczbę $n^2 - 1$ w postaci $(n - 1)(n + 1)$ i zauważ, że jeśli n przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1, to liczba $n - 1$ jest podzielna przez 3, a jeśli n przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2, to liczba $n + 1$ jest podzielna przez 3.
10. *wskazówka:* Mamy $n = 3k + 2, m = 3l + 1$, gdzie $k, l \in \mathbf{N}$; oblicz $(3k + 2)^2 - (3l + 1)^2$.
11. *wskazówka:* Mamy $5k + 1, 5k + 3$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$, zatem
 $(5k + 1)^2 + (5k + 3)^2 = 25k^2 + 10k + 1 + 25k^2 + 30k + 9 = 50k^2 + 40k + 10 = 10(5k^2 + 4k + 1)$.
12. *wskazówka:* zobacz przykład 2. i 5.
13. *wskazówka:* zobacz przykład 3.
14. *wskazówka:* zobacz przykład 3.
15. *wskazówka:* a) $9x^2 - 6xy + 2y^2 = (9x^2 - 6xy + y^2) + y^2 = (3x - y)^2 + y^2$;
wskazówka: b) $2x^2 + 4y^2 + 1 - 2x - 4xy = (x^2 - 2x + 1) + (x^2 - 4xy + 4y^2) = (x - 1)^2 + (x - 2y)^2$
16. *wskazówka:* zobacz przykład 6.
17. *wskazówka:* Załóżmy przeciwnie, że liczba $\log_2 3$ jest wymierna, czyli $\log_2 3 = \frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbf{N}_+$. Stąd i z własności logarytmu otrzymujemy, że $q \cdot \log_2 3 = p$, czyli $\log_2 3^q = p$. Z definicji logarytmu mamy $2^p = 3^q$. Ale ostatnia równość jest sprzeczna, ponieważ liczba 2^p jest liczbą parzystą, natomiast liczba 3^q jest liczbą nieparzystą.
18. *wskazówka:* zobacz przykład 7.
19. *wskazówka:* $3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2} = 3^n(1 + 3 + 9) = 13 \cdot 3^n$
20. *wskazówka:* $2^{n+5} + 2^{n+4} - 2^{n+3} + 2^{n+2} + 2^{n+1} = 2^{n+1}(16 + 8 - 4 + 2 + 1) = 23 \cdot 2^{n+1}$
21. *wskazówka:* $6^{n+2} - 2 \cdot 6^{n+1} + 7^{n+2} - 7^n = 6^n(36 - 12) + 7^n(49 - 1) = 6^n \cdot 24 + 7^n \cdot 48 = 24(6^n + 2 \cdot 7^n)$, gdzie $n \in \mathbf{N}$.

Przekształcanie wzorów

2. a) $l = \frac{M}{\varepsilon}$ b) $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ c) $m_2 = \frac{Fr^2}{Gm_1}, r = \sqrt{\frac{Gm_1 m_2}{F}}$
3. a) $t_1 = \frac{s + vt_2}{v}, t_2 = \frac{vt_1 - s}{v}$ b) $y = \frac{xf}{x - f}, f = \frac{xy}{x + y}$ c) $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, R_2 = \frac{R_1 R}{R_1 - R}$
4. b) $a = \frac{4PR}{bc}, R = \frac{abc}{4P}$ d) $c_1 = \frac{h^2}{c_2}$ e) $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

Średnie

1. w Suwałkach o 3,83 godziny
2. 3,19
3. 24,90 zł/kg
4. ok. 4,51%; *wskazówka*: zobacz przykład 3.

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 2.**Test**

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7
Odpowiedź	D	B	A	D	A	B	C
Nr zadania	8	9	10	11	12	13	14
Odpowiedź	B	C	B	A	C	A	C

Zadania otwarte

15. a) $2 \text{ km} = 2 \cdot 10^4 \text{ dm}$ $13 \text{ mm} = 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ $23 \text{ cm} = 2,3 \cdot 10^{-4} \text{ km}$
 b) $37 \text{ kg} = 3,7 \cdot 10^3 \text{ dag}$ $56 \text{ g} = 5,6 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$ $81 \text{ g} = 8,1 \cdot 10^{-5} \text{ t}$
 c) $2 \text{ m}^2 = 2 \cdot 10^2 \text{ dm}^2$ $7,1 \text{ m}^2 = 7,1 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2$ $4,5 \text{ mm}^2 = 4,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$

16. a) 4^7 b) 2^{-3} c) 3^6 d) $7^{\frac{1}{2}}$ e) $2^{3,5}$ f) 2^{-9}

17. a) 15 b) 1 c) 0 d) 6

18. a) $6 - 4\sqrt{2}$ b) 16 c) $30 - 12\sqrt{6}$ d) 2

19. a) $-3 - 2\sqrt{3}$ b) $12 + 4\sqrt{5}$ c) $-1 + \sqrt{2}$

20. a) $-16x + 5$; 3,4 b) $a^2 - 5a + 1$; $9 - 7\sqrt{2}$ c) $-20x$; -40 d) $-4x^2$; -48

21. a) $x = 3$ b) $x = -\frac{1}{5}$ c) $x = 1$ d) $x = 13$

22. $a = 3$; $x \in (-\infty, -5)$

23. a) $x \in \left(-\infty, 1\frac{4}{5}\right)$ b) $x \in \left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$ c) $x \in \left(-8\frac{1}{2}, +\infty\right)$

24. a) $-\frac{1}{8}$ b) 245 c) 1 d) $\frac{1}{4}$

25. *wskazówka*: jeśli $a > -2$, to $a + 2 > 0$, jeśli $b \geq 3$, to $b - 3 \geq 0$, zatem $(a + 2)(b - 3) \geq 0$

26. *wskazówka*: $3a^2 + 7b^2 - 6ab = 3a^2 - 6ab + 3b^2 + 4b^2 = 3(a^2 - 2ab + b^2) + 4b^2$

27. *wskazówka*: Mamy $6k + 2$, $6k + 4$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$,
 zatem $(6k + 2) + (6k + 4) = 12k + 6 = 6(2k + 1)$.

28. *wskazówka:* zauważ, że liczbę n można zapisać w postaci $4k + 1$ lub $4k + 3$ i wykorzystaj wskazówkę do zadania 10. ze str. 122

29. *wskazówka:* $(2n + 1) + (2n + 3) + (2n + 5) + (2n + 7) + (2n + 9) = 10n + 25 = 10(n + 2) + 5$

30. *wskazówka:* $3^{2n+3} + 4 \cdot 9^{n+1} + 81^{0,5n+1} = 3^{2n} \cdot 27 + 9^n \cdot 36 + 9^{n+2} = 9^n(27 + 36 + 81) = 144 \cdot 9^n = 12(12 \cdot 9^n) = (12 \cdot 3^n)^2, n \in \mathbf{N}$.

31. *wskazówka:* Jeśli $(a + b)(c + d) = (a + c)(b + d)$, to $ac + ad + bc + bd = ab + ad + cb + cd$ skąd $ac + bd = ab + cd$, czyli $a(c - b) - d(c - b) = 0$.

32. $v_{\text{sr}} \approx 53,5 \text{ km/h}; v_{\text{sr}} = \frac{3}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}}$

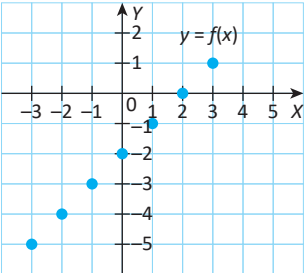
33. $v_{\text{sr}} = 60 \text{ km/h}; v_{\text{sr}} = \frac{v_1 + v_2 + v_3}{3}$

Odpowiedzi do rozdziału 3.

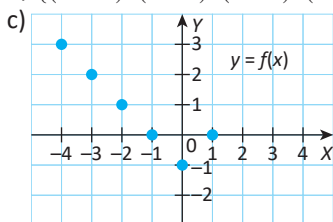
Pojęcie funkcji. Funkcja liczbowa. Sposoby opisywania funkcji

- Przyporządkowanie c) nie jest funkcją.
- tylko b)
- b) Nie, bo istnieje liczba, która należy do zbioru Y , ale nie należy do zbioru wartości tej funkcji. Tą liczbą jest 5.
- a) $ZW_f = \{1, 2, 4, 8, 16\}$
- a)

x	1	3	5	7
f(x)	6	4	2	0

 b) -32
- a) $g(4) = 2$ b) $g(x) = 4$ dla $x = 16$ c) Funkcja g każdej liczbie ze zbioru $\{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36\}$ przyporządkowuje pierwiastek kwadratowy z tej liczby
- a) $h(-2) = -4$ b) $h(x) > -3$ dla $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ c) wzór: $h(x) = x - 2$, gdzie $x \in \{-3, -2, 0, 1, 2, 3\}$
- wskazówka:* Oblicz wartości funkcji f korzystając ze wzoru.
- a)  b) $f(x) = x - 2$, gdzie $x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ c) 5

10. a) $f(x) = |x| - 1$, gdzie $x \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1\}$
 b) $\{(-4, 3), (-3, 2), (-2, 1), (-1, 0), (0, -1), (1, 0)\}$



11. a)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	3	3	1	1	2	1	2	1	2

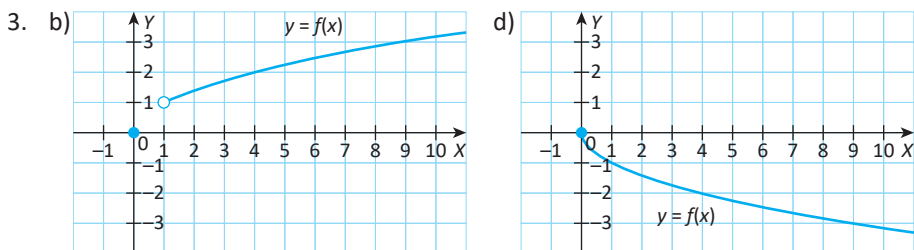
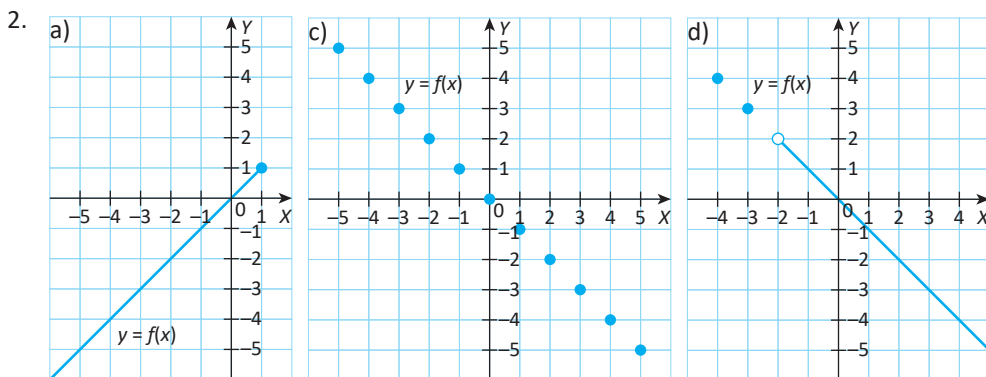
12. a) $f(x) = 2x^2 - 8$; b) $f(-2) = f(2) = 0$; wskazówka: Oblicz wartości funkcji f dla poszczególnych argumentów.

13. a) $g(x) = (x - 3)^2$, gdzie $x \in \mathbf{Z}$ b) $g(x) = 0$ dla $x = 3$ c) tylko punkt A; wskazówka: zobacz przykład 6. str. 138

14. a) $D_h = \{10, 15, 20, 25, \dots, 95\}$, $ZW_h = \{0, 1, 2, 3\}$ b) punkty A i B c) 27

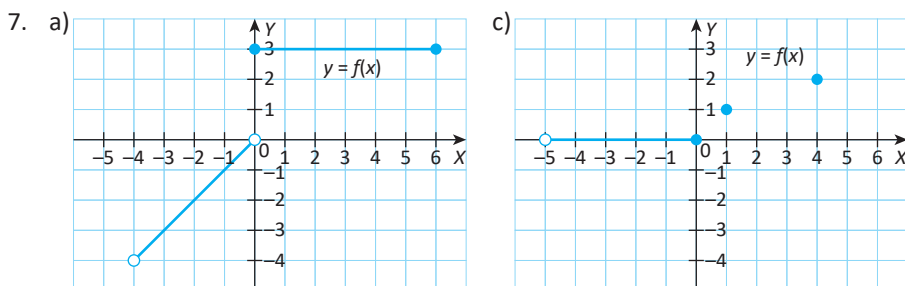
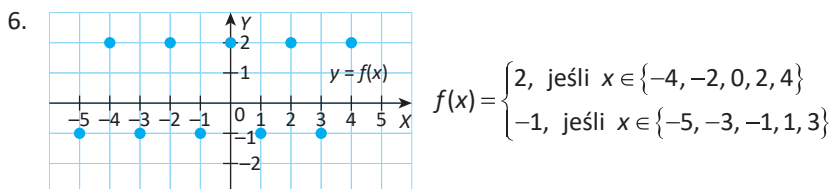
Wykres funkcji

1. wykresy funkcji: b), d), f)

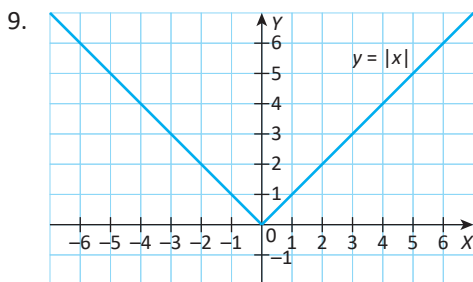


4. a) punkt na osi OY : $(0, 1)$; punkty na osi OX : $(-3, 0)$, $(-1, 0)$, $(2, 0)$
 5. a) Ponieważ $f(0) = 8$, więc punkt przecięcia z osią OY ma współrzędne $(0, 8)$. Aby wyznaczyć współrzędne punktów wspólnych wykresu funkcji i osi OX , szukamy argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartość 0, czyli rozwiązujemy równanie: $-2x^2 + 8 = 0$, skąd $x = -2$ lub $x = 2$. Obie liczby należą do dziedziny funkcji, więc wykres funkcji f ma dwa punkty wspólne z osią OX : $(-2, 0)$ oraz $(2, 0)$ b) punkt na osi OY : $(0, -42)$; punkty na

osi OX : $(3, 0)$, $(-7, 0)$; c) punkt na osi OY : $(0, 10)$; punkt na osi OX : brak d) punkt na osi OY : $(0, 6)$; punkt na osi OX : $(2, 0)$ e) na osi OY : brak; punkt na osi OX : $(-3, 0)$
f) punkt na osi OY : $(0, -7)$; punkt na osi OX : $(-\sqrt{7}, 0)$



8. a) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } x \in (0, +\infty) \\ 0, & \text{jeśli } x = 0 \\ -1, & \text{jeśli } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$ b) Funkcja f każdej liczbie rzeczywistej mniejszej od 2 przyporządkowuje liczbę 4, zaś każdej liczbie większej od 2 – liczbę 1.



10. Do wykresu funkcji f należą tylko punkty: A, D .
11. a) $(0, 7)$ b) $f(2) = -1$ c) $f(x) = 4 \Leftrightarrow x \in \{-3, -1, 3\}$ d) nie należy

Dziedzina funkcji liczbowej

1. a) $D_f = (-4, 4)$ b) $D_f = \langle -5, 6 \rangle$ c) $D_f = (-\infty, 6)$ d) $D_f = \langle -4, 5 \rangle$
2. a) $D = \mathbb{R}$ b) $D = \mathbb{R} - \{-1\}$ c) $D = \mathbb{R} - \{0, 7\}$ d) $D = \mathbb{R}$ e) $D = \mathbb{R} - \{-2, 4\}$
f) $D = \mathbb{R} - \{-9, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$
3. a) $D = \langle -2, +\infty \rangle$ b) $D = (-\infty; 2, 5)$ c) $D = (-4, +\infty)$ d) $D = (0, 9)$
e) $D = (0, 2) \cup (2, +\infty)$ f) $D = (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{2}{3}\right)$ g) $D = (-5, +\infty)$
h) $D = (-\infty, -3) \cup (-3, 1)$ i) $D = \langle 2, 5 \rangle$

Zbiór wartości funkcji liczbowej. Najmniejsza i największa wartość funkcji

- a) $ZW_f = \left\{-5, -1\frac{1}{3}, -\frac{3}{5}, \frac{1}{13}\right\}$ b) $ZW_f = \left\{-12, -7\frac{2}{3}, -5\frac{1}{2}, -4\frac{1}{5}\right\}$
 c) $ZW_f = \left\{-2, -\frac{3}{4}, 0, 3\right\}$ d) $ZW_f = \left\{-15, -1, 0, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right\}$
- a) $ZW_f = \langle -4, 0 \rangle \cup \langle 1, 4 \rangle$; wartość najmniejsza to -4 dla $x = 5$; f nie ma największej wartości b) $ZW_f = \{-2, 1, 3\}$; najmniejsza wartość to -2 dla $x \in \langle 2, 3 \rangle$; największa wartość to 3 dla $x \in \langle -4, -1 \rangle$ c) $ZW_f = \langle -2, 1 \rangle \cup \{2, 3\}$; najmniejsza wartość to -2 dla $x = 2$, największa wartość funkcji to 3 dla $x = 4$ d) $ZW_f = \langle -3, +\infty \rangle$; najmniejsza wartość to -3 dla $x \in \langle -2, 5 \rangle$; f nie ma największej wartości
- a) 1) $D_f = \langle -5, 7 \rangle$, $ZW_f = \langle -6, 3 \rangle$ 2) $f(-2) = 3$, $f(6) = -4$ 3) $f(x) = -4$ gdy $x \in \{3, 6\}$
 4) wartość największa to 3 dla $x = -2$; wartość najmniejsza to -6 dla $x = 5$
 b) 1) $D_f = (-6, +\infty)$, $ZW_f = \langle -4, +\infty \rangle$ 2) $f(-2) = -2$, $f(6) = 4$ 3) $f(x) = -4$ gdy $x = 5$
 4) funkcja f nie przyjmuje największej wartości; najmniejsza wartość to -4 dla $x = 5$.
- a) 3) $f(x) = -2 \Leftrightarrow x \in \{-4, 6\}$ 4) dla czterech b) 3) $f(x) = -2 \Leftrightarrow x = 6$ 4) dla dwóch
- a) $D = \mathbf{R}$; $x = -30$ b) $D = \mathbf{R}$; $x = -4$ lub $x = 4$
- a) $5 \notin ZW_f$ b) $5 \in ZW_g$

Miejsce zerowe funkcji

- a) tak b) tak c) tak d) nie
- a) 0, 4 b) f nie ma miejsc zerowych c) $-3, 1, 6$
- a) 4 b) 0 c) f nie ma miejsc zerowych d) $-\sqrt{5}, \sqrt{5}$
- a) 3 b) $-4, 5$
- a) $D = \mathbf{R}$; $x = 13\frac{1}{3}$ b) $D = \langle -3, +\infty \rangle$; $x = -3$ c) $D = \mathbf{R}$; $x \in \left\{-9, 0, \frac{1}{2}\right\}$
 d) $D = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$; $x = \frac{2}{3}$ e) $D = \mathbf{R}$; funkcja nie ma miejsc zerowych
 f) $D = \langle 0, +\infty \rangle$; funkcja nie ma miejsc zerowych
- a) $D = \mathbf{R} - \{0\}$; -8 b) $D = \mathbf{R} - \{-2, 2\}$; f nie ma miejsc zerowych c) $D = \mathbf{R} - \{-1\}$; 1
 d) $D = \mathbf{R} - \{0\}$; f nie ma miejsc zerowych e) $D = \mathbf{R}$; $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$ f) $D = \mathbf{R} - \{-3, 0\}$; 4
- a) $D = \mathbf{R} - \{-5\}$; 0 b) $D = \mathbf{R} - \{8\}$; -8 c) $D = \mathbf{R} - \{2\}$; 0, 1
- a) $D = (-\infty, 3)$; -4 b) $D = (-2, +\infty)$; f nie ma miejsc zerowych c) $D = \langle 3, 5 \rangle$; 3
- a) 1) $D_f = \langle -5, +\infty \rangle$, $ZW_f = \langle -4, +\infty \rangle$ 2) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-4, -2, 2\}$
 3) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-4, -2) \cup (2, +\infty)$ 4) $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \langle -5, -4 \rangle \cup (-2, 2)$
 b) 1) $D_f = \mathbf{R}$, $ZW_f = \langle 0, +\infty \rangle$ 2) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \langle -4, -2 \rangle$
 3) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -4) \cup (-2, +\infty)$ 4) f nie przyjmuje wartości ujemnych

Monotoniczność funkcji

1. a) niemalejąca, b) malejąca (nierosnąca), c) nierosnąca, d) rosnąca (niemalejąca)
2. a) f rosnąca w przedziałach: $(-\infty, -2)$, $(0, 2)$; f malejąca w przedziałach: $(-2, 0)$, $(2, +\infty)$
 b) f rosnąca w przedziale $(-1, 2)$; f malejąca w przedziałach: $(-2, -1)$, $(2, +\infty)$; f stała w przedziale $(-4, -2)$
 c) f malejąca w przedziałach: $(-\infty, -4)$, $(3, +\infty)$; f rosnąca w przedziałach: $(-4, -2)$, $(0, 3)$; f stała w przedziale $(-2, 0)$
 d) f rosnąca w przedziałach $(-6, -5)$, $(-2, 0)$, $(3, +\infty)$; f malejąca w przedziałach: $(-5, -2)$, $(0, 3)$

Funkcje różnowartościowe

1. Tylko funkcja g jest różnowartościowa
2. a) tak b) nie
3. funkcje różnowartościowe to f, i, h, m
4. Funkcja nie jest różnowartościowa; *wskazówka*: podaj dwa argumenty, dla których funkcja przyjmuje tę samą wartość
5. Funkcja g jest różnowartościowa, bo dla $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, jeśli $x_1 \neq x_2$, to $2x_1 \neq 2x_2$
6. $ZW_h = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
7. a) $ZW_f = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ b) f nie jest różnowartościowa

Odczytywanie własności funkcji na podstawie jej wykresu

1. a) $D_f = (-6, +\infty)$; $ZW_f = (-2, +\infty)$; m. zerowe: 1 i 5; $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-6, 1) \cup (5, +\infty)$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (1, 5)$; funkcja f jest rosnąca w przedziałach: $(-4, -2)$, $(3, +\infty)$, malejąca w przedziałach: $(-6, -4)$, $(-2, 3)$; 6) funkcja f nie jest różnowartościowa; funkcja f nie przyjmuje wartości największej; funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość -2 dla argumentu 3
 b) $D_f = (-7, 5)$; $ZW_f = (-4, 4)$; m. zerowe: -1 $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 5)$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-7, -1)$; funkcja f jest rosnąca w przedziałach: $(-7, -5)$, $(-3, 1)$, $(3, 5)$, malejąca w przedziałach: $(-5, -3)$, $(1, 3)$; funkcja nie jest różnowartościowa; funkcja f przyjmuje największą wartość równą 4 dla dwóch argumentów: 1 oraz 5, funkcja przyjmuje najmniejszą wartość równą -4 dla argumentu -3
2. a) $D_f = (-\infty, 3)$ b) $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = -1$ c) funkcja f jest malejąca w przedziale $(-\infty, 1)$, funkcja f jest rosnąca w przedziale $(1, 3)$ d) 14
3. a) $ZW_f = \left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$ d) tak, bo funkcja f jest rosnąca
4. a) $ZW_f = (-2, 1) \cup (1, 5)$ b) $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 0)$ c) funkcja f jest malejąca w przedziałach: $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ d) nie, bo funkcja f nie jest malejąca w przedziale $(-\infty, +\infty)$; dla argumentów z przedziału $(0, +\infty)$ funkcja f przyjmuje większe wartości, niż dla argumentów z przedziału $(-\infty, 0)$

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 3.**Test**

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	D	D	B	A	A	C	D	C	D	C

Zadania otwarte

11. b) $ZW_f = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ c) dla 11 jest wartość największa 5
12. a) $\{3, 5, 6, 7\}$
13. a) 2 b) $x \in \{-1, 5\}$ d) $x \in (-4, 3) \cup (4, 5)$
14. a) $D_f = \mathbf{R}$; m. zerowe: $-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$ b) $D_g = \langle -4, +\infty \rangle$; m. zerowe -4
c) $D_h = \mathbf{R} - \{1\}$; m. zerowe -1
15. a) $ZW_f = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$; $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \{-4, 0, 1, 4, 5\}$; $f(x) < 0 \Leftrightarrow x = -1$;
dla $x = -1$ wartość najmniejsza -1 ; dla $x \in \{4, 5\}$ wartość największa 3
b) $ZW_f = (-\infty, 1)$; $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0)$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, +\infty)$; funkcja f nie ma wartości najmniejszej; dla $x \in (-\infty, -1)$ wartość największa 1
16. a) 34 b) $-\sqrt{10}$ c) -3
17. a) $ZW_f = \left\{-1, \frac{-1}{6}, \frac{1}{4}, 1\frac{3}{5}, 3\right\}$ b) $\left\{-5, -1, \frac{\sqrt[6]{9}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3}\right\}$
18. a) $D_f = \mathbf{R}$; $ZW_f = \mathbf{R}$; m. zerowe: -4 ; $P(0, 2)$; $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-4, +\infty)$; $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -4)$;
funkcja f jest rosnąca (w zbiorze $\mathbf{R}$); funkcja f jest różnowartościowa; funkcja f nie ma wartości największej ani wartości najmniejszej
b) a) $D_f = \langle -4, 5 \rangle$; $ZW_f = \langle -4, 4 \rangle$; m. zerowe: $-2, 3$; $P(0, -3)$;
 $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \langle -4, -2 \rangle \cup (3, 5)$; $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 3)$; funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle 1, 4 \rangle$, funkcja f jest malejąca w przedziałach $\langle -3, 1 \rangle, \langle 4, 5 \rangle$; funkcja f jest stała w przedziale $\langle -4, -3 \rangle$; funkcja f nie jest różnowartościowa; dla $x \in \langle -4, -3 \rangle$ wartość największa 5; dla $x = 1$ wartość najmniejsza -4

Odpowiedzi do rozdziału 4.**Proporcjonalność prosta**

1. a) tak; współczynnik proporcjonalności: $\frac{2}{3}$; $y = \frac{2}{3}x$; b) nie
2. kolejno w górnym wierszu: 9,6 oraz 29,6 oraz 126,6; w dolnym wierszu: 1, 30 oraz 35,5;
współczynnik proporcjonalności: $\frac{5}{6}$
3. a) $y = 144x$, gdzie $x \geq 0$ b)

x	3	7	15	20	28
y	432	1008	2160	2880	4032

4. a) $y = 54x$, gdzie $x \geq 0$

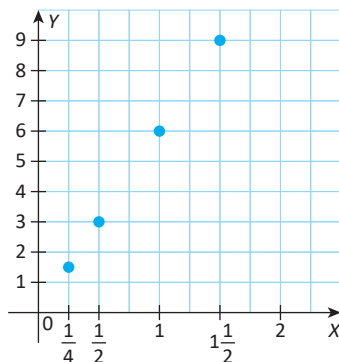
b)

x [h]	$\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{3}$	2	2,5
y [km]	18	90	108	135

5. a) $y = 3,5x$, gdzie $x \in \langle 0, +\infty \rangle$ b) 33,25 zł

6. a) $y = \frac{29}{95}x$, gdzie $x \geq 0$ b) 95 l

7. $y = 6x$, $x \in \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2} \right\}$



8. a) współczynnik proporcjonalności wynosi 4; $P(x) = 4x$, $x \in (0, 2)$ b) $h = 8$

9. a) tak b) nie

Funkcja liniowa. Wykres i miejsce zerowe funkcji liniowej

1. a) i d)

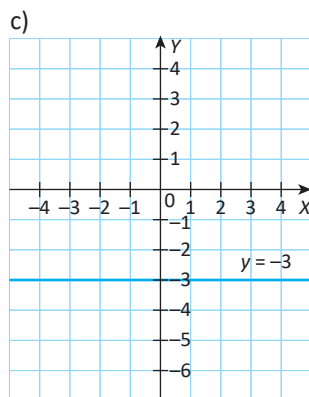
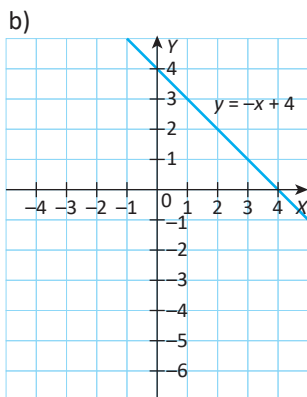
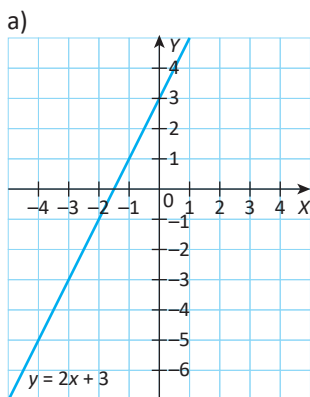
2. a) $a = 0,6$; $b = 0$ b) $a = -9$; $b = 8$ c) $a = -\frac{3}{4}$; $b = 1\frac{1}{4}$ d) $a = 0$; $b = -12$

3. a) $y = 4x$ b) $y = -0,5x$ c) $y = -\frac{2}{3}x$ d) $y = 1,75x$

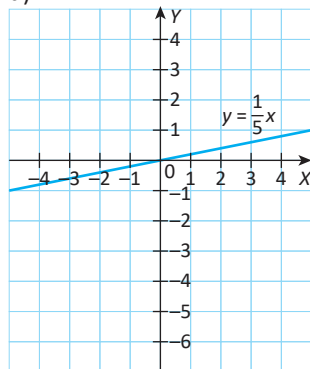
4. a) $y = -5x + 3$ b) $y = x + 3$ c) $y = 3$

5. a) $y = -9x + 5$ b) $y = 10x - 3$ c) $y = -2x + 30$ d) $y = \frac{2}{3}x - 18$

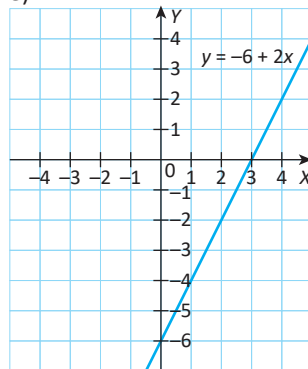
6. a) $(0, 3)$, $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ c) tylko z osią OY : $(0, -3)$



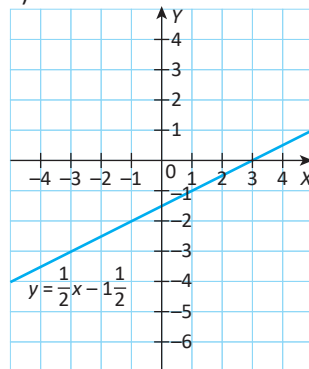
d)



e)

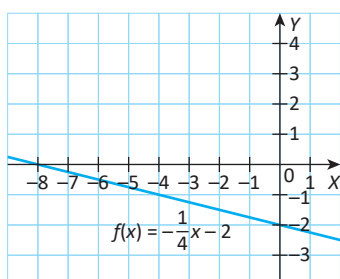
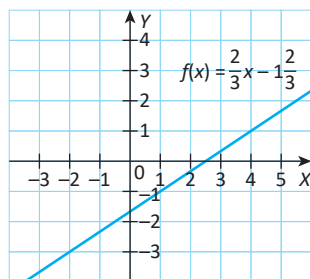


f)



$$g) \left(0, -1\frac{2}{3}\right), \left(2\frac{1}{2}, 0\right),$$

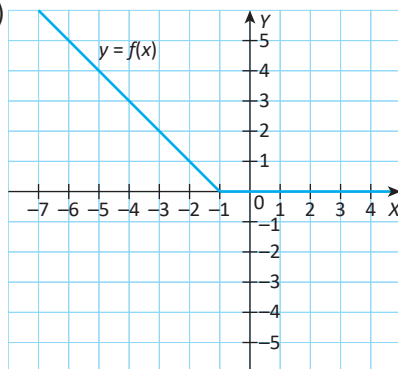
$$h) (0, -2), (-8, 0)$$



$$7. \text{ a) } -24 \quad \text{b) } 200 \quad \text{c) } 2\pi \quad \text{d) } 10 \quad \text{e) } 2\sqrt{2} \quad \text{f) } -11 - 2\sqrt{30}$$

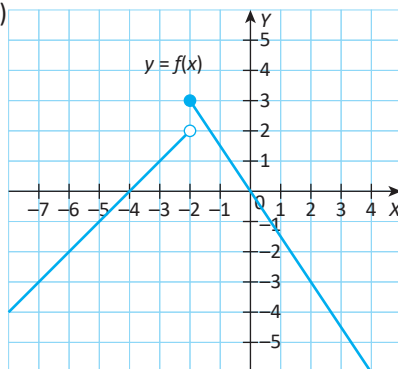
$$8. \text{ a) } b = -5 \quad \text{b) } b = 20 \quad \text{c) } a = -0,5 \quad \text{d) } a = -\sqrt{3}$$

9. a)

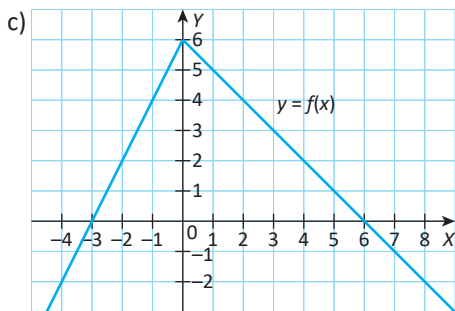


Miejszem zerowym funkcji jest każda liczba należąca do przedziału $\langle -1, +\infty \rangle$.

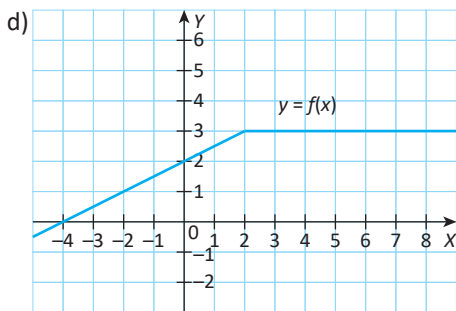
b)



Miejsca zerowe: -4 oraz 0



Miejsca zerowe: -3 oraz 6 .



Miejsce zerowe: -4

10. a) $(0, -3)$ b) $(0, 0)$ c) $(0, 7)$ d) $(0, 60)$

11. a) $\left(1\frac{2}{3}, 0\right)$, b) $(1, 0)$ c) $(5, 0)$ d) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

12. a) $m = \frac{1}{4}$; $f(x) = 2x$ b) $m = 2$; $f(x) = 2x + 7$ c) $m = 3$; $f(x) = 2x + 11$

d) $m = -0,25$; $f(x) = 2x - 2$

wskazówka: wyrazem wolnym jest liczba $4m - 1$.

13. $a = 1$; $\left(0, -1\frac{1}{3}\right)$

wskazówka: miejscem zerowym jest liczba $\frac{4}{3}$, więc $g(x) = 0$ wtedy, gdy $a \cdot \frac{4}{3} + 2a - 3\frac{1}{3} = 0$.

Stąd $a = 1$; $b = 2a - 3\frac{1}{3}$, więc $b = -1\frac{1}{3}$.

Znaczenie współczynnika kierunkowego we wzorze funkcji liniowej

1. a) -7 b) $-0,5$ c) 0 d) $\sqrt{2}$ e) $0,2$ f) -2

2. a) $y = -2x + 3$ b) $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$ c) $y = 3x - 7$ d) $y = \sqrt{5}x$

3. $m = -7$; $a = 21$, $b = -68$

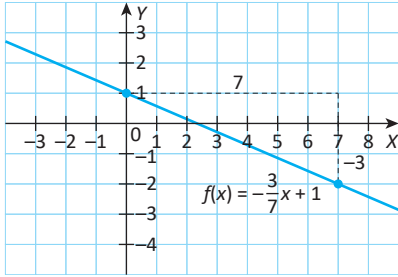
4. a) $f(x) = 0,2x + 2$ b) $g(x) = -0,4x + 5$,

5. a) malejąca b) stała c) rosnąca d) malejąca

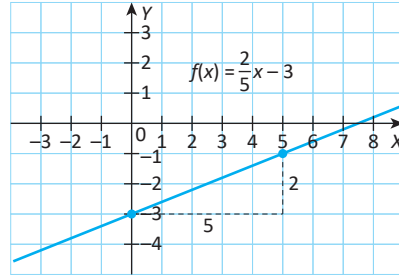
6. a) $m \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ b) $m \in (-\infty, 4)$ c) $m \in (3, 5; +\infty)$ d) $m \in \{-2, 2\}$

7. a) $a < 0, b < 0$ b) $a > 0, b > 0$ c) $a < 0, b > 0$

8. d) miejsce zerowe: $2\frac{1}{3}$



e) miejsce zerowe: $7\frac{1}{2}$



9. a) $g(x) = \sqrt{2}x + 4$ b) $g(x) = -5x + 10$ c) $g(x) = 3$ d) $g(x) = -x + 9$ e) $g(x) = 0,25x + \frac{\pi}{2}$
f) $g(x) = -\sqrt{3}x$

10. a) $m = 3$; $f(x) = 4x - 3$; $g(x) = 4x + 2$ b) $m = -0,5$; $f(x) = -2x + 1$; $g(x) = -2x - 5$

11. a) $f(x) = 1,5x + 5,5$ $g(x) = 1,5x + 4,5$ b) $x \in \left(-\infty, -3\frac{2}{3}\right)$ c) $P = 6\frac{3}{4}$

Własności funkcji liniowej – zadania różne

1. $f(x) = -\frac{8}{5}x + 8$

2. $m = 3\frac{1}{3}$

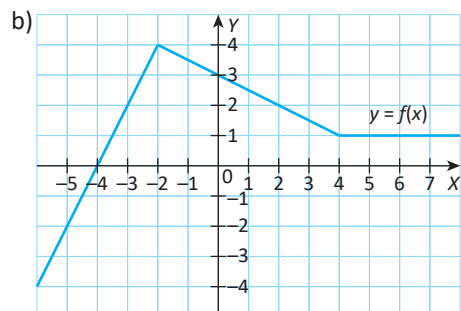
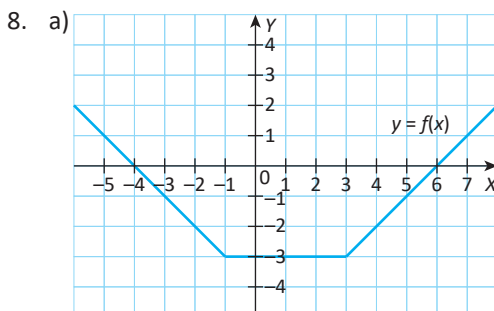
3. $x \in \langle -40, 40 \rangle$

4. $x \in \left\langle 1\frac{1}{5}, 1\frac{4}{5} \right\rangle$

5. a) $f(x) \in (1, 3)$ b) $x = -2$ c) $x \in (-\infty, -6)$ d) $x \in (-4, 2)$

6. $x \in (-\infty, -70)$

7. $x \in (26, 200)$



9. a) $p \in (3,5; +\infty)$ b) $p \in (-\infty, -1)$

10. $a = 1\frac{1}{6}$

11. a) $b \in \mathbf{R} - \{-2\}$ b) $b = 2$ c) $b = -4$

12. a) $k = -1,6$ b) $k \in (-5, +\infty)$ c) $k \in \left(-\infty, 1\frac{1}{2}\right)$

13. $m = -4$; miejsce zerowe: $-1\frac{2}{7}$

14. $m \in (2, 5)$

15. $m \in \left(-2\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

16. $a = -3$, $b = 4\frac{2}{3}$

17. $k = 5$

18. a) $m = 3$ b) $(0, -6), (0, -1), \left(-\frac{1}{2}, 0\right), (-3, 0)$.

Zastosowanie własności funkcji liniowej w zadaniach praktycznych

1. a) 85,5 km/h b) $s(t) = \begin{cases} 48t, & t \in \left\langle 0, \frac{1}{4} \right\rangle \\ 108t - 15, & t \in \left\langle \frac{1}{4}, \frac{2}{3} \right\rangle \end{cases}$

2. a) $P(t) = 18t + 4$, $t \in \langle 0, 7 \rangle$ b) 104,8 cm

3. $F = 1,8C + 32$ a) 15°C b) $97,88^\circ\text{F}$

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 4.**Test**

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8
Odpowiedź	A	D	C	A	B	C	D	B
Nr zadania	9	10	11	12	13	14	15	
Odpowiedź	B	C	C	B	A	A	C	

Zadania otwarte

16. $(0, 15)$

17. $y = \frac{-3}{11}x + \frac{9}{11}; \left(0, \frac{9}{11}\right)$

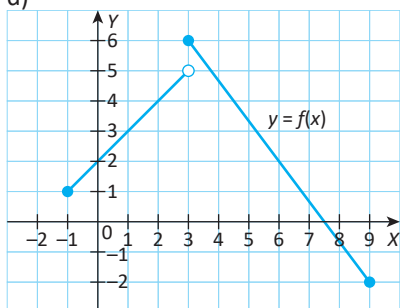
18. $y = -\frac{1}{2}x + 8$

19. $a = 2,5$

20. $x \in \langle -6, 3 \rangle$

21. a) tak b) 0 c) $7\frac{1}{2}$

d)



e) funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle -1, 3 \rangle$, malejąca w przedziale $\langle 3, 9 \rangle$ f) największa wartość funkcji f to 6, a najmniejsza to -2

22. a) $x \in \langle -5, 3 \rangle$ b) $ZW_f = \langle -2, +\infty \rangle$ c) $f(x) = \begin{cases} -2x - 8, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -3) \\ \frac{2}{3}x, & \text{jeśli } x \in (-3, +\infty) \end{cases}$

23. $m \in \left(2\frac{1}{2}, 5 \right)$.

24. $m \in (-4, -1)$

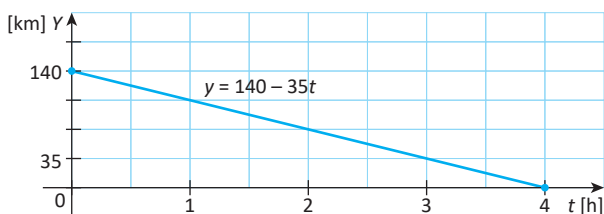
25. $m \in (1, 4)$

26. $f(a) = (a - 4) \cdot a + 4 = a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2$; dla dowolnej liczby rzeczywistej a , wyrażenie $(a - 2)^2$ jest nieujemne, co kończy dowód.

27. $y = -2x + 2\sqrt{3}$

28. a) $k = -1$ b) $f(x) = -x + 2$; $(0, 2), (2, 0)$; $g(x) = -x - 3$; $(0, -3), (-3, 0)$.

29. $y = 140 - 35t$, gdzie $t \in \langle 0, 4 \rangle$



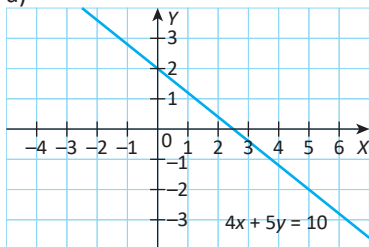
Odpowiedzi do rozdziału 5.

Równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

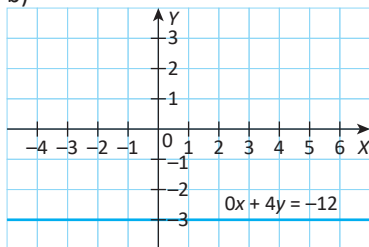
1. a) $(100, 2), (-7, 2)$ b) $(-2, -2), (-9, -5)$ c) $\left(\frac{5}{6}, 9\frac{1}{5} \right)$ d) $(-4, 0), (5, 3)$

2. a) 6 b) -4 c) 23 d) -19

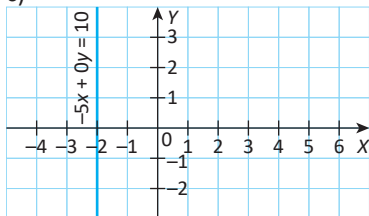
3. a)



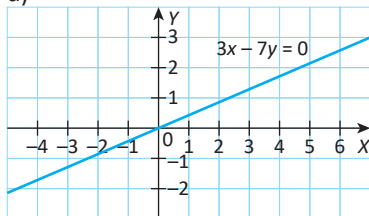
b)



c)



d)



4. równania równoważne: I. a), d), f) II. b), c), e)

5. a)
- $y = 2$
- b)
- $x = -4$
- c)
- $2x - 3y = 0$
- d)
- $x + y = 4$

6. a)
- $\left(x, -\frac{2}{9}x\right), x \in \mathbf{R}$
- b)
- $(x, 3), x \in \mathbf{R}$
- c)
- $\left(x, \frac{1}{4}x - \frac{5}{8}\right), x \in \mathbf{R}$
- d)
- $(3, y), y \in \mathbf{R}$

- e)
- $(x, 5 - 2x), x \in \mathbf{R}$
- f)
- $(\sqrt{3}, y), y \in \mathbf{R}$

- 7.
- $(0, 4), (3, 3), (6, 2), (9, 1), (12, 0)$

- 8.
- $(-4, 12), (-8, 9), (-12, 6), (-16, 3)$

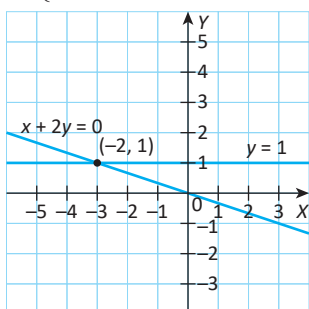
9. a)
- $x - 2y = 12$
- b)
- $2x - y = 18$
- c)
- $2x + 7y = 0$
- d)
- $42x - 43y = 0$

Układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi. Graficzne rozwiązywanie układów równań

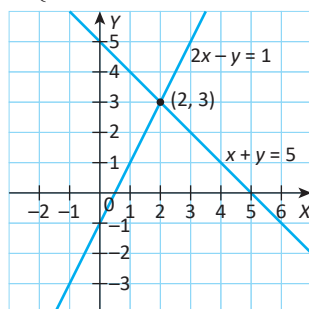
1. a)
- $(1, -3)$
- b)
- $(3, 0)$
- c)
- $(3, 0), (1, -3), (7, 6)$

2. a) układ oznaczony;
- $(3, 1)$
- b) układ sprzeczny; nie ma rozwiązań c) układ nieoznaczony; ma nieskończenie wiele rozwiązań mających postać
- $\left(x, -\frac{3}{2}x\right)$
- , gdzie
- $x \in \mathbf{R}$

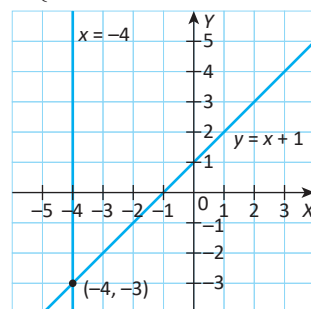
3. a)
- $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$



- b)
- $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$



- c)
- $\begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases}$



4. a) $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$ b) układ nieoznaczony; rozwiązaniami są pary liczb postaci $(x, -1,5x - 4)$,

gdzie $x \in \mathbf{R}$ c) $\begin{cases} x=-2 \\ y=-5 \end{cases}$ d) układ sprzeczny e) układ nieoznaczony; rozwiązaniami

są pary liczb mające postać $(3, y)$, gdzie $y \in \mathbf{R}$ f) $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

5. a) np. układ: $\begin{cases} x=-3 \\ y=\frac{5}{3}x \end{cases}$; rozwiązanie $(-3, -5)$ b) np. $\begin{cases} y=-1,5x-3 \\ y=x-3 \end{cases}$; $(0, -3)$

c) np. $\begin{cases} y=2 \\ y=-\frac{3}{4}x-1 \end{cases}$; $(-4, 2)$ d) np. $\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+2 \\ y=-\frac{1}{2}x-2 \end{cases}$; układ sprzeczny

e) np. $\begin{cases} y=\frac{1}{4}x-1 \\ y=\frac{1}{4}x+1 \end{cases}$; układ sprzeczny f) np. $\begin{cases} y=x+2 \\ -x+y=2 \end{cases}$; układ ma nieskończenie wiele

rozwiązań postaci $(x, x+2)$, gdzie $x \in \mathbf{R}$

Rozwiązywanie układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi metodą podstawiania

1. a) $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=2 \\ y=6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$ d) układ sprzeczny e) układ nieoznaczony;

$\left(x, \frac{2}{5}x-5\right)$, gdzie $x \in \mathbf{R}$, f) układ nieoznaczony; $\left(x, \frac{1}{2}x-2\frac{1}{4}\right)$, gdzie $x \in \mathbf{R}$

2. a) $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=2\frac{1}{3} \end{cases}$ c) $\begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x=4,5 \\ y=-2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x=-13 \\ y=1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x=10 \\ y=\frac{2}{7} \end{cases}$

3. a) $\begin{cases} x=4 \\ y=-5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x=-4 \\ y=-13,5 \end{cases}$ d) układ sprzeczny

4. a) $\begin{cases} x=7 \\ y=1 \end{cases}$ b) $(x, -2,5x)$, gdzie $x \in \mathbf{R}$ c) układ sprzeczny d) $\begin{cases} x=-\frac{2}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases}$

5. a) $\begin{cases} x=3 \\ y=-4 \end{cases}$ b) układ sprzeczny c) $\left(x, \frac{5}{8}x-2\right)$, $x \in \mathbf{R}$ d) $\begin{cases} x=5 \\ y=6 \end{cases}$

6. a) $(x, 1-x)$, gdzie $x \in \mathbf{R}$ b) układ sprzeczny c) $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$
7. a) $\begin{cases} x=0,25 \\ y=6 \end{cases}$ b) $(x, x+2)$, $x \in \mathbf{R}$ c) układ sprzeczny d) $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$
8. a) $a=-4$; $b=-2$ b) $a=0,3$; $b=-0,5$ c) $a=5$; $b=-2$ d) $a=-1$; $b=1$
9. b) $|\angle BAD| = |\angle ADC| = 90^\circ$, $|\angle ABC| = 40^\circ$, $|\angle BCD| = 140^\circ$
10. a) $\begin{cases} y-3x=x+3 \\ 3x+5=x+y \end{cases}$; $\begin{cases} x=1 \\ y=7 \end{cases}$; b) 32
11. a) $\begin{cases} 4x-y=3y-24 \\ 5x+5=3x+y+7 \end{cases}$; $\begin{cases} x=8 \\ y=14 \end{cases}$ b) 121
12. 7 cm; 10,5 cm

Rozwiązanie układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi metodą przeciwnych współczynników

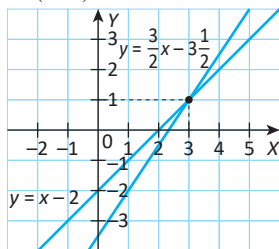
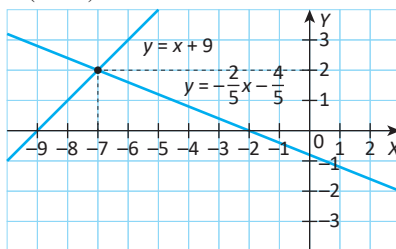
1. a) $\begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases}$ c) układ sprzeczny d) $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$
- f) $\left(x, 4\frac{1}{2}x - 3\frac{1}{2}\right)$, gdzie $x \in \mathbf{R}$
2. a) $\begin{cases} x=5 \\ y=10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ c) układ sprzeczny d) $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ e) układ sprzeczny
- f) $\left(x, \frac{5}{6}x - \frac{5}{3}\right)$, gdzie $x \in \mathbf{R}$
3. a) $\begin{cases} x=-2 \\ y=-16 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=6 \\ y=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x=-1 \\ y=8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$
4. a) $A(3, 2)$ c) $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x \in \langle 3, +\infty \rangle$
5. a) $y = \frac{1}{8}x - 17$ b) $y = -\frac{3}{4}x + 10$ c) $y = 8x - 90$ d) $y = -2x + 38$
6. a) $f(x) = 0,5x + 2$ b) $f(x) = x + 9$
7. $C\left(7, 5\frac{1}{2}\right)$
8. $a=2$
9. $m=-2$; $n=5$

Zastosowanie układów równań do rozwiązywania zadań

1. 18 i 24
2. 320 zł
3. Bluzka kosztuje 35 zł; para skarpetek kosztuje 8 zł
4. Książka kosztowała 21 zł, a zeszyt 2 zł
5. 300 zł, 500 zł
6. 60 i 12
7. po 6 kg każdego roztworu
8. 30 cm, 15 cm
9. W pierwszym koszu 36 jabłek, w drugim 30
wskazówka: Niech x – liczba jabłek w I koszu, y – liczba jabłek w II koszu.
 Wówczas
$$\begin{cases} x - 3 = y + 3 \\ x + 8 = 2 \cdot (y - 8) \end{cases}$$
10. Wiek matki – 32 lata, wiek córki – 5 lat
wskazówka: Niech x – wiek matki obecnie, y – wiek córki obecnie
 2 lata temu matka miała $(x - 2)$ lata, a córka $(y - 2)$ lata; wówczas $x - 2 = 10(y - 2)$; podobnie za 10 lat: $x + 10 = (y + 10) + 27$
11. sześcioro dzieci (cztery dziewczynki, dwóch chłopców)
12. $\frac{3}{7}$
13. 960; *wskazówka:* Jeśli x – cyfra setek, y – cyfra dziesiątek liczby trzycyfrowej, gdzie $x \in \{1, 2, \dots, 9\}$, $y \in \{0, 1, 2, \dots, 6\}$, to początkowa liczba trzycyfrowa jest równa $100x + 10y + 0$, zaś liczba po zamianie cyfry dziesiątek i jedności wynosi $100x + 10 \cdot 0 + y$.
14. 24; *wskazówka:* Niech x – cyfra dziesiątek, y – cyfra jedności liczby dwucyfrowej, $y + 2$ – wstawiona między dane liczby; stąd $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Liczba dwucyfrowa ma wartość $10x + y$, zaś liczba trzycyfrowa jest równa $100 \cdot x + 10 \cdot (y + 2) + y$.
15. Prędkość własna statku 10 km/h, prędkość prądu rzeki 2 km/h
wskazówka: zobacz przykład 3 str. 228.
16. a) funkcja popytu: $y = -75x + 975$, $x \in \langle 3, 11 \rangle$; funkcja podaży: $y = 50x + 100$, $x \in \langle 3, 11 \rangle$
 b) cena równowagi: 7 zł; liczba kilogramów: 450; *wskazówka:* zobacz przykład 4. str. 229.

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 5.**Test**

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	C	A	A	B	C	B	B	D	C	A

Zadania otwarte11. a) $(3, 1)$ b) $(-7, 2)$ 

12. a) $(x, -2x + 4)$, $x \in \mathbf{R}$ b) układ po uproszczeniu: $\begin{cases} y = -x - 1 \\ x = -4 \end{cases}$, skąd $\begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \end{cases}$

13. c) $a = 2$, $b = 1$ b) $a = 6$, $b = 4$ 14. a) $f(x) = -2x - 2$ b) $(-3, 4)$

15. pierwszy 148 owiec, drugi 296 owiec

16. 78

17. 2 kg stopu o zawartości 80% czystego złota, 8 kg stopu o zawartości 30% czystego złota

18. $(0, 11)$, $(7, 8)$, $(14, 5)$, $(21, 2)$

wskazówka: $y = -\frac{3}{7}x + 11$; więc x jest liczbą naturalną, podzielną przez 7; należy spraw-

dzić, które liczby naturalne podzielne przez 7 można wstawić do równania w miejsce x tak, żeby liczba y też była naturalna

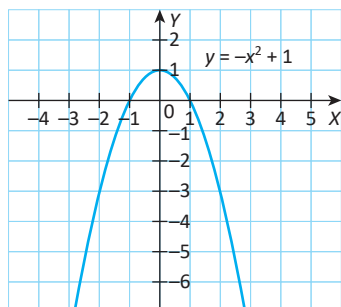
19. wskazówka: $y = 7 - \frac{2}{3}x$; zauważ, że x jest liczbą naturalną podzielną przez 3; następnie

uwzględnij przypadki, że $x \in \{0, 3, 6, 9\}$ i uzasadnij, że innych możliwości nie ma

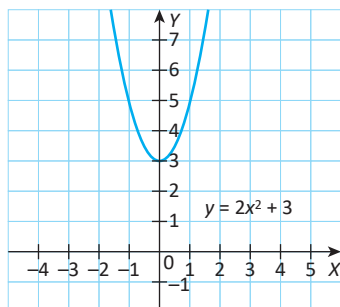
Odpowiedzi do rozdziału 6.**Funkcja kwadratowa**

1. a) $A\left(-\sqrt{3}, 2\frac{1}{4}\right)$, $B\left(\sqrt{3}, 2\frac{1}{4}\right)$, $C\left(-1\frac{1}{2}, \frac{27}{16}\right)$ b) $A\left(1\frac{1}{2}, -\frac{9}{10}\right)$, $B(-\sqrt{5}, -2)$, $C(\sqrt{5}, -2)$

2. c)



d)



3. a) $W(-4, -5)$; równanie prostej: $x = -4$ b) $W(6, 0)$; $x = 6$ c) $W(0, 2)$; $x = 0$
 d) $W(-1, 3)$; $x = -1$ e) $W(0, 4)$; $x = 0$ f) $W(\sqrt{2}, 2)$; $x = \sqrt{2}$
4. a) $(0, -8)$; $W(-3, 1)$; ramiona paraboli skierowane do dołu; f rosnąca w przedziale $(-\infty, -3)$, f malejąca w przedziale $(-3, +\infty)$; $ZW = (-\infty, 1)$ b) $(0, 8)$; $W(-4, 0)$; ramiona paraboli skierowane do góry; g malejąca w przedziale $(-\infty, -4)$, g rosnąca w przedziale $(-4, +\infty)$; $ZW = (0, +\infty)$ c) $(0, 4)$, $W(1, 2)$; ramiona skierowane do góry, h malejąca w przedziale $(-\infty, 1)$, h rosnąca w przedziale $(1, +\infty)$; $ZW = (2, +\infty)$
5. a) $f(x) = -10x^2 + 2$; $ZW = (-\infty, 2)$; f rosnąca w przedziale $(-\infty, 0)$, malejąca w przedziale $(0, +\infty)$
 b) $f(x) = x^2 - 7$; $ZW = (-7, +\infty)$; f malejąca w przedziale $(-\infty, 0)$, rosnąca w przedziale $(0, +\infty)$
 c) $f(x) = (x - 5)^2$; $ZW = (0, +\infty)$; f malejąca w przedziale $(-\infty, 5)$, rosnąca w przedziale $(5, +\infty)$
 d) $f(x) = -2(x + 2)^2 + 8$; $ZW = (-\infty, 8)$; f rosnąca w przedziale $(-\infty, -2)$, malejąca w przedziale $(-2, +\infty)$
 e) $f(x) = -3(x - 0,1)^2 + 0,03$; $ZW = (-\infty; 0,03)$; f rosnąca w przedziale $(-\infty; 0,1)$, malejąca w przedziale $(0,1; +\infty)$ f) $f(x) = \sqrt{2}(x + 2)^2$; $ZW = (0, +\infty)$; f malejąca w przedziale $(-\infty, -2)$, rosnąca w przedziale $(-2, +\infty)$
6. a) 0 b) 0; -3,5 c) 0; $\frac{4}{3}$ d) nie ma miejsc zerowych e) $-\sqrt{5}; \sqrt{5}$
 f) 9 g) $\frac{-1}{\sqrt{7}}; \frac{1}{\sqrt{7}}$ h) $-\sqrt{3}$ i) nie ma miejsc zerowych
7. a) 1; -3 b) 1 c) -9; -5 d) 5 e) $5 + \sqrt{3}; 5 - \sqrt{3}$ f) nie ma miejsc zerowych
8. a) $f(x) = -(x - 4)^2 + 9$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1, 7\}$; $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (1, 7)$;
 $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (7, +\infty)$
 b) $f(x) = (x + 1)^2 - 1$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2, 0\}$; $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$;
 $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 0)$
 c) $f(x) = 4(x - 2)^2$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$; $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbf{R} - \{2\}$;
 funkcja f nie przyjmuje wartości ujemnych
 d) $f(x) = \frac{1}{2}(x - 3)^2 - 8$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 7\}$; $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (7, +\infty)$;
 $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 7)$
 e) $f(x) = -1(x + 2)^2 + 9$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-5, 1\}$; $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-5, 1)$;
 $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$
 f) $f(x) = \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 4\frac{1}{6}$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2, 3\}$; $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$;
 $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 3)$
9. a) $f(x) = x^2 - 4$; $D = \mathbf{R}$, $ZW = (-4, +\infty)$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2, 2\}$,
 $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 2)$, f malejąca w przedziale $(-\infty, 0)$,
 f rosnąca w przedziale $(0, +\infty)$, f przyjmuje wartość najmniejszą równą -4 dla argumentu 0
 b) $f(x) = -(x - 3)^2$; $D = \mathbf{R}$, $ZW = (-\infty, 0)$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbf{R} - \{3\}$, f przyjmuje
 wartość największą równą 0 dla argumentu 3; c) $f(x) = 3(x + 1)^2 - 3$

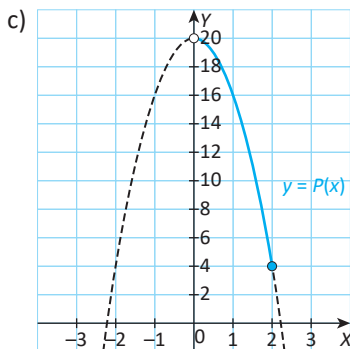
d) $f(x) = -0,5(x-1)^2 + 2$, $D = \mathbf{R}$, $ZW = (-\infty, 2)$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 3\}$; $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 3)$; $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$; f rosnąca w przedziale $(-\infty, 1)$, f malejąca w przedziale $(1, +\infty)$; f przyjmuje wartość największą, równą 2 dla argumentu 1
 e) $f(x) = 2(x-2)^2 - 2$ f) $f(x) = 0,25(x-4)^2 + 1$

10. a) $f(x) = 3(x-1)^2 - 5$; $f(x) = 3x^2 - 6x - 2$
 b) $f(x) = -1(x-3)^2 + 11$; $f(x) = -x^2 + 6x + 2$
 c) $f(x) = \frac{-1}{2}(x+5)^2 + 4$; $f(x) = \frac{-1}{2}x^2 - 5x - 8\frac{1}{2}$
 d) $f(x) = 0,5(x+4)^2 + 3$; $f(x) = 0,5x^2 + 4x + 11$

Funkcja kwadratowa – zastosowania

1. a) kolejno pola są równe: $10,5 \text{ cm}^2$, 12 cm^2 , 12 cm^2 , 8 cm^2 b) $P(x) = 0,5(2+x)(8-x)$, gdzie $x \in (0, 8)$ c) $P(x) = -0,5(x-3)^2 + 12,5$ d) największe pole jest równe $12,5 \text{ cm}^2$; wówczas $x = 3 \text{ (cm)}$.

2. b) $P(x) = 20 - 4x^2$, gdzie $x \in (0, 2)$



d) Funkcja P przyjmuje wartość najmniejszą, równą 4, dla argumentu 2. (Po odcięciu czterech kwadratowych naroży o boku 2 cm pozostanie prostokątny pasek o wymiarach 1 cm na 4 cm).

3. a) $P(x) = 0,5(10-x)(4+x)$, gdzie $x \in (0, 10)$ b) $x = 8$ c) $P(x) = -0,5x^2 + 3x + 20$; $a = -0,5 < 0$, ramiona paraboli są skierowane do dołu; funkcja kwadratowa

$f(x) = -0,5x^2 + 3x + 20$ przyjmuje wartość największą jeśli $x = \frac{10-4}{2} = 3$; liczba 3 należy

do dziedziny funkcji P , więc istnieje największe pole nowego trójkąta i jest ono równe $P(3) = 24,5$.

4. a) $H = 80 \text{ m}$ b) po 4 sekundach
 5. a) $v = 30 \text{ m/s}$ b) 45 m c) po 1 sekundzie i po 5 sekundach lotu
 6. a) 40 b) 3900 zł c) 80 sztuk
 7. 16 lub 48

Proporcjonalność odwrotna

1. 20 słoików o pojemności $0,3 \text{ l}$; 8 słoików o pojemności $0,75 \text{ l}$
 2. a) 30 dni b) 18 robotników
 3. 36

4. 30 km/h, 4h; *wskazówka*: Niech t – ustalony czas (h), v – ustalona prędkość (km/h);

$$\text{wówczas} \begin{cases} (v+10)(t-1) = v \cdot t \\ (v-10)(t+2) = v \cdot t \end{cases}$$

5. 33 km/h; 44 km *wskazówka*: jeśli x (km) – droga, którą pokonał Olek podczas treningu, v (km/h) – prędkość jazdy podczas poniedziałkowego treningu, to para (x, v) spełnia

$$\text{układ} \begin{cases} v \cdot \frac{4}{3} = x \\ (v+7) \cdot \frac{11}{10} = x \end{cases}$$

6. a) 3000 zł b) $y = \frac{3000}{x}$, gdzie $x \in \{1, 2, 3, 4, \dots, 16\}$

7. a) $y = \frac{18}{x}$, gdzie $x > 0$ b) $(1, 18), (2, 9), (3, 6), (6, 3), (9, 2), (18, 1)$

8. a) $x = 5$ cm b) $h = 2\frac{2}{3}$ cm c) $h = \frac{40}{x}$, gdzie $x > 0$

9. Jest 8 takich punktów

10. Jest 8 takich par

11. $(-2, 10), (-4, -10), (-1, 5), (-5, -5), (2, 2), (-8, -2), (7, 1), (-13, -1)$

Funkcja wykładnicza

1. a) jeśli $x < 0$, to $f(x) \in (0, 1)$ b) $f(x) \in \left(\frac{1}{3}, 9\right)$, jeśli $x \in (-1, 2)$

2. a) jeśli $x \leq 1$, to $f(x) \in \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$ b) $f(x) < 3$, jeśli $x \in (-1, +\infty)$

3. a) $b < a < c$ b) $c < a < b$

4. ok. 3500 lat temu

Funkcja logarytmiczna

1. $a = 6$ a) 1 c) $f(2^{-1}) > f(3^{-1})$

2. a) $a > b > c$ b) $k = 7$

3. 0,5

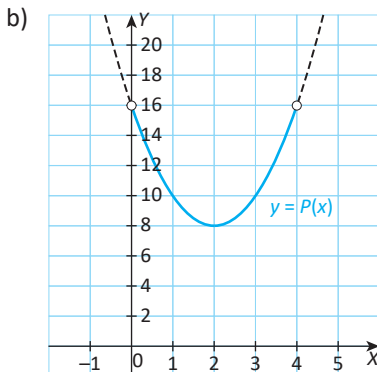
Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 6.

Test

Nr zadania	1	2	3	4	5	6
Odpowiedź	B	A	D	C	D	B

Zadania otwarte

7. a) miejsca zerowe: 1, -3; $f(0) = -6$ b) $x = -1$ c) $f(x) = 2(x+1)^2 - 8$
8. a) $f(x) = 0,5(x-5)^2 - 4,5$; miejsca zerowe: 2 i 8 b) $f(x) = 3(x-0,1)^2 - 0,03$; miejsca zerowe: 0,2 i 0 c) $f(x) = -(x-0,5)^2 + 6,25$; miejsca zerowe: -2 i 3
9. a) $f(x) = -(x-2)^2 + 5$ b) $f(x) = -x^2 + 4x + 1$
10. a) $P(x) = 2x^2 - 8x + 16$, czyli
 $P(x) = 2(x-2)^2 + 8$, gdzie $x \in (0, 4)$
 c) najmniejsze pole jest równe 8, przyjmowane dla $x = 2$



11. (1, 4), (2, 2), (4, 1), (-1, -4), (-2, -2), (-4, -1)
12. 10 robotników, 7 dni,
13. b) $f(x) = g(x)$, jeśli $x \in \{-1, 2\}$
14. a) $a = 16$ c) $f(x) > g(x)$, jeśli $x \in \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$
15. a) 10 000 b) 61 900 c) o 20%
16. a) 10 mg b) po 2 godzinach c) ok. 3,3 mg d) 20%

Odpowiedzi do rozdziału 7.**Punkt, prosta, odcinek, półprosta, kąt, figura wypukła, figura ograniczona**

1. a) 6 b) 12 c) 42 d) $n \cdot (n-1)$
2. 15 cm, 9 cm, 3 cm
3. $|BC| = 2$ cm lub $|BC| = 14$ cm.
4. nie
5. a) 31'12" b) 50'24"
6. a) 69°, 111° b) 108°, 72°
7. a) $\alpha = 27^\circ$ b) $\alpha = 22^\circ 30'$ c) $\alpha = 30^\circ$

Wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie, odległość punktu od prostej, odległość między prostymi równoległymi, symetralna odcinka, dwusieczna kąta

1. $k \parallel m$
2. 4 cm lub 2 cm
3. do symetralnej odcinka AB należą punkty D i F
4. do dwusiecznej kąta ABC należą punkty D i F
5. b) *wskazówka*: Zakreśl okrąg o środku w punkcie P , przecinający prostą k w punktach A i B . Punkt P należy do symetralnej odcinka AB .
6. *wskazówka*: a) skonstruuj kąt prosty i poprowadź dwusieczną tego kąta c) skonstruuj najpierw kąt o mierze 60° , wykorzystując własności trójkąta równobocznego
7. jeden

Dwie proste przecięte trzecią prostą. Suma kątów w trójkącie

1. a) $\alpha = 40^\circ$ b) $\alpha = 36^\circ$ c) $\alpha = 55^\circ$ d) $\alpha = 120^\circ$
2. a) tak, bo $\alpha = \beta = 60^\circ$; z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią prostą wynika, że $AD \parallel BC$ oraz $AB \parallel DC$ b) nie, bo $\beta = 70^\circ$; $AD \nparallel BC$, bo jeśli byłoby $AD \parallel BC$, to z twierdzenia o dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią prostą wynikałoby, że $\beta = 65^\circ$, a tak nie jest
3. a) $35^\circ, 58^\circ, 87^\circ$ b) $34^\circ, 34^\circ, 112^\circ$ c) $33^\circ, 48^\circ, 99^\circ$

Wielokąt. Wielokąt foremny. Suma kątów w wielokącie

1. a) nie b) tak c) tak d) nie
2. a) 14 b) 54
3. pięciokąt
4. a) piętnastokąt b) dziewiętnastokąt
5. a) 1260° b) 3240°
6. a) dziesięciokąt, 35 przekątnych b) siedemnastokąt, 119 przekątnych
7. a) 108° b) 144°
9. a) tak, dziesięciokąt foremny b) nie c) tak, dwunastokąt foremny
10. $a \parallel c, b \parallel d, e \parallel g$
12. 66
13. 56

Twierdzenie Talesa

1. np. $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|AC|}{|BD|}; \frac{|OB|}{|OD|} = \frac{|AB|}{|CD|}$

2. a) $x = 4,8$ b) $x = 3\frac{3}{4}$ c) $x = 9$ d) $x = 9$ e) $x = 7,2$ f) $x = 2\frac{6}{7}$

3. a) tak b) nie c) nie d) tak

Podział trójkątów. Nierówność trójkąta. Odcinek łączący środki boków w trójkącie

1. a) $40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$ b) $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ lub $72^\circ, 72^\circ, 36^\circ$ c) $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

2. a) rozwartokątny b) ostrokątny c) prostokątny d) rozwartokątny

5. a) nie b) tak c) tak

7. 6

8. 2 lub 3

9. a) 10,5 cm b) 5

Twierdzenie Pitagorasa. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

1. a) $h = 2\sqrt{3}$, $b = 4$ b) $a = 5\sqrt{5}$, $b = 19$

2. a) o 7 cm b) o 5 cm

3. 21 cali *wskazówka*: zobacz przykład 3 str. 300

4. pierwszy – 8 km; drugi – 6 km; odległość w linii prostej: 10 km.

5. 15 cm, 36 cm, 39 cm

6. 142 cm

7. $a\sqrt{2}$; $(2 + 2\sqrt{2})$ cm

8. $6\sqrt{2}$

10. a) $a = 32$ lub $a = 8\sqrt{34}$ b) $a = \frac{2}{3}$ lub $a = \frac{2\sqrt{41}}{9}$

11. a) prostokątny b) rozwartokątny c) ostrokątny d) prostokątny e) rozwartokątny
f) prostokątny

12. a) prostokątny b) ostrokątny c) prostokątny d) rozwartokątny

13. 29 cm.

14. *wskazówka*: oblicz długości boków trójkąta ALK i zastosuj twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.

15. *wskazówka*: zastosuj twierdzenie Talesa do obliczenia $|PC|$. Następnie wyznacz $|AP|$ oraz $|PB|$ i zastosuj twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.

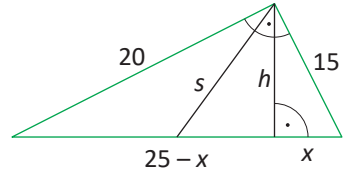
Wysokości w trójkącie. Środkowe w trójkącie

1. a) 1 b) $7\sqrt{3}$ c) 4

2. 22,4 cm
 3. 58 cm
 4. a) $\sqrt{2}$ b) 5 c) $2\sqrt{3}$
 5. a) $2\sqrt{13}$ cm, $3\sqrt{13}$ cm b) $3\sqrt{5}$ cm, $6\sqrt{5}$ cm c) 15 cm, 20 cm
 6. a) 24; 13; 13 b) 3; 2,5; 2,5 c) 18; 15; 15
 7. a) 3 cm b) $2\sqrt{3}$ cm
 8. a) 12 cm b) 3,5 cm c) $s = 12,5$ cm; $s - h = 0,5$ cm
wskazówka do a): Długość przeciwprostokątnej jest równa 25 cm. Z twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$h^2 = 15^2 - x^2 \text{ oraz } h^2 = 20^2 - (25 - x)^2$$

 Rozwiązujemy równanie:
 $225 - x^2 = 20^2 - (25 - x)^2$, skąd $x = 9$ cm, $h = 12$ cm.

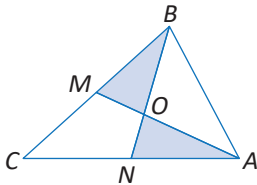


9. a) $\sqrt{10}$, $\sqrt{10}$, 2 b) $1\frac{1}{3}$
 10. a) 12 cm, $\frac{2}{3}\sqrt{97}$ cm, $\frac{2}{3}\sqrt{97}$ cm b) 6 cm, $3\sqrt{17}$ cm, $3\sqrt{17}$ cm
 11. a) $2\sqrt{7}$ cm, $2\sqrt{22}$ cm, $2\sqrt{22}$ cm b) $8\sqrt{2}$ cm, $2\sqrt{17}$ cm, $2\sqrt{17}$ cm

Przystawanie trójkątów

1. a) tak b) nie c) tak d) tak e) nie f) tak

7.



wskazówka: Wykaż, że trójkąty AON i BMO są przystające (bkb); następnie uzasadnij równość kątów: $\angle BAO$ i $\angle ABO$.

8. *wskazówka:* Uzasadnij, że $|\angle ABC| = |\angle EBF|$ i wykaż, że $\triangle ABC \equiv \triangle EBF$ (cecha bkb).

Podobieństwo trójkątów

1. a) tak b) nie c) tak
 3. a) $x = 3,6$; $y = 2,4$ b) $x = 6$; $y = 8$ c) $x = 8$; $y = 7,5$ d) $x = 2\frac{2}{3}$; $y = 4$
 4. a) $|BC| = 13,5$ cm, $|AC| = 9$ cm, $|A_1B_1| = 7$ cm b) $|AB| = 1,2$ dm, $|B_1C_1| = 2$ dm, $|A_1C_1| = 1\frac{1}{3}$ dm
 5. a) $k = \frac{1}{5}$ b) $|A_1B_1| = 1,6$ cm $|B_1C_1| = 2$ cm $|A_1C_1| = 2,4$ cm
 6. a) $\angle ABC = 7$, $\angle A_1B_1C_1 = 21$ b) $\angle ABC = 12$, $\angle A_1B_1C_1 = 3$ c) $\angle ABC = 15$, $\angle A_1B_1C_1 = 12,5$
 d) $\angle ABC = 2,1$; $\angle A_1B_1C_1 = 4,9$

7. $k = 1,25$
 8. o 40%
 9. a) tak, $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$; wskazówka: skorzystaj z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie DEF i powo-
 łaj się na cechę bbb b) tak, $k = \frac{2}{3}$; wskazówka: oblicz $|AB|$ i $|EF|$
 c) nie, bo $|FD| : |AB| \neq |DE| : |CB|$ d) nie, bo $|\angle ABC| = 88^\circ$, $|\angle CDE| = 92^\circ$

Podobieństwo trójkątów – zastosowanie w zadaniach

- $(13 + 5\sqrt{13})$ cm
- $|AB| = |DC| = 2\sqrt{5}$, $|BC| = |AC| = \sqrt{5}$
- $|KM| = 14$ cm, $|LN| = 8$ cm
- $|DE| = 2$ cm
- $|AB| = 2\sqrt{30}$ cm
- $|AC| = 3\sqrt{15}$ cm
- 4,8 cm
- $3\frac{1}{3}$ cm
- $|CD| = 20$ cm

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 7.

Test

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8
Odpowiedź	B	C	A	B	B	D	A	C

Zadania otwarte

- 10 cm; wskazówka: wykaż, że $|AD| = |DP|$ oraz $|BC| = |CP|$.
- a) 12,5 cm b) 6,72 cm
- a) prostokątny b) rozwartokątny
- $4\sqrt{10}$ cm, $2\sqrt{13}$ cm, 10 cm,
- $\frac{4}{5}$
- a) 12 cm, 16 cm, 20 cm b) 7,5 cm
- $5 + 5\sqrt{5}$

19. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

20. $\sqrt{3}$

Odpowiedzi do rozdziału 8.

Określenie sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa w trójkącie prostokątnym

1. a) $\sin \alpha = \frac{7}{25}$, $\cos \alpha = \frac{24}{25}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24}$, $\operatorname{ctg} \alpha = 3\frac{3}{7}$ b) $\sin \alpha = \frac{15}{17}$, $\cos \alpha = \frac{8}{17}$, $\operatorname{tg} \alpha = 1\frac{7}{8}$,

$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{8}{15}$ c) $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\operatorname{ctg} \alpha = 3$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$

2. a) $\frac{12}{125}$ b) $\frac{9}{20}$ c) 8

3. a) 6,0 b) 2,2 c) 15,4 d) 4,6 e) 5,8 f) 15,0

4. a) 23 cm b) 21 cm c) 57 cm

5. a) $1\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{16}$ c) 1,5 d) 2

6. a) $\alpha \approx 27^\circ$ b) $\alpha \approx 42^\circ$ c) $\alpha \approx 66^\circ$

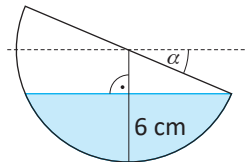
7. a) $c = 2\sqrt{13}$, $\alpha \approx 34^\circ$, $\beta \approx 56^\circ$ b) $a \approx 6$, $c \approx 10$, $\beta = 53^\circ$ c) $a \approx 3,6$; $b \approx 14,6$; $\alpha = 14^\circ$

9. ok. 68 m

10. ok. 70 m

11. po ok. 6 minutach

12. $\alpha \approx 23^\circ$ wskazówka:



Wartości sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa kątów 30° , 45° i 60°

1. a) 3,5 b) $-\frac{2}{3}$ c) $1\frac{1}{4}$ d) $-1\frac{1}{3}$ e) -1 f) $11\frac{2}{3}$ g) $\frac{1}{2}$ h) $5 + 2\sqrt{6}$

2. 6 cm, $6\sqrt{3}$ cm, $6\sqrt{3}$ cm

3. a) $6(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$ b) $2(2 + \sqrt{3})$ c) $2(3 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$

4. a) $\sqrt{3}$ cm b) $\sqrt{2}$ cm c) 1 cm d) 2 cm

5. a) $\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 75^\circ$ b) $\alpha = 45^\circ, \beta = 30^\circ, \gamma = 105^\circ$ c) $\alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ, \gamma = 90^\circ$
 d) $\alpha = 30^\circ, \beta = 30^\circ, \gamma = 120^\circ$

Zależności między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta ostrego

1. a) $\cos \alpha = \frac{24}{25}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24}, \operatorname{ctg} \alpha = 3\frac{3}{7}$ b) $\sin \alpha = \frac{15}{17}, \operatorname{tg} \alpha = 1\frac{7}{8}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{8}{15}$
 c) $\sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = \frac{3}{5}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$ d) $\sin \alpha = \frac{60}{61}, \cos \alpha = \frac{11}{61}, \operatorname{tg} \alpha = 5\frac{5}{11}$
 e) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{19}}{10}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{9\sqrt{19}}{19}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{19}}{9}$ f) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
 g) $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{4}$ h) $\sin \alpha = \frac{1}{3}, \cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$
2. a) 0,48 b) 0,04
3. a) $\frac{17}{49}$ b) $\frac{16}{49}$
4. a) 7,2 b) 5
5. a) $2\sqrt{3} - 3$ b) $3 - 2\sqrt{3}$
6. a) $2 - \sqrt{2}$ b) $3 - 2\sqrt{2}$
10. a) 1 b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{3}$ d) 2 e) 1 f) 1
12. a) $\sin 20^\circ < \cos 45^\circ < \sin 50^\circ < \operatorname{tg} 45^\circ$ b) $\cos 75^\circ < \sin 30^\circ < \cos 25^\circ < \operatorname{tg} 60^\circ$
 c) $\operatorname{tg} 12^\circ < \operatorname{tg} 16^\circ < \operatorname{ctg} 14^\circ < \operatorname{ctg} 10^\circ$ d) $\sin 25^\circ < \cos 35^\circ < \operatorname{ctg} 15^\circ < \operatorname{tg} 85^\circ$
13. a) $\frac{49}{169}$ b) $2\frac{49}{60}$
14. a) 0,22 b) 0,9032
15. a) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
16. a) 7 b) 5
17. a) $c < b < a$ b) $a < c < b$ c) $b < a < c$ d) $c < a < b$

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 8.

Test

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	D	B	A	B	A	D	D	C	A	D

Zadania otwarte

11. 12 cm

12. 15 cm

13. 37,7 cm; 33 cm; *wskazówka*: poprowadź wysokość na bok leżący między kątami 61° oraz 32° i oblicz jej długość (17,5 cm)

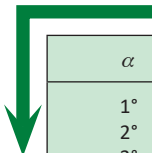
14. $\frac{25}{169}$ 16. a) 3,5 b) $-\frac{1}{4}$ 17. a) 1 b) $\sqrt{3}$ c) 1 d) 118. a) $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{ctg} \alpha = 2\sqrt{2}$ b) $\sin \alpha = \frac{11}{61}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{11}{60}$, $\operatorname{ctg} \alpha = 5\frac{5}{11}$ c) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\cos \alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{5}{12}$ d) $\sin \alpha = \frac{8}{17}$, $\cos \alpha = \frac{15}{17}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15}$

19. a) 2 b) 2,5

21. $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{7}{18}$ a) $\frac{2}{9}$ b) $\frac{113}{162}$

22. a) 7 b) 3

Wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych



α	$\sin \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\cos \alpha$	
1°	0,017	0,017	57,290	1,000	89°
2°	0,035	0,035	28,636	0,999	88°
3°	0,052	0,052	19,081	0,999	87°
4°	0,070	0,070	14,301	0,998	86°
5°	0,087	0,087	11,430	0,996	85°
6°	0,105	0,105	9,514	0,995	84°
7°	0,122	0,123	8,144	0,993	83°
8°	0,139	0,141	7,115	0,990	82°
9°	0,156	0,158	6,314	0,988	81°
10°	0,174	0,176	5,671	0,985	80°
11°	0,191	0,194	5,145	0,982	79°
12°	0,208	0,213	4,705	0,978	78°
13°	0,225	0,231	4,331	0,974	77°
14°	0,242	0,249	4,011	0,970	76°
15°	0,259	0,268	3,732	0,966	75°
16°	0,276	0,287	3,487	0,961	74°
17°	0,292	0,306	3,271	0,956	73°
18°	0,309	0,325	3,078	0,951	72°
19°	0,326	0,344	2,904	0,946	71°
20°	0,342	0,364	2,747	0,940	70°
21°	0,358	0,384	2,605	0,934	69°
22°	0,375	0,404	2,475	0,927	68°
23°	0,391	0,424	2,356	0,921	67°
24°	0,407	0,445	2,246	0,914	66°
25°	0,423	0,466	2,145	0,906	65°
26°	0,438	0,488	2,050	0,899	64°
27°	0,454	0,510	1,963	0,891	63°
28°	0,469	0,532	1,881	0,883	62°
29°	0,485	0,554	1,804	0,875	61°
30°	0,500	0,577	1,732	0,866	60°
31°	0,515	0,601	1,664	0,857	59°
32°	0,530	0,625	1,600	0,848	58°
33°	0,545	0,649	1,540	0,839	57°
34°	0,559	0,675	1,483	0,829	56°
35°	0,574	0,700	1,428	0,819	55°
36°	0,588	0,727	1,376	0,809	54°
37°	0,602	0,754	1,327	0,799	53°
38°	0,616	0,781	1,280	0,788	52°
39°	0,629	0,810	1,235	0,777	51°
40°	0,643	0,839	1,192	0,766	50°
41°	0,656	0,869	1,150	0,755	49°
42°	0,669	0,900	1,111	0,743	48°
43°	0,682	0,933	1,072	0,731	47°
44°	0,695	0,966	1,036	0,719	46°
45°	0,707	1,000	1,000	0,707	45°
	$\cos \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\sin \alpha$	α

